

# Funkce

(Zavedení pojmu funkce, vlastnosti funkcí, lineární, kvadratické a mocninné funkce)

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

# A) Zavedení pojmu funkce

V odborných a přírodovědných předmětech se často setkáváme s úlohami, ve kterých se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách jiné veličiny. Tuto závislost popisujeme pomocí pojmu **funkce** jako zobrazení v **R**.

*Nechť **A** a **B** jsou dvě neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu **x** z množiny **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo **y** z množiny **B**, které označíme **y=f(x)**, pak množina **f** uspořádaných dvojic **[x;f(x)]** se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně **funkce f**).*

$$f : y = f(x), x \in D(f)$$

**Množinu A** označujeme **D(f)** a nazýváme **definičním oborem funkce f**.

**Množinu B** označujeme **H(f)** a nazýváme **oborem hodnot funkce f**.

Číslo **x** je **nezávisle** proměnná, argument funkce f.

Číslo **y** je **závisle** proměnná, funkční hodnota funkce f v bodě x.

## Úlohy

**Př.1:** Zapište pomocí intervalů definiční obor funkcí:

$$a) f : y = \frac{3x+2}{2x^2+x-3} \qquad b) f : y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + \frac{1-x}{1+x}$$

**Př.2:** Je dána funkce:

$$f : y = \frac{2}{x^2-1}$$

- a) Určete  $f(0)$ ,  $f(-7)$ ,  $f(3)$
- b) Patří čísla  $-4$ ,  $0$  do oboru hodnot funkce  $f$ ?

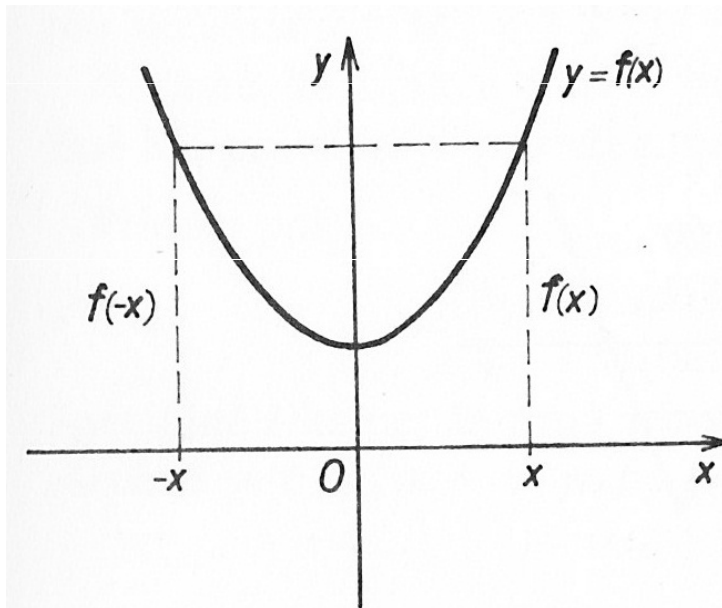
# Vlastnosti funkcí

## a) Sudé funkce, liché funkce

### Sudá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$$



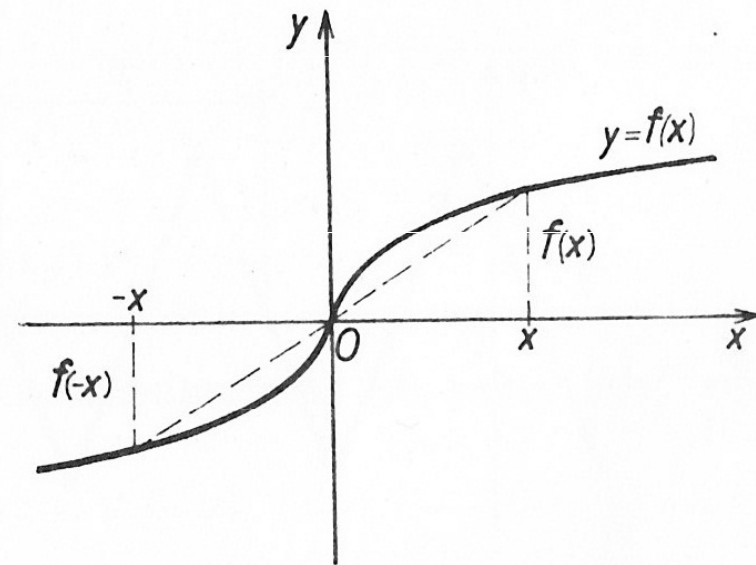
Graf je souměrný podle osy y.

Např.:  $f_1 : y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$   
 $f_2 : y = x^{-2}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

### Lichá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$$



Graf je středově souměrný podle počátku.

Např.:  $f_1 : y = x^3, D(f) = \mathbb{R}$   
 $f_2 : y = x^{-3}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

# Úlohy

**Př.1:** Rozhodněte, které z daných funkcí  $f$  jsou sudé nebo liché:

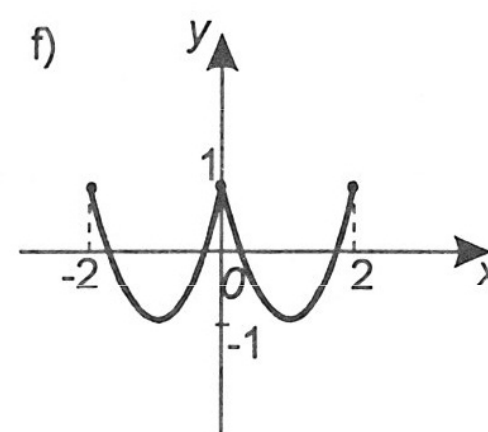
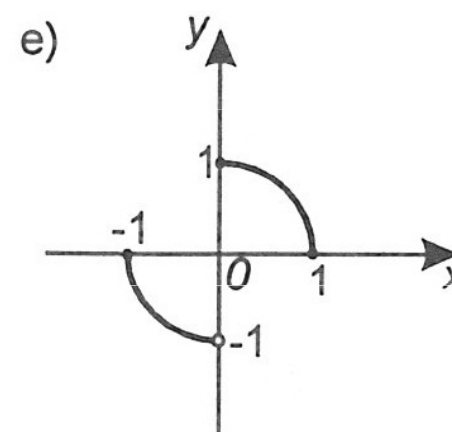
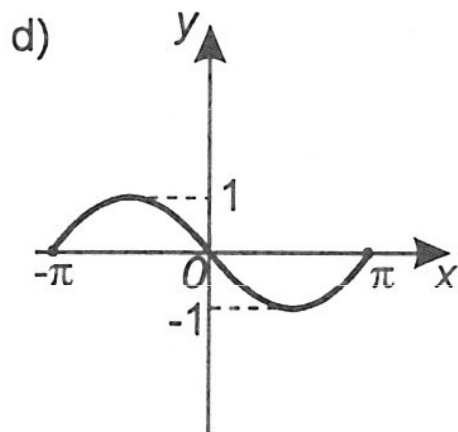
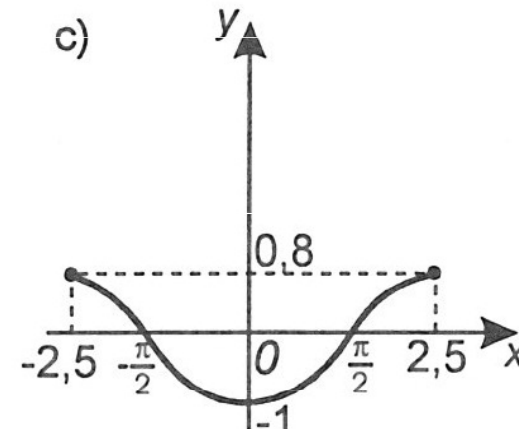
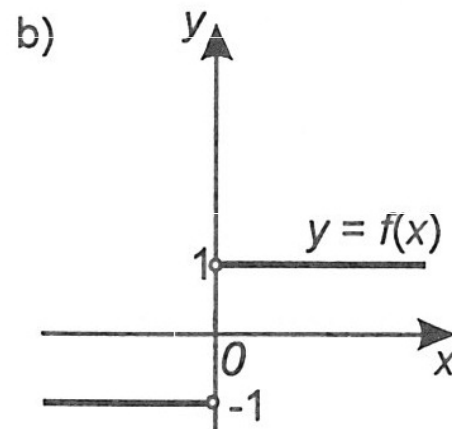
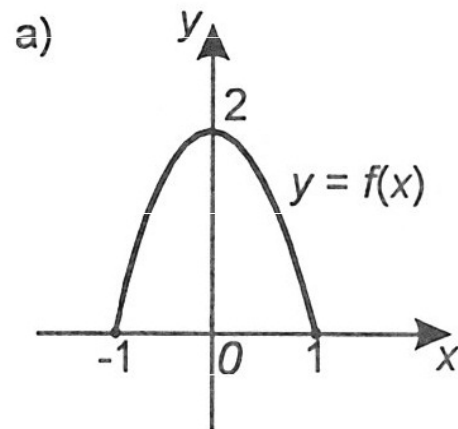
a)  $f : y = x$

b)  $f : y = 2$

c)  $f : y = 2x^2 + 1$

d)  $f : y = x + 2$

**Př.2:** Rozhodněte, které z daných funkcí  $f$  jsou sudé nebo liché:



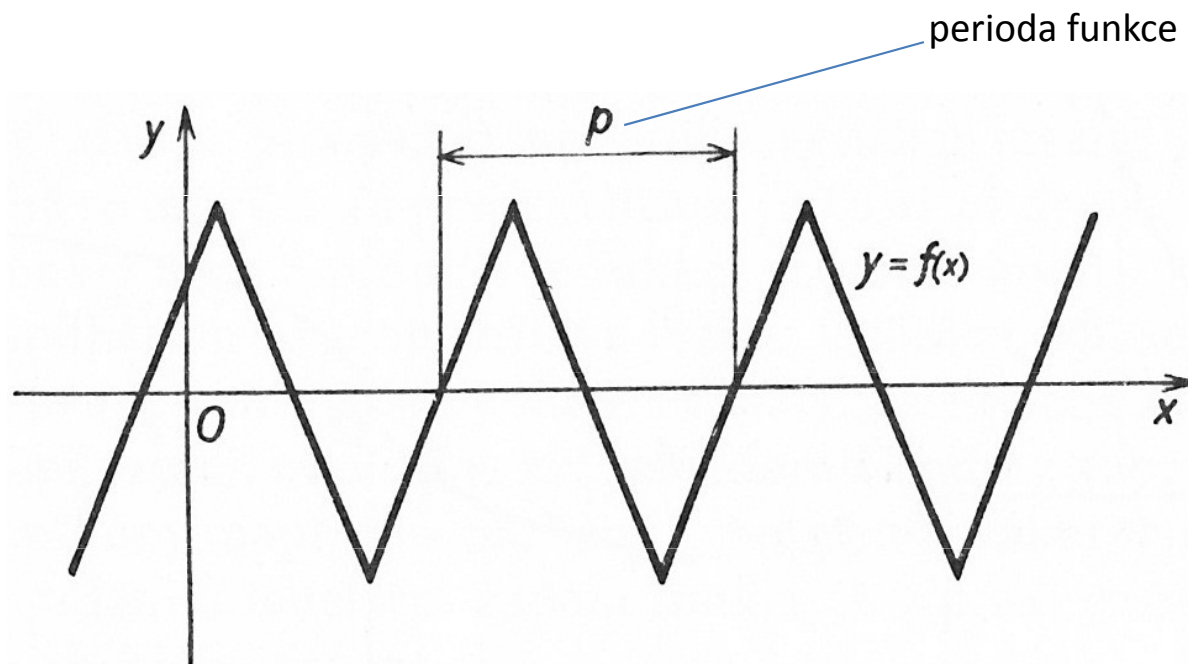
# Vlastnosti funkcí

## b) Periodické funkce

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo  $p > 0$ , že pro každé  $k \in \mathbf{Z}$  platí:

1) Je-li  $x \in D(f)$ , pak  $x + kp \in D(f)$

2)  $f(x + kp) = f(x)$



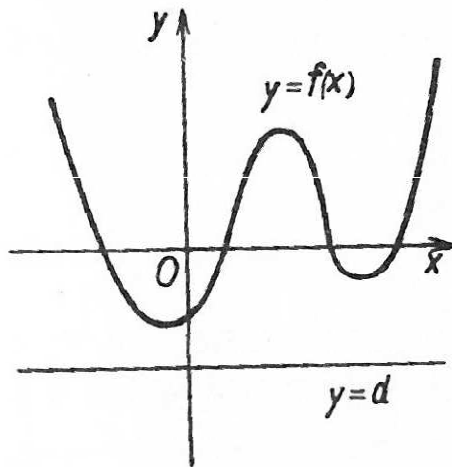
Např.:  $f_1 : y = \cos x$ ,  $f_2 : y = \sin x$   
 $f_3 : y = \operatorname{tg} x$ ,  $f_4 : y = \operatorname{cotg} x$

# Vlastnosti funkcí

## c) Funkce omezená (zdola, shora), maximum a minimum funkce

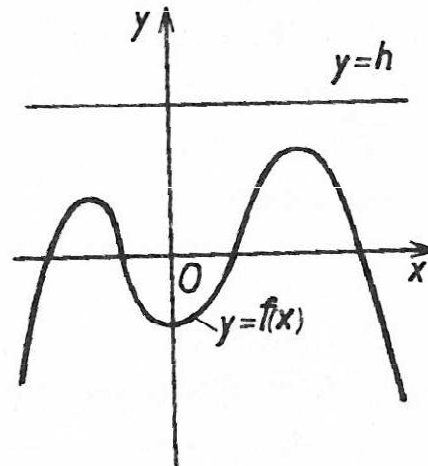
Zdola omezená

$$\exists d: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq d$$



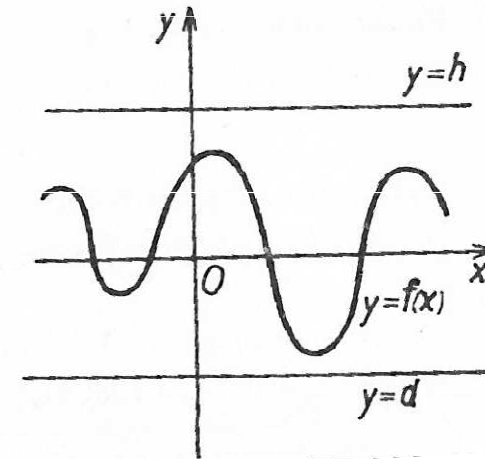
Shora omezená

$$\exists h: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq h$$



Omezená

Je omezená shora i zdola.



Funkce  $f$  má v bodě  $a$  maximum, právě když:

$$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a)$$

Funkce  $f$  má v bodě  $b$  minimum, právě když:

$$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(b)$$

# Úlohy

**Př.1:** Rozhodněte, ve kterých bodech mají následující funkce maximum nebo minimum:

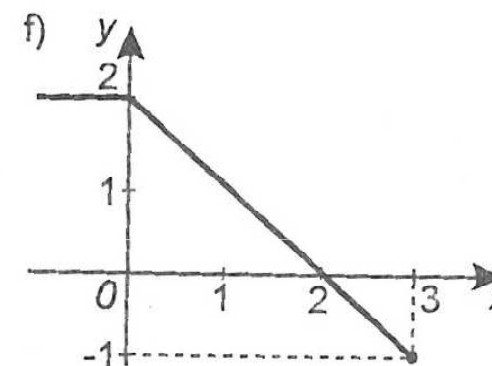
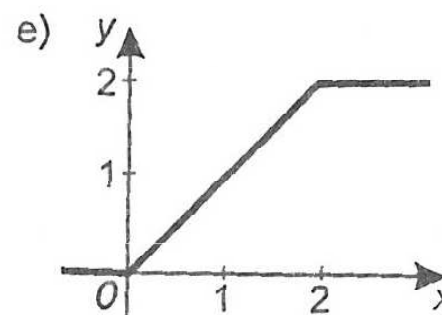
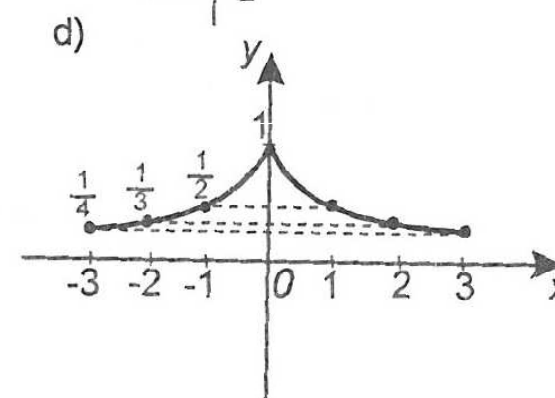
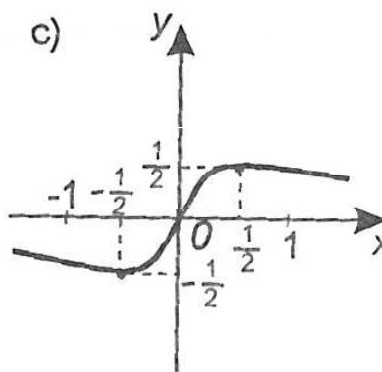
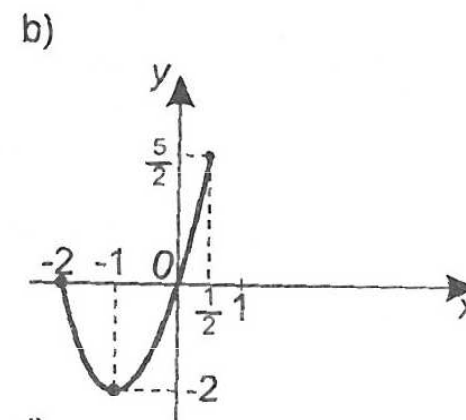
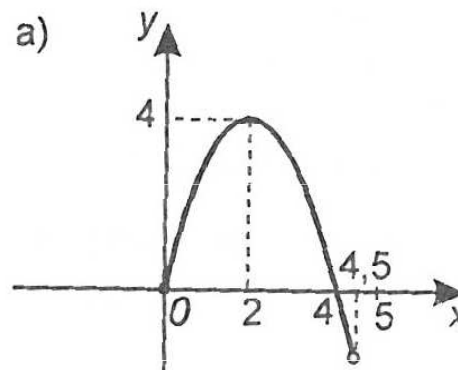
a)  $f : y = 2x + 5$

b)  $f : y = 1$

c)  $f : y = (x-1)^2 + 2$

d)  $f : y = 2|x|$

**Př.2:** Určete maxima nebo minima následující funkcí :



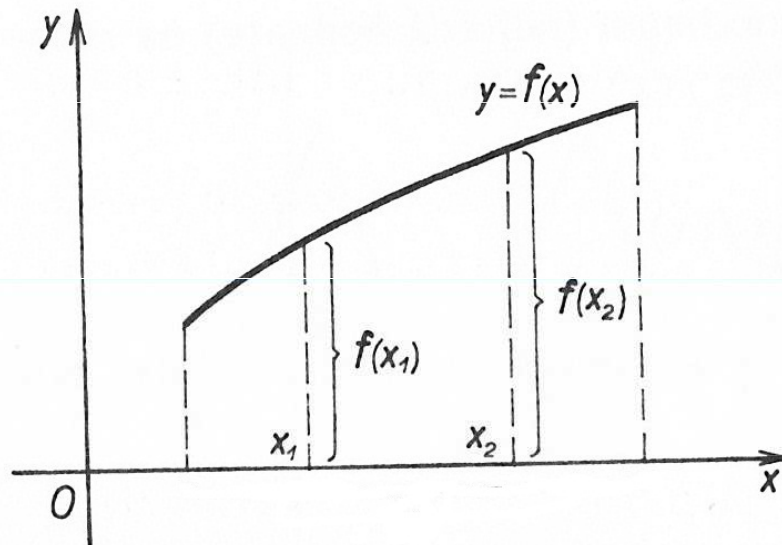


# Vlastnosti funkcí

## d) Rostoucí a klesající funkce

Rostoucí funkce

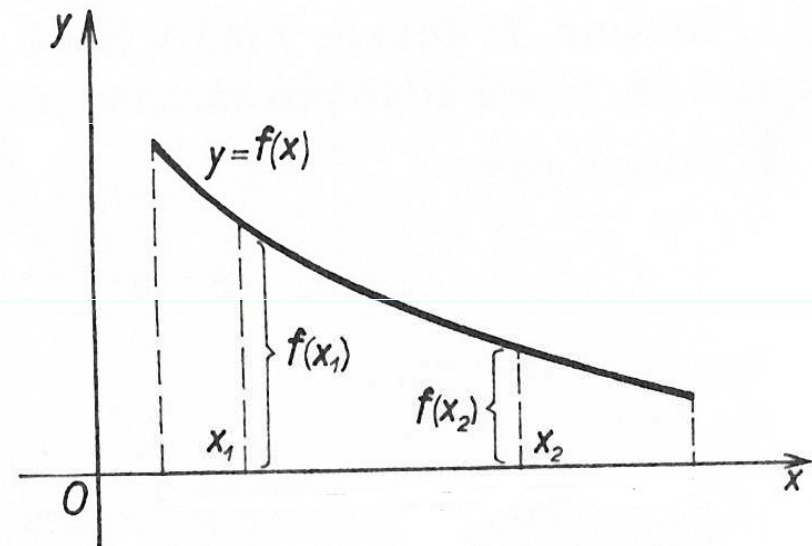
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.

Klesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Je-li funkce klesající, pak je prostá.

$$\text{Funkce je prostá} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

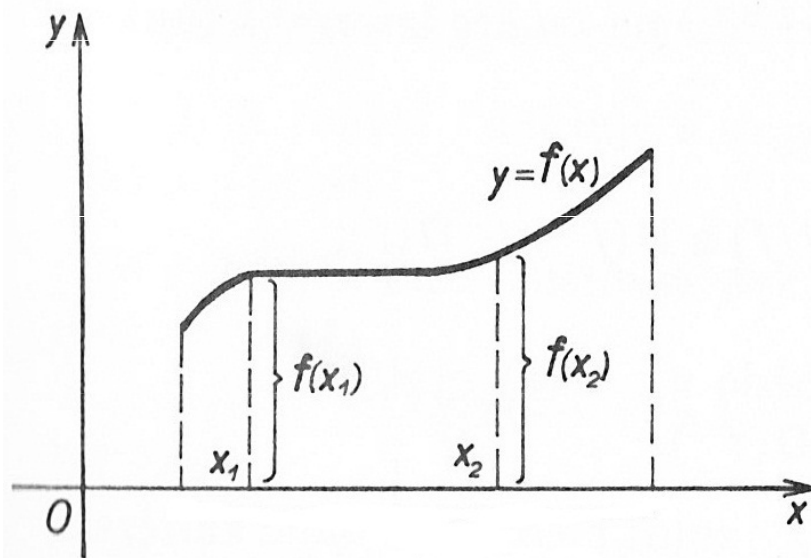
Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **RYZE MONOTÓNÍ**.

# Vlastnosti funkcí

## d) Neklesající a nerostoucí funkce

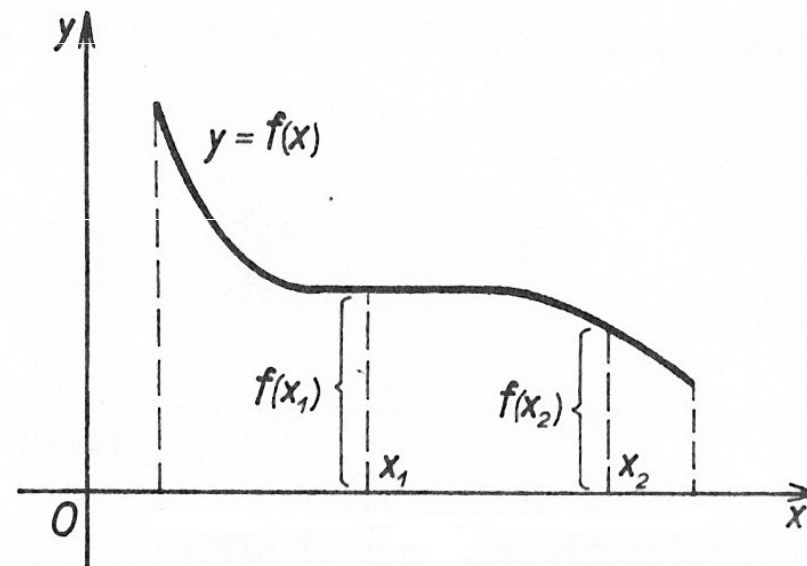
Neklesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Nerostoucí funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funkce nerostoucí a neklesající se souhrnně nazývají **MONOTÓNÍ**.

# Vlastnosti funkcí

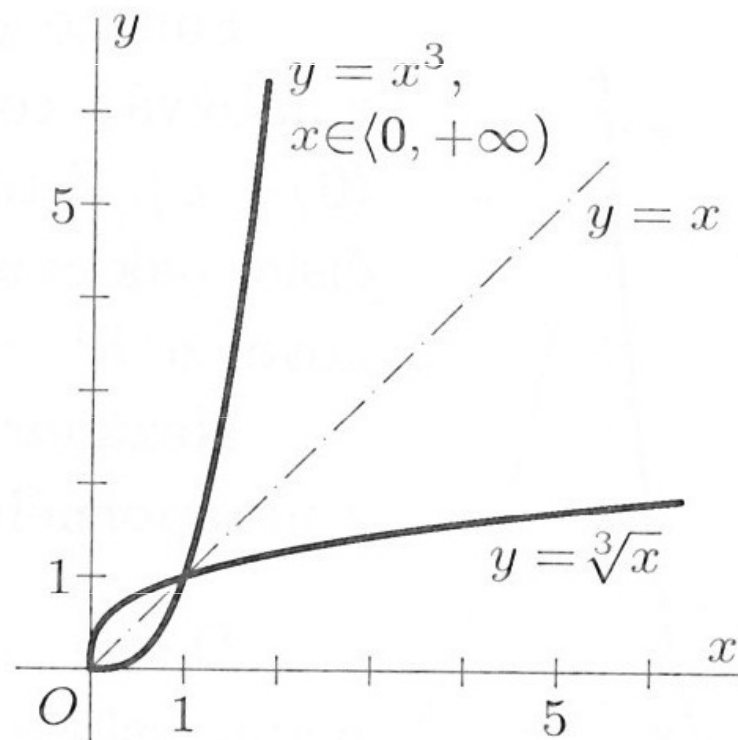
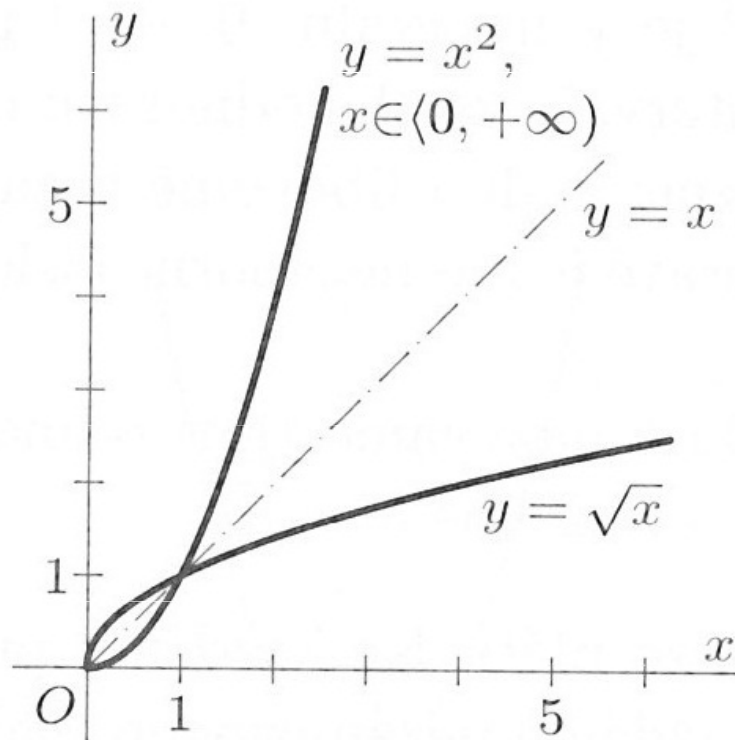
## e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k *prosté* funkci  $f$  je funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí:

1.  $D(f^{-1}) = H(f)$  a  $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému  $y \in D(f^{-1})$  je přiřazeno právě to  $x \in D(f)$ , pro které je  $f(x) = y$ .

**Grafy funkcí  $f$  a  $f^{-1}$**  sestrojené v téže soustavě souřadnic  $Oxy$  se stejnou délkovou jednotkou na obou osách **jsou souměrně sdruženy podle přímky  $y = x$ .**

Např.:



# Vlastnosti funkcí

## e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k *prosté* funkci  $f$  je funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí:

1.  $D(f^{-1}) = H(f)$  a  $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému  $y \in D(f^{-1})$  je přiřazeno právě to  $x \in D(f)$ , pro které je  $f(x) = y$ .

### Příklady funkcí a funkcí k nim inverzních :

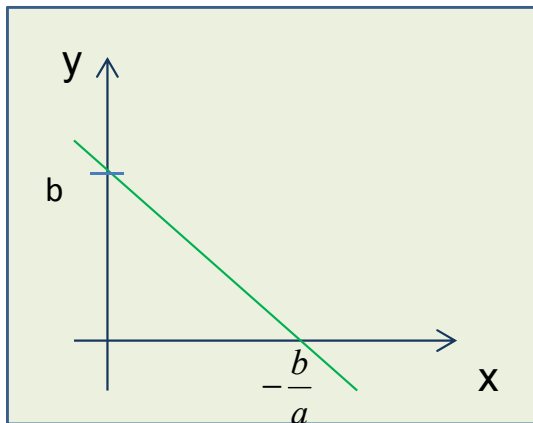
$f$	$f^{-1}$
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{arccotg} x$
$y = 2x$	$y = \frac{x}{2}$
$y = x^3$	$y = \sqrt[3]{x}$

# 1 LINEÁRNÍ FUNKCE

$$f : y = ax + b, \quad D(f) = R$$

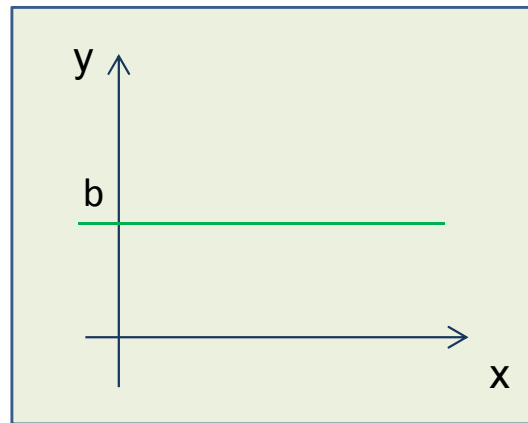
Graf: Přímka

$$a < 0$$



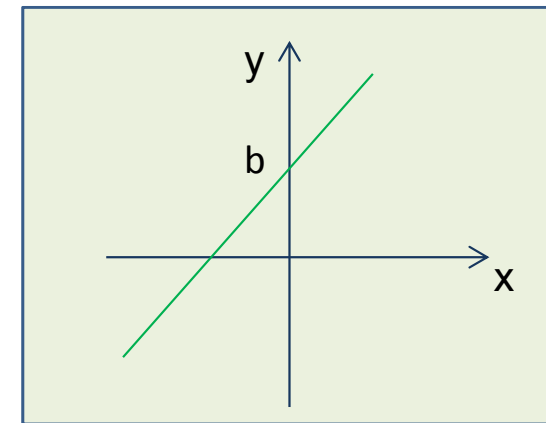
$D(f) = R, H(f) = R$   
Není omezená ani shora, ani zdola.  
Je **klesající**, tedy prostá.  
Nemá maximum, ani minimum.  
Je spojitá v  $R$ .

$$a = 0$$



$D(f) = R, H(f) = \{b\}$   
Je omezená.  
Je **nerostoucí a neklesající**.  
Není prostá.  
Má maximum a minimum pro každé  $x \in R$ .  
Je spojitá v  $R$ .

$$a > 0$$



$D(f) = R, H(f) = R$   
Není omezená ani shora, ani zdola.  
Je **rostoucí**, tedy prostá.  
Nemá maximum, ani minimum.  
Je spojitá v  $R$ .

## Úlohy

**Př. 1:** Pro lineární funkci  $f: y = -2x+5$  určete souřadnice průsečíku grafu s osami  $x$ ,  $y$ .

**Př. 2:** Načrtněte grafy lineárních funkcí:

a)  $f_1: y = 2x$

b)  $f_2: y = 2x + 3$

c)  $f_3: y = -2x + 5$

d)  $f_4: y = 2$

**Př. 3:** Pro lineární funkci  $f$  platí:  $f(3) = -5$

$$f(-1) = 4$$

Vyjádřete ji předpisem  $y = ax + b$  a načrtněte graf.

**Př. 4:** Řešte graficky i početně soustavu rovnic  $y = 3x - 2$

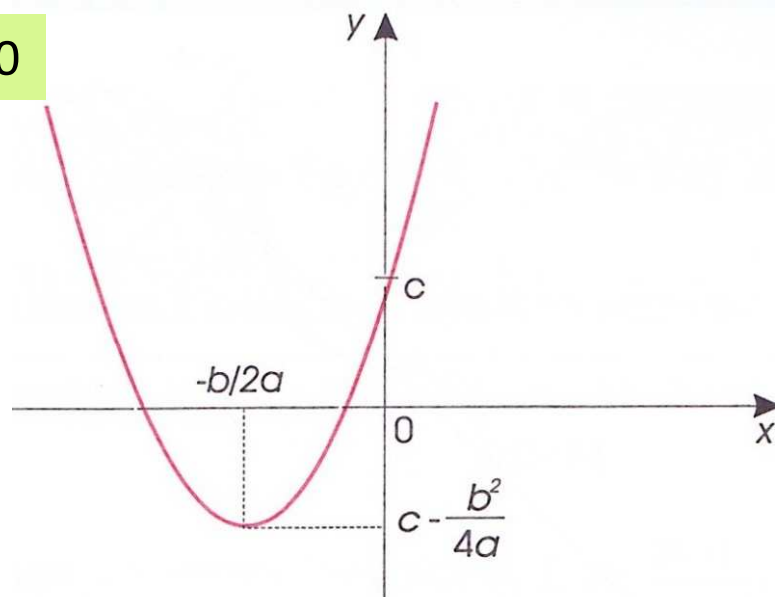
$$y = -x + 1$$

## 2 KVADRATICKÁ FUNKCE

= každá funkce typu:  $f : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, D(f) = R$

Graf: Parabola

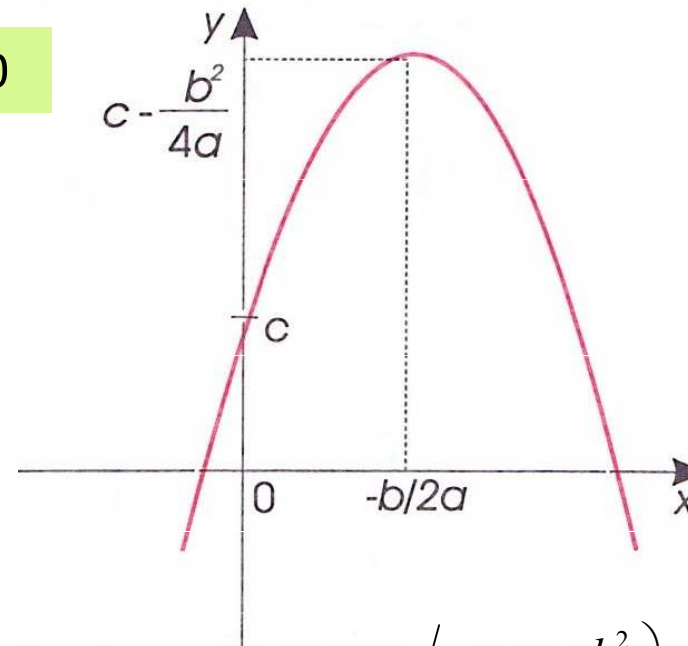
$a > 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right\rangle$$

Je zdola omezená, není shora omezená.  
Pro  $b=0$  je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.  
Je rostoucí pro  $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$ .  
Je klesající pro  $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$ .  
Není prostá.  
Má ostré minimum  $[-b/2a; c - b^2/4a]$   
Je spojitá v  $R$ .

$a < 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

Je shora omezená, není zdola omezená.  
Pro  $b=0$  je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.  
Je rostoucí pro  $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$ .  
Je klesající pro  $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$ .  
Není prostá.  
Má ostré maximum  $[-b/2a; c - b^2/4a]$   
Je spojitá v  $R$ .

## 2.1 GRAFY KVADRATICKÝCH FUNKCÍ

= parabola, která je **souměrná podle osy o** rovnoběžné s osou  $y$ .

a) Graf funkce  $f_1 : y = ax^2$

= parabola s vrcholem v počátku  $[0,0]$

b) Graf funkce  $f_2 : y = ax^2 + c$

= parabola, která vznikne z paraboly funkce  $f_1 : y = ax^2$  posunutím jejího vrcholu z bodu  $[0,0]$  do bodu  $[0,c]$ .

c) Graf funkce  $f_3 : y = a(x-x_0)^2$

= parabola, která vznikne z paraboly funkce  $f_1 : y = ax^2$  posunutím jejího vrcholu z bodu  $[0,0]$  do bodu  $[x_0,0]$ .

d) Graf funkce  $f_4 : y = ax^2 + bx + c$

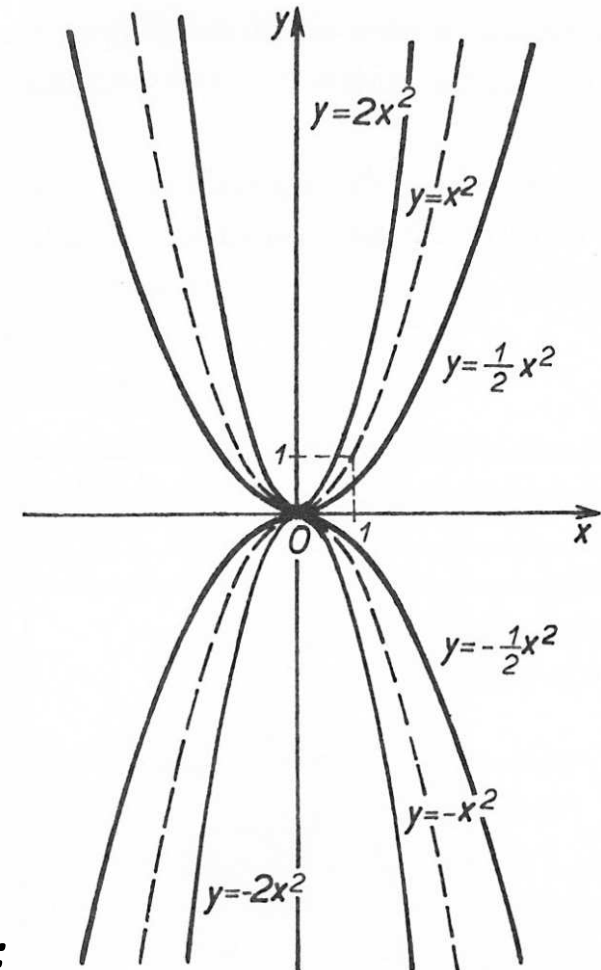
= parabola, kterou opět získáme z grafu funkce  $f_1 : y = ax^2$ :

1. Doplníme na úplný čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

2. Posuneme graf funkce  $f_1$  z bodu  $[0,0]$  do bodu  $[x_0, y_0]$ :

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \text{ kde } x_0 = \frac{b}{2a}, y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$





## Úlohy

**Př. 1:** Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = 2x^2; y = -2x^2$$

$$b) y = 2x^2 - 3; y = -2x^2 + 2$$

$$c) y = 2(x+1)^2; y = -2(x-1)^2$$

$$d) y = x^2 - 2x + 3$$

$$e) y = 2x^2 - 8x + 9$$

# 3 MOCNINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

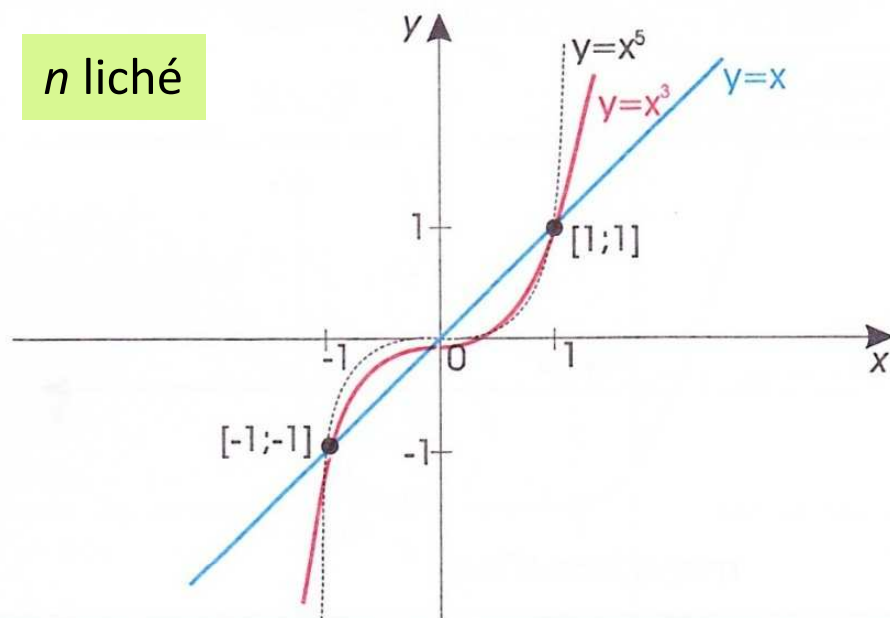
$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, D(f) = \mathbb{R}$$

Pro:  $n = 1$ : lineární funkce  $f: y = x$

$n = 2$ : kvadratická funkce  $f: y = x^2$

$n = 3$ : kubická funkce  $f: y = x^3$

$n$  liché



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je rostoucí, tedy prostá.

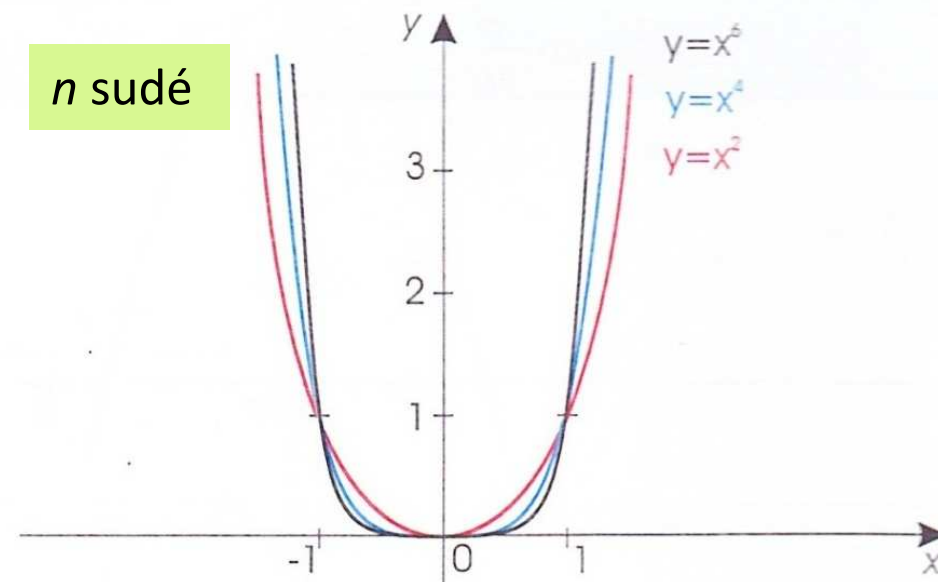
Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá v  $\mathbb{R}$ .

Graf:  $n = 1$ : přímka

$n > 1$ : parabola  $n$ -tého stupně

$n$  sudé



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

Je sudá.

Je zdola omezená, není shora omezená.

Je rostoucí pro  $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

Je klesající pro  $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ .

Není prostá.

Nemá maximum, má minimum  $[0,0]$ .

Je spojitá v  $\mathbb{R}$ .

# Úlohy

**Př. 1:** Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = x^3 - 1$$

$$b) y = (x - 1)^5$$

$$c) y = x^4 + 3$$

$$d) y = -0,5x^6$$

$$e) y = -2x^5$$

# 4 MOCNINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

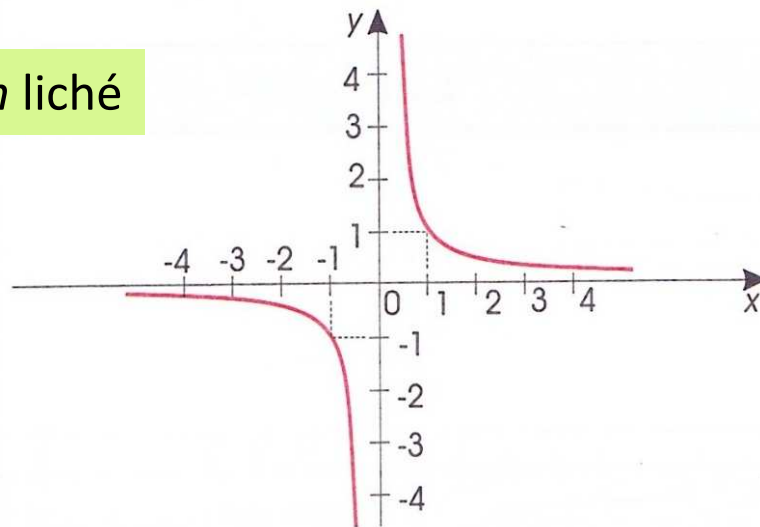
= funkce

$$f : y = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, D(f) = \mathbb{R}$$

Graf:

hyperbola stupně  $n+1$

$n$  liché



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

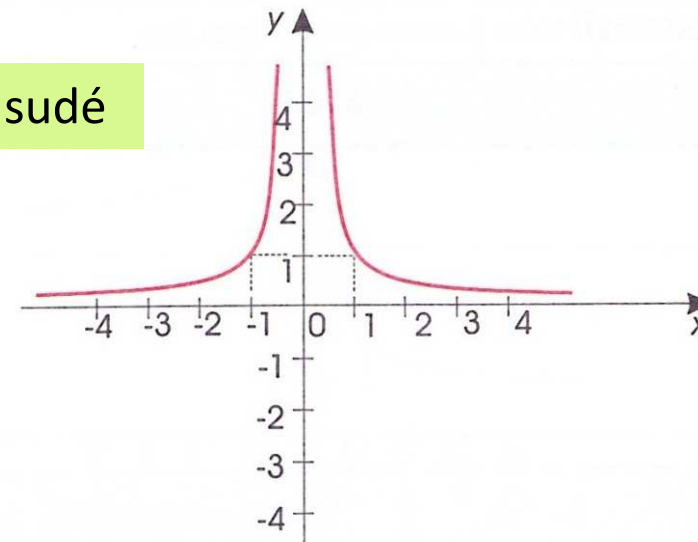
Klesá pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

Je prostá.

$n$  sudé



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = (0, +\infty)$$

Je sudá.

Je omezená zdola, není shora omezená.

Je rostoucí pro  $x \in (-\infty, 0)$ .

Je klesající pro  $x \in (0, +\infty)$ .

Není prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

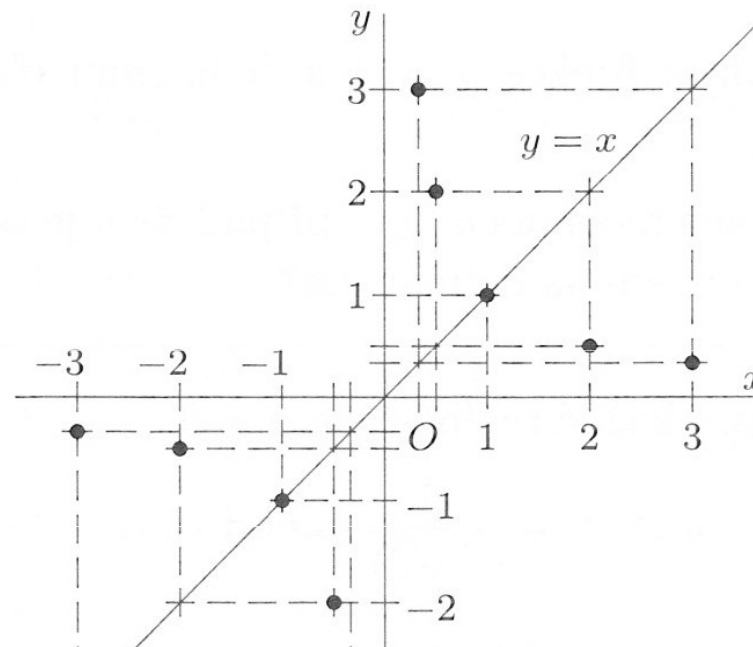
Je spojitá pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

# Úlohy

**Př. 1:** Načrtněte graf funkce  $y = x^{-1}$

**Řešení:**

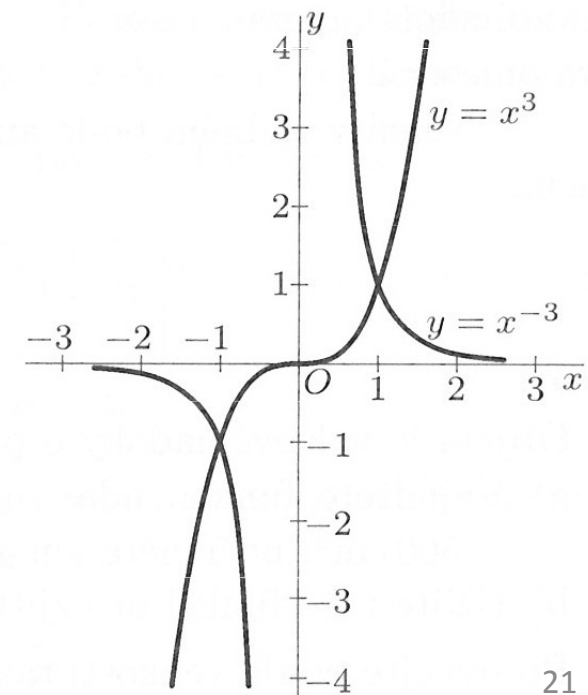
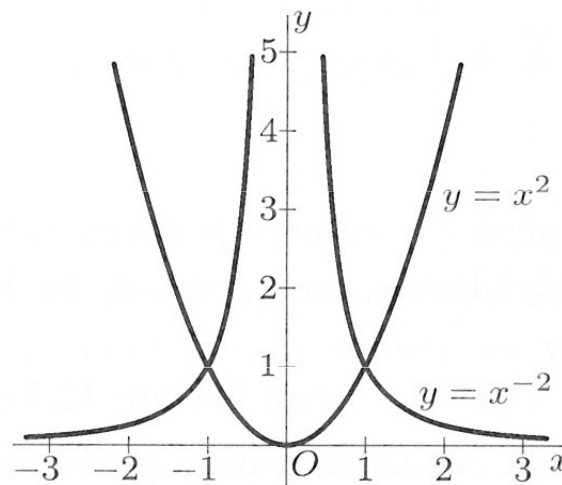
Body grafu funkce  $y = x^{-1} = 1/x$  získáme tak, že sestojíme graf funkce  $y = x$  a pro zvolené hodnoty proměnné  $x$  hledáme k hodnotám této funkce v téže soustavě souřadnic jejich převrácené hodnoty.



**Př. 2:** Načrtněte grafy funkcí:

a)  $y = x^{-2}$

b)  $y = x^{-3}$



# 5 LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

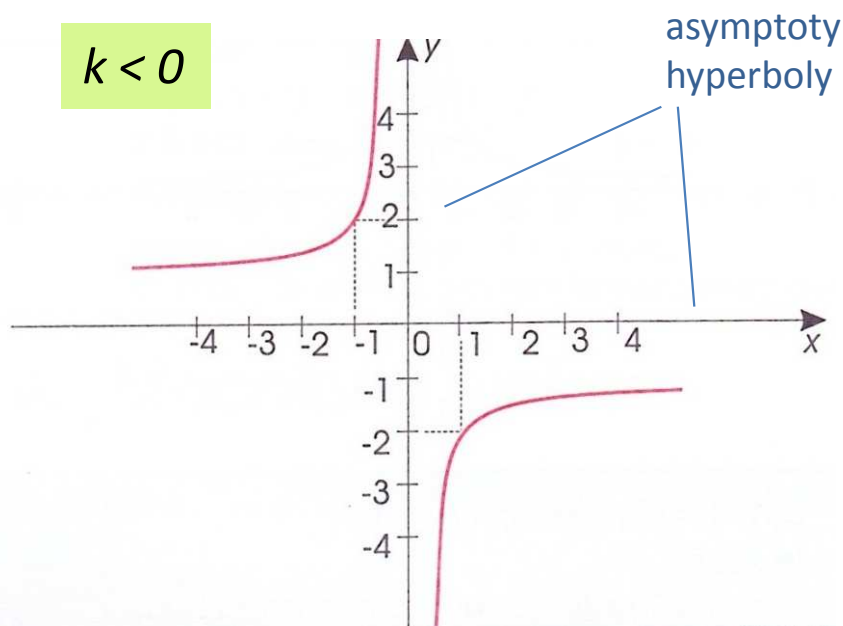
$$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

Nepřímá  
úměrnost:

$$f: y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

**Graf: rovnoosá hyperbola**

$k < 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

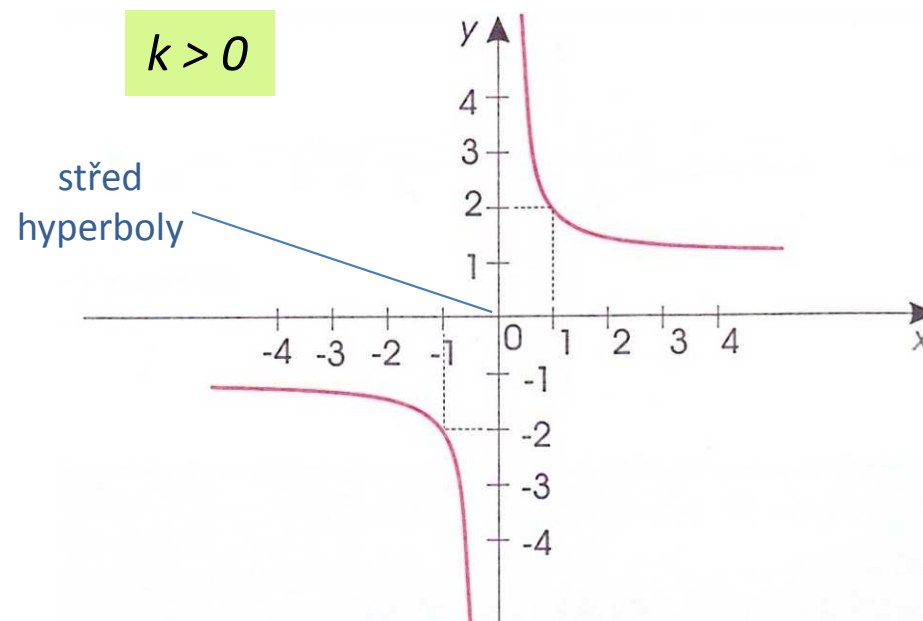
Je rostoucí pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

Je prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

$k > 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je klesající pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

Je prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro  $x \in (-\infty, 0)$  a  $x \in (0, +\infty)$ .

# Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, ad \neq bc$$

**Graf:** rovnoosá hyperbola

se středem v bodě  $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$

## Úlohy

**Př. 1:** Načrtněte graf funkce  $f : y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

# Literatura

- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.