

3. Neurčitý integrál, určitý integrál

Def 3.1 Necht' $F(x)$ a $f(x)$ jsou definované na otevřeném intervalu J . Jestliže pro všechna $x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$, říkáme, že $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu J . Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu J nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ a označujeme $\int f(x)dx$.

Funkce $f(x)$ se nazývá **integrand**.

Věta 3.1 Platí:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad x \in J$$

Kde $C \in \mathbb{Q}$ je tzv. **integrální konstanta**

Věta 3.2 Ke každé spojitě funkci v int J , \exists v tomto intervalu **primitivní funkce**.

Základní integrály:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C = \ln(kx)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + C \quad a > 0; a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \dots$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cot} gx + C \quad x \neq k * \pi; k = 0, \pm 1, \dots$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \quad |x| < 1$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = -\operatorname{arg} \cosh x + C \quad x > 1$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C_1 = \operatorname{arg} \sinh x + C_1$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arc} \operatorname{cot} gx + C_2$
13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C_1$

14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
16. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech} x + C$
17. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech} x + C$
18. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

Věta 3.3 Existují-li na otevřeném intervalu J neurčité integrály funkcí $f_1, \dots, f_n(x)$ a jsou-li c_1, \dots, c_n libovolné konstanty, pak také na J existuje neurčitý integrál funkce: $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$

a platí :
$$\int (c_1 f_1 + \dots + c_n f_n) dx = c_1 \int f_1 dx + \dots + c_n \int f_n dx$$

Věta 3.4 **Metoda per partes** – Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají na J spojitě derivace, pak platí: $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$

Pozn. **Rekurentní vzorec**

a) $I_n = \int x^n e^x dx$ $u = x^n$ $v' = e^x$

$u' = nx^{n-1}$ $v = e^x$

$I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$ $I_0 = e^x + C$

b) $I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$

$u = \sin^{n-1} x$ $v' = \sin x$

$u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$ $v = -\cos x$

$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-1} x dx + (n-1) \int \sin^n x dx$

$I_n = -\frac{1}{n} [\sin^{n-1} x \cos x - (n-1) I_{n-2}]$

Víme že $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$

Substituce

1. $\varphi(x) = t$

Věta 3.5 Necht' funkce F proměnné t je primitivní funkcí k funkci f , necht' funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci φ'_x a necht' pro každé $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. Pak v (a, b) platí:

$$\int f_{(\varphi(x))} \varphi'_x dx = F_{(\varphi(x))} + C$$

Použití: $\int g(x) dx$ kde $g(x) = f_{(\varphi(x))} \varphi'_x = \left. \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'_x dx \end{matrix} \right| = \int f(t) dt = F(t) + C$

2. $x = \Psi(t)$

Věta 3.6 Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na (a, b) . Necht' funkce $x = \Psi(t)$ má spojitou derivaci Ψ' na (α, β) a necht' $a < \Psi(t) < b$, pro $t \in (\alpha, \beta)$. Necht' k funkci Ψ existuje inverzní funkce φ a

$$\begin{aligned} \int f_{(\Psi(t))} \Psi'(t) dx &= G(t) + C && \text{pak platí} \\ \int f(x) dx &= G(\varphi(x)) + C \\ \int f(x) dx &= \left. \begin{matrix} x = \Psi(t) \\ dx = \Psi'(t) \end{matrix} \right| = \int f(\Psi(t)) \Psi'(t) dt = G(t) = G(\Psi(x)) + C \end{aligned}$$

Integrovaní racionálních funkcí

Def 3.2 Lomenou racionální funkcí nazýváme takovou funkci $f(x)$, kterou lze psát ve tvaru podílu dvou mnohočlenů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ s reálnými koeficienty pro $\forall x$ pro něž $Q_m(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Pokud $n < m$ nazýváme $f(x)$ **ryze lomenou racionální funkcí**.

Věta 3.7 Racionální funkci $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ lze vždy když $n \geq m$ psát ve tvaru:

$f(x) = R_{n-m}(x) + g(x)$, kde $R_{n-m}(x)$ je mnohočlen $n-m$ stupně a $g(x)$ je ryze lomená racionální funkce.

Věta 3.8 Každý mnohočlen Q_m s reálnými koeficienty lze uvést na tvar:

$$Q_m(x) = a_m (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$$

kde α_i jsou kořeny o násobnosti k_i a kvadratické výrazy $(x^2 + px + q)$ mají záporný diskriminant.

Věta 3.9 Nechť $f(x)$ je ryze lomená racionální funkce a mnohočlen $Q_m(x)$ lze rozložit podle předchozí věty 3.8. Pak funkci $f(x)$ lze rozložit na součet elementárních zlomků takto:

$$(*)$$

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \dots +$$

$$+ \frac{K_1x + L_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{K_2x + L_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{K_{l_1}x + L_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{K_{l_r}x + L_{l_r}}{x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r}} + \frac{K_{l_r}x + L_{l_r}}{(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r})^2} +$$

$$+ \dots + \frac{K_{l_r}x + L_{l_r}}{(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r})^{l_r}}$$

Takovýto zápis nazýváme **rozkladem ryze lomené racionální funkce $f(x)$ v parciální zlomky**.

Koeficienty A_1, \dots, L_{l_r} lze získat např. (viz další kapitoly).

Metoda neurčitých součinitelů

Rovnici (*) vynásobíme mnohočlenem $Q_m(x)$. Protože $Q_m(x)$ lze rozložit podle věty 3.8 bude na levé i pravé straně mnohočlen. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné x dostaneme podmínky pro koeficienty A_1, \dots . Vzniklá soustava lineárních rovnic je vždy řešitelná.

Dosazovací metoda

Po vynásobení rovnice (*) $Q_m(x)$ dostaneme na levé i pravé straně mnohočleny. Tato rovnice je splněna i pro nulové body mnohočlenu Q_m . Jejich postupným dosazením dostaneme podmínky pro neznámé koeficienty A_1, \dots .

Př: $Q(x) = (x - \alpha)S(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{R(x)}{S(x)}$$

$$P(x) = A \frac{Q(x)}{x - \alpha} + \frac{R(x)Q(x)}{S(x)}$$

$$P(x) = AS(x) + R(x)(x - \alpha)$$

$$x = \alpha$$

$$P(\alpha) = AS(\alpha) + R(\alpha) \cdot 0$$

$$A = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}$$

Označme $R(u,v)$ podíl dvou mnohočlenů s proměnnými ve tvaru u,v .

Integrály takových funkcí řešíme pomocí následujících substitucí:

$$1. \int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{1/s} \right] dx \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = t^s \qquad \text{pro } s > 2$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}} \qquad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a} t \qquad \text{pro } D > 0, a > 0$$

$$3. \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{(ax^2+bx+c)} + k \int \frac{dx}{\sqrt{\quad}}$$

$$P_n(x)dx = [Q_{n-1}(\sqrt{\quad})]! \sqrt{\quad} + k$$

$$4. \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

Eulerovy substituce:

$$a > 0 \quad : \quad t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$$

$$c \geq 0 \quad : \quad xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$$

jsou-li α, β kořeny ax^2+bx+c , pak

$$t = \sqrt{a \frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

5. Binomické integrály

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

- lze převést na elementární funkci, když jedno z čísel $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ je celé číslo.

p - celé	$x = t^s$	přičemž	$m = \frac{k}{s}, n = \frac{r}{s}$
$\frac{m+1}{n}$ - celé	$a+bx^n = t^s$		
$\frac{m+1}{n} + p$ - celé	$ax^{-n} + b = t^s$		

$$6. \int R(\sin x, \cos x) dx$$

Navíc:

- a) R-lichá k $\sin x$
- b) R-lichá k $\cos x$
- b) R-sudá k oběma

$$\text{vždy: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\cos x = t$$

$$\sin x = t$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

7. Transcendentní funkce

$$a) \int R(a^x) dx$$

$$a^x = t$$

$$b) \int e^{kx} P_n(x) dx$$

$$\text{per partes} \quad u' = e^{kx} \quad r = P_n(x)$$

$$c) \int R(\ln x) dx$$

$$\ln x = t$$

$$d) \int [P(x) \cos kx + Q(x) \sin kx] dx$$

metoda neurčitých koeficientů