

Určitý integrál

Def 3.3. Necht' uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ je částí def. oboru funkce $f(x)$. Ji-li dáno $n+1$ čísel x_0, x_1, \dots, x_n pro něž platí:

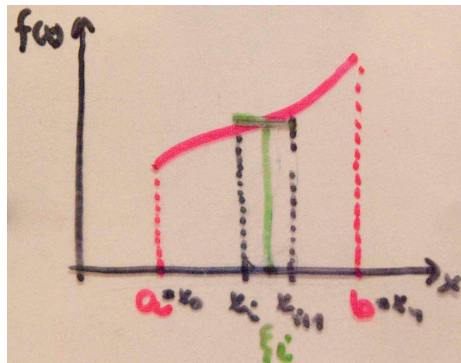
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

říkáme, že je dáno **dělení** D_n intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dělicí body dělení D_n definují n částečných intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots$ s délkou: $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots,$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \text{ pak zřejmě } \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$$

Největší z čísel Δx_i nazveme normou dělení D_n , označujeme D . Ozn ξ_1, \dots, ξ_n reálná čísla pro něž $\xi_1 \in \langle x_0, x_1 \rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle$



Číslo $\sigma(D_n) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ nazýváme **integrálním součtem** funkce f příslušející dělení D_n na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Jsou-li M_1, \dots, M_n **suprema** (max) funkce f na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots$

a m_1, \dots, m_n **infima** (min) funkce f na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, pak čísla

$$S(D_n) = M_1\Delta x_1 + \dots + M_n\Delta x_n \quad \text{-horní součet přísl. } D_n \text{ na } \langle a, b \rangle.$$

$$s(D_n) = m_1\Delta x_1 + \dots + m_n\Delta x_n \quad \text{-dolní součet přísl. } D_n \text{ na } \langle a, b \rangle.$$

Def 3.4. Maximální (minimální) hodnota z horních (dolních) součtů příslušející všem dělením D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ se nazývá **horní (dolní) integrál funkce f na $\langle a, b \rangle$** .

Jestliže horní integrál je roven dolnímu integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak tuto společnou hodnotu nazýváme **určitým integrálem funkce f na $\langle a, b \rangle$ (Cauchy-Riemannův interval)**.

$$\text{A označujeme jej: } \int_a^b f(x)dx.$$

Existuje-li $\int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ v C.-R. smyslu.

Věta 3.10. Je-li funkce f integrovatelná na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n)$$

Věta 3.11. Každá spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná ve smyslu C.-R. smyslu.

Věta 3.12. Newtonova-Leibnitzova věta

Jestliže $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Věta 3.13 Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ pak platí:

$$1. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2. \int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx \quad C = konst.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a < c < b$$

$$4. \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{je-li } f(x) \geq 0 \text{ na intervalu } \langle a, b \rangle$$

$$5. \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad f(x) \geq g(x) \text{ na intervalu } \langle a, b \rangle$$

Věta 3.14 **O střední hodnotě** – je-li $g(x)$ nezáporná (nekladná) na $\langle a, b \rangle$ a $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$, integrovatelné, pak existují $\xi \in \langle a, b \rangle$, že platí:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Číslo $f(\xi)$ se nazývá **střední hodnota funkce f** na $\langle a, b \rangle$.

Věta 3.15 **Substituční metoda pro určité integrály** – Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Necht' funkce $\varphi(t)$ je na $\langle \alpha, \beta \rangle$ ryze monotónní a necht' je spojitá i se svou první derivací, přičemž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Věta 3.16 **Metoda per partes pro určité integrály** – Mají-li funkce $u(x)$, $v(x)$ na $\langle a, b \rangle$ spojitě derivace, pak platí:

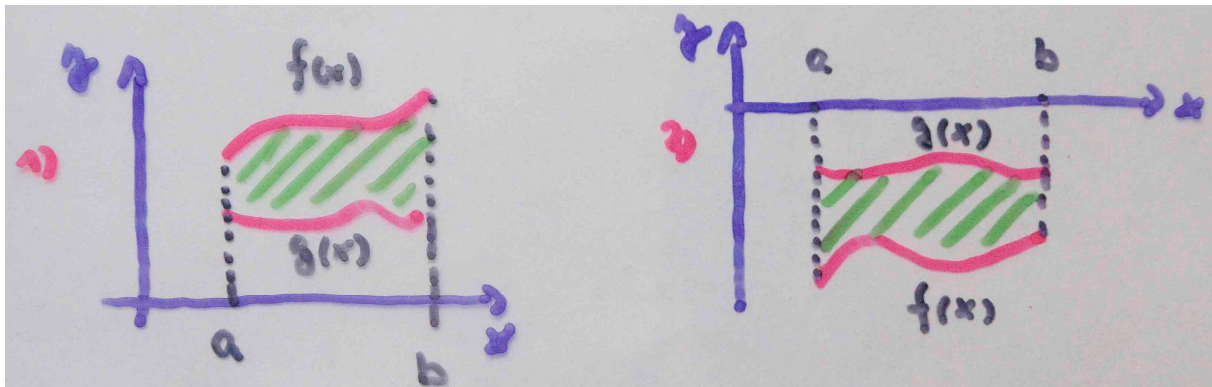
$$\int_a^b u' v dx = [uv]_a^b - \int_a^b u v' dx$$

Použití určitého integrálu

Věta 3.17 Obsah P obrazce U, ohraničeného přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ spojitých na $\langle a, b \rangle$, přičemž pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$

1) $0 \leq g(x) \leq f(x)$ se rovná $P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

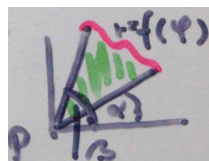
2) $f(x) \leq g(x) \leq 0$ $P = -\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$



Pozn. Polární souřadnice

$$r = f(\varphi)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

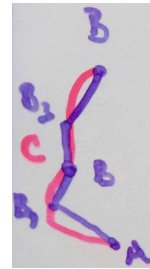


Věta 3.18 Objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací rovinné křivky, která je grafem spojitě funkce $y = f(x)$ def. na $\langle a, b \rangle$, kolem osy x , je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Def 3.5 Necht' je dána křivka c , kterou je možno vyjádřit pomocí funkce $f(x)$. Zvolíme-li na křivce c body $A, B_1, B_3, \dots, B_n = B$, pak spojnicí všech těchto bodů nazveme lomenou čarou vepsanou křivce c . Délkou této lomené čáry AB rozumíme součet délek všech úseček $\overline{AB_1} + \overline{B_1B_3} + \dots + \overline{B_{n-1}B_n}$.



Def 3.6 Délkou křivky c mezi body A, B rozumíme supremum (max. hodnotu) z množiny všech délek lomených čar vepsaných křivce c . Je-li tato množina shora ohraničená, říkáme, že křivka c je schopna **rektifikace**. Není-li shora ohraničená, řekneme, že křivka c nemá konečnou délku.

Věta 3.19 Je-li křivka c dána jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci, pak pro délku oblouku jejího grafu na $\langle a, b \rangle$ platí

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Pozn. 1. Pokud je křivka c dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ pak

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

Pozn. 2. Pokud je křivka c dána v polárních souřadnicích $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ pak

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Věta 3.20 Obsah P plochy vytvořené rotací grafu hladké funkce $y = f(x)$ kolem osy x pro $x \in \langle a, b \rangle$ je dán:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

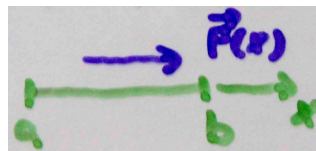
Pozn. 1. Pro křivku zadanou parametricky $s = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$

Pozn. 2. Pro křivku zadanou v polárních souřadnicích $r = f(\varphi)$

$$s = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Použití určitého integrálu ve fyzice

$$A = \int F(x) dx$$



Těžiště obrazce $y = f(x)$

$$x_T = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} \quad y_T = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

Moment setrvačnosti

$$J = \int_{(m)} r^2 dm$$

Def 3.6 Nevlastní integrály s nekonečnými mezemi se nazývají

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Def 3.7 Nevlastní integrály nazýváme konvergentním jestliže:

- 1) Funkce $f(x)$ je integrovatelné na každém konečném $\langle a, b \rangle$
- 2) Existuje-li vlastní limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx = B$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^b f(x) dx = B$

Jestliže tato vlastní limita neexistuje, říkáme, že **integrál diverguje**.

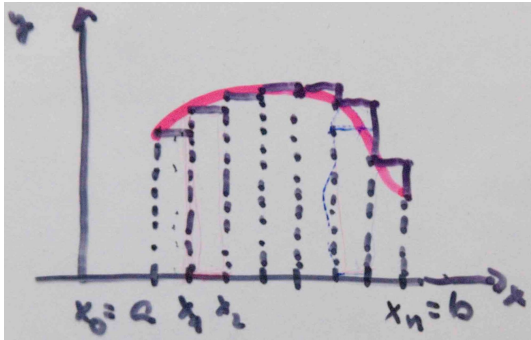
Věta 3.21 Jestliže funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na každém intervalu $\langle a, b \rangle$ a

pro $\forall x \in \langle a, \infty \rangle$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pak z konvergence $\int_a^{\infty} g(x) dx$ plyne

konvergence $\int_a^{\infty} f(x) dx$. Diverguje-li $\int_a^{\infty} f(x) dx$, pak diverguje i $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

Analogie pro ost. nevl. int.

Přibližný výpočet určitých integrálů



a) Obdélníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad \text{kde } \xi_i = x_{i-1}, \Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{i+1} - x_i$$

b) Lichoběžníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

c) Simpsonova metoda

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$2n$ – sudý počet intervalů