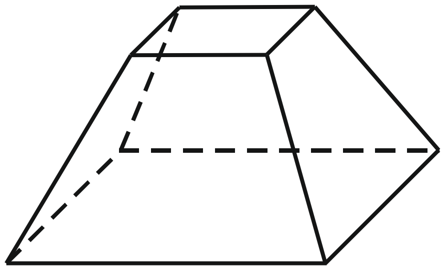
OBJEMY A POVRCHY TĚLES

Metodický materiál do semináře MA SDM 3

Růžena Blažková, Irena Budínová

KOMOLÝ JEHLAN



Objem komolého jehlanu

Pro zjednodušení odvodíme vztahy pro komolý jehlan, jehož podstavami jsou čtverce.

Označení: Délka hrany dolní podstavy …………….a_1

Délka hrany horní podstavy …………… a_2

Výška jehlanu ………………………… v

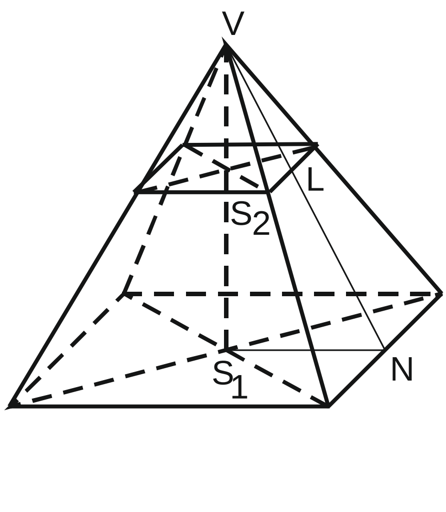
Výška jehlanu doplňkového ………….. v_1

Objem komolého jehlanu vypočítáme jako rozdíl objemů dvou jehlanů $V = V_1 - V_2$, kde V_1 je objem jehlan doplněného a V_2 je objem jehlanu doplňkového. Pro objemy každého z jehlanů platí:

$$V_1 = \frac{1}{3} a_1^{\,2} (v + v_1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3} a_2^{\,2} v_1$$

Výšku v_1 vypočítáme z podobnosti trojúhelníků ΔVS_1N a ΔVS_2L:



$$\frac{v_1+v}{\frac{a_1}{2}} = \frac{v_1}{\frac{a_2}{2}}$$

$$v_1 = \frac{va_2}{a_1 - a_2}$$

Pak

$$V = \frac{1}{3}a_1^{\,2}(v+v_1) - \frac{1}{3}a_2^{\,2}v_1$$

$$V = \frac{1}{3}\left(a_1^{\,2}v + a_1^{\,2}v_1 - a_2^{\,2}v_1\right)$$

Dosazením za v_1 a úpravou dostaneme

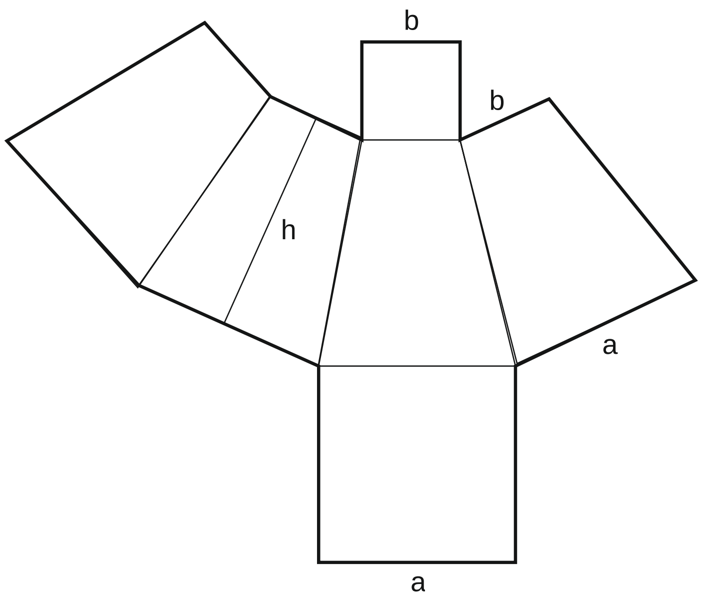
$$V = \frac{1}{3}v(a_1^{\,2} + a_1a_2 + a_2^{\,2})$$

Obecně pro objem komolého jehlanu s podstavami o obsahu S_1 a S_2 platí:

$$V = \frac{1}{3}v(S_1^{\,2} + \sqrt{S_1S_2} + S_2^{\,2})$$

Povrch komolého jehlanu

Síť komolého jehlanu (čtyřbokého):



Pro pravidelný komolý jehlan s podstavami tvaru čtverce platí:

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

$$S = a_1^2 + a_2^2 + 4\,\frac{(a_1+a_2)h}{2}$$

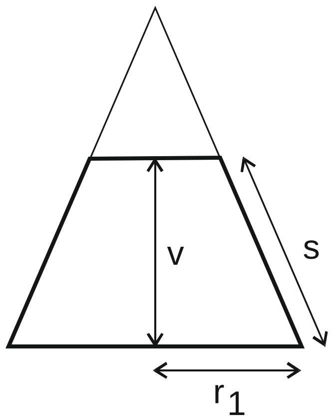
kde h je stěnová výška, $h = \sqrt{v^2 + (a_1 - a_2)^2}$

KOMOLÝ KUŽEL

Označení: Poloměr dolní podstavy ……………….. r_1
Poloměr horní podstavy ……………….. r_2
Výška kužele ………………………….. v
Výška doplňkového kužele …………… v_1

Objem komolého kužele

Odvození pomocí podobnosti – prostředky žáka základní školy

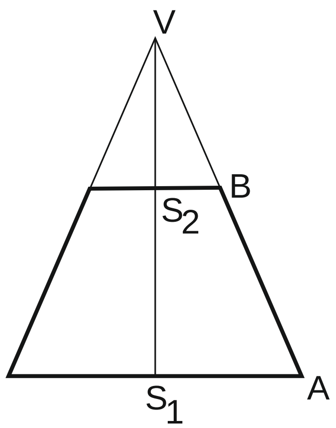


Objem komolého kužele vypočítáme jako rozdíl objemů dvou kuželů $V = V_1 - V_2$, kde V_1 je objem doplněného kužele a V_2 je objem kužele doplňkového. Pro objemy každého z kuželů platí:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^{\,2}(v + v_1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^{\,2} v_1$$

Výšku v_1 určíme z podobnosti trojúhelníků ΔVS_1A a ΔVS_2B:



$$\frac{v+v_1}{r_1}=\frac{v_1}{r_2}$$

$$v_1=\frac{vr_2}{r_1-r_2}$$

Pak

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^{\,2}(v+v_1) - \frac{1}{3}\pi r_2^{\,2}v_1$$

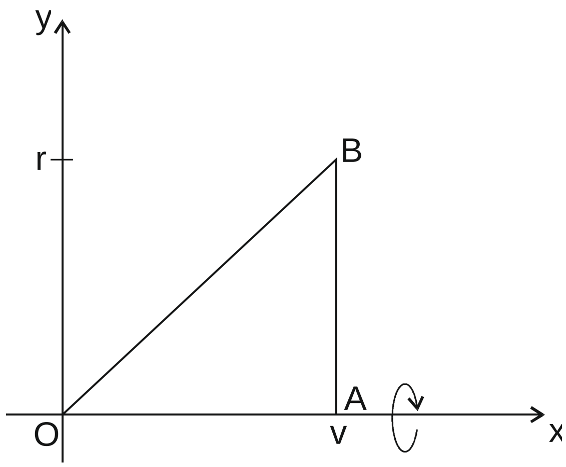
Dosazením za v_1 a úpravami dostaneme:

$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^{\,2}+r_1r_2+r_2^{\,2})$$

Názorně můžeme žákům demonstrovat, že objem kužele je roven jedené třetině objemu válce, který má stejnou podstavu i výšku jako kužel. Zvolíme model válce (např. plechovku), podstava má poloměr *r*, výška válce je *v*. Vybereme vhodný model kužele (např. nálevku) tak, aby měl také poloměr *r* a výšku *v* jako válec. Naléváním vody zjistíme, že do válce můžeme nalít tři nálevky vody.

Odvození pomocí integrálního počtu

Nejprve uvedeme vztah pro výpočet objemu kužele s podstavou o poloměru *r* a výškou *v*.



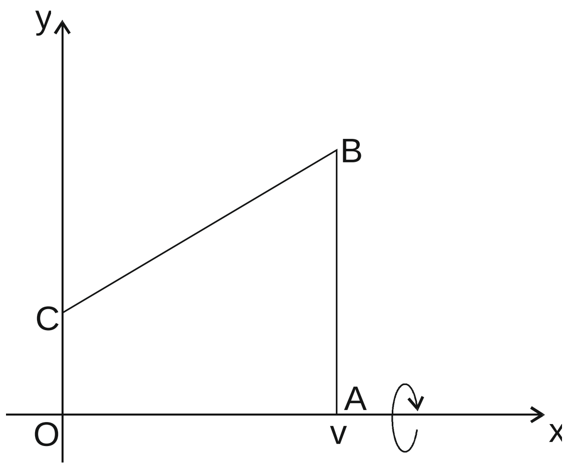
Tento kužel získáme rotací pravoúhlého trojúhelníku OAB kolem osy *x*. Souřadnice bodů v kartézské soustavě souřadnic: O[0,0], A[*v*,0], B[*v*,*r*], *v*>0, *r*>0.

Funkce: $f(x) = \frac{r}{v}x$

Objem rotačního tělesa je dán vztahem: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

Objem kužele:

$$V = \pi\int_0^v \frac{r^2}{v^2}x^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\int_0^v x^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v=\frac{1}{3}\pi r^2v$$



Komolý kužel získáme rotací pravoúhlého lichoběžníku OABC kolem osy x.
Souřadnice bodů v kartézské soustavě souřadnic: O[0,0], A[v,0], B[v,r_1], C[r_2,0], v>0, r_1>0 , r_2>0.

Funkce: $f(x) = \frac{r_1 - r_2}{v} x + r_2$

$$V=\pi\int_0^v \left(\frac{r_1-r_2}{v}x+r_2\right)^2 dx = \pi\left(\frac{(r_1-r_2)^2}{v^2}\right)\int_0^v x^2 dx + \pi 2r_2\frac{r_1-r_2}{v}\int_0^v x dx + \pi r_2^2\int_0^v dx = \pi$$

$$\left(\frac{(r_1-r_2)^2}{v^2}\cdot\frac{x^3}{3}+2r_2\frac{r_1-r_2}{v}\cdot\frac{x^2}{2}+r_2^2 x\right)_0^v = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2+r_1 r_2+r_2^2\right)$$

Povrch komolého kužele

Nejdříve uvedeme vztah pro výpočet kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

Jak narýsujeme síť kužele (přibližně): Do kruhu vepíšeme pravidelný mnohoúhelník (alespoň dvanáctiúhelník) a na oblouk se středem v bodě V a poloměru s naneseme postupně úsečky (tětivy), abychom získali alespoň přibližně délku oblouku $2\pi r$. Jestliže chceme získat přesnější konstrukci pláště kužele, musíme vypočítat velikost středového úhlu kruhové výseče.

Povrch kužele je roven součtu obsahů podstavy a pláště. Podstavou je kruh, plášť je kruhová výseč. Obsah kruhové výseče můžeme vypočítat jako obsah trojúhelníku se základnou $2\pi r$ a výškou v.

$$S = S_p + S_{pl}$$
$$S = \pi r^2 + 2\pi rs$$

Kde s je strana kužele, $s = \sqrt{v^2 + r^2}$.

Povrch komolého kužele je roven součtu obsahů obou podstav komolého kužele a pláště komolého kužele. Obsah pláště můžeme vypočítat jako obsah rovnoramenného lichoběžníku se základnami $2\pi r_1$ a $2\pi r_2$ a výškou s.

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

$$S = \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2} + \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} s$$

kde *s* je strana kužele, $s = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}$

KOULE

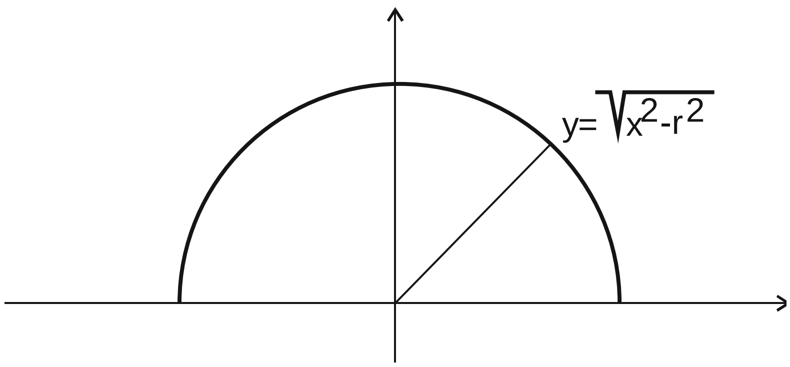
Povrch koule

Prostředky žáka základní školy:

Představme si, že kulovou plochu rozdělíme na 4 shodné části (např. jako když loupeme pomeranč). Těmito částmi pokryjeme 4 kruhy o poloměru shodném s poloměrem koule.

Tedy jedna část má obsah πr^2 a povrch celé koule je $S = 4\,\pi r^2$.

Pomocí integrálního počtu:



Koule vznikne rotací půlkruhu kolem osy x. Obecná rovnice kružnice o poloměru r je

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Derivace podle x: $$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x je dám vztahem:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Dosazením:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} y \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx$$

Úpravou:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\,dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx$$

$$S = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Objem koule

Prostředky žáka základní školy

Představme si, že na kouli můžeme rozdělit na jehlany, které mají podstavu na kulové ploše a vrchol ve středu koule. Součet objemů všech takových jehlanů je roven objemu koule.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pomocí integrálního počtu:

Necháme-li rotovat půlkruh kolem osy *x*, dostaneme kouli.

Rovnice kružnice o poloměru *r:* $x^2 + y^2 = r^2$, pak $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{dx} = \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \int_{-r}^{r} x^2 dx =$$

$$\pi \left[r^2 x\right]_{-r}^{r} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \left[r^3 + r^3 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Koule má tedy objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

K výpočtu objemu koule můžeme využít i jiných postupů, např. pomocí trojného integrálu a sférických souřadnic.

Literatura:

Kuřina, F., Hávová, J.: *Matematika pro 9. ročník základní školy*. Fortuna, Praha 1991