

Funkce

(Zavedení pojmu funkce, vlastnosti funkcí, lineární, kvadratické a mocninné funkce)

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

A) Zavedení pojmu funkce

V odborných a přírodovědných předmětech se často setkáváme s úlohami, ve kterých se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách jiné veličiny. Tuto závislost popisujeme pomocí pojmu **funkce** jako zobrazení v **R**.

*Nechť **A** a **B** jsou dvě neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu **x** z množiny **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo **y** z množiny **B**, které označíme **y=f(x)**, pak množina **f** uspořádaných dvojic **[x;f(x)]** se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně **funkce f**).*

$$f : y = f(x), x \in D(f)$$

Množinu A označujeme **D(f)** a nazýváme **definičním oborem funkce f**.

Množinu B označujeme **H(f)** a nazýváme **oborem hodnot funkce f**.

Číslo **x** je **nezávisle** proměnná, argument funkce f.

Číslo **y** je **závisle** proměnná, funkční hodnota funkce f v bodě x.

Úlohy

Př.1: Zapište pomocí intervalů definiční obor funkcí:

$$a) f : y = \frac{3x+2}{2x^2+x-3} \qquad b) f : y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + \frac{1-x}{1+x}$$

Př.2: Je dána funkce:

$$f : y = \frac{2}{x^2-1}$$

- a) Určete $f(0)$, $f(-7)$, $f(3)$
- b) Patří čísla -4 , 0 do oboru hodnot funkce f ?

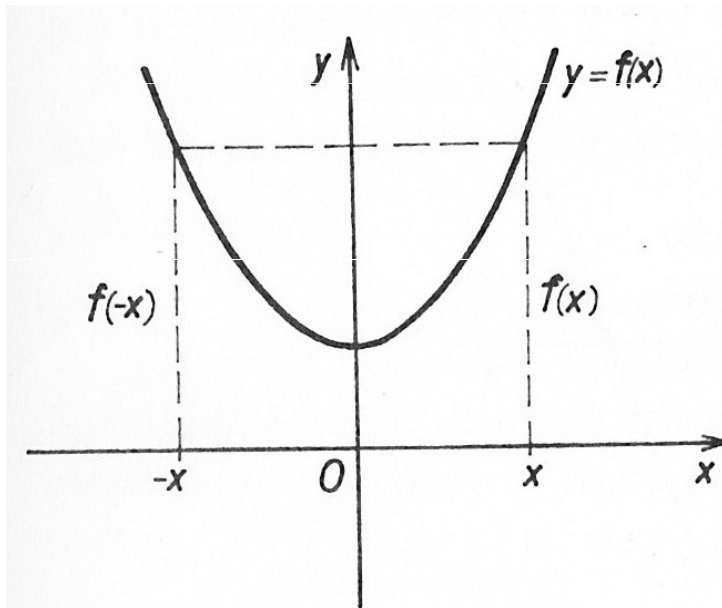
Vlastnosti funkcí

a) Sudé funkce, liché funkce

Sudá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$$



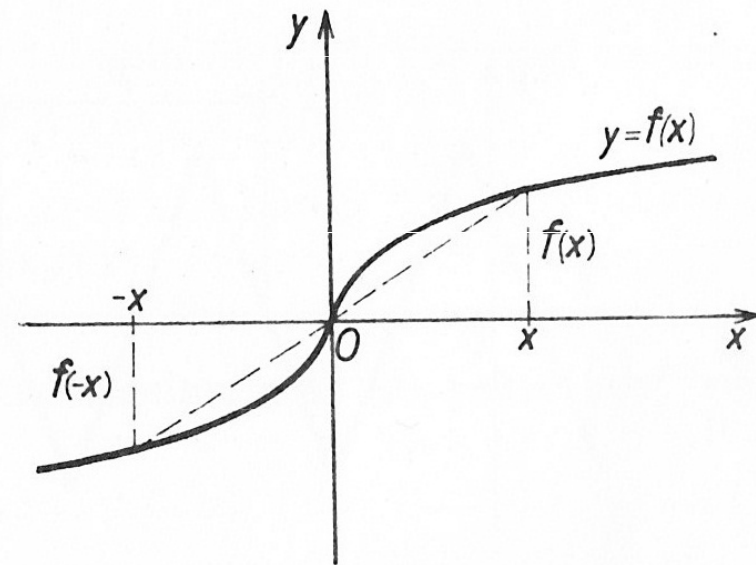
Graf je souměrný podle osy y.

Např.: $f_1 : y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$
 $f_2 : y = x^{-2}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Lichá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$$



Graf je středově souměrný podle počátku.

Např.: $f_1 : y = x^3, D(f) = \mathbb{R}$
 $f_2 : y = x^{-3}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, které z daných funkcí f jsou sudé nebo liché:

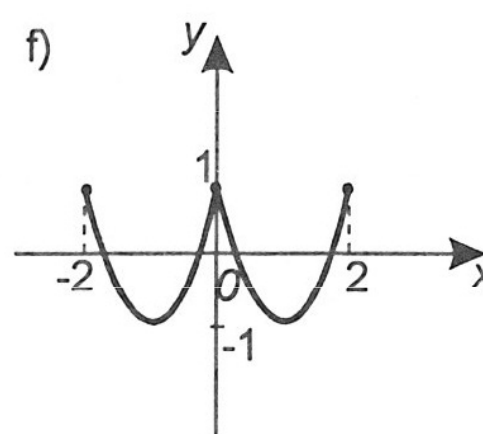
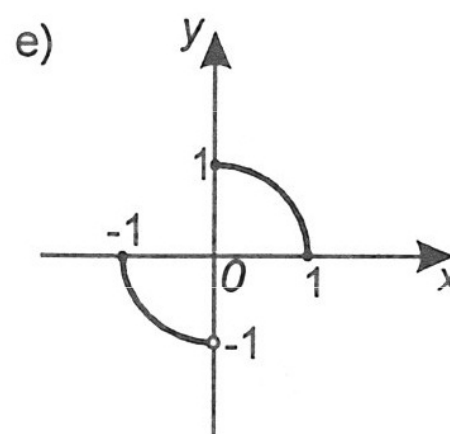
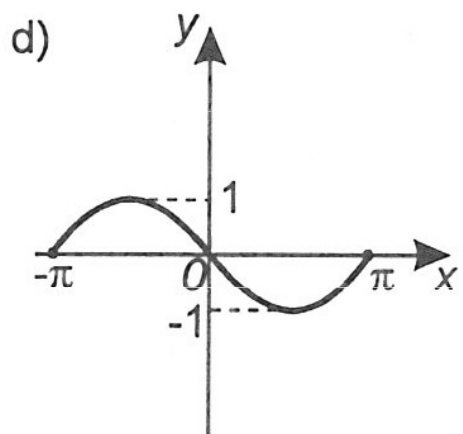
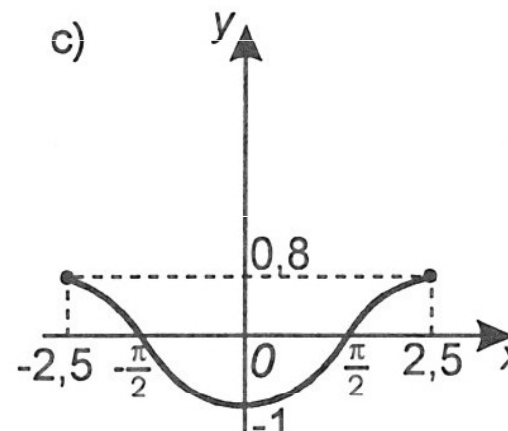
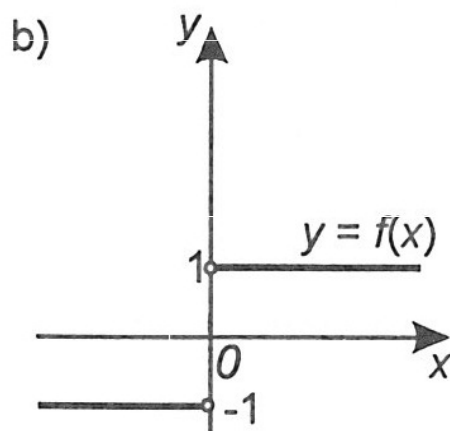
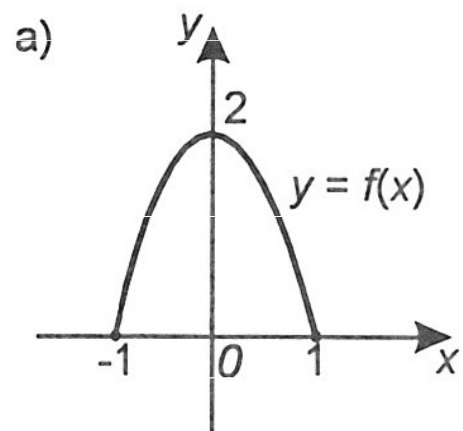
a) $f : y = x$

b) $f : y = 2$

c) $f : y = 2x^2 + 1$

d) $f : y = x + 2$

Př.2: Rozhodněte, které z daných funkcí f jsou sudé nebo liché:



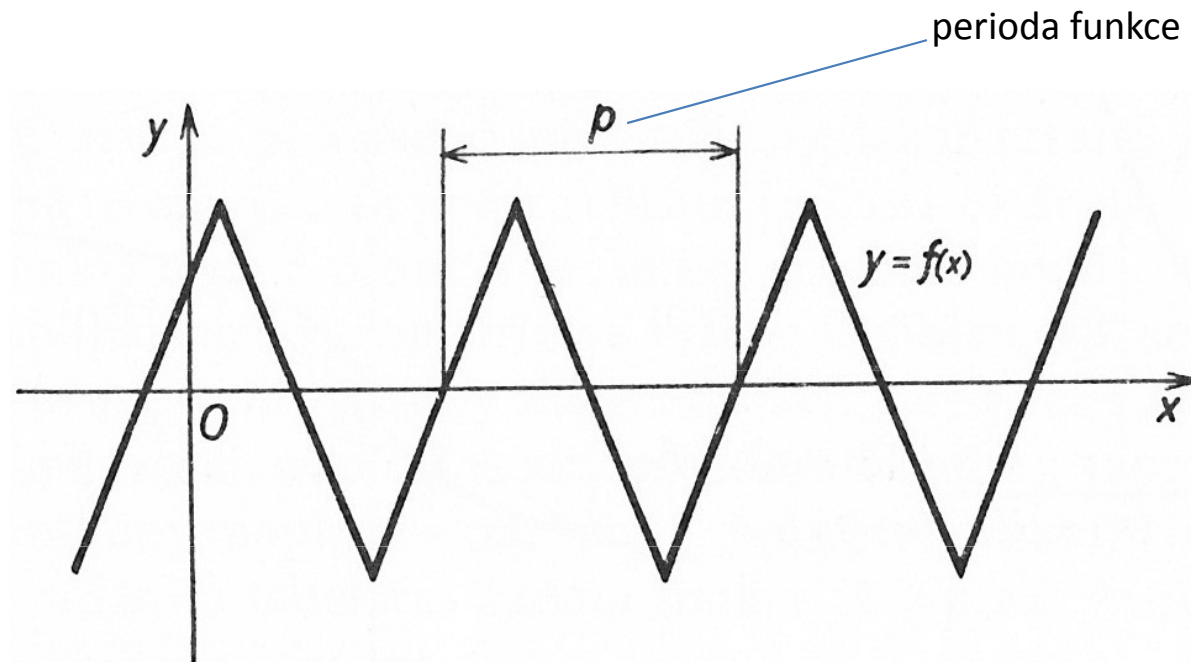
Vlastnosti funkcí

b) Periodické funkce

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí:

1) Je-li $x \in D(f)$, pak $x + kp \in D(f)$

2) $f(x + kp) = f(x)$



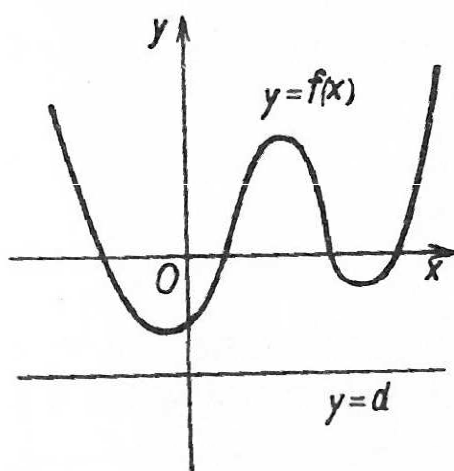
Např.: $f_1 : y = \cos x$, $f_2 : y = \sin x$
 $f_3 : y = \operatorname{tg} x$, $f_4 : y = \operatorname{cotg} x$

Vlastnosti funkcí

c) Funkce omezená (zdola, shora), maximum a minimum funkce

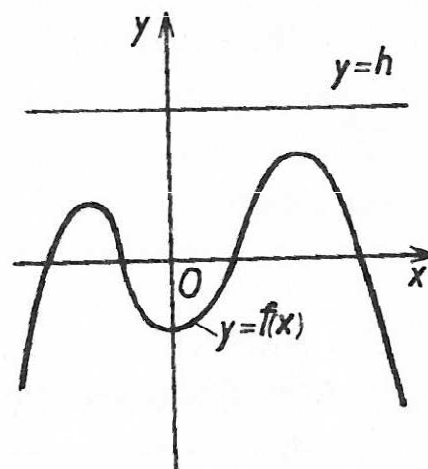
Zdola omezená

$$\exists d: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq d$$



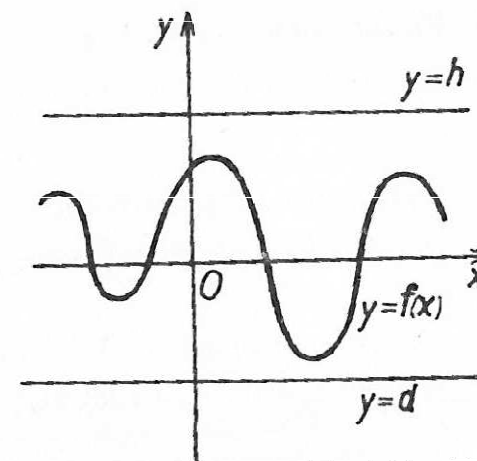
Shora omezená

$$\exists h: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq h$$



Omezená

Je omezená shora i zdola.



Funkce f má v bodě a maximum, právě když:

$$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a)$$

Funkce f má v bodě b minimum, právě když:

$$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(b)$$

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, ve kterých bodech mají následující funkce maximum nebo minimum:

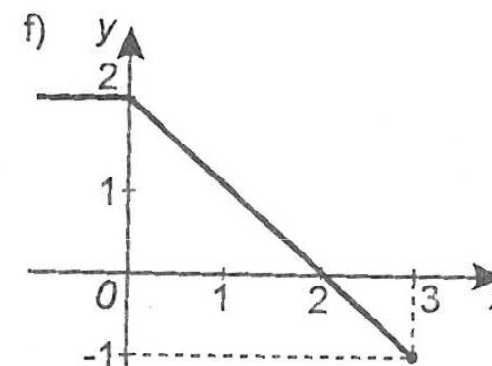
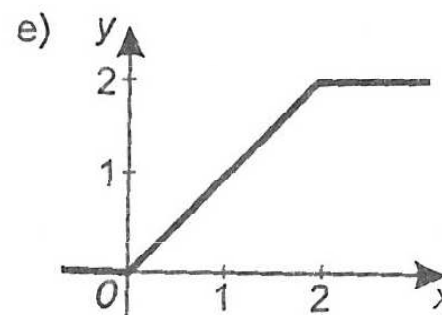
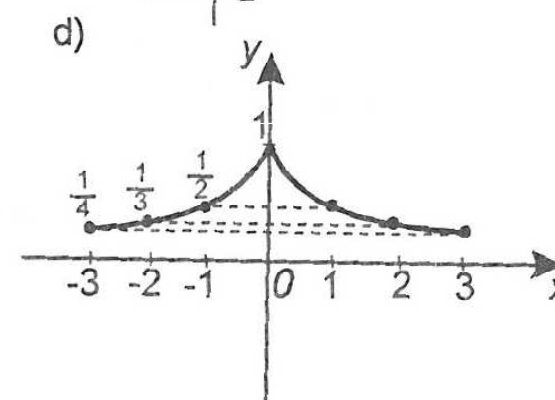
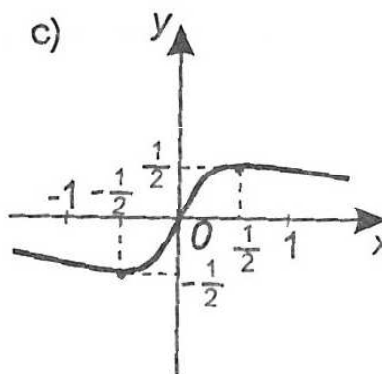
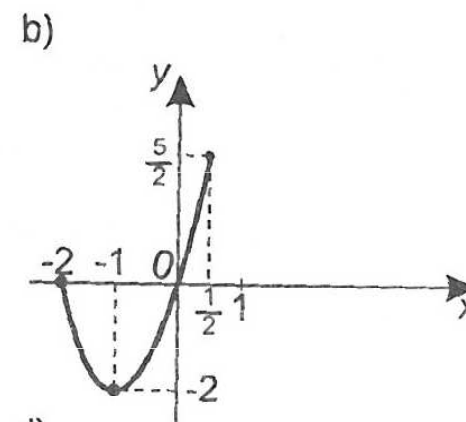
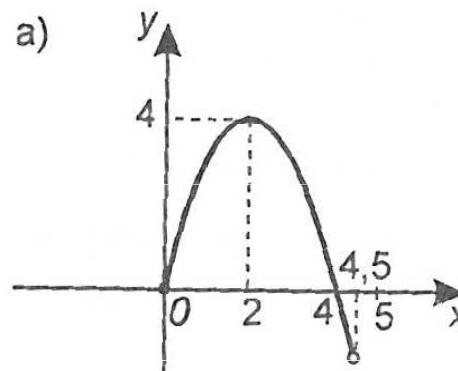
a) $f : y = 2x + 5$

b) $f : y = 1$

c) $f : y = (x-1)^2 + 2$

d) $f : y = 2|x|$

Př.2: Určete maxima nebo minima následující funkcí :

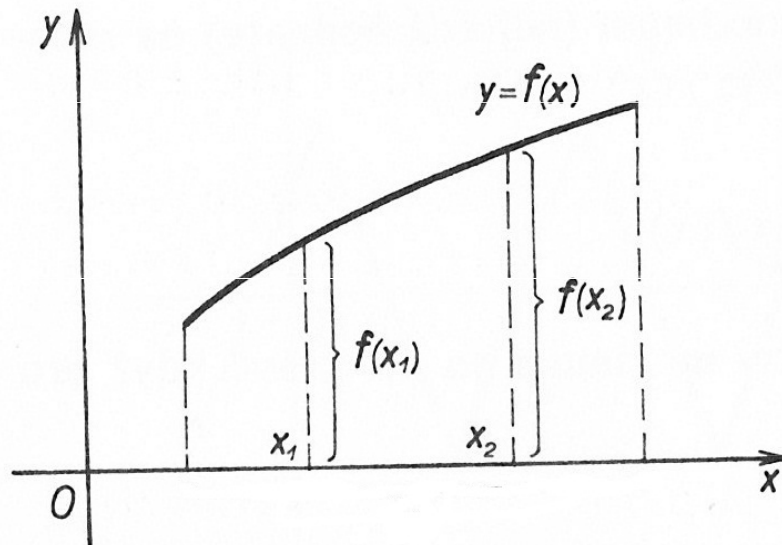


Vlastnosti funkcí

d) Rostoucí a klesající funkce

Rostoucí funkce

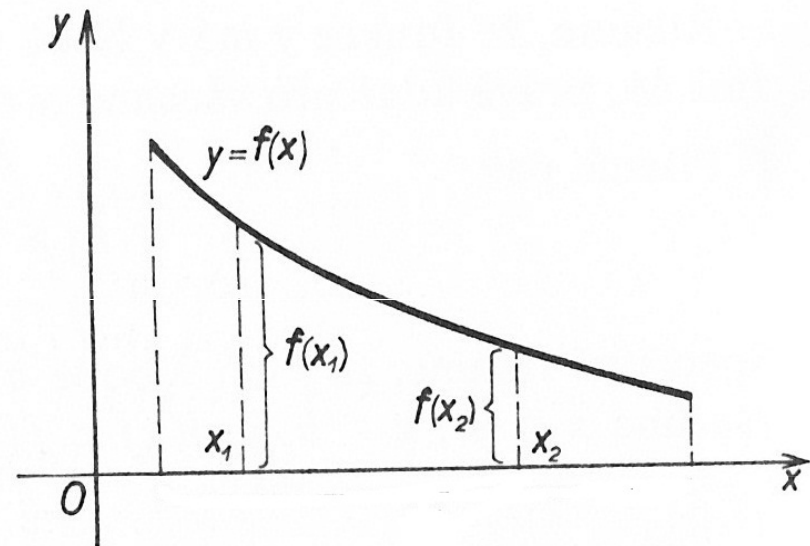
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.

Klesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Je-li funkce klesající, pak je prostá.

$$\text{Funkce je prostá} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

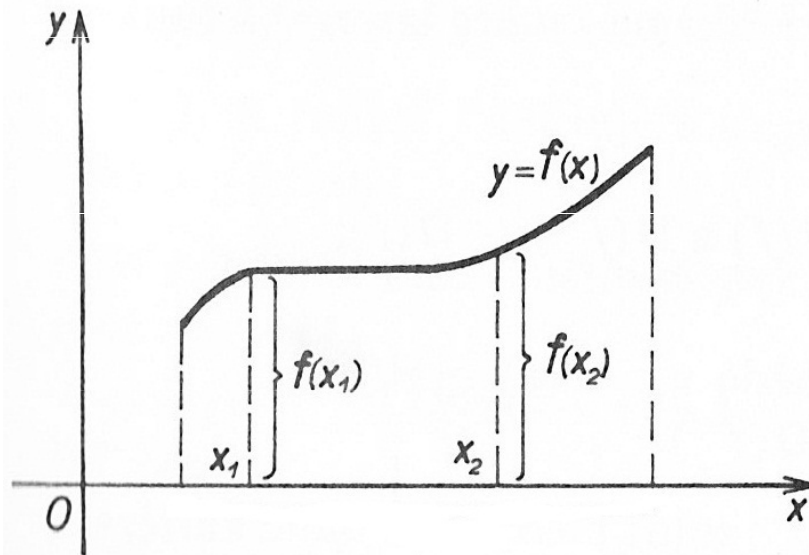
Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **RYZE MONOTÓNÍ**.

Vlastnosti funkcí

d) Neklesající a nerostoucí funkce

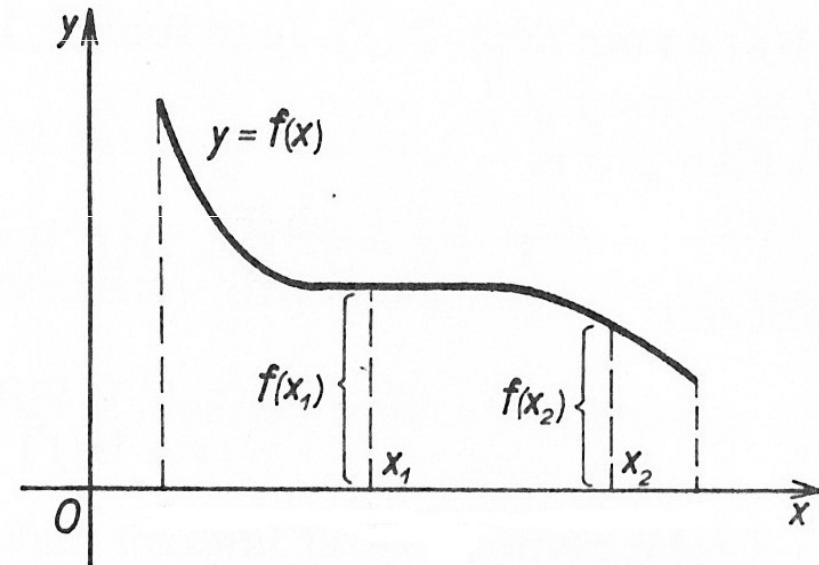
Neklesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Nerostoucí funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funkce nerostoucí a neklesající se souhrnně nazývají **MONOTÓNÍ**.

Vlastnosti funkcí

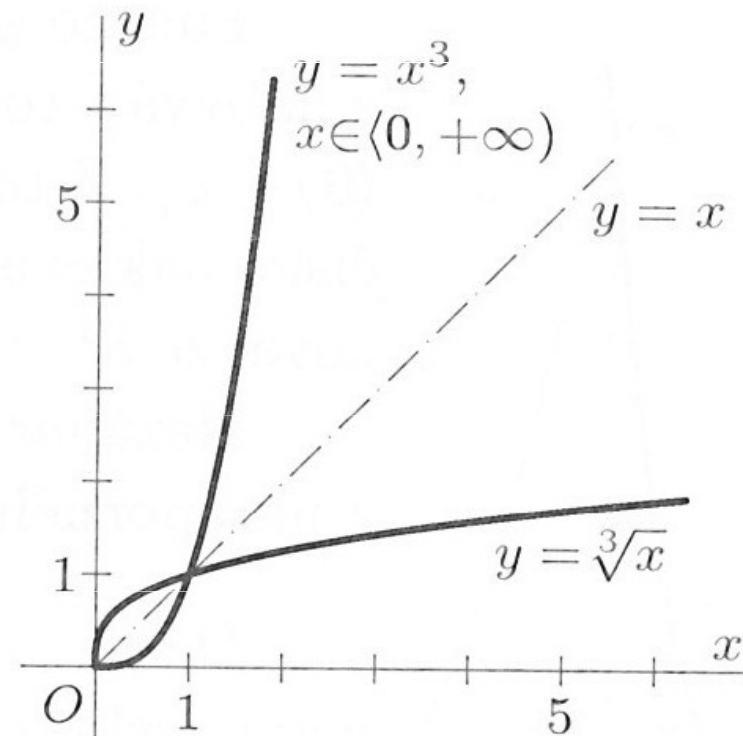
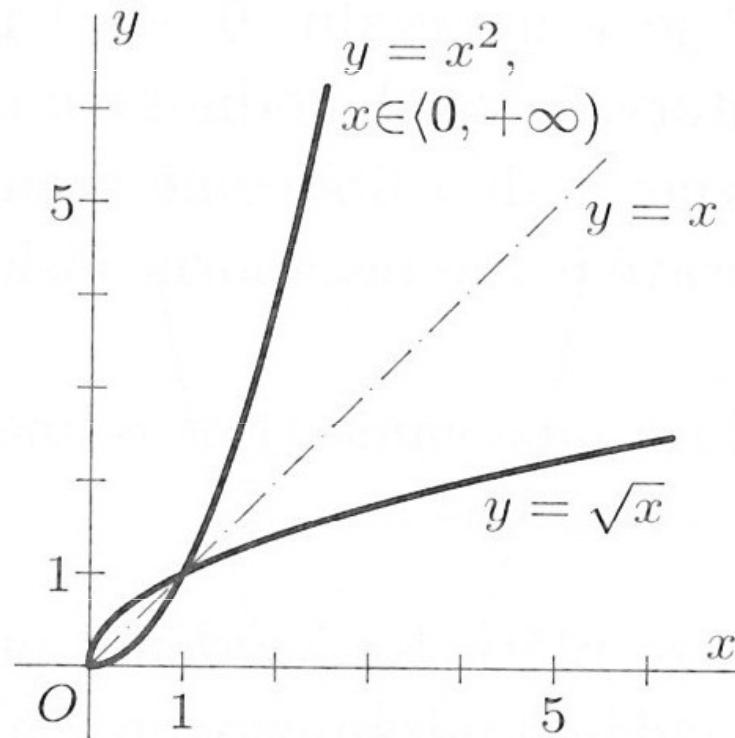
e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Grafy funkcí f a f^{-1} sestrojené v téže soustavě souřadnic Oxy se stejnou délkovou jednotkou na obou osách **jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$.**

Např.:



Vlastnosti funkcí

e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Příklady funkcí a funkcí k nim inverzních :

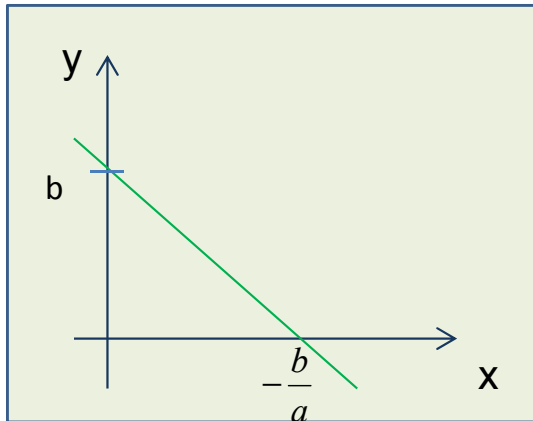
f	f^{-1}
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{arccotg} x$
$y = 2x$	$y = \frac{x}{2}$
$y = x^3$	$y = \sqrt[3]{x}$

1 LINEÁRNÍ FUNKCE

$$f : y = ax + b, \quad D(f) = R$$

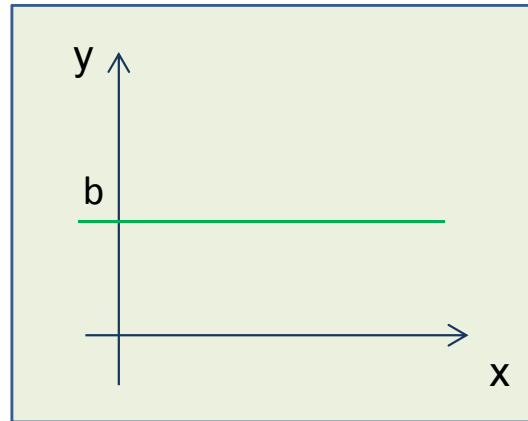
Graf: Přímka

$$a < 0$$



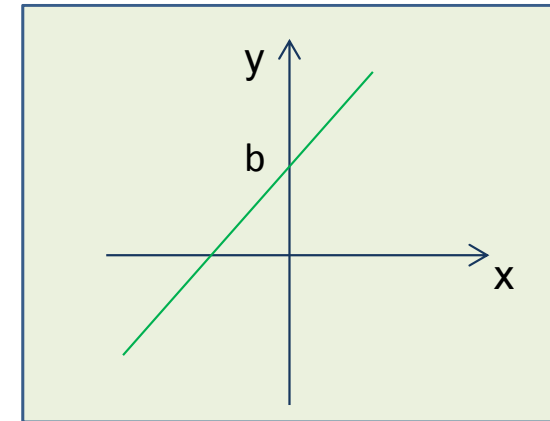
$D(f) = R, H(f) = R$
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je **klesající**, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R .

$$a = 0$$



$D(f) = R, H(f) = \{b\}$
Je omezená.
Je **nerostoucí a neklesající**.
Není prostá.
Má maximum a minimum pro každé $x \in R$.
Je spojitá v R .

$$a > 0$$



$D(f) = R, H(f) = R$
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je **rostoucí**, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R .

Úlohy

Př. 1: Pro lineární funkci $f: y = -2x + 5$ určete souřadnice průsečíku grafu s osami x , y .

Př. 2: Načrtněte grafy lineárních funkcí:

a) $f_1: y = 2x$

b) $f_2: y = 2x + 3$

c) $f_3: y = -2x + 5$

d) $f_4: y = 2$

Př. 3: Pro lineární funkci f platí: $f(3) = -5$

$$f(-1) = 4$$

Vyjádřete ji předpisem $y = ax + b$ a načrtněte graf.

Př. 4: Řešte graficky i početně soustavu rovnic $y = 3x - 2$

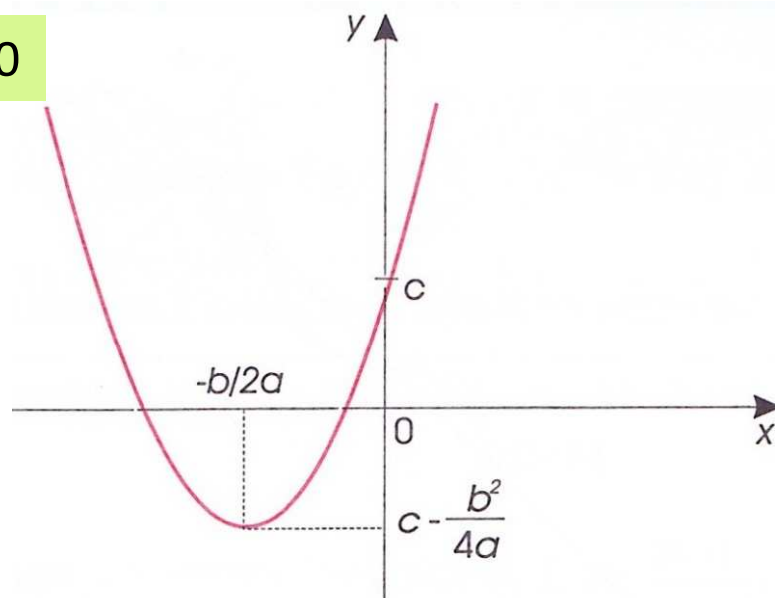
$$y = -x + 1$$

2 KVADRATICKÁ FUNKCE

= každá funkce typu: $f : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, D(f) = R$

Graf: Parabola

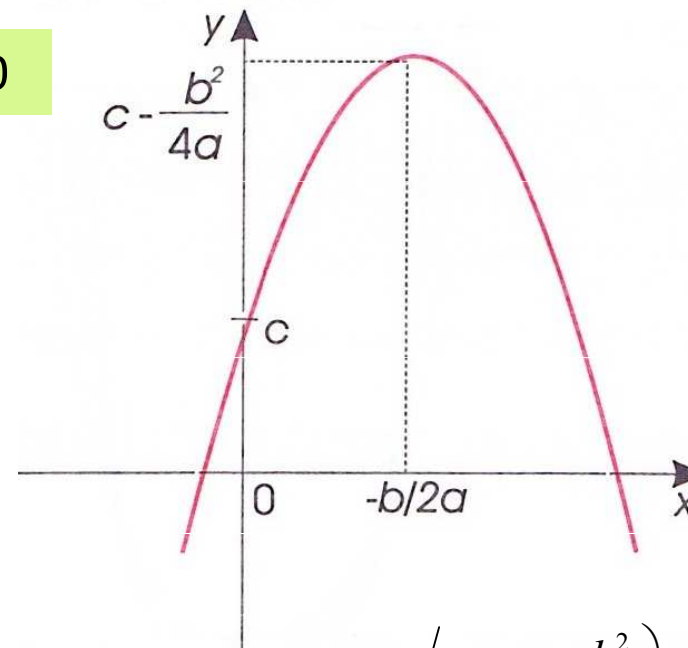
$a > 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right\rangle$$

Je zdola omezená, není shora omezená.
Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$.
Je klesající pro $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$.
Není prostá.
Má ostré minimum $[-b/2a; c - b^2/4a]$
Je spojitá v R .

$a < 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

Je shora omezená, není zdola omezená.
Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$.
Je klesající pro $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$.
Není prostá.
Má ostré maximum $[-b/2a; c - b^2/4a]$
Je spojitá v R .

2.1 GRAFY KVADRATICKÝCH FUNKCÍ

= parabola, která je **souměrná podle osy o** rovnoběžné s osou y .

a) Graf funkce $f_1 : y = ax^2$

= parabola s vrcholem v počátku $[0,0]$

b) Graf funkce $f_2 : y = ax^2 + c$

= parabola, která vznikne z paraboly funkce $f_1 : y = ax^2$ posunutím jejího vrcholu z bodu $[0,0]$ do bodu $[0,c]$.

c) Graf funkce $f_3 : y = a(x-x_0)^2$

= parabola, která vznikne z paraboly funkce $f_1 : y = ax^2$ posunutím jejího vrcholu z bodu $[0,0]$ do bodu $[x_0,0]$.

d) Graf funkce $f_4 : y = ax^2 + bx + c$

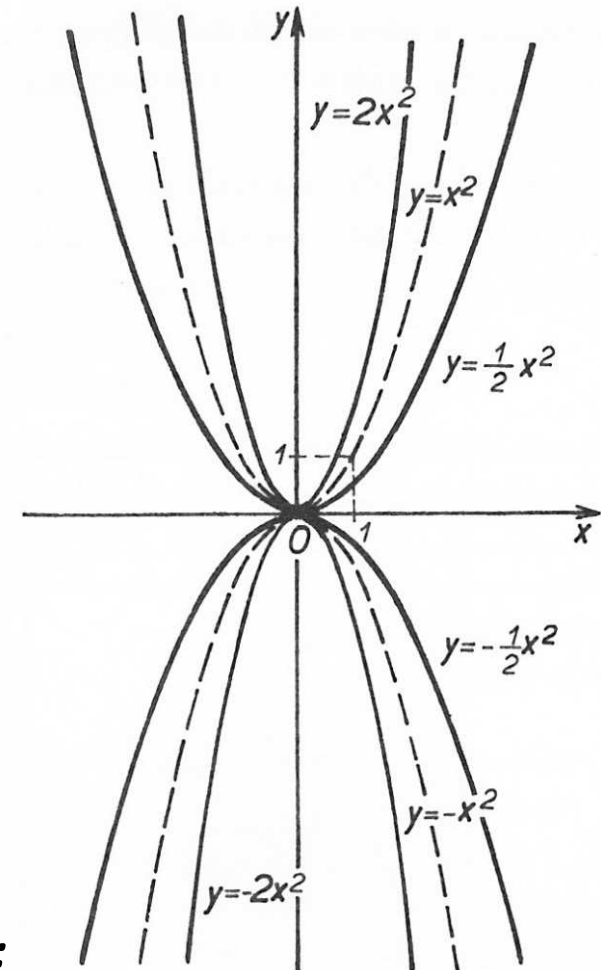
= parabola, kterou opět získáme z grafu funkce $f_1 : y = ax^2$:

1. Doplníme na úplný čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

2. Posuneme graf funkce f_1 z bodu $[0,0]$ do bodu $[x_0, y_0]$:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \text{ kde } x_0 = \frac{b}{2a}, y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$



Úlohy

Př. 1: Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = 2x^2; y = -2x^2$$

$$b) y = 2x^2 - 3; y = -2x^2 + 2$$

$$c) y = 2(x+1)^2; y = -2(x-1)^2$$

$$d) y = x^2 - 2x + 3$$

$$e) y = 2x^2 - 8x + 9$$

3 MOCNINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

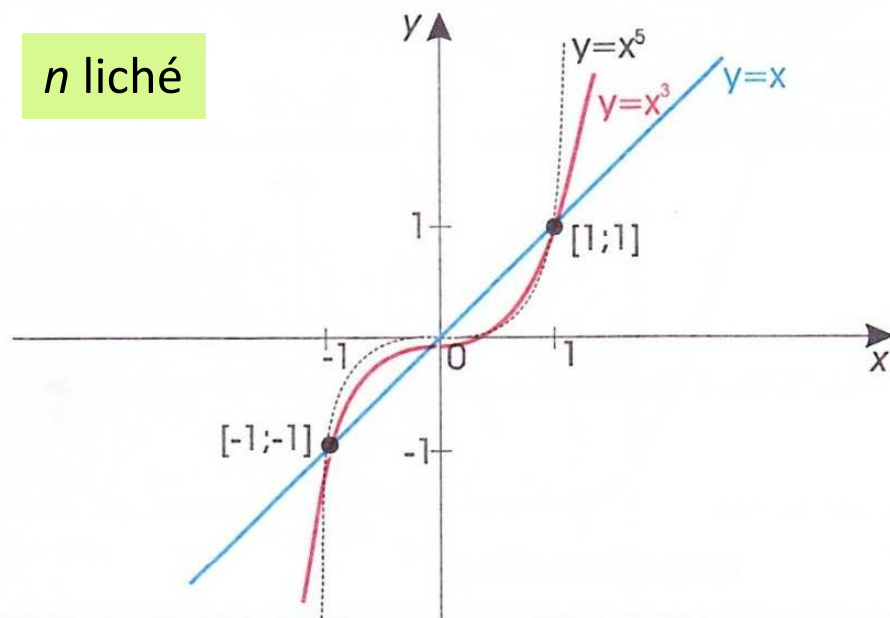
$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, D(f) = \mathbb{R}$$

Pro: $n = 1$: lineární funkce $f: y = x$

$n = 2$: kvadratická funkce $f: y = x^2$

$n = 3$: kubická funkce $f: y = x^3$

n liché



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je rostoucí, tedy prostá.

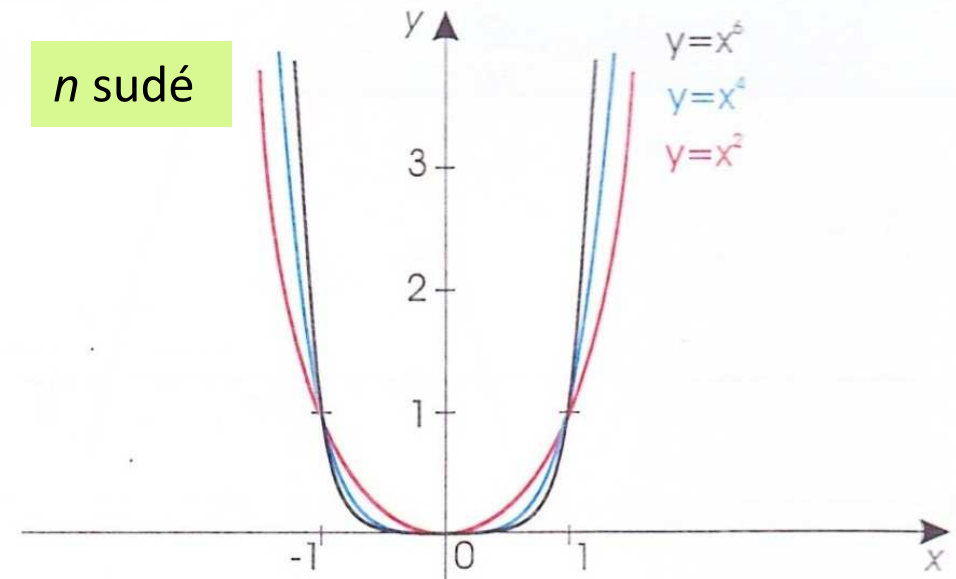
Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Graf: $n = 1$: přímka

$n > 1$: parabola n -tého stupně

n sudé



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

Je sudá.

Je zdola omezená, není shora omezená.

Je rostoucí pro $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Je klesající pro $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$.

Není prostá.

Nemá maximum, má minimum $[0,0]$.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Úlohy

Př. 1: Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = x^3 - 1$$

$$b) y = (x - 1)^5$$

$$c) y = x^4 + 3$$

$$d) y = -0,5x^6$$

$$e) y = -2x^5$$

4 MOCNINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

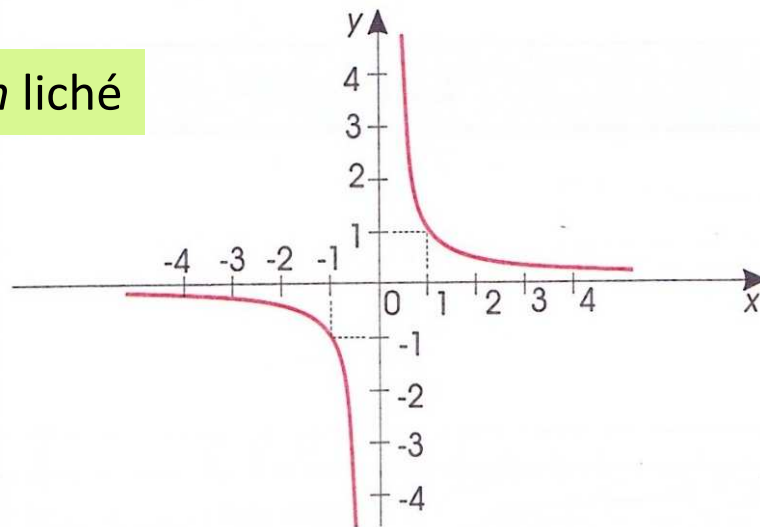
= funkce

$$f : y = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, D(f) = \mathbb{R}$$

Graf:

hyperbola stupně $n+1$

n liché



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

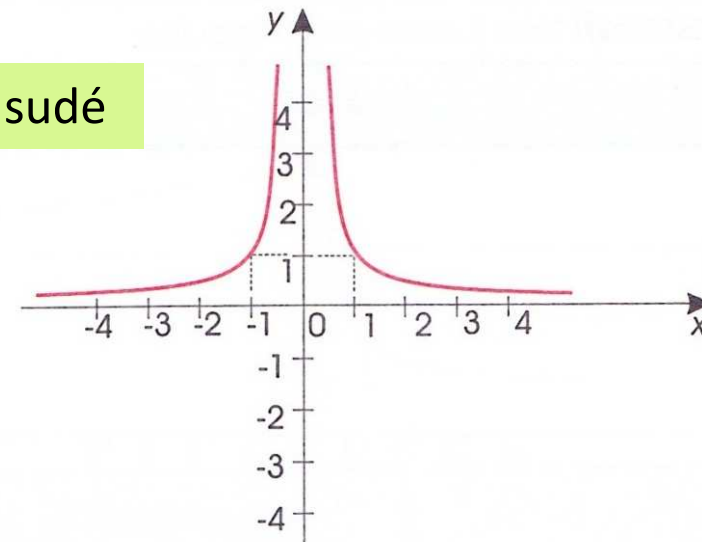
Klesá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

n sudé



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = (0, +\infty).$$

Je sudá.

Je omezená zdola, není shora omezená.

Je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$.

Je klesající pro $x \in (0, +\infty)$.

Není prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

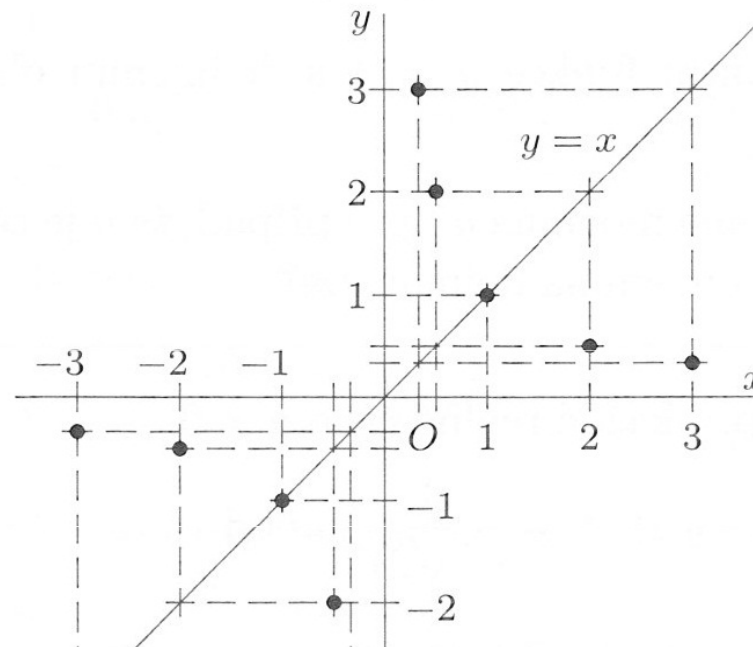
Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Úlohy

Př. 1: Načrtněte graf funkce $y = x^{-1}$

Řešení:

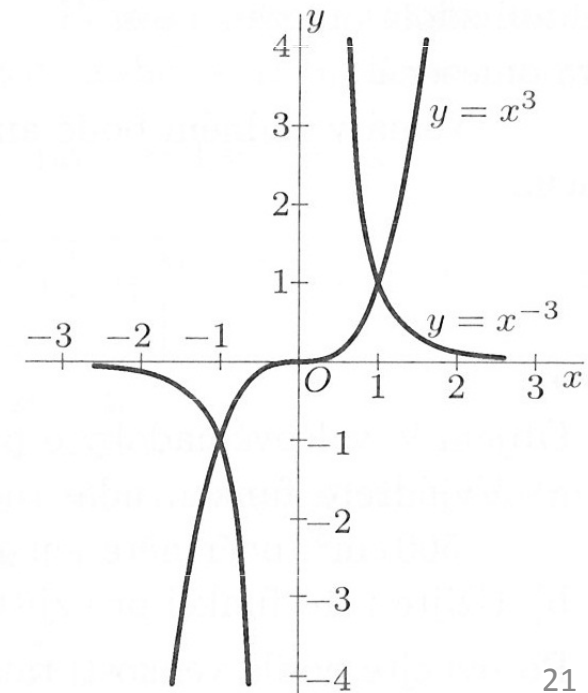
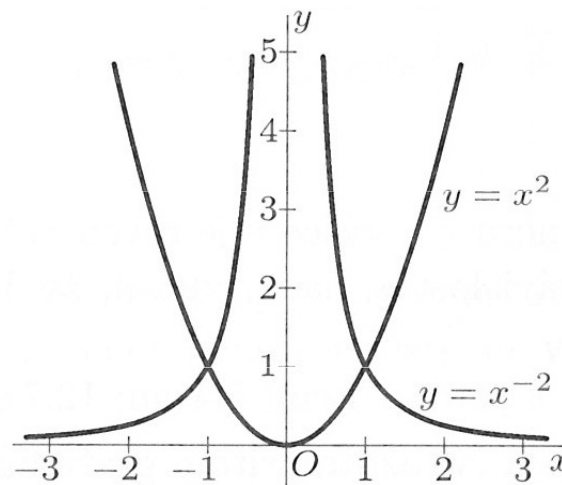
Body grafu funkce $y = x^{-1} = 1/x$ získáme tak, že sestojíme graf funkce $y = x$ a pro zvolené hodnoty proměnné x hledáme k hodnotám této funkce v téže soustavě souřadnic jejich převrácené hodnoty.



Př. 2: Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = x^{-2}$

b) $y = x^{-3}$



5 LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

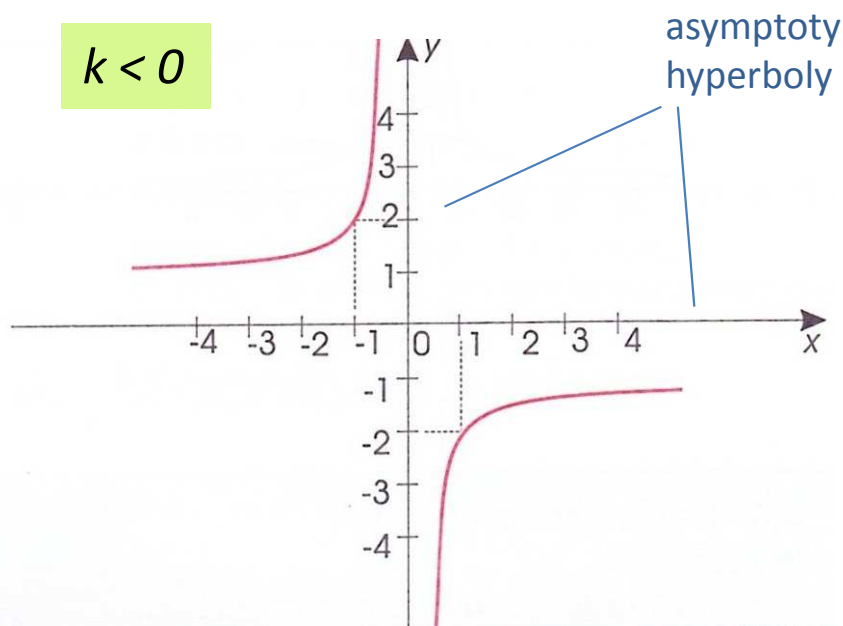
$$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

Nepřímá
úměrnost:

$$f: y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Graf: rovnoosá hyperbola

$k < 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

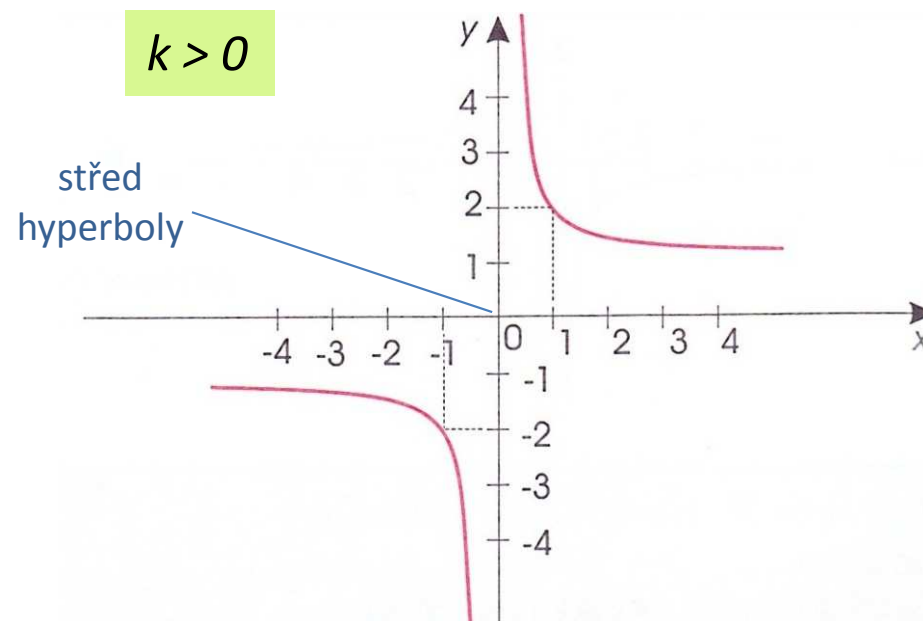
Je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

$k > 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je klesající pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, ad \neq bc$$

Graf: rovnoosá hyperbola

se středem v bodě $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$

Úlohy

Př. 1: Načrtněte graf funkce $f : y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

Literatura

- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.