

Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice

Repetitorium z matematiky

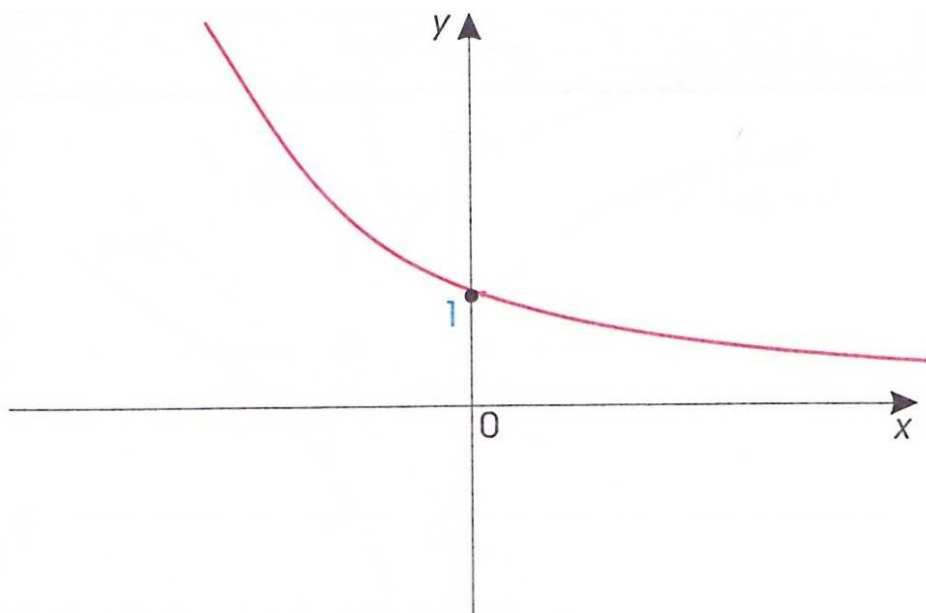
Podzim 2011

Ivana Vaculová

1 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f : y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R}$$

$$0 < a < 1$$



$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0; \infty).$$

Není ani sudá, ani lichá.

Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.

Je klesající, tedy prostá.

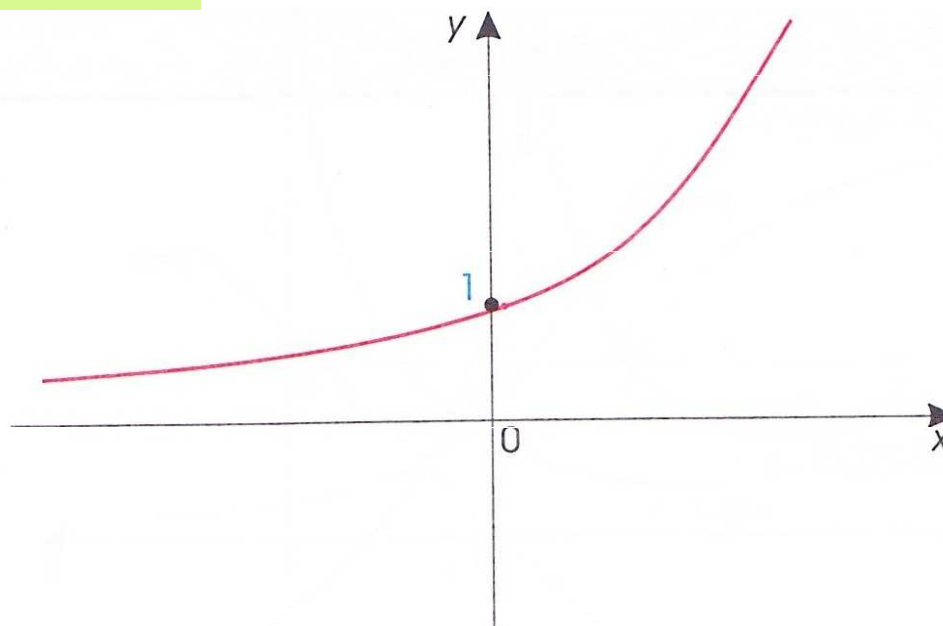
Nemá maximum, ani minimum.

Je inverzní k funkci logaritmické.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Graf: exponenciální křivka
(exponenciála)

$$a > 1$$



$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0; \infty).$$

Není ani sudá, ani lichá.

Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.

Je klesající, tedy prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je inverzní k funkci logaritmické.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Úlohy

Př.1: Na základě vlastností exponenciální funkce určete, které z následujících mocnin jsou větší než jedna, rovny jedné, menší než jedna:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}, 2,18^{0,1}, 0,45^{0,4}, \left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{1,001}}$$

Př.2: Rozhodněte, zda je pravdivý výrok:

$$(0,4)^{1,6} < (0,4)^{1,8}$$

Své rozhodnutí zdůvodněte. Využijte vlastností exponenciální funkce $y = (0,4)^x$

Př.3: Rozhodněte, který ze vztahů $0 < a < 1$, $a > 1$ platí, je-li:

$$a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{7}{3}}$$

Př.4: Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly p , r :

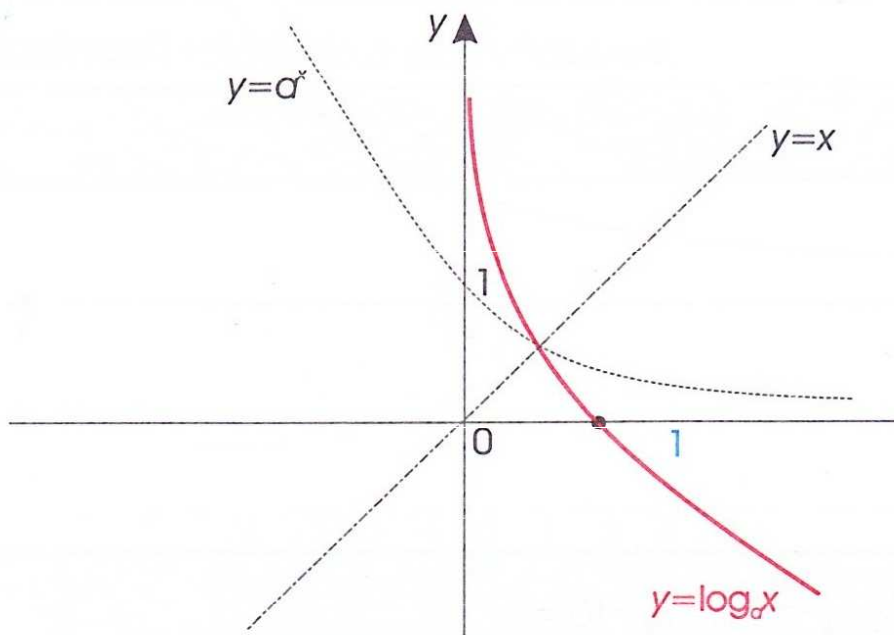
$$\left(\frac{3}{7}\right)^p < \left(\frac{3}{7}\right)^r$$

2 LOGARITMICKÁ FUNKCE

$$f : y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = (0; \infty)$$

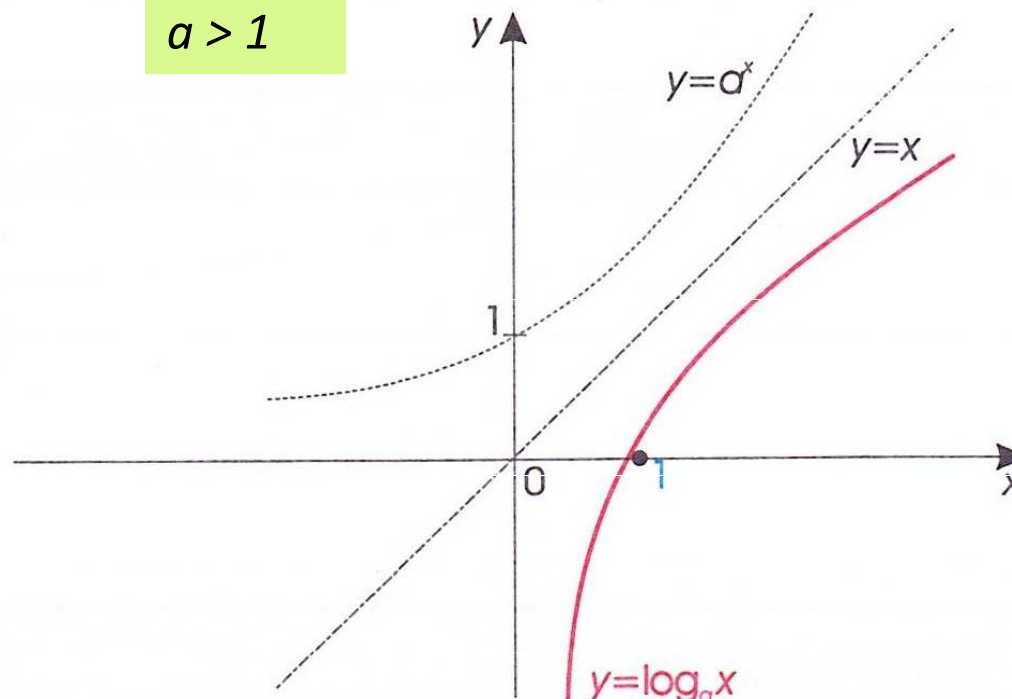
Graf: logaritmická křivka

$$0 < a < 1$$



$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v $(0; \infty)$.

$$a > 1$$



$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v $(0; \infty)$.

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

$$a) \log_5 7 < \log_5 9$$

$$b) \log_{10} 12 \leq \log_{0,3} 12$$

Využijte vlastnosti logaritmických funkcí.

3 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Při řešení **exponenciálních rovnic** využíváme pravidlo:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Př.1: $2^x = 8$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Př.2: $\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$

$$5^{-(2x-4)} = 5^3$$

$$-(2x-4) = 3$$

$$-2x = -1$$

$$x = 0,5$$

Př.3: Řešíme pomocí substituce

$$4^x + 2^x - 6 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$$

substituce $y = 2^x$

$$(y)^2 + y - 6 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y_1 = 2, y_2 = -3$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

$$2^x = -3$$

Nemá řešení

$$Zk : L(1) = 4^1 + 2^1 - 6 = 0$$

$$P(1) = 0$$

$$L(1) = P(1)$$

$$K = \{1\}$$

4 LOGARITMY A JEJICH VLASTNOSTI

Logaritmus čísla x o základu a je takové číslo y , pro které platí $a^y = x$.

$$\log_a x = y, \text{ právě když } a^y = x$$

Např.: $\log 10 = 1$, neboť $10^1 = 10$

$\log 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$

Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ platí:

$$\log_a 1 = 0, \text{ neboť } a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1, \text{ neboť } a^1 = a$$

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$ a necht' x_1, x_2 jsou libovolná čísla. Potom platí:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \text{ pro } \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\log_a \sqrt[n]{x^r} = \frac{r}{n} \log_a x \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}$$

5 LOGARITMICKÉ ROVNICE

Při řešení **logaritmických rovnic** využíváme pravidlo:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2, \text{ právě když } x_1 = x_2$$

Př.1: $2\log_{10}(x-1) = 0,5(\log_{10} x^5 - \log_{10} x)$

$$2\log_{10}(x-1) = 0,5\left(\log_{10} \frac{x^5}{x}\right)$$

$$2\log_{10}(x-1) = 0,5\log_{10} x^4$$

$$2\log_{10}(x-1) = 2\log_{10} x$$

$$\log_{10}(x-1) = \log_{10} x$$

$$(x-1) = x$$

$$0x = -1$$

$$K = \{ \}$$

Podmínka:

$$x-1 > 0, x > 0$$

$$\Rightarrow D = (1; \infty)$$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.