8. Parametrické vyjádření a obecná rovnice přímky a roviny

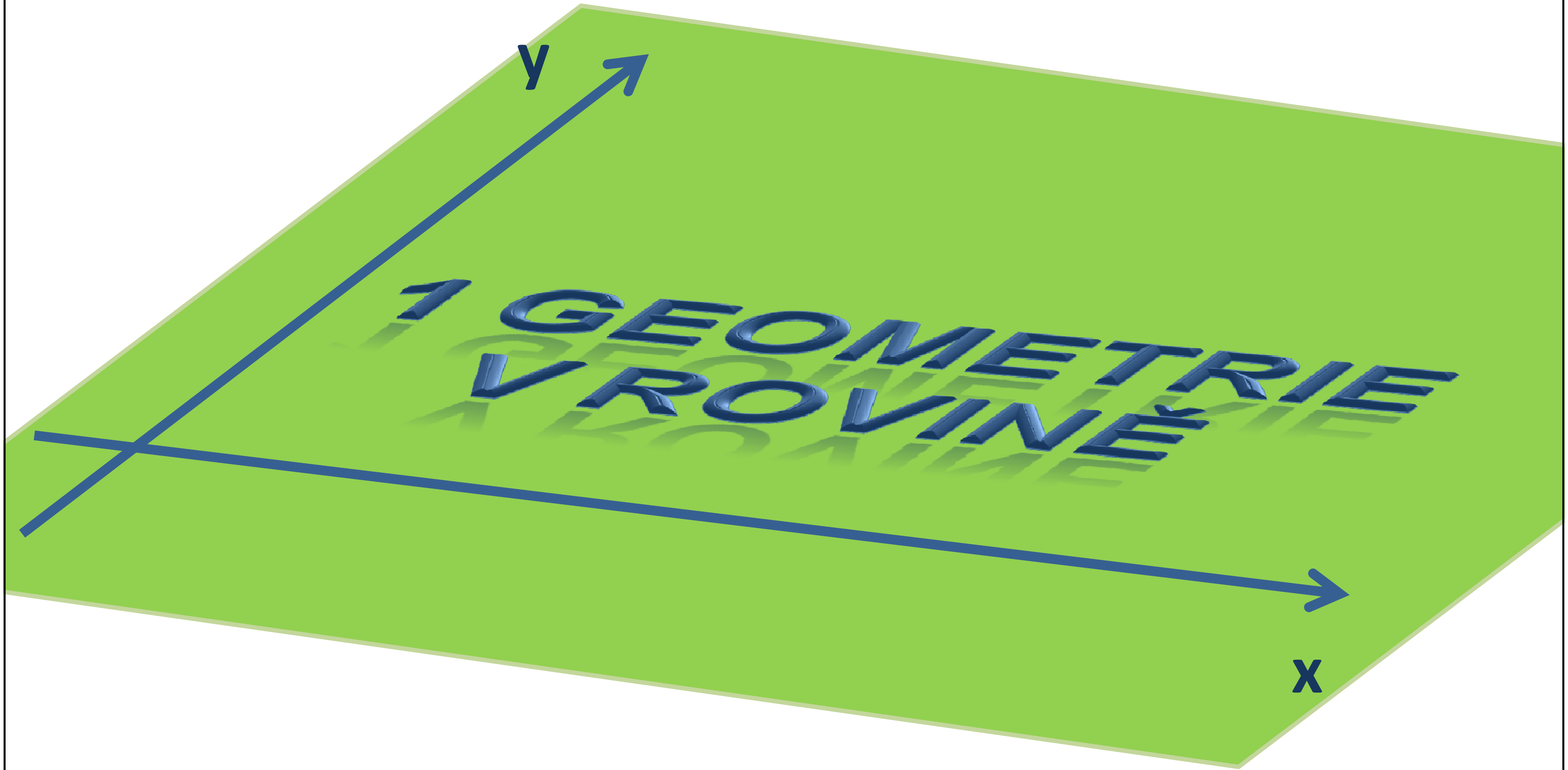
Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

1 GEOMETRIE V ROVINĚ



1.1 Parametrické vyjádření přímky

- Každé dva body **A, B** určují přímku **AB**
- Vektor ***u* = B – A** se nazývá **směrový vektor** přímky **AB**
- **Rovnice**

$$\boxed{X = A + tu, \quad \text{kde } t \in R}$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky určené bodem **A** a vektorem ***u*,** tj. ***p* (*A*, *u*)** .
Proměnná *t* se nazývá **parametr.**

Body **X, A** a vektor ***u*** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

X [x, y]

A [a_1, a_2]

u = (u_1, u_2).

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \quad \text{kde } t \in R \end{aligned}}$$

Úlohy

Př.1: Napište parametrické vyjádření přímky AB:

a) A [1,-1] a B[2,3],

b) A [2,-3] a B[0,2].

Př.2: Zjistěte, zda bod C leží na přímce AB:

a) A [1, 2], B [-1, 3], C [5, 0]

b) A [3, 1], B [1, 5], C [-1, 2]

Př.3: Zjistěte, zda jsou vektory $\boldsymbol{v_1}, \ldots \boldsymbol{v_5}$ směrovými vektory přímky AB, kde A [1, 3], B[-1, 5],

$\boldsymbol{v_1} = (1, 2)$

$\boldsymbol{v_2} = (3, -3)$

$\boldsymbol{v_3} = (1, -1)$

$\boldsymbol{v_4} = (2, 2)$

$\boldsymbol{v_5} = (2, -2)$

1.2 Obecná rovnice přímky

Rovnice

$$\boxed{p : ax + by + c = 0,}$$

kde alespoň jedno z čísel **a, b**, je nenulové, se nazývá **obecná rovnice přímky.**

- Vektor ***n* = (a, b)** se nazývá **normálový vektor přímky p** a je kolmý ke směrovému vektoru ***u*** přímky p.
- Dvě přímky **p, q** jsou totožné právě tehdy, je-li obecná rovnice přímky **p** násobkem obecné rovnice přímky **q**.
- Dvě přímky **p, q** jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor přímky **p** násobkem normálového vektoru přímky **q.**

Úlohy

Př.1: Napište obecnou rovnici přímky procházející body A [1, 3] a B[-2,1].

Postup: 1. Určíme směrový vektor ***u*** = (u_1, u_2)

2. Určíme normálový vektor ***n*** = $(-u_2, u_1)$

3. Napíšeme obecnou rovnici přímky, do které dosadíme koeficienty $a = -u_2$, $b = u_1$

4. Do rovnice dosadíme jeden z bodů A, B a vypočítáme koeficient c.

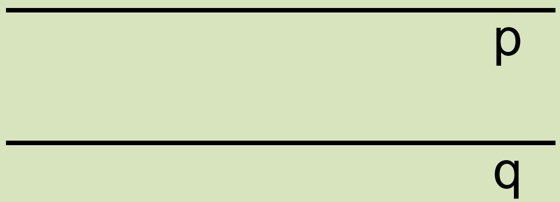
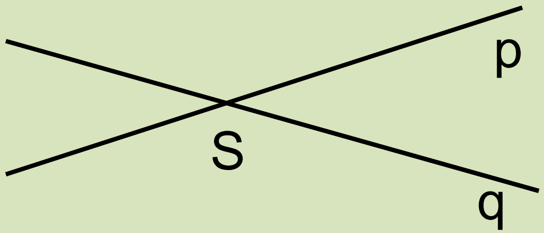
5. Napíšeme obecnou rovnici přímky.

Př.2: Napište rovnici přímky s normálovým vektorem ***n***, která obsahuje bod A:

a) **n** = (1, 3), A [-1, 5]

b) **n** = (2, -1), A [3, 0]

1.3 Vzájemná poloha **přímek** v rovině

Obrázek	Vzájemná poloha	Příklad
	Přímky jsou **totožné** $p \parallel q$	p: 2x + 3y – 1 = 0 q: 4x + 6y – 2 = 0
	Přímky jsou **rovnoběžné** různé $p \parallel q \wedge p \neq q$	p: 2x + 3y – 1 = 0 q: 4x + 6y – 3 = 0
	Přímky jsou **různoběžné** $p \# \rho \wedge \exists! S : S \in p \wedge S \in q$	p: 2x + 3y – 1 = 0 q: 4x + 1y – 3 = 0

Úlohy

<u>Př.1:</u> Určete vzájemnou polohu přímek p, q:

a) p: $2x - y + 1 = 0$
q: $3x + 2 = 0$

b) p: $x + 2y + 1 = 0$
q: $2x + y - 1 = 0$

c) p: $3x - y + 1 = 0$
q: $6x - 2y + 1 = 0$

d) p: $2x + 3y - 4 = 0$
q: $-x - 3/2y + 2 = 0$

2 GEOMETRIE V PROSTORU

2.1 Parametrické vyjádření **přímky**

- Každé dva body **A, B** určují přímku **AB**
- Vektor ***u* = B – A** se nazývá **směrový vektor** přímky **AB**
- **Rovnice**

$$\boxed{p : X = A + tu, \quad \text{kde}\, t \in R}$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky určené bodem **A** a vektorem ***u,*** tj. ***p (A, u)*** .
Proměnná *t* se nazývá **parametr.**

Body **X, A** a vektor ***u*** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

X [x, y, z]

A [a_1, a_2 , a_3] $\Rightarrow$

u = (u_1, u_2 , u_3).

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3, \quad \text{kde}\, t \in R \end{aligned}}$$

Úlohy

<u>Př.1:</u> Napište parametrické vyjádření přímky AB:

a) A [1,0, 3] a B[0, 3, -5],

b) A [2,-1, 1] a B[1, 1, 3].

<u>Př.2:</u> Zjistěte, zda bod Q [-3,8,-3] leží na přímce p (A, ***u***), kde:

A [1, 2, -1], ***u*** = [2, 3, 1].

2.2 Parametrické vyjádření **roviny**

- Každé **tři** body **A, B, C** určují **rovinu ABC**
- Vektory ***u* = B – A** a ***v* = C – A** se nazývají **směrové vektory** roviny **ABC.**
- **Rovnice**

$$\boxed{\rho : X = A + tu + sv, \quad \text{kde}\ t, s \in R}$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** roviny určené bodem **A** a vektory ***u,v,*** tj. **ρ (A, *u*, *v*)** .
Proměnné ***t, s*** se nazývají **parametry.**

Body **X, A** a vektory ***u, v*** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

X [x, y, z]

A [a_1, a_2 , a_3]

u = (u_1, u_2 , u_3)

v = (v_1, v_2 , v_3).

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + \mathrm{s}v_1, \\ y &= a_2 + tu_2 + \mathrm{s}v_2, \\ z &= a_3 + tu_3 + \mathrm{s}v_3, \quad \text{kde}\ t, s \in R \end{aligned}}$$

Úlohy

<u>Př.1:</u> Napište parametrické vyjádření roviny ABC:

a) A [1,0, 1], B[1, 2, 3], C[2, 3, -1]

b) A [2,-1, 1] a B[1, 1, 3], C[1, 2, -2].

<u>Př.2:</u> Zjistěte, zda bod M leží v rovině určené bodem A[1, 1, 3] a přímkou p (P, ***u***), kde P [3, -1, -7] a ***u*** (1, 1, 1):

a) M [0, 0, 2]

b) M [1, -1, 3]

2.3 Obecná rovnice **roviny**

Rovnice

$$\boxed{\rho : ax + by + cz + d = 0,}$$

kde alespoň jedno z čísel **a, b**, **c** je nenulové, se nazývá **obecná rovnice roviny.**

- Vektor ***n* = (a, b, c)** se nazývá **normálový vektor roviny ρ** a je kolmý k rovině **ρ**, tzn. je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině **ρ.**
- Dvě roviny **ρ, σ** jsou totožné právě tehdy, je-li obecná rovnice roviny **ρ** násobkem obecné rovnice roviny **σ**.
- Dvě roviny **ρ, σ** jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor roviny **ρ** násobkem normálového vektoru roviny **σ.**

Úlohy

Př.1: Napište obecnou rovnici roviny ABC, kde:

a) A [1, 0, 2], B[-1, 1, -2], C[3, 2, 0],

b) A [1, 1, 4], B[-1, 2, 1], C[0, -1, 0]

Postup: 1. Určíme dva směrové vektory ***u, v.***

2. Určíme normálový vektor ***n =*** (a, b, c), který je kolmý k oběma vektorům ***u, v.***

3. Napíšeme obecnou rovnici přímky, do které dosadíme koeficienty a, b, c.

4. Do rovnice dosadíme jeden z bodů A, B, C a vypočítáme koeficient d.

5. Napíšeme obecnou rovnici roviny.

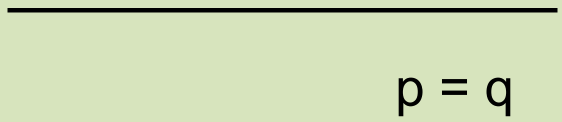
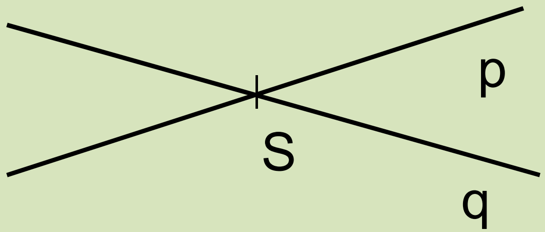
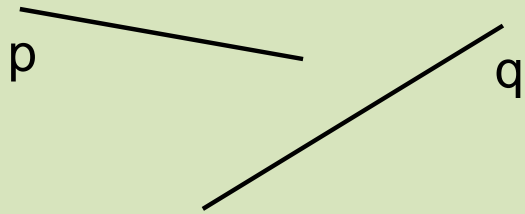
Př.2: Zjistěte, zda bod M leží v rovině ρ:

a) M [1, 1, -1], ρ: $3x – 2y + z = 0$

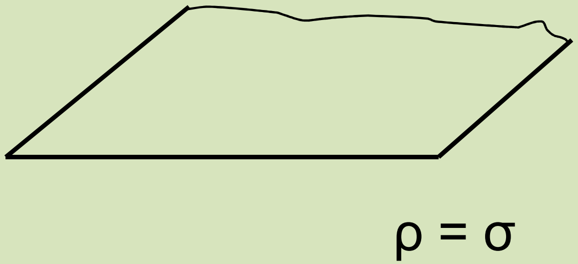
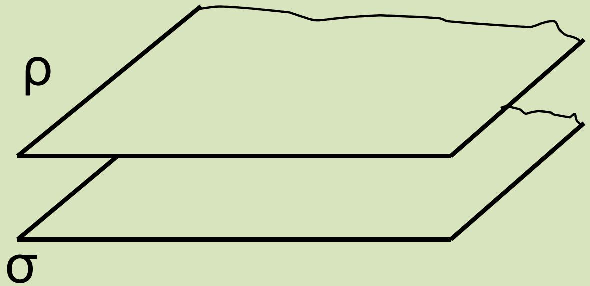
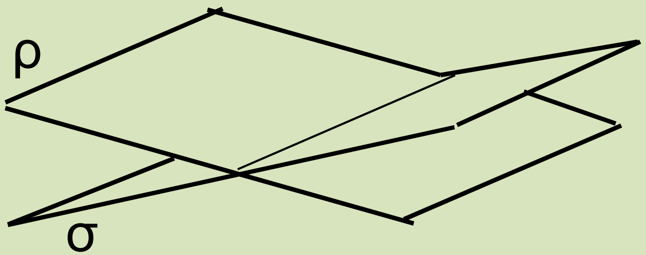
b) M [0, 2, 1], ρ: $x – 2y - 2z +1 = 0$

c) M [-1, 0, -1], ρ: $-x – y + 3z + 2 = 0$

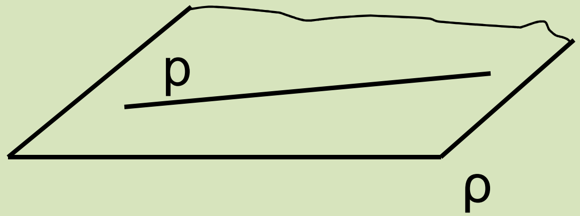
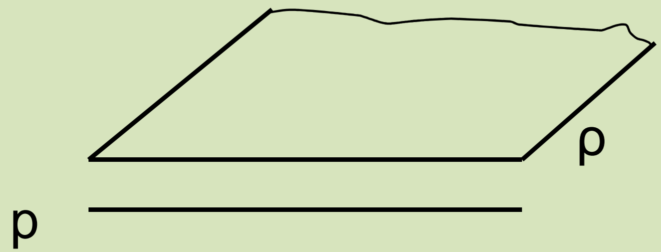
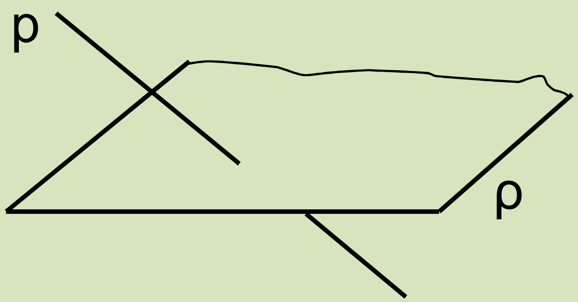
2.4 Vzájemná poloha **přímek v prostoru**

Obrázek	Vzájemná poloha
	Přímky jsou **totožné** $p = q$
	Přímky jsou **rovnoběžné** různé $p \parallel q \wedge p \neq q$
	Přímky jsou **různoběžné** $p \# \rho \wedge \exists! S : S \in p \wedge S \in q$
	Přímky jsou **mimoběžné** $p \# \rho \wedge \nexists S : S \in p \wedge S \in q$

2.5 Vzájemná poloha **rovin v prostoru**

Obrázek	Vzájemná poloha	Příklad
	Roviny jsou **totožné** $\rho = \sigma$	ρ: 2x + 3y + z – 1 = 0 σ: 4x + 6y + 2z – 2 = 0
	Roviny jsou **rovnoběžné různé** $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma$	ρ: 2x + 3y + z – 1 = 0 σ: 4x + 6y + 2z – 3 = 0
	Roviny jsou **různoběžné** $\rho \nparallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma$	ρ: 2x + 3y + z – 1 = 0 σ: 4x + 5y + 2z – 3 = 0

2.4 Vzájemná poloha **přímky a roviny** v prostoru

<table>
<tr><th>Obrázek</th><th>Vzájemná poloha</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Přímka p leží v rovině ρ
$p \in \rho$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Přímky je rovnoběžná s rovinou, ale neleží v ní.
$p \parallel \rho \wedge p \notin \rho$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Přímka je různoběžná s rovinnou
$p \# \rho$</td></tr>
</table>

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.