

### Typy úloh k písemné části zkoušky

Zkoušející: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

- Jsou dány množiny  $M = \{1,2,3,4\}$  a  $N = \{a,b,c,d\}$ .
  - Definujte výčtem prvků relaci  $R$  z množiny  $M$  do  $N$ , která není zobrazením.
  - Definujte relaci  $Z$ , která je zobrazením z množiny  $N$  do  $M$  a určete přesně jeho typ.
  - Zapište výčtem prvků relaci  $R \circ Z$  a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
  - Zapište dvě různé bijekce množiny  $N$  na množinu  $M$ .
  - Na množině  $N$  definujte dvě různé permutace  $P_1, P_2$  a určete permutace  $P_1 \circ P_2$  a  $P_2 \circ P_1$ .
- Je dána množina  $M = \{1,2,3\}$ . V množině  $M$  jsou dány relace  $R, T, U, V$  takto:  
 $R = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x + y = 5\}$ ,  $T = \{[x, y] \in M \times M; x \neq 2 \vee y = x + 1\}$ ,  
 $U = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \wedge y = x + 1\}$ ,  $V = \{[1,3], [2,1], [3,2]\}$ .
  - Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací  $R, T, U, V$  zobrazení v množině  $M$ . Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině  $M$ ?
  - Zapište relace  $R^{-1}, V^{-1}, V \circ V, U \circ V, R \circ U, R \circ (V \circ U)$ . Je některá z těchto relací zobrazením v množině  $M$ ? Pokud ano, určete přesně typ.
- Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině  $M = \{a, b, c\}$  operace  $*$ :

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

*	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

- V množině  $M = \{a, b, c\}$  definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
  - $K \wedge \overline{EN}$
  - $ND \wedge \overline{K} \wedge EN$
  - $ND \wedge EN \wedge \overline{EI}$
  - $A \wedge \overline{ZR}$
  - $\overline{K} \wedge EN \wedge \overline{EI}$
  - $EI \wedge ZR$
  - $ND \wedge \overline{A} \wedge EI \wedge \overline{ZR}$

U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v  $M$  existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina  $M$  spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

- Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace  $\circ$  v množině  $N(\mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ :
  - $x \circ y = 2x + y$
  - $x \circ y = x + y + 1$
  - $x \circ y = 2x + 2y$
  - $x \circ y = 2x - y$
  - $x \circ y = x + y - 2$
  - $x \circ y = x - 2y$
  - $x \circ y = xy + 1$
  - $x \circ y = x + y + xy$
  - $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly  $+$ ,  $-$ ,  $:$ ,  $:$  označují obvyklé číselné operace):  
 $(\mathbf{N}, +)$ ,  $(\mathbf{N}, -)$ ,  $(\mathbf{N}, \cdot)$ ,  $(\mathbf{N}, :)$ ,  $(\mathbf{C}, +)$ ,  $(\mathbf{C}, -)$ ,  
 $(\mathbf{C}, \cdot)$ ,  $(\mathbf{C}, :)$ ,  $(\mathbf{Q}, \cdot)$ ,  $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$   
 $(P(M), \cup)$ ,  $(P(M), \cap)$ ,  $(P(M), \cup, \cap)$ ,  $(P(M), \cap, \cup)$ , kde  $P(M)$  je  
 potenční systém množiny  $M = \{a, b\}$
7. Necht'  $(G, \circ)$  je komutativní grupa. Dokažte podrobně, že pro každé prvky  $a, b, c \in G$  platí: a)  $\overline{a \circ b} = \overline{a} \circ \overline{b}$       b)  $\overline{\overline{a}} = a$       c)  $c \circ a = c \circ b \Rightarrow a = b$ .
8. Množina  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné, b) nekonečné.
9. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny  $A, B, C$  tak, že množiny  $A, B$  mají společné dva prvky.  
 a) Rozhodněte a zapište, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.  
 b) Porovnejte kardinální čísla množin  $A, B, C$ . Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.  
 c) Určete  $|A| + |B|$ ,  $|A| + |C|$ ,  $|B| + |C|$ ,  $|A| \cdot |B|$ ,  $|A| \cdot |C|$ .
10. Je dáno číslo 54. Zvolte si další přirozené číslo větší než 65 a menší než 70. Obě čísla zapište ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) číselné soustavě, použijte obě metody převodu. Dále vypočítejte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) soustavě jejich součet, součin a rozdíl (proved'te zkoušky správnosti). Všechny výsledky získané ve čtyřkové soustavě převed'te přímo do soustavy dvojkové a šestnáctkové.
11. Vypočtete a proved'te zkoušky správnosti:  
 a)  $ABA_{12} + BAB_{12}$ , b)  $1A2E3_{16} - 76B9_{16}$ , c)  $13721_8 : 5_8$ . Výsledky porovnejte.
12. Trojčiferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 6. Přesuneme-li ji na místo stovek (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 387 větší než původní číslo. Určete původní číslo.
13. Čtyřčiferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet roven 22. Obě krajní číslice jsou stejné, obě vnitřní číslice jsou rovněž stejné. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Určete obě čísla.
14. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla  $A, B$  platí:  
 a)  $-(A + B) = (-A) + (-B)$       b)  $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$       c)  $(-A) \cdot (-B) = A \cdot B$   
 (v důkazu využijte této reprezentace:  $A = [a, b]$ ,  $B = [c, d]$ ).
15. Pro celá čísla  $A, B, X$  platí  $A + X = B$ . Určete celé číslo  $X = [x, y]$ , jestliže  
 $A = [1, 3]$ ,  $B = [7, 2]$ .

16. Dokažte, že sčítání a násobení celých čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel.)
17. Dokažte, že rovnice  $A \cdot X = B$  nemá v množině všech celých čísel řešení pro  $A = [3, 0]$ ,  $B = [0, 4]$ .
18. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.
19. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují  
a) celé číslo 0 (nula)      b) celé číslo 1 (jedna)
20. Jsou dána celá čísla  $A = [1, 3]$ ,  $B = [4, 5]$ .  
a) Vypočítejte  $A + B$ ,  $A \cdot B$ ,  $A - B$ .      b) Porovnejte čísla  $A$ ,  $B$ .  
Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.
21. Dokažte, že pro každá tři celá čísla  $A$ ,  $B$ ,  $C$  platí:  $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$ .  
Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „ $<$ “ v úloze 16 na s. 199 v učebnici.
22. Vypočítejte:  $a + |b| \cdot |a| - |-a| + |a \cdot b| - |a|^2 + |-b|$       pro  $a = -6$ ,  $b = 3$ .
23. Dokažte, že pro každé celé číslo  $a$  platí  $|a| = |-a|$ .
24. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd zlomků.)
25. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem  $(-5)$ . Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.
26. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísla desetinnými.
27. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo  
a)  $3,56$       b)  $1,4\bar{3}$       c)  $0,2\bar{7}$       d)  $0,1\bar{9}$

**Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů studovaných v předmětech: Základy algebry a aritmetiky a Aritmetika 1**