

Maxwellovy rovnice

Podle zákona elektromagnetické indukce vzniká v uzavřeném obvodu elektrický proud vždy, když se jakýmkoliv způsobem mění magnetický indukční tok plochou ohraničenou obvodem. K vysvětlení uvedeného proudu jsme zavedli pojem indukovaného elektromotorického napětí E_i .

Změna magnetického indukčního toku plochou obvodu může být vyvolána uměle vnějšími vlivy, jako například mechanickým otáčením smyčky, protékané proudem ve vnějším magnetickém poli, nebo změnami magnetické indukce generované vnějšími zdroji. Pomalu proměnný elektrický proud takto vznikající v obvodu vytváří proměnné elektrické pole, které můžeme pozorovat například mezi deskami kondenzátoru, vloženého do obvodu a které je nazýváno jako pole kvazistacionárním. Experiment ukazuje, že takové pole je s dostatečnou přesností potenciální. Soustava rovnic pro časově proměnné elektrické a magnetické pole vytvářené kvazistacionárním, pomalu proměnným elektrickým proudem se pak neliší od stacionárního elektrického a magnetického pole. Zabýváme-li se pouze studiem obvodů s kvazistacionárními proudy (a například průmyslové kmitočty 50 nebo 60 hertzů u střídavých proudů předpoklad kvazistacionárnosti velmi dobře splňují), stačí zahrnout jev elektromagnetické indukce zavedením pojmu impedance do Ohmova a Jouleova zákona.

Přejdeme-li však k dostatečně vysokým kmitočtům, setkáme se s novými experimentálními jevy, jakým je například vyzařování elektromagnetických vln obvodem. Dodávaná energie se přitom mění jednak v Jouleovo teplo, jednak je unášena do prostoru. Tato skutečnost ukazuje, že kvazistacionární přiblížení nevyčerpává hloubku souvislosti mezi elektrickým a magnetickým polem a že je třeba přejít k ještě obecnějšímu popisu. Zbývá udělat poslední krok, o nějž se zasloužil právě Maxwell. Je přitom pozoruhodné, že toto poslední zobecnění provedl Maxwell na základě teoretických úvah dříve, než byly vlastnosti obecného elektromagnetického pole a elektromagnetických vln experimentálně pozorovány a prozkoumány.

Maxwellovo zobecnění zahrnuje dvě nové základní koncepce - představu o *indukovaném elektrickém poli* a o *posuvném proudu*.

Představa o indukovaném elektrickém poli vznikla hlubokým domyšlením Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Maxwell si položil otázku, je-li pro vznik jevu elektromagnetické indukce přítomnost uzavřené vodivé smyčky podstatná, popřípadě je-li vůbec nutná přítomnost jakéhokoliv vodiče. Jde například o to, jak se bude chovat částice nesoucí náboj Q umístěná ve vakuu za přítomnosti proměnného magnetického pole.

Má-li zákon elektromagnetické indukce platit zcela obecně, je nutné předpokládat, že časově proměnné magnetické pole je schopné vyvolat konvekční proud volných nabitých částic stejně dobře, jako je schopné vyvolat indukční proud ve vodičích. Proto časově proměnné magnetické pole bude na uvedenou nabitou částici působit silou \mathbf{F} , která je úměrná časové změně magnetického pole a není závislá na pohybu částice. Tuto sílu je možné popsat pomocí nového typu elektrického pole \mathbf{E}_i které se nazývá indukovaným elektrickým polem. Platí tedy

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}_i \quad (1)$$

Bude-li v daném bodě prostoru nenulové také stacionární elektrické pole \mathbf{E}_s , vyvolané daným rozložením okolních nábojů, bude mít výsledná intenzita elektrického pole v místě částice hodnotu $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$. Celkovou sílu \mathbf{F} působící na částici pohybující se rychlostí \mathbf{v} bude možné opět vyjádřit Lorentzovým vzorcem

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

Zde však má intenzita pole E nový, obecnější smysl. Představuje celkovou intenzitu elektrického pole daného jednak okamžitým rozložením nábojů v prostoru, jednak hodnotou indukovaného elektrického pole, u něhož nemůžeme bezprostředně ukázat, které elektrické náboje jej vytvářejí. Toto celkové elektrické pole nazýváme *nestacionárním elektrickým polem*.

Existence indukovaného elektrického pole byla v Maxwellově době ovšem hypotézou. Maxwell předpokládal, že každá časová změna magnetického pole vyvolává vznik pole elektrického. Vznik indukovaného elektrického proudu je pak třeba považovat za projev tohoto elektrického pole v těch případech, kdy jsou v daném místě přítomni vhodné nositelé proudu. V dnešní době lze předpokládat uvedenou Maxwellovu hypotézu za plně experimentálně potvrzenou ve všech jejích důsledcích.

Nestacionární elektrické pole již ovšem není polem potenciálním. Abychom to ukázali, uvažujme libovolnou uzavřenou křivku l , nehybnou vůči pozorovací soustavě souřadnic. Při přenesení jednotkového náboje podél této křivky vykoná elektrické pole práci

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3)$$

Na druhé straně je třeba předpokládat, že podél křivky působí vždy indukované elektromotorické napětí E_F , které je v případě nehybné křivky dáno vztahem **(4.3)**. Protože přenesení náboje podél křivky reprezentuje určitý proud I , můžeme zmíněnou práci vyjádřit také jako práci vykonanou tímto indukovaným elektromotorickým napětím. Za předpokladu, že přenesení náboje proběhne v krátkém časovém intervalu Δt , je tato práce rovna $E_F I \Delta t$. Součin $I \Delta t$ představuje přenesený náboj, který jsme uvažovali jako jednotkový. Srovnáním obou způsobů vyjádření pak dostaneme

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

Plošný integrál na pravé straně může být počítán přes libovolnou plochu S , která je zvolenou křivkou l ohraničena.

Užitím Stokesovy věty vektorové analýzy lze levou stranu rovnice (4) vyjádřit rovněž pomocí plošného integrálu. Bude pak platit

$$\int_S \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5)$$

Vzhledem k libovolnosti plochy S můžeme vztah (5) zapsat též v diferenciálním tvaru jako

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6)$$

Vidíme tedy, že obecně nestacionární elektrické pole není potenciální, a není jej tedy možné ani vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole - potenciálu.

Ve vztahu (6) se poprvé setkáváme s diferenciální rovnicí, která vzájemně svazuje vektor intenzity elektrického pole a vektor magnetické indukce.

Kdybychom nyní přepsali soustavu rovnic pro stacionární, respektive kvazistacionární elektrické a magnetické pole a nahradili v ní rovnici $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ vztahem (6), dostali bychom

$$\begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{D} = \rho, & \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \end{array} \quad (7)$$

Vzniká otázka, nakolik adekvátně popisuje soustava rovnic (7) nestacionární, časově obecně proměnné elektromagnetické pole. Pokud jde o rovnici $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ víme, že představuje diferenciální tvar Gaussova zákona.

Ve shodě s Maxwellem provedeme nyní další zobecnění a budeme požadovat, aby Gaussův zákon platil ve stejném tvaru i pro obecně nestacionární elektrické pole.

Požadavek platnosti Gaussova zákona $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ pro nestacionární elektrické pole zahrnuje ovšem nutnost rozlišovat i v tomto obecném případě volné a vázané náboje a předpokládat platnost vztahu mezi vektorem elektrické indukce a vektorem elektrické polarizace.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

který zůstává definičním vztahem vektoru elektrické indukce.

Rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$, kterou zapisujeme v integrálním tvaru jako

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

vyjadřuje ve stacionárním případě neexistenci magnetických nábojů. Zobecnění platnosti rovnic $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ a $\text{div } \mathbf{B} = 0$ na obecný nestacionární případ je dnes potvrzeno celou dosavadní experimentální zkušeností. Zbývá zjistit, zda rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ představující diferenciální tvar Amperova zákona platí rovněž pro nestacionární pole. Snadno nahlédneme, že tomu tak není. Z této rovnice totiž plyne

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (8)$$

zatímco z rovnice kontinuity pro nestacionární případ máme

$$\text{div } \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Soustava rovnic (7) není tedy ještě konečným slovem a nepopisuje úplně nestacionární elektromagnetické pole. Zbývá vhodným způsobem zobecnit poslední z těchto rovnic. Také tento mimořádně hluboký myšlenkový krok provedl Maxwell a ukážeme jej v následujícím článku. "Estetické" neuspokojení se soustavou (7) vyvolává i její určitá nesymetrie; zatímco rotace intenzity elektrického pole závisí na změně magnetické indukce, ve výrazu pro rotaci magnetické indukce se analogický člen neobjevuje.

Experimentální zkušenost ukazuje, že i neúplná soustava (7) má své oprávnění za určitých podmínek, a to pro ne příliš rychle proměnné pole. Je to tedy soustava rovnic pro *kvazistacionární elektromagnetické pole*. S kvazistacionárním elektrickým polem jsme se již v případě elektrostatiky. Tam jsme jej však chápali v poněkud jiném významu. Šlo o elektrické pole vyvolané elektrickými náboji, jejichž rozložení v prostoru je ovlivněno působením elektromagnetické indukce v uzavřených obvodech. Uvedli jsme, že toto elektrické pole je potenciální. Hovořili jsme též o kvazistacionárním magnetickém poli v tom smyslu, že jsme předpokládali platnost Amperova zákona i pro nepříliš rychle proměnné proudy. Vazba mezi těmito kvazistacionárními poli se tedy neprojevila ve formulaci Maxwellových rovnic, ale výhradně prostřednictvím indukovaného elektromotorického napětí v obvodu.

Odpoutáme-li se od uzavřeného elektrického obvodu, nabude zákon elektromagnetické indukce diferenciální podoby (6) a elektrické pole přestane být potenciálním. Přesný obsah výrazu "kvazistacionární pole" není bohužel ustálen, a je proto třeba vždy blíže vymežit toto pole pomocí příslušných matematických vztahů.

Zobecnění zákona elektromagnetické indukce a jeho vyjádření v diferenciálním tvaru (6) umožňuje nový pohled na výsledek následujícího experimentu: indukovaný elektrický proud ve smyčce obepínající dlouhý solenoid či toroid můžeme chápat jako důsledek působení indukovaného elektrického pole \mathbf{E} na volné nositele náboje ve vodiči smyčky.

Uvedený experiment dokumentuje, že indukované elektrické pole vzniká i v místech s nulovou magnetickou indukcí. Indukované elektrické pole \mathbf{E} má nyní zřejmě význam indukované vtištěné intenzity. Ze srovnání výrazu pro indukované elektromotorické napětí s výrazem udávajícím obecný vztah mezi elektromotorickým napětím a vtištěnou intenzitou obdržíme pro intenzitu indukovaného elektrického pole vztah

$$\mathbf{E}_i = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9)$$

Tento výsledek znovu dokumentuje užitečnost vektorového potenciálu pro popis elektromagnetického pole.

Vraťme se nyní k rovnici $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ a pokusme se upravit její pravou stranu tak, aby nebyla v rozporu s rovnicí kontinuity. Předpoklad obecné platnosti Gaussova zákona $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ umožňuje upravit rovnici kontinuity na tvar

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Vidíme tedy, že veličina

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10)$$

splňuje vždy podmínku

$$\text{div } \mathbf{j}_c = 0 \quad (11)$$

podobně jako hustota stacionárního proudu. To přivedlo Maxwella na myšlenku, že touto veličinou je třeba nahradit hustotu volného makroskopického proudu \mathbf{j} v Amperově zákonu $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Dostáváme tak rovnici

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_c, \quad (12)$$

popř.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (13)$$

Rovnice (12), popř. (13), představují *zobecněný Amp`erův zákon v diferenciálním tvaru*. Popisují nestacionární magnetické pole a jejich fyzikální obsah nelze vysvětlit na základě dříve vyložených zákonitostí elektrických a magnetických jevů. Představují tedy nový fyzikální zákon, jehož platnost, dnes již plně experimentálně potvrzenou, předpověděl právě Maxwell.

Zbývá ovšem vyjasnit fyzikální smysl veličin vystupujících v rovnicích (12) , popř. (13) , a vyjasnit tak fyzikální obsah samotného pojmu *nestacionární magnetické pole*.

Jelikož stacionární a kvazistacionární magnetické pole jsou speciálními případy obecného pole nestacionárního, je možné považovat za samozřejmé, že i nestacionární magnetické pole se bude projevovat jednak silovými účinky na pohybující se náboje a jednak elektromagnetickou indukcí. Veličinou bezprostředně vyjadřující oba tyto fyzikální projevy bude opět vektor magnetické indukce \mathbf{B} . Silové účinky budou vyjádřeny Lorentzovým vzorcem), který bude i nadále představovat definiční vztah pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} a pro magnetickou indukci \mathbf{B} . Zákon elektromagnetické indukce zůstane vyjádřen vztahem (6) . Pro popis nestacionárního magnetického pole v látkovém prostředí si podrží svůj význam i intenzita magnetického pole \mathbf{H} .

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m , \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Veličinu \mathbf{j} c můžeme považovat za celkovou hustotu makroskopického nestacionárního proudu. Je to obecně časově proměnná veličina, jejíž definiční vztah (10) lze rozepsat do tvaru

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (14)$$

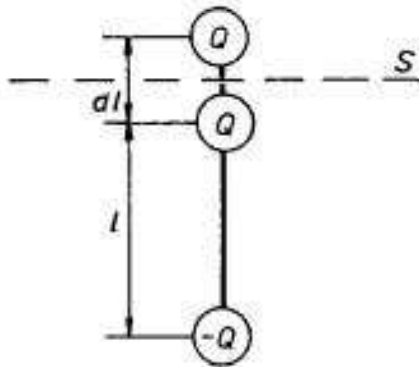
Vidíme, že \mathbf{j}_c zahrnuje *hustotu volného* (kondukčního a konvekčního) *proudu* \mathbf{j} , která popisuje transport volných nábojů, dále se v něm objevuje člen označovaný jako *hustota polarizačního proudu*.

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

který popisuje transport vázaných nábojů v látce při změně její elektrické polarizace a konečně obsahuje člen

$$\mathbf{j}_M = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

nazývaný *hustota Maxwellova proudu* (někdy také hustota posuvného proudu ve vakuu). Polarizační a Maxwellův proud nazýváme někdy souhrnně *posuvným proudem*.



Obr.1. Model polarizačního proudu

Polarizační proud v dielektriku si můžeme názorně představit jako oscilaci elementárních dipólů (viz obr.1). Uvažme model homogenního dielektrika tvořeného orientovanými elementárními dipóly. Každý takový dipól nechť představuje dvojici opačných bodových nábojů velikosti Q oddělených vzdáleností l , a má tedy dipólový moment o velikosti $p = Ql$. Nechť vázané, například kladné náboje vykonávají kmitavý pohyb tak, že střídavě protínají myšlenou plochu S a vytvářejí tak makroskopický střídavý proud. Hustotu těchto nábojů označme ρ_p a koncentraci dipólů označme N . Bude-li rychlost pohybu nábojů \mathbf{v}_p , dostaneme pro posuvný proud

$$\mathbf{j}_p = \rho_p \mathbf{v}_p = NQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = N \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Hustota Maxwellova proudu \mathbf{j}_M má skutečně fyzikální rozměr proudové hustoty. Jde o zvláštní, nový typ proudu, který není přímo spojen s pohybem elektrických nábojů (!), nýbrž s časovou změnou elektrického pole. Právě tento Maxwellův proud umožňuje uzavřít obvod střídavého proudu, v němž je zapojen kondenzátor s vakuovou mezerou mezi deskami, podobně jako kmity pružné nepropustné membrány v trubici s kapalinou mohou zprostředkovat proměnný tok kapaliny trubicí. Maxwellův proud zřejmě tedy může (a musí) existovat pouze v případě nestacionárního elektrického pole.

Zavedením celkového proudu I_c o hustotě \mathbf{j}_c (14) můžeme zobecnit i Amperův zákon v integrálním tvaru, na jehož pravé straně je nyní třeba uvažovat celkový proud tekoucí plochou ohraničenou křivkou l :

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c \quad (16)$$

V tomto tvaru platí Amperův zákon zcela obecně, nezávisle na způsobu rozložení proudu v uvažované ploše a na volbě této plochy.

Z tvaru rovnic (16) , popř. (12) , a z fyzikálního významu veličin I_c a j_c je zároveň vidět fyzikální smysl provedeného zobecnění: V nestacionárním magnetickém poli popsaném rovnicemi (16) , popř. (12) , jsou vedle magnetických účinků volných proudů zahrnuty i magnetické účinky polarizačního a Maxwellova proudu. Kvazistacionární magnetické pole, u něhož se magnetické účinky polarizačního a Maxwellova proudu zanedbávají, popisuje správně elektromagnetické jevy jen v situaci, kdy platí

$$j \gg \frac{\partial D}{\partial t} \quad (17)$$

Pro elektromagnetické pole ve vakuu platí

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (18)$$

dvojice vektorů \mathbf{D} , \mathbf{E} a \mathbf{B} , \mathbf{H} se liší pouze konstantami bez fyzikálního obsahu. Rovnice (12) může být pak vyjádřena pomocí veličin \mathbf{E} , \mathbf{B} , popisujících bez-prostředně účinky pole, ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (19)$$

Jak se snadno přesvědčíme, veličina $1/(\epsilon_0 \cdot \mu_0)$ má fyzikální rozměr rychlosti. Později odvodíme, že touto rychlostí je převrácená hodnota rychlosti světla (též rychlost šíření elektromagnetických vln ve vakuu).

V předcházejícím výkladu jsme ukázali, jak lze zobecnit rovnice popisující vlastnosti makroskopického elektrického a magnetického pole na případ nestacionárního, časově libovolně proměnného pole. Viděli jsme, že v tomto případě elektrické pole závisí vedle rozložení elektrických nábojů též na změnách magnetického pole a magnetické pole vedle rozložení elektrických proudů také na změnách elektrického pole. To nás opravňuje zavést pojem jediného, a to *elektromagnetického pole*.

Důsledkem tohoto zobecnění je pak předpověď existence elektromagnetických vln, které jsou dnes ve všech svých vlastnostech podrobně experimentálně i teoreticky prozkoumány.

Při odvozování rovnic elektromagnetického pole jsme v celém průběhu výkladu postupovali induktivní metodou, tj. vycházeli jsme z experimentálních fakt a pozorování a přecházeli od případů speciálních ke stále obecnějším. Při každém takovém kroku jsme upozorňovali, že formulaci zákonů a rovnic platných pro případ speciální nelze automaticky přenášet na případ obecnější, i když se to zdá sebevíce "samozřejmé" a zdánlivě není důvodu o obecnější platnosti získaných vztahů pochybovat.

Každé zobecnění je třeba znovu experimentálně ověřovat, důsledky z něho plynoucí porovnávat s praktickou zkušeností. Postup, který jsme použili, odpovídá zároveň i historické cestě, na níž byly poznatky o elektromagnetismu v průběhu několika století získávány.

Vlastnosti makroskopického elektromagnetického pole se tak podařilo nakonec shrnout do čtyř obecně platných fyzikálních zákonů. Jsou jimi *zákon Gaussův*, *zákon Amperův zobecněný na případ celkového, nestacionárního proudu*, *Faradayův zákon elektromagnetické indukce* a *zákon o neexistenci magnetických nábojů*.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(20)

Veličina Q značí volný náboj v objemu ohraničeném plochou S , veličina I proud procházející smyčkou I .

V diferenciálním tvaru představují tyto zákony soustavu čtyř parciálních diferenciálních rovnic, *Maxwellových rovnic elektromagnetického pole*:

$$\begin{array}{l} \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array} \quad (21)$$

Rovnice uvedené v prvním řádku se někdy nazývají první sérií Maxwellových rovnic a udávají vzájemný vztah mezi vektory elektromagnetického pole, objemovou hustotou volných nábojů ρ a hustotou volných proudů \mathbf{j} . Rovnicím v druhém řádku se říká druhá série Maxwellových rovnic, vyznačují obecně platné vlastnosti vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} a magnetické indukce \mathbf{B} . Všimněte si, že pro vektory \mathbf{D} a \mathbf{H} takovéto obecné vlastnosti formulovat nelze.

Při formulování soustavy Maxwellových rovnic jsme se omezili na případ elektromagnetického pole v prostředí nacházejícím se v klidu vůči pozorovací soustavě souřadnic. Indukovaná elektromotorická napětí, popř. další jevy vznikající v pohybujících se vodičích, je třeba popsat pomocí dodatečných vnějších vtištěných sil. Vyčerpávající popis vlastností makroskopického elektromagnetického pole v pohybujícím se prostředí lze nalézt v učebnicích teorie elektromagnetického pole, v nichž jsou uplatněna hlediska teorie relativity (viz například [3]).

Z Maxwellových rovnic vyplývá obecná rovnice kontinuity proudu, kterou lze formulovat též jako výraz obecného zákona zachování náboje. Dostaneme ji po aplikaci operace divergence na rovnici pro rot \mathbf{H} , vyjádříme-li $\operatorname{div} \mathbf{D}$ pomocí hustoty volných nábojů ρ . Tento výsledek nás ovšem nepřekvapuje, neboť jak jsme viděli v předchozím článku, bylo zobecnění rovnice pro rot \mathbf{H} motivováno právě požadavkem platnosti rovnice kontinuity v obecném tvaru.

Maxwellovy rovnice (21) představují soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Takové rovnice mají nekonečně mnoho různých řešení a k vyčlenění jednoznačného fyzikálního řešení je nutné doplnit hraniční podmínky. Pohlížíme-li na soustavu (21) jako na rovnice k určení vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} a \mathbf{H} při zadaném rozložení volných nábojů a proudů, jde o soustavu lineárních nehomogenních rovnic.

Můžeme též řešit opačnou lineární úlohu, zjišťovat objemovou hustotu nábojů a hustotu proudů při zadaném elektromagnetickém poli. Tato úloha, zejména v podobě určování pohybu bodových nábojů v elektrických a magnetických polích, má velký praktický význam v elektronice a budeme se jí zabývat v kapitole 6. Nejobecněji můžeme vzít v úvahu, že náboje a proudy se pohybují vlivem sil elektromagnetického pole, ale zároveň samy toto pole i ovlivňují. Tím vzniká velmi složitá nelineární úloha, která nebyla v celé obecnosti dosud vyřešena.

Čtyři neznámé vektorové funkce \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} představují dvanáct neznámých funkcí skalárních a počet osmi (složkových) Maxwellových rovnic je zřejmě k jejich určení nedostatečný. Víme však, že v látkovém prostředí existují materiálové vztahy. V určité aproximaci mohou být vyjádřeny funkčními závislostmi $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Pro mnoho látek můžeme dokonce předpokládat platnost lineárních vztahů

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (22)$$

a k určení vektorů \mathbf{D} a \mathbf{H} stačí tedy znát permitivitu ε a permeabilitu μ prostředí. V neizotropních lineárních prostředích, kde vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} , popř. \mathbf{B} a \mathbf{H} nemusí mít též směr, je třeba znát složky tenzoru permitivity, resp. permeability.

Vztahy (22) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} , \quad \mathbf{P}_m = \mu_0 \chi_m \mathbf{H} \quad (23)$$

kde χ_e a χ_m jsou i elektrická a magnetická susceptibilita prostředí. Již dříve byl prokázán značně obecný charakter Ohmova zákona,

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$$

Výrazy (22) jsou příkladem lineárních materiálových vztahů, které umožňují nahradit údaje o prostorovém rozložení vektorů \mathbf{j} , \mathbf{D} a \mathbf{H} v látkovém prostředí znalostí takzvaných materiálových konstant γ , ε , μ (popřípadě ještě vtištěné intenzity \mathbf{E}^*).

Doplníme-li soustavu Maxwellových rovnic materiálovými vztahy, zjednoduší se úloha na hledání vektorů $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (tedy šesti skalárních funkcí), jejichž fyzikální význam je dán Lorentzovým vzorcem. Ve vakuu, kde nejsou přítomny elektrické náboje a proudy a kde platí $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, nabudou Maxwellovy rovnice zvláště jednoduchého a symetrického tvaru

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Právě vytčený postup lze využít k určení průběhu polí pouze v těch bodech, v jejichž bezprostředním okolí se parametry prostředí mění spojitě. V oblastech, kde dochází k jejich nespojitým změnám (například na plošném rozhraní dvou typů prostředí), však Maxwellovy rovnice v podobě (21) selhávají. V těchto případech je třeba průběh pole vyšetřit užitím integrálních vztahů (20). Jak víme, pomocí těchto vztahů byly ve speciálních případech odvozeny podmínky pro změnu tečných, popř. normálových, složek vektorů \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{H} při přechodu rozhraním dvou prostředí. Protože integrální vztahy pro toky vektorů \mathbf{D} a \mathbf{B} uzavřenými plochami zůstávají v platnosti i v případě nestacionárního pole, budou z nich odvozené podmínky

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_s, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (25)$$

také obecně platné. V integrálních vztazích pro cirkulace vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} podél uzavřených křivek se nyní objevují nové členy s parciálními derivacemi $\Re \partial \mathbf{B} / \Re \partial t$ a $\Re \partial \mathbf{D} / \Re \partial t$. Provedeme-li však analogické odvození s křivkami tvaru malých ob-délníčků přimykajících k vyšetřované ploše jako v odstavcích 1.2.6 a 3.5.3 a uvážíme-li konečné hodnoty vektorů \mathbf{B} a \mathbf{D} a jejich derivací, zjistíme, že tyto nové členy výsledek neovlivní. Můžeme tedy opět psát

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s \quad (26)$$

Použijeme-li pojmů plošné divergence a rotace, můžeme podmínky na rozhraní vyjádřit v jednoduché a symetrické podobě

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Div } \mathbf{D} = \sigma, & \text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_s, \\ \text{Rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \text{Div } \mathbf{B} = 0. \end{array} \right\} \quad (27)$$

Na pravé straně zde přitom vystupují plošná hustota volných nábojů σ a lineární hustota volných plošných proudů \mathbf{j} S. Existují-li v látkovém prostředí (dielektriku či magnetiku) pouze vázané náboje a proudy, budou tyto hustoty ovšem nulové a podmínky na rozhraní se dále zjednoduší.

Z matematického hlediska je třeba vztahy (27) považovat za hraniční podmínky, kterým musí řešení Maxwellových rovnic (21) na plochách nespojitostí vždy vyhovovat. Pro určení konkrétního průběhu elektromagnetického pole dané soustavy mají proto stejnou důležitost jako Maxwellovy rovnice samotné.