Rozšiřující studium pro střední školy

ROVNICE A NEROVNICE

Růžena Blažková

1. Základní pojmy

Rovnost

$a = b$ – binární relace, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní

Rovnice s neznámou x

a) Výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme

b) Zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou

Definiční obor, obor proměnné

Rozlišujeme:

rovnice algebraické, iracionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické,

rovnice s jednou neznámou, s více neznámými,

rovnice prvního stupně, vyšších stupňů,

soustavy rovnic.

Kořen rovnice neboli řešení rovnice je každé takové číslo, které po dosazení do rovnice za neznámou zaručí naznačenou rovnost (po dosazení za neznámou se hodnota levé strany rovnice rovná hodnotě pravé strany rovnice).

Řešit rovnici znamená najít všechny kořeny rovnice.

Řešení rovnice můžeme hledat v různých množinách, např. v množině všech přirozených čísel, v množině všech celých čísel, v množině čísel racionálních či reálných.

Úpravy ekvivalentní – rovnice před úpravou i po úpravě mají tutéž množinu řešení:

- Záměna obou stran rovnice
- Přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice.
- Násobení (dělení) obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným nenulovým výrazem.

I když po ekvivalentních úpravách není nutné provádět zkoušku správnosti, je vhodné na střední škole je zkoušku provést proto, aby se vyloučily případné chyby (např. při roznásobování závorek, počítání se zápornými čísly, opomenutí některého čísla apod.).

Úpravy důsledkové – rovnice před úpravou a po úpravě nemusí mí tutéž množinu řešení, může mít i některá další řešení. Platí, že každé řešení původní rovnice je také řešením rovnice upravené, avšak obráceně to neplatí.

- Umocnění obou stran rovnice.
- Odmocnění obou stran rovnice.

Př. Řešte v **R** rovnici $\sqrt{x} = 6 - x$

Řešení grafické – souvisí s využitím učiva o funkcích

2. Lineární rovnice

Lineární rovnicí s neznámou x nazýváme rovnici $ax + b = 0$, kde a, b jsou reálná čísla.

Diskuse řešení vzhledem k a, b:

$a \neq 0, b \neq 0$	$x = -\frac{b}{a}$	rovnice má jediné řešení
$a = 0,\ b \neq 0$	$0.x = -b$	rovnice nemá řešení
$a \neq 0,\ b = 0$	$a.x = 0$	$x = 0$
$a = 0,\ b = 0$	$0.x = 0$	rovnice má nekonečně mnoho řešení

Řešte v **R** rovnice:

1. $4x + 2 – (3 + 4x) = 2x – 2(1 + x) + 1$
2. $3x - 5(1 – 2x) = x – 4(3 – 3x)$
3. $\frac{5x-2}{6} - \frac{x-1}{3} = \frac{x-4}{9}$

Rovnice s absolutní hodnotou

Zopakovat pojem absolutní hodnoty reálného čísla.

Definice: Absolutní hodnota reálného čísla je reálné číslo, pro které platí:

Jestliže $a > 0$, $|a| = a$

$a = 0$ $|a| = 0$

$a < 0 \qquad |a| = -a$

Geometrický význam absolutní hodnoty: vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od počátku (obrazu čísla 0).

Je vhodné sestavit metodickou řadu úloh, aby žáci pochopili podstatu řešení rovnic s absolutní hodnotou (včetně grafického znázornění).

1. $|x-1| = 2$
2. $|x-3|^2 = 1$
3. $|x-2| = x+1$
4. $|x-2| = 3|x-4|$
5. $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 3$
6. $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = |x+2|$

Rovnice s parametrem

Rovnice, ve které se kromě neznámé vyskytuje další písmeno. Jde o jeden zápis většího množství rovnic pro různé hodnoty parametru. Vyřešit rovnici s parametrem znamená určit množiny všech řešení odpovídající jednotlivým hodnotám parametru (tedy vyřešit všechny rovnice pro daný parametr). Je však nutné vědět, kterou množinu čísel parametr probíhá.

1. Řešte v **R** rovnici s neznámou *x* a parametrem *b:* $\sqrt{x^2+b^2} - b = x$
2. Řešte v **R** rovnici s neznámou *x* a parametrem *a:* $\dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Kvadratické rovnice

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in$ **R,** $a \neq 0$ se nazývá kvadratická rovnice.

Člen kvadratický, lineární, absolutní.

Řešení kvadratických rovnic bez absolutního členu $\quad ax^2 + bx = 0$

bez lineárního členu $\quad ax^2 + c = 0$.

Odvození vztahu pro řešení úplné kvadratické rovnice.

Diskuse počtu řešení kvadratické rovnice vzhledem k diskriminantu.

Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice, Viétovy vzorce.

Grafické řešení kvadratické rovnice.

Rovnice s neznámou v odmocnině, iracionální rovnice

Rovnice řešené v množině všech reálných čísel obsahují odmocniny z neznámé nebo z výrazů s neznámou. Řeší se zpravidla umocňováním, které lze:

a) Provést jako důsledkovou úpravou, pak je nutnou součástí řešení zkouška (umocnění sudým exponentem je typická neekvivalentní úprava.

b) Provést jako ekvivalentní úpravu stanovením doplňujících podmínek, což bývá obtížné.

c) Substitucí za iracionální výraz.

1. $\sqrt{5-x} = x+1$

2. $\sqrt{x+7} = x-5$

3. $4\sqrt{3x+1} = 2+3\sqrt{5x-1}$

4. $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-8} = 2$

Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice řešené v **R** jsou rovnice, které obsahují neznámou nebo výraz s neznámou v exponentu mocniny. Řešení se zpravidla převádí na řešení algebraických rovnic.

a) Využití vztahů mezi mocninami (převedení na stejný základ).

b) Substituce.

c) Logaritmování.

d) Využití vlastností exponenciální funkce.

1. $3^{x+2} - 5^{x} = 3^{x+4} - 5^{x+2}$

2. $5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2^{x+2}$

3. $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$

Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice řešené v **R** jsou rovnice, které obsahují logaritmus neznámé nebo výrazu s neznámou při daném základu.

Nutno znát pravidla pro počítání s logaritmy.

a) Rovnost logaritmů.

b) Substituce.

c) Odlogaritmování.

1. $3\log x = 1 + \log x^2$

2. $2 \cdot \log_3 (x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0$

3. $\log(3x^2 + 1) - \log(3 + x) = \log(3x - 2)$

4. $\log_x 5 \cdot \sqrt{5} = \log_x{}^2 \sqrt{5} + \frac{5}{4}$

5. $x^{\log x} = 100x$

Rovnice goniometrické

Nutná znalost vztahů mezi goniometrickými funkcemi

1. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$

3. $2\sin x \cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

4. $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$

5. $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4\cot gx = 0$

6. $\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + 2tgx - 3 = 0$

7. sin x = sin $5x$

8. sin $3x$ +sin x = sin $2x$

Soustavy rovnic

1. **Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých**
2. **Neurčité rovnice**
3. **Soustavy lineárních a kvadratických rovnic**

Nerovnost

$a < b$, $a > b$, $a \leq b, a \geq b$ - binární relace, která je antisymetrická a tranzitivní

Nerovnice

a) Výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme

b) Zápis nerovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou

Nerovnice s absolutní hodnotou

1. V množině **R** řešte nerovnici: $2|x-1|$ - $3|2-x| \leq |x|$

Kvadratické nerovnice

Exponenciální nerovnice

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$$

Logaritmické nerovnice