Ma3DC_KG4: Kuželosečky a kvadriky

Plán

- elementární (geometrické) definice, ekvivalentní vymezení, vlastnosti
- analytické (algebraické) vyjádření, invarianty, klasifikace
- příklady, užitek, srovnání

Zakončení

- aspoň polovinu písemně (a uspokojivě) vypracovaných úloh
- aspoň polovinu bodů u závěrečné písemky

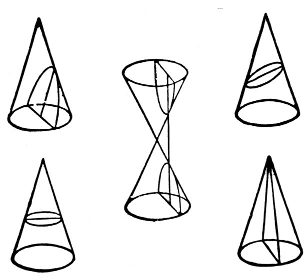
Poslední aktualizace: 22. listopadu 2015, Vojtěch Žádník

Úvod

Kuželo-sečky jsou rovinné řezy kuželové, příp. válcové plochy.[1]

Nedegenerované (*regulární*) kuželosečky jsou vyseknuty rovinou, která neprochází vrcholem kužele:

- *elipsa* (spec. *kružnice*) — žádný nevlastní bod,
- *parabola* — jeden nevlastní bod,
- *hyperbola* — dva nevlastní body.



Degenerované (*singulární*) kuželosečky jsou určeny rovinou, která obsahuje vrchol kužele.

[1] Válec je kužel s nevlastním vrcholem. Uvažovaný kužel/válec nemusí být nutně rotační.

Elipsa: ekvivalentní definice

Elipsa je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky;

(B) množina bodů v rovině, jež mají konstantní součet vzdáleností od dvou bodů E a F:
$$|EX| + |XF| = \text{konst.};$$

(C) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu F a přímky d, přičemž
$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} < 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

(E) afinní obraz kružnice.

Související pojmy

- Body E a F jsou *ohniska*, přímka d je *řídící přímka* elipsy,
- elipsa je souměrná podle dvou navzájem kolmých *os*,
  $a =$ délka *hlavní poloosy*, $b =$ délka *vedlejší poloosy* ($a > b$),
- elipsa je souměrná podle *středu* = průsečíku jejích os,
- konstanta v (B) je rovna $2a$,
- konstanta v (C) je rovna $\frac{e}{a}$ = *(numerická) výstřednost*,
  kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ = *(lineární) výstřednost*,
- kvadratická rovnice v (D) je tzv. *vrcholová*, resp. *středová rovnice* elipsy,[2] kde $p = \frac{b^2}{a}$ = *parametr*.

Poznámky

Ekvivalenci (A) $\iff$ (E) známe z Konstrukční geometrie.

Ostatní ekvivalence a podrobnosti k uvedeným číselným charakteristikám ukážeme za chvíli (s. 9–11).

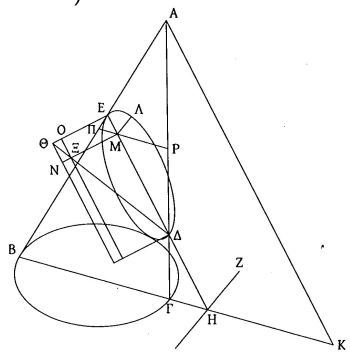
[2] Pojmenováno podle umístění počátku odpovídající souřadné soustavy.

Věta Apollóniova

Uvažme kužel s kruhovou podstavou a jeho eliptický řez jako na obrázku. Potom pro libovolný bod Λ na elipse platí

$$\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME, \tag{1}$$

kde M je pata kolmice z Λ na ΔE a Ξ je bod na úhlopříčce pevného přiloženého obdélníku se stranami ΔE a $E\Theta$, kde $E\Theta$ je určená vztahem $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \cdot K\Gamma)$.[3]



[3] Za chvíli bude patrné, že velikost $E\Theta$ je rovna právě dvojnásobku parametru p.

Důkaz věty Apollóniovy

Z definující rovnosti pro úsečku $E\Theta$ a podobností několika trojúhelníků plyne:

$$\frac{\Delta M}{M\Xi} = \frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AK}{BK}\frac{AK}{K\Gamma} = \frac{EM}{M\Pi}\frac{\Delta M}{MP}.$$

Levou stranu rozšíříme ME, aby poměry na obou stranách měly stejný čitatel. Odkud plyne rovnost jmenovatelů

$$M\Xi \cdot ME = M\Pi \cdot MP.$$

Rovina $\Lambda\Pi P$ je rovnoběžná s podstavou, tudíž řezem kuželové plochy touto rovinou je kružnice a ΠP je její průměr.

Podle Thaletovy věty je úhel $\Pi\Lambda P$ pravý.

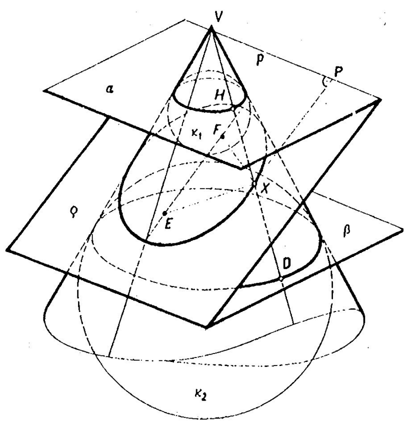
Podle Eukleidovy věty o výšce platí

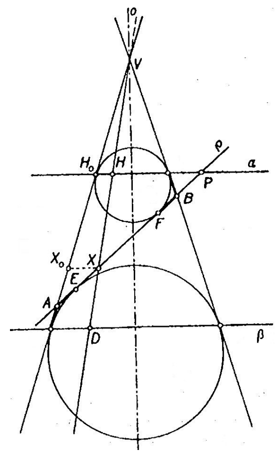
$$M\Pi \cdot MP = M\Lambda^2.$$

Dosazením do předchozí rovnice dostáváme (1). □

Věta Dandelinova–Queteletova

Uvažme rotační kužel a jeho eliptický řez jako na obrázku. Potom ohniska této elipsy jsou právě body dotyku kulových ploch, které se dotýkají jak kužele, tak roviny řezu.





Důkaz věty Dandelinovy–Queteletovy

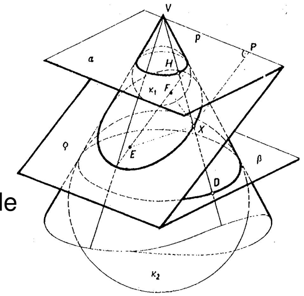
Chceme ukázat, že platí $|EX| + |XF| = \text{konst.}$, tedy že E a F jsou právě *ohniska* elipsy:

Všechny tečny z daného bodu k dané kulové ploše jsou stejně dlouhé.

Proto $|EX| = |DX|$ a $|XF| = |XH|$, a tudíž

$$|EX| + |XF| = |DX| + |XH| = |DH|.$$

Kužel je rotační, tedy vzdálenost $|DH|$ je stále stejná pro všechny povrchové přímky.



□

Důsledky: ekvivalence (A) a (D)

Přímo z věty Apollóniovy:

Označíme $|E\Theta| =: 2p$, $|E\Delta| =: 2a$, $|EM| := x$ a $|M\Lambda| =: y$.

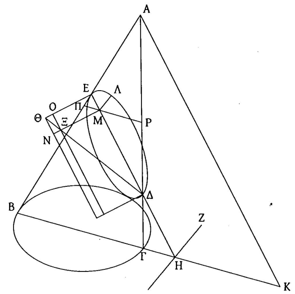
Z podobnosti trojúhelníků $\Theta E\Delta$ a $\Xi M\Delta$ plyne

$$|\Xi M| = \frac{p}{a}(2a - x).$$

Rovnici (1) pak můžeme přepsat jako

$$y^2 = \left(2p - \frac{p}{a}x\right)x,$$

což je právě *vrcholová rovnice* elipsy v (D).



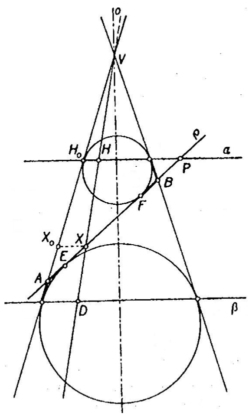
Odtud se snadno vyvodí *středová rovnice*. . .

□ (C.1)

Důsledky: ekvivalence (A), (B) a (C)

Z věty Dandelinovy–Queteletovy přímo plyne (A) $\iff$ (B).

Ke zdůvodnění (A) $\iff$ (C) stačí ukázat, že průsečnice $p = \rho \cap \alpha$ je právě *řídící přímkou* elipsy, tedy že pro ohnisko F a pro libovolný bod X na elipse platí $|XF| : |Xp| = \text{konst.} < 1$:



$|XP| = |Xp|$, kde P je pata kolmice z X na p (v bočním průmětu nezkresleně).

$|XF| = |XH|$ (v bočním průmětu vidíme jako $|X_0H_0|$).

Odtud plyne

$$|XF| : |Xp| = |X_0H_0| : |XP|.$$

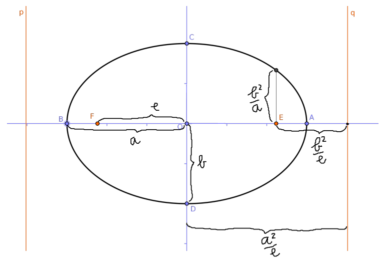
Trojúhelníky AH_0P a AX_0X jsou stejnolehlé, takže

$$|X_0H_0| : |XP| = |AH_0| : |AP| = \text{konst.} < 1.$$

□

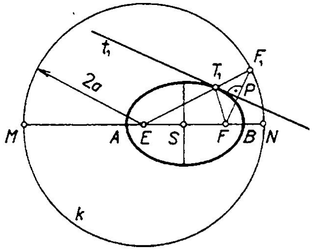
Upřesnění (s. 4)

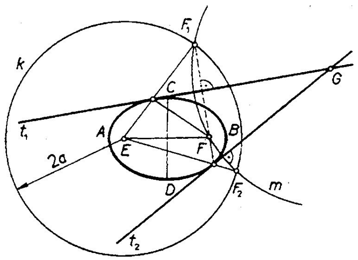
- Dosazením souřadnic vedlejšího vrcholu do vrcholové rovnice (D) snadno ověříme, že $p = \frac{b^2}{a}$.
- Obdobným způsobem z téže rovnice plyne, že $\frac{b^2}{a}$ je délka poloviny tětivy, která prochází ohniskem a je kolmá k hlavní ose.
- Rozepsáním vlastnosti (C) pro dva specifické body zjišťujeme, že vzdálenost řídící přímky d od vedlejší osy je $\frac{a^2}{e}$.
- Vzdálenost řídící přímky d od ohniska F je $\frac{b^2}{e}$.
- Z uvedeného zejména plyne, že konstanta v (C) je skutečně rovna $\frac{e}{a}$. (C.3)



Poznámky: ohniskové vlastnosti

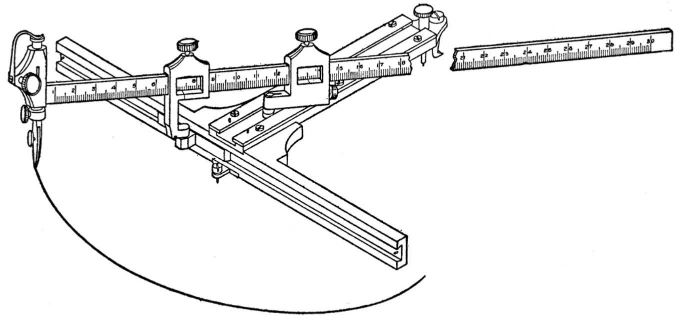
Z *ohniskových vlastností* elipsy lze vyvodit několik dalších poznatků, které jsou užitečné např. při (eukleidovských) konstrukcích tečen...





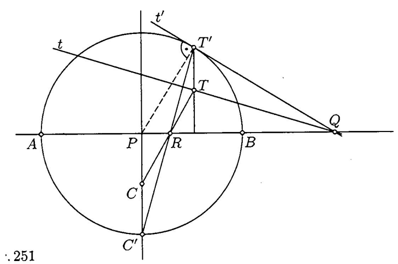
Poznámky: ohniskové vlastnosti

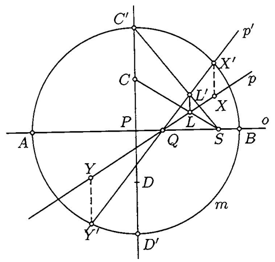
...nebo při kreslení elipsy jako takové...



Poznámky: osová afinita

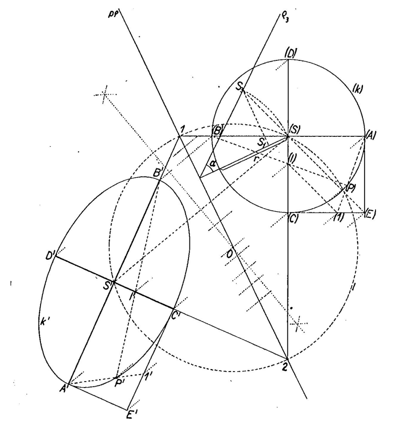
Pomocí vhodné *osové afinity* umíme některé konstrukce redukovat na jednodušší konstrukce s kružnicí, viz např. tečny nebo průsečíky s přímkou...





Poznámky: sdružené a hlavní průměry

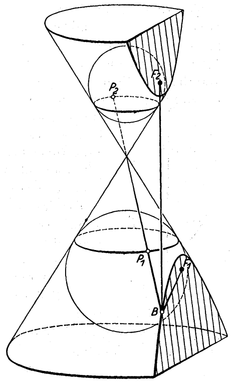
U obecné osové afinity jsme uměli najít *hlavní průměry*, tj. navzájem kolmé *sdružené průměry*...



Ostatní regulární kuželosečky

Většinu výše uvedených poznatků o elipse lze snadno modifikovat pro ostatní regulární kuželosečky, tj. pro *hyperbolu* a *parabolu*.

Uvádíme několik ekvivalentních definicí v duchu s. 3, jejichž zdůvodnění a upřesnění necháváme čtenáři jako doporučené cvičení...[4] (C.3)



[4] K čemu asi slouží tento obrázek?

Hyperbola: ekvivalentní definice

Hyperbola je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky kromě dvou;

(B) množina bodů v rovině, jež mají konstantní rozdíl vzdáleností od dvou bodů E a F:
$$|EX| - |XF| = \text{konst.};$$

(C) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu F a přímky d, přičemž
$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} > 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

(E) projektivní obraz kružnice se dvěma nevlastními body.

Parabola: ekvivalentní definice

Parabola je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky kromě jedné;

(B) —

(C) množina bodů v rovině, jež mají stejnou vzdálenost od bodu F a přímky d, tzn.
$$|XF| : |Xd| = 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)
$$y^2 = 2px;$$

(E) projektivní obraz kružnice s jedním nevlastním bodem.

Singulární kuželosečky

Singulární kuželosečky jsou sjednocením nebo průnikem dvou přímek.

Podle vzájemné polohy řezné roviny a kuželové/válcové plochy mohou nastat tyto případy:

- *dvě různé přímky* (různoběžné/rovnoběžné),
- *bod*,[5]
- *dvě splývající přímky*.

Každá z těchto kuželoseček je určena kvadratickou rovnicí (vhledem k vhodné souřadné soustavě):

- $y^2 = k^2x^2$, resp. $y^2 = k^2$,
- $y^2 = -k^2x^2$,
- $y^2 = 0$.

kde k je nějaká nenulová konstanta.

[5] Tento případ budeme interpretovat jako průsečík dvou imaginárních (komplexně sdružených) přímek.

Cvičení

(C.1) Dokažte, že algebraická vyjádření v (D) jsou skutečně dvojím vyjádřením téže kuželosečky, napište odpovídající transformaci souřadnic a vše ilustrujte výmluvným obrázkem.

(C.2) Odvoďte některé z vyjádření v (D) bez Apollóniovy věty, tzn. přímo z (B), (C) nebo (E).

(C.3) Dovysvětlete některá upřesnění na s. 11, některé z poznámek na s. 12–15 a některé z ekvivalencí na s. 17–18.

(C.4) Dokažte, že numerická výstřednost kuželosečky je rovna

$$|XF| : |Xd| = \sin\alpha : \sin\beta,$$

kde $\alpha =$ odchylka podstavy kužele od roviny řezu a $\beta =$ odchylka podstavy kužele od jeho tvořicích přímek.

Mezishrnutí: kanonické tvary

Následující rovnicová vyjádření jsou tzv. *kanonické tvary*. Jedná se o vyjádření všech možných kuželoseček vhledem k vhodně zvoleným (kartézským) souřadným soustavám (viz s. 3, 17–19):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elipsa (příp. kružnice)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	hyperbola
$y^2 - 2px = 0$	parabola
$y^2 - k^2x^2 = 0$	dvě různoběžné přímky
$y^2 - k^2 = 0$	dvě rovnoběžné přímky
$y^2 + k^2x^2 = 0$	bod
$y^2 + k^2 = 0$	$\emptyset$
$y^2 = 0$	jedna (dvojnásobná) přímka

Mezishrnutí: obecná rovnice

Rovnicové vyjádření kuželosečky závisí na zvolené souřadné soustavě.

Každá z výše uvedených rovnic se vzhledem k obecné afinní transformaci

$$x' = kx + ly + o, \quad y' = mx + ny + q \tag{2}$$

změní na rovnici tvaru

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0, \tag{3}$$

kde koeficienty $A, B, \ldots, F$ závisí na $k, l, \ldots, q$ (a na koeficientech $a, b, p, \ldots$).

Naopak, pokud rovnice tvaru (3) má řešení, potom určuje nějakou kuželosečku.

Druh této kuželosečky lze nejlépe rozpoznat tak, že rovnici nějak upravíme do *kanonického tvaru*.

Přitom každá z provedených úprav představuje nějakou (afinní) transformaci souřadné soustavy (viz závěry na s. 31–32).

Mezishrnutí: obecná úmluva

Při manipulacích s danou kuželosečkou často končíme s obecnou souřadnou soustavou.

Vždy však předpokládáme, že:

Úmluva

Rovnice kuželosečky v zadání každé úlohy je vyjádřena vzhledem ke **kartézské** souřadné soustavě.

Mezipříklad 1

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$4y^2 - x^2 - 4x - 8 = 0.$$

Levou stranu můžeme *doplněním do čtverce* upravit takto:

$$4y^2 \underline{- x^2 - 4x} - 8 = 4y^2 \underline{- (x+2)^2 + 4} - 8.$$

Nahrazením

$$x' = x + 2, \quad y' = y \tag{4}$$

dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$4y'^2 - x'^2 - 4 = 0.$$

Odtud již snadno rozpoznáváme hyperbolu.

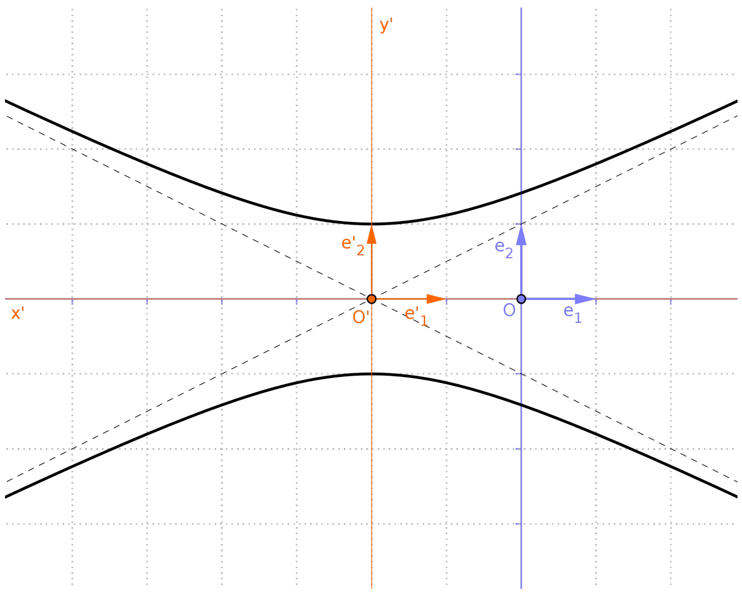
Souřadnice středu jsou zřejmé z (4)...

Použitá transformace je pouhým posunutím, tedy **shodností**. Proto po dodatečné úpravě

$$y'^2 - \frac{1}{4}x'^2 = 1$$

umíme určit velikosti hlavní a vedlejší osy...

Mezipříklad 1: obrázek



Mezipříklad 2

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0.$$

Levou stranu můžeme *doplněním do čtverce* upravit takto:

$$\underline{y^2 + xy - 2y} - 2x - 1 = \underline{\left(y + \frac{1}{2}x - 1\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1} - 2x - 1.$$

Nahrazením

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{1}{2}x - 1 \tag{5}$$

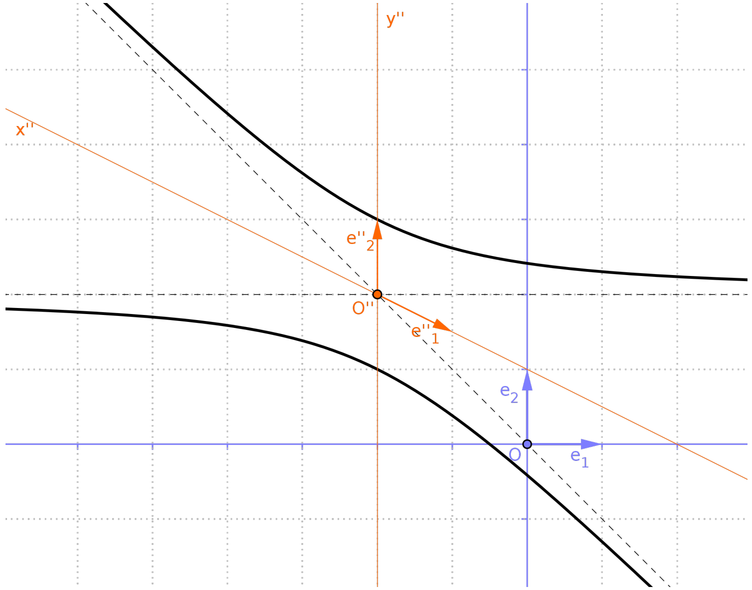
dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$y'^2 - \frac{1}{4}x'^2 - x' - 2 = 0.$$

To je právě zadání příkladu 1, odkud víme, že se jedná o hyperbolu.

Souřadnice středu je možné odvodit z příkladu 1 a transformace (5)...

Mezipříklad 2: obrázek



Mezipříklad 3

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$xy - 2x - 1 = 0.$$

Na levé straně postrádáme kvadratický člen, ke kterému si však lze dopomoci např. dosazením

$$x = x' + y', \quad y = y', \quad \text{neboli} \quad x' = x - y, \quad y' = y. \tag{6}$$

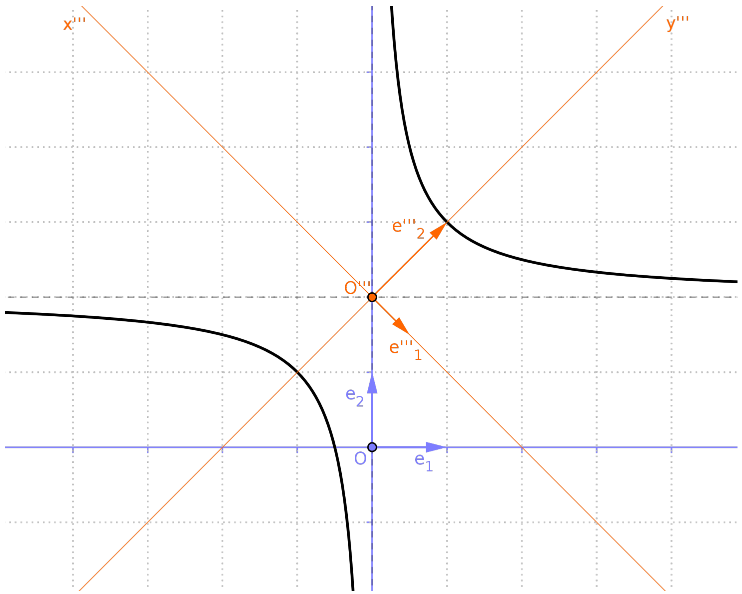
Takto dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$(x' + y')y' - 2(x' + y') - 1 = y'^2 + x'y' - 2x' - 2y' - 1 = 0.$$

To je právě zadání příkladu 2, odkud víme, že se jedná o hyperbolu.

Souřadnice středu je možné odvodit z příkladu 2 a transformace (6)...

Mezipříklad 3: obrázek



Mezivýsledky: kanonický tvar

Zobecněním úvah z předchozích příkladů zjišťujeme, že...

...jakoukoli rovnici typu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{7}$$

lze vždy upravit do kanonického tvaru, a to opakováním úprav dvojího druhu:

(1) *doplnění do čtverce a následná substituce (předp. $A \neq 0$)*

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + \cdots =$$
$$= A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2}y^2 + \frac{2BD}{A^2}y + \frac{D^2}{A^2} + \cdots$$
$$= Ax'^2 - \frac{B^2}{A^2}y'^2 + \frac{2BD}{A^2}y' + \frac{D^2}{A^2} + \cdots$$

(2) *substituce $x = x' + y'$, $y = y'$ (pokud $A = C = 0$)*

$$Bxy + \cdots = B(x' + y')y' + \cdots = By'^2 + Bx'y' + \cdots$$

Postupným skládáním použitých substitucí lze vždy určit výslednou transformaci souřadnic.

V případě, že kuželosečka je středová, lze odtud vyjádřit střed kuželosečky.

Pokud je transformace shodností, potom lze z kanonického tvaru zjistit také směry os a číselné charakteristiky kuželosečky.

Příklady 1–3

Na rozdíl od transformace (4) **není** transformace (5), resp. (6) shodností. Proto určení hlavní a vedlejší osy hyperboly v příkladu 2, resp. 3 není tak bezprostřední jako v příkladu 1...

Předchozí typ uvažování je poměrně pracný, což nás motivuje k dalšímu zevrubnému studiu.

Od nynějška směřujeme k důkazu hlavní věty celého kurzu:

Věta

S trochou algebry je všechno velmi snadné.

Obecnou rovnici (7),

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

budeme zapisovat pomocí matic takto

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

Levá strana je vyčíslením kvadratické formy $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na vektoru $\mathbf{x} = (x, y, 1)$.

Vektor $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ představuje homogenní souřadnice bodu v rovině s (afinními) souřadnicemi $X = [x, y]$; zde uvažujeme projektivní rozšíření $\widetilde{\mathbb{R}}^2 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ afinní, příp. eukleidovské roviny $\mathbb{R}^2$.

Matice v (8) je maticí polární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ příslušné F vzhledem k odpovídající souřadné soustavě.

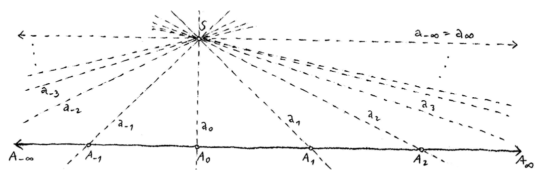
(C.5) Podle předchozího návodu rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2+2xy+y^2+2x+y = 0 \quad \text{nebo} \quad 8x^2+4xy+5y^2+16x+4y = 28.$$

Vyjádřete celkovou transformaci souřadnic, pokuste se identifikovat střed a číselné charakteristiky kuželosečky a doplňte obrázek.

Projektivní rozšíření

Afinní přímka má jeden *nevlastní* bod = bod „v nekonečnu“.



Nevlastní body obecného afinního prostoru $\mathcal{A}$, ozn. $\infty_{\mathcal{A}}$, jsou reprezentovány skupinami navzájem rovnoběžných přímek v $\mathcal{A}$, neboli směry[6] v zaměření $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Projektivní rozšíření afinního prostoru $\mathcal{A}$ je množina $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$.

[6] směr = vektor „až na násobek“ = jednorozměrný vektorový podprostor

Projektivní rozšíření

Přiřazení

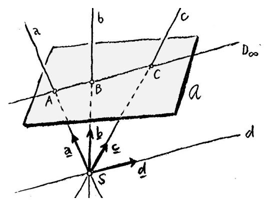
$$\text{bod } A \quad \mapsto \quad \text{přímka } a = A + S \quad \mapsto \quad \text{směr } \langle \mathbf{a} \rangle = \langle \overrightarrow{SA} \rangle$$

určují bijektivní zobrazení mezi množinami:

$$\big\{\text{body v projektivním rozšíření } \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}\big\} =$$

$$= \big\{\text{přímky v afinním prostoru } \mathcal{A} + S \text{ procházející bodem } S\big\} =$$

$$= \big\{\text{směry ve vektorovém prostoru } \overrightarrow{\mathcal{A} + S}\big\}.$$



Přitom *nevlastní body* v $\widetilde{\mathcal{A}}$ jsou charakterizovány takto:

$$D \in \infty_{\mathcal{A}} \iff d \parallel \mathcal{A} \iff \mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}.$$

Projektivizace

Obecný projektivní prostor je definován takto:

Definice

Projektivní prostor s vektorovým zástupcem V (nebo *projektivizace* vektorového prostoru V) je množina všech směrů ve V; značíme $\mathcal{P}(V)$.

Poznámky

Projektivní rozšíření $\widetilde{\mathcal{A}}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ je projektivní prostor s vektorovým zástupcem $V = \overrightarrow{\mathcal{A} + S}$, neboli $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\overrightarrow{\mathcal{A} + S})$.

Uvědomme si, že

$$\dim \mathcal{P}(V) = \dim V - 1.$$

Afinní vs. homogenní souřadnice

Uvažme afinní prostor $\mathcal{A}$ s afinní souřadnou soustavou $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$.

Afinní souřadnice bodu $X \in \mathcal{A}$ jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{OX} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$.
Píšeme $X = [x_1, x_2, \dots]$, což znamená $X = O + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots$.

Pro projektivní rozšíření $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(V)$, kde $V \supset \overrightarrow{\mathcal{A}}$, uvažme rozšířenou bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \underline{\mathbf{e}_0})$, kde $\underline{\mathbf{e}_0 \in V \setminus \overrightarrow{\mathcal{A}}}$.

Definice

Homogenní souřadnice bodu $X \in \widetilde{\mathcal{A}}$ zastoupeného vektorem $\mathbf{x} \in V$ jsou souřadnice tohoto vektoru vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \underline{\mathbf{e}_0})$.
Píšeme $X = (x_1 : x_2 : \cdots : \underline{x_0})$, tzn. $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \underline{x_0\mathbf{e}_0}$.

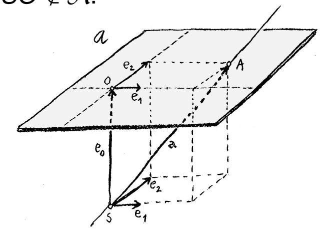
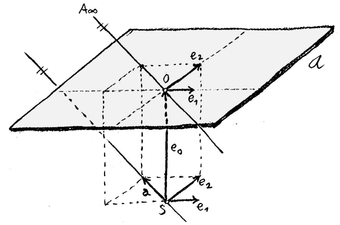
Pozor

Homogenní souřadnice **nejsou** určeny jednoznačně; každé dva zastupující vektory jsou však kolineární, proto

$$X = (x_1 : x_2 : \cdots : \underline{x_0}) = (ax_1 : ax_2 : \cdots : \underline{ax_0}) \quad \text{pro lib. } a \neq 0.$$

Příklad

Afinní souřadnou soustavu $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ roviny $\mathcal{A}$ rozšíříme o vektor $\mathbf{e}_0 = \overrightarrow{SO} \notin \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Vlevo: vlastní bod $A = O + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = S + \mathbf{e}_0 + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ má afinní souřadnice $[3, 1]$ a homogenní souřadnice

$$(3 : 1 : \underline{1}) = (-6 : -2 : \underline{-2}) = \cdots.$$

Vpravo: nevlastní bod zastoupený přímkou se směrovým vektorem $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ nelze vyjádřit v afinních souřadnicích, jeho homogenní souřadnice jsou

$$(-2 : 1 : \underline{0}) = (-6 : 3 : \underline{0}) = \cdots.$$

Dvojpoměr

Definice

Pro čtveřici (A, B, C, D) vlastních, kolineárních a navzájem různých bodů je *dvojpoměr* této čtveřice roven podílu dělicích poměrů:

$$(AB\,CD) = \frac{(AB\,C)}{(AB\,D)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \qquad (9)$$

Poznámky

Dvojpoměr je základním (definujícím) invariantem **projektivních** zobrazení.

Je-li bod D nevlastní, potom $(AB\,D_\infty) = \lim_{D\to\infty} (AB\,D) = 1$, a proto platí

$$(AB\,CD_\infty) = (AB\,C).$$

Pokud je náhodou $(AB\,CD) = -1$, říkáme, že čtveřice bodů je v tzv. *harmonickém poměru.*[7]

[7] Tedy např. čtveřice A, B, střed úsečky AB a nevlastní bod přímky AB (v tomto pořadí) je vždy v harmonickém poměru.

Základní věta projektivní geometrie

Bijektivní lineární zobrazení $\Psi : V \to V'$ indukuje zobrazení mezi projektivními prostory $\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$, a to tak, že

$$\psi(\langle \mathbf{x} \rangle) = \langle \Psi(\mathbf{x}) \rangle, \quad \text{pro lib. nenulový } \mathbf{x} \in V. \qquad (10)$$

Toto zobrazení je zřejmě bijektivní a **projektivní**.

Naopak:

Věta

Každé bijektivní projektivní zobrazení $\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$ je určeno nějakým bijektivním lineárním zobrazením $\Psi : V \to V'$ jako v (10).

Poznámka

Projektivní zobrazení $\psi : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{A}}'$ je **afinní** $\iff$ ψ zobrazuje $\infty_{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ do $\infty_{\mathcal{A}'} \subset \widetilde{\mathcal{A}}'$[8] $\iff$ $\Psi : V \to V'$ zobrazuje $\overrightarrow{\mathcal{A}} \subset V$ do $\overrightarrow{\mathcal{A}}' \subset V'$.

[8] nevlastní body na nevlastní (tzn. vlastní na vlastní)

(C.6) Zopakujte si všechny pojmy, které používáme a budeme používat bez vysvětlení, jako např. *vektorové* prostory a (multi-)*lineární* zobrazení, *charakteristická* čísla a vektory, *afinní* prostory a zobrazení, ...

Definice

Zobrazení $F : V \to \mathbb{R}$ vektorového prostoru V do tělesa $\mathbb{R}$ se zove *kvadratickou formou*, pokud platí

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \text{pro lib. } \mathbf{x} \in V,$$

kde $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je nějaká symetrická bi-lineární forma.
Forma f je tzv. *polární forma* kvadratické formy F.

Poznámka

Forma f je jednoznačně určuje F a naopak:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\big).$$

Z bilinearity f plyne souř. vyjádření (vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 f_{11} + x_1 y_2 f_{12} + x_2 y_1 f_{21} + x_2 y_2 f_{22} + \cdots =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots \\ f_{21} & f_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{11}$$

kde $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots$ a $f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.
Ze symetričnosti f plyne $f_{ij} = f_{ji}$ pro všechna i a j.

Rovnost (11) schematicky zapisujeme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}, \tag{12}$$

kde $\mathbf{F} = (f_{ij})$ značí matici formy f vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$.

Regulární/singulární formy

Definice

Vektor $\mathbf{u} \in V$ je *singulárním vektorem* bilineární formy $f : V \times V \to \mathbb{R}$, pokud lineární forma $f(\mathbf{u}, -) : V \to \mathbb{R}$ je nulová.[9]

Bilineární forma f je *regulární*, pokud její jediný singulární vektor je nulový vektor; v opačném případě je forma f *singulární*.

Singulární vektory a regularita/sigularita kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$ jsou odvozeny od její polární formy f.

Poznámky

Všechny singulární vektory tvoří vektorový podprostor ve V.

Forma je regulární $\iff$ odpovídající matice (vzhledem k lib. bázi) je regulární.

[9] tzn. $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$ pro lib. $\mathbf{x} \in V$

Polární sdruženost

Definice

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ jsou *polárně sdružené* vzhledem k f, resp. F, pokud

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ prostoru V se jmenuje *polární bází* vzhledem k f, resp. F, pokud $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pro všechna $i \neq j$.

Poznámky

Matice f, resp. F vzhledem k polární bázi je diagonální.

Všechny vektory, které jsou polárně sdruženy s daným vektorem $\mathbf{u} \in V$, tvoří vektorový podprostor $U \subseteq V$:

- pokud $\mathbf{u}$ je singulární, potom $U = V$,
- pokud $\mathbf{u}$ není singulární, potom U je nadrovina ve V; rovnicové vyjádření této nadroviny je

$$U = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0\}. \tag{13}$$

O polární bázi

Věta

Každá kvadratická forma má polární bázi.

Důkaz.

Je-li $F \equiv 0$, potom každá báze je polární.

Je-li $F \not\equiv 0$, potom uvažujeme induktivně:

- Pokud $\dim V = 1$, potom lib. vektor tvoří polární bázi.
- Předpokládejme, že tvrzení platí pro lib. prostor dimenze n, a uvažme $\dim V = n + 1$:
  Protože $F \not\equiv 0$, existuje vektor $\mathbf{u} \in V$ takový, že $F(\mathbf{u}) \neq 0$. Zejména $\mathbf{u}$ není singulární, a proto množina (13) je nadrovinou, tzn. má dimenzi n.
  Podle předpokladu má zúžení $F|_U$ polární bázi.
  Když onu bázi U doplníme o vektor $\mathbf{u}$, dostaneme bázi V ($\mathbf{u} \in V \setminus U$), která je polární (každý vektor z U je polárně sdružen s $\mathbf{u}$). $\square$

Poznámky

Důkaz předchozí věty představuje návod k nalezení polární báze. (C.8)

V každém kroku máme značnou volnost ve výběru $\mathbf{u}$ tak, aby $F(\mathbf{u}) \neq 0$; polárních bází je proto nepřeberné množství.

Pokud je $f : V \times V \to \mathbb{R}$ skalární součin, potom F je právě norma vektoru a pro každé $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí $F(\mathbf{u}) > 0$.

Podmínka $F(\mathbf{u}) \neq 0$ z důkazu věty o polární bázi je splněna automaticky a podprostor v (13) je právě kolmý doplněk $U = \mathbf{u}^\perp$.

Polární báze skalárního součinu proto není nic jiného než ortogonální báze.

O signatuře a setrvačnosti

Matice kvadratické formy F v polární bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ je diagonální, přičemž na diagonále jsou čísla $f_{ii} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = F(\mathbf{e}_i)$.

Ozn. $p :=$ počet kladných a $q :=$ počet záporných čísel na diagonále.

Uspořádaná dvojice (p, q) se nazývá *signaturou* kvadratické formy F.

Je zřejmé, že $p + q \le \dim V$ a navíc tento součet nezávisí na zvolené polární bázi (neboť $p + q =$ hodnost matice formy F).

Ukážeme, že samotná čísla p a q na polární bázi také nezávisí:

Věta

Signatura kvadratické formy nezávisí na zvolené polární bázi.

Důkaz věty o setrvačnosti

Předpokládejme dvě různé polární báze se signaturami (p, q) a (p', q'):

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \quad \text{a} \quad (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{p'}, \mathbf{e}'_{p'+1}, \dots, e'_n).$$

Báze máme uspořádány tak, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in P := \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \rangle$ je $F(\mathbf{u}) > 0$ a pro každý vektor $\mathbf{v} \in Q' := \langle \mathbf{e}'_{p'+1}, \dots, e'_n \rangle$ je $F(\mathbf{v}) \le 0$.

Proto $P \cap Q' = \{\mathbf{o}\}$ a podle věty o součtu a průniku vektorových podprostorů platí

$$p + (n - p') = \dim P + \dim Q' = \dim(P + Q') + \dim(P \cap Q') \le n + 0.$$

Odtud plyne, že $p \le p'$.

Pro opačnou volbu $Q := \langle \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $P' := \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{p'} \rangle$ obdobně odvodíme $p \ge p'$.

Celkem tedy platí $p = p'$, a proto také $q = q'$ (neboť $p + q = p' + q'$). □

O kolmé polární bázi

V eukleidovském vektorovém prostoru V, tj. ve vekt. prostoru se skalárním součinem $\,.\, : V \times V \to \mathbb{R}$, uvažme kvadratickou formu $F : V \to \mathbb{R}$ (s polární formou $f : V \times V \to \mathbb{R}$ a maticí $\mathbf{F}$).

Ptáme se, zda existuje polární báze vzhledem k F, která by byla současně ortogonální, neboli kolmá?

Odpověď zní ANO, viz větu na s. 60.

Nejdřív si však musíme uvědomit několik věcí…

Hlavní vektory

Vektory tvořící ortogonální polární bázi jsou tzv. hlavní vektory:

Definice

Vektor se nazývá *hlavní*, pokud je polárně sdružen s každým vektorem, který je k němu kolmý.

Poznámka

Jinak řečeno, vektor $\mathbf{u} \in V$ je hlavní, pokud pro lib. $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} = 0 \Longrightarrow f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0. \tag{14}$$

Symetrická zobrazení

Bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ jednoznačně určuje lineární zobrazení $\Phi : V \to V$, a to následujícím způsobem:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} \,.\, \Phi(\mathbf{y}) \quad \text{pro lib. } \mathbf{x},\mathbf{y} \in V. \tag{15}$$

Jak f, tak **.** jsou symetrické formy, proto pro lib. $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ platí:

$$\mathbf{x} \,.\, \Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) \,.\, \mathbf{y}. \tag{16}$$

Definice

Lineární zobrazení s vlastností (16) se nazývají *samoadjungovaná* nebo prostě *symetrická*.

Poznámka

Předchozí rovnosti lze vzhledem k lib. ortonormální bázi vyjádřit[10]

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Tedy, zobrazení Φ je symetrické $\iff$ jeho matice $\mathbf{F}$ vzhledem k lib. ortonormální bázi je symetrická.

[10] matice skalárního součinu vzhledem k ortonormální bázi je jednotková

O hlavních a charakteristických vektorech

Lemma

Vektor $\mathbf{u}$ je hlavním vektorem formy f $\iff$ $\mathbf{u}$ je charakteristickým vektorem zobrazení Φ.

Důkaz.

Obraz lib. vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k Φ můžeme vyjádřit jako $\Phi(\mathbf{u}) = c\mathbf{u} + \mathbf{x}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{u}^\perp$.

Pokud je $\mathbf{u}$ hlavním vektorem formy f, potom platí:

$$0 = f(\mathbf{u},\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{x} = (c\mathbf{u} + \mathbf{x}) \,.\, \mathbf{x} = c\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} + \mathbf{x} \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{x}.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, tedy $\Phi(\mathbf{u}) = c\mathbf{u}$; tzn. $\mathbf{u}$ je char. vektorem Φ.

Naopak, pokud je $\mathbf{u}$ char. vektorem zobrazení Φ, potom pro lib. $\mathbf{x}$ platí:

$$f(\mathbf{u},\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x})$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Odtud plyne (14), tzn. vektor $\mathbf{u}$ je hlavní. □

O symetrických zobrazeních

Symetrická zobrazení mají několik zajímavých vlastností: (C.9)

Lemma

Pro každé symetrické lineární zobrazení $\Phi : V \to V$ platí:

(a) *kolmý doplněk invariantního podprostoru je invariantní podprostor,*
(b) *všechna charakteristická čísla jsou reálná,*
(c) *char. vektory příslušné různým char. číslům jsou navzájem kolmé,*
(d) *char. vektory příslušné char. číslu s násobnosti k tvoří vektorový podprostor dimenze k.*

Důkaz věty o symetrických zobrazeních

(a) Předp. $U \subseteq V$ je invariantní, tj. $\Phi(\mathbf{u}) \in U$ pro lib. $\mathbf{u} \in U$.
Pro lib. $\mathbf{v} \in U^\perp$ platí
$$0 = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{u} \,.\, \Phi(\mathbf{v}).$$
Tzn. $\Phi(\mathbf{v}) \in U^\perp$, tedy $U^\perp$ je taky invariantní.

(b) Předp. $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom pro lib. $\mathbf{x}$ platí[11]
$$f(\mathbf{u},\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} \quad \text{a} \quad \overline{f(\mathbf{u},\mathbf{x})} = f(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}} \,.\, \bar{\mathbf{x}}.$$
Odtud dostáváme
$$\lambda\mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u},\bar{\mathbf{u}}) = f(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{u}) = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}} \,.\, \mathbf{u}, \quad \text{tedy} \quad (\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} = 0.$$
Pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ je $\mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} > 0$, proto $\lambda = \bar{\lambda}$, neboli $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Předp. $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ a $\Phi(\mathbf{v}) = \kappa\mathbf{v}$. Potom platí
$$\lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \kappa\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u}, \quad \text{tedy} \quad (\lambda - \kappa)\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0.$$
Z předpokladu $\lambda \neq \kappa$ plyne $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0$.

(d) Plyne z (a) a (b).

[11] zde uvažujeme komplexní rozšíření V, f, …

O kolmé polární bázi!

Nyní konečně odpovídáme na otázku ze s. 54:

Věta

Každá kvadratická forma F v eukleidovském vektorovém prostoru má ortogonální polární bázi, a ta je tvořena char. vektory matice $\mathbf{F}$.

Pokud je tato báze normovaná, potom matice formy F vzhledem k oné bázi je diagonální s char. čísly matice $\mathbf{F}$ *na diagonále.*

Důkaz.

První část je bezprostředním důsledkem tvrzení na s. 57 a 58.

V druhé části si stačí připomenout, že pokud je $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, potom platí

$$F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u}. \qquad \square$$

Poznámky

Pro obecnou kvadratickou formu je kolmá polární báze určena jednoznačně až na násobky hlavních vektorů. (C.8)

Věta o kolmé polární bázi bude představovat nejúčinnější nástroj k hledání os kuželoseček (a kvadrik) včetně jejich velikostí.

Cvičení

(C.7) Udejte příklad regulární/singulární kvadratické formy a určete všechny její singulární vektory.

(C.8) Pro formy z předchozího cvičení určete jejich polární báze:
- (a) podle návodu na s. 50,
- (b) podle návodu na s. 60.

(C.9) Dokažte větu o kolmé polární bázi pro $\dim V = 2$ přímo rozepsáním $|\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ a $\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\ldots$ [Sek, II, s. 196–7]

Příklad: opakování

V příkladu 2 na s. 27 jsme uvažovali kuželosečku určenou rovnicí

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0, \tag{17}$$

kterou jsme uměli upravit do kanonického tvaru ve dvou krocích:

$$y'^2 - \tfrac{1}{4}x'^2 - x' - 2 = 0,$$

$$y''^2 - \tfrac{1}{4}x''^2 - 1 = 0. \tag{18}$$

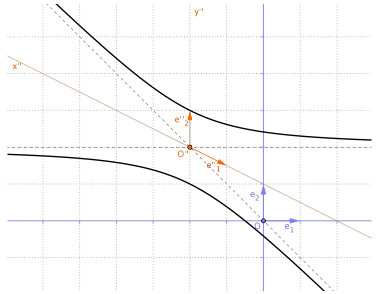
Přitom výsledná transformace souřadnic byla

$$x'' = x + 2, \quad y'' = \tfrac{1}{2}x + y - 1,$$

neboli

$$x = x'' - 2, \quad y = -\tfrac{1}{2}x'' + y'' + 2. \tag{19}$$

Příklad: upřesnění



Z (18) umíme rozpoznat, že se jedná o hyperbolu.

Z (19) umíme určit souřadnice nového počátku (tj. středu hyperboly),

$$O'' = [-2, 2], \tag{20}$$

a nových bázových vektorů (tj. směrů dvou význačných průměrů),

$$\mathbf{e}''_1 = (1, -\tfrac{1}{2}), \quad \mathbf{e}''_2 = (0, 1). \tag{21}$$

Odtud a z koeficientů v (18) lze vydedukovat, že směry asymptot jsou

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}''_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{e}''_2 = (1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}''_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{e}''_2 = (1, -1). \tag{22}$$

Odtud lze dále určit směry os, které půlí úhly určené asymptotami,

$$\mathbf{h}_1 = \sqrt{2}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = (\sqrt{2} + 1, -1), \quad \mathbf{h}_2 = \sqrt{2}\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = (\sqrt{2} - 1, 1). \tag{23}$$

Příklad: reformulace

Vzhledem ke konvencím ze s. 34 (a dál) zapisujeme rovnici (17),

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0,$$

pomocí matic takto

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{24}$$

Vektor $\mathbf{x}$ představuje homogenní souřadnice $X = (x : y : \underline{1})$ bodu v afinní rovině $\mathcal{A}$ s afinními souřadnicemi $X = [x, y]$; $\mathbf{F}$ je matice kvadratické formy F na trojrozměrném vektorovém prostoru $V \supset \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Obecný bod v projektivní rovině $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(V)$ má homogenní souřadnice $X = (x : y : \underline{x_0})$; dosazením do (24) máme vyjádření kvadratické formy F, tj. homogenní verzi rovnice (17):

$$y^2 + xy - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0. \tag{25}$$

Příklad: regularita a asymptoty

(i) Hyperbola je regulární kuželosečka; to souhlasí s poznatkem, že odpovídající kvadratická forma s maticí (24) je regulární:[12] (s. 48)

$$\det \mathbf{F} = \tfrac{1}{4} \neq 0.$$

(ii) Asymptoty hyperboly ukazují právě na její nevlastní body; ty lze určit jako průnik kuželosečky (25) s nevlastní přímkou $x_0 = 0$:[13] (s. 40)

$$y^2 + xy = y(y + x) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení,

$$N_1 = (1 : 0 : \underline{0}), \quad N_2 = (1 : -1 : \underline{0}),$$

což jsou právě homogenní souřadnice směrů z (22).

Asymptoty jsou určeny těmito směry a středem hyperboly.

[12] obecnosti na s. 76
[13] obecnosti na s. 90

Příklad: střed

(iii) Střed hyperboly (20) má homogenní souřadnice $O'' = (-2 : 2 : \underline{1})$; odtud je patrné, že zastupující vektor $\mathbf{o}''$ je polárně sdružen s vektory zastupujícími všechny nevlastní body: (s. 49)

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{o}'' = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy střed $O'' = (x : y : \underline{x_0})$ je řešením soustavy rovnic[14]

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y - x_0 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}x + y - x_0 &= 0. \end{aligned}$$

[14]obecnosti na s. 88

Příklad: sdružené směry

(iv) Rovnice (18) je v diagonálním tvaru; to znamená, že příslušné vektory (21) tvoří polární bázi podprostoru $\vec{\mathcal{A}} \subset V$: (s. 50)

$$\mathbf{e}_1''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2'' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & * \\ \frac{1}{2} & 1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ * \end{pmatrix} = 0.$$

Přitom koeficienty u x'', resp. y'' v rovnici (18) jsou rovny

$$\mathbf{e}_1''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1'' = \cdots = -\tfrac{1}{4}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{e}_2''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2'' = \cdots = 1.$$

Tedy pro $\mathbf{e}_2''$ jako výše jsou všechny polárně sdružené vektory obsažené v $\vec{\mathcal{A}} \subset V$ řešením soustavy rovnic[15]

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + y &= 0, \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

[15]obecnosti na s. 77 a dál

Příklad: hlavní směry, osy

(v) Směry os jsou tzv. hlavní směry; to znamená, že příslušné vektory (23) tvoří ortogonální polární bázi podprostoru $\vec{\mathcal{A}} \subset V$: (s. 54)

$$\mathbf{h}_1{}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & * \\ \frac{1}{2} & 1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots = 0,$$

$$\mathbf{h}_1{}^T \cdot \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vektory $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$ jsou charakteristickými vektory matice formy F zúžené na $\vec{\mathcal{A}} \subset V$, viz dále. (s. 57)

Příklad: hlavní směry, osy

Charakteristický polynom,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - \tfrac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda - \tfrac{1}{4} = 0,$$

má kořeny $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Odpovídající charakteristické vektory jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} (1-\lambda_i)x + \tfrac{1}{2}y &= 0, \\ \tfrac{1}{2}x + (1-\lambda_i)y &= 0, \end{aligned}$$

pro $i = 1$ a 2; po dosazení vskutku dostáváme

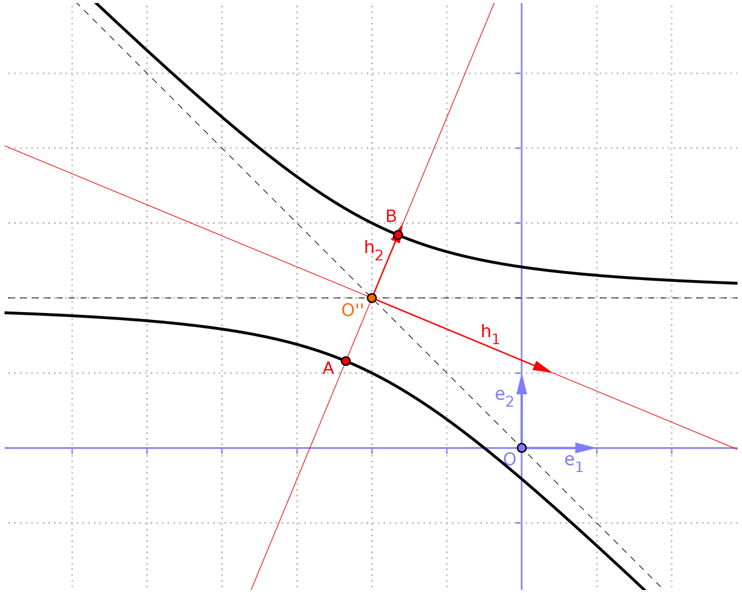
$$\mathbf{h}_1 = (\sqrt{2}+1, -1) \quad \text{a} \quad \mathbf{h}_2 = (\sqrt{2}-1, 1).$$

Navíc v normované bázi má forma $F|_{\vec{\mathcal{A}}}$ matici $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, jejíž determinant je $-\frac{1}{4}$; odtud lze vyvodit, že délky poloos hyperboly jsou[16] (s. 60)

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \doteq 0,910 \quad \text{a} \quad b = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} \doteq 2,197.$$

[16]podrobnosti a obecnosti na s. 99

Příklad: obrázek



Kuželosečky

Vzhledem k úvodním definicím (s. 2), jejich ekvivalentním vyjádřením (s. 3, 17–19) a následným úpravám a úvahám (s. 23 a dál) můžeme obecnou kuželosečku algebraicky vymezit následovně.[17]

Definice

Kuželosečka v projektivní rovině $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$ je množina všech bodů, jejichž zastupující vektory ve V jsou nulovými vektory nějaké (nenulové) kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$, tzn.

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{P}(V) : F(\mathbf{x}) = 0\}. \tag{26}$$

Poznámka

Pokud se dvě kvadratické formy liší o nějaký násobek ($F' = k \cdot F$), zadávají tutéž kuželosečku.

[17] V je vektorový prostor dimenze 3; $\mathcal{P}(V)$ je jeho projektivizace, tedy projektivní prostor dimenze 2; pro bod $X \in \mathcal{P}(V)$ značí $\mathbf{x} \in V$ jeho zastupující vektor, tzn. $X = \langle \mathbf{x} \rangle$.

O určenosti kuželosečky

Kvadratická forma F na vektorovém prostoru dimenze 3 je určena 6 koeficienty $f_{ij} \in \mathbb{R}$. (s. 47)

Věta

Kuželosečka je jednoznačně určena 5 body v dostatečně obecné poloze.

Důkaz.

Dosazením 5 bodů, $A_k = \langle \mathbf{a}_k \rangle$, dostáváme soustavu 5 lineárních rovnic a 6 neznámých, $F(\mathbf{a}_k) = 0$, $k = 1, .., 5$.

Pokud jsou určující body navzájem různé a žádné 4 neleží na jedné přímce, potom je řešení této soustavy určeno jednoznačně až na násobek… [Ja–Se, věta 12.2] □

Příklad

Předpokládejme, že kuželosečka $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$ obsahuje body

$$A_1 = (-2 : 1 : \underline{1}), \quad A_2 = (-2 : 3 : \underline{1}), \quad A_3 = (-1 : 0 : \underline{2}),$$
$$A_4 = (1 : -1 : \underline{0}), \quad A_5 = (1 : 0 : \underline{0})$$

a odpovídající kvadratická forma je tvaru

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxx_0 + 2eyx_0 + fx_0^2 = 0.$$

Po dosazení dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4a - 4b + c - 4d + 2e + f &= 0,\\ 4a - 12b + 9c - 4d + 6e + f &= 0,\\ a - 4d + 4f &= 0,\\ a - 2b + c &= 0,\\ a &= 0, \end{aligned}$$

jejíž všechna řešení jsou $a = 0,\ b = \text{lib.},\ c = 2b,\ d = e = f = -2b$.

Kuželosečka $\mathcal{K}$ je určena např. rovnicí (pro $b = \frac{1}{2}$):

$$xy + y^2 - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0.$$

Regulární/singulární kuželosečky

Definice

Bod $B \in \mathcal{K}$ je *singulárním* bodem kuželosečky $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$, pokud zastupující vektor $\mathbf{b} \in V$ je singulárním vektorem odpovídající kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$; bod $B \in \mathcal{K}$, který není singulární se zove *regulární*. (s. 48)

Kuželosečka $\mathcal{K}$ je *regulární*, pokud sestává pouze z regulárních bodů; v opačném případě je $\mathcal{K}$ *singulární*.

Poznámky

Kuželosečka je regulární $\iff$ odpovídající kvadratická forma je regulární.

Všechny singulární body singulární kuželosečky tvoří projektivní podprostor v $\mathcal{P}(V)$, tj. přímku nebo bod.

Polární sdruženost

Definice

Body $A, B \in \mathcal{P}(V)$ jsou *polárně sdružené* vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$, pokud jsou jejich zastupující vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ polárně sdružené vzhledem k odpovídající kvadratické formě $F : V \to \mathbb{R}$. (s. 49)

Poznámky

Všechny body, které jsou polárně sdruženy s daným bodem $B \in \mathcal{P}(V)$ vzhledem ke $\mathcal{K}$, tvoří projektivní podprostor $p \subseteq \mathcal{P}(V)$:

- pokud B je singulární, potom $p = \mathcal{P}(V)$,
- pokud B není singulární, potom p je přímka; rovnicové vyjádření této přímky je

$$p = \{X \in \mathcal{P}(V) : f(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0\}, \tag{27}$$

  kde $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je polární bilineární forma kvadratické formy F. (s. 46)

Pól/polára

Definice

Přímka p z předchozí poznámky se nazývá *polárou* bodu B a bod B se nazývá *pólem* přímky p vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$.

Poznámka

Z definice polární sdruženosti[18] a singulárního bodu vyplývá, že:

- Bod A leží na poláře bodu B $\iff$ bod B leží na poláře bodu A.
- Polára lib. (nesingulárního) bodu obsahuje všechny singulární body kuželosečky.

[18] tedy ze symetričnosti formy f

O poláře v regulárním bodě

Jak vypadá polára regulárního bodu obecné kuželosečky $\mathcal{K}$?

Předp., že $B \in \mathcal{K}$ je regulární bod p je jeho polára.

Protože, $B \in \mathcal{K}$, platí $F(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$, a proto $B \in p$; bod B je tedy společným bodem $\mathcal{K}$ a p.

Buď je B jediným společným bodem $\mathcal{K}$ a p, nebo je celá přímka p obsažena v $\mathcal{K}$:

Věta

Je-li $\mathcal{K}$ regulární, potom p je tečnou $\mathcal{K}$ v bodě B.

Je-li $\mathcal{K}$ singulární, potom p je její tvořící přímkou obsahující bod B.

O poláře v regulárním bodě

Důkaz.

Uvažme obecný společný bod $P \in \mathcal{K} \cap p$.

Přitom podmínky $P \in \mathcal{K}$, $P \in p$ a $B \in \mathcal{K}$ znamenají

$$f(\mathbf{p},\mathbf{p}) = f(\mathbf{b},\mathbf{p}) = f(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 0.$$

Celkem tedy, pro lib. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, platí

$$f(\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{b}, \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{b}) = \alpha^2 f(\mathbf{p},\mathbf{p}) + 2\alpha\beta f(\mathbf{b},\mathbf{p}) + \beta^2 f(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 0.$$

Pokud $B \neq P$, potom tato rovnost znamená, že celá polára $p = BP$ patří do $\mathcal{K}$; to je možné, pouze když $\mathcal{K}$ je singulární.

Pro $\mathcal{K}$ regulární je proto $P = B$ jediným společným bodem $\mathcal{K}$ a p, tzn. p je tečnou $\mathcal{K}$ v bodě B. □

O poláře obecně

Jak vypadá polára obecného bodu vzhledem k regulární kuželosečce $\mathcal{K}$?

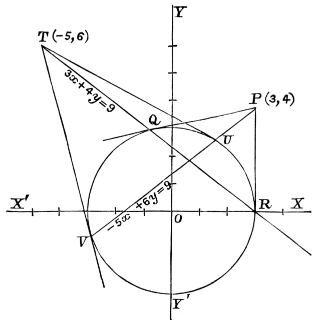
Z předchozího víme, že

- $P \in$ poláře bodu $T \iff T \in$ poláře bodu P,
- $R \in \mathcal{K} \Longrightarrow$ polára bodu $R =$ tečna ke $\mathcal{K}$ v tomto bodě.

Názorná interpretace

Ozn. Q, R (resp. U, V) body dotyku tečen z P (resp. T) ke kuželosečce $\mathcal{K}$.

Potom přímka QR je polárou bodu P; přímka UV je polárou bodu T; neoznačený průsečík těchto dvou přímek je pólem přímky PT; apod.



(C.12)

Příklad

Určete tečnu kuželosečky

$$xy + y^2 - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0.$$

procházející bodem $B = (2 : -1 : \underline{0})$.

Polára p bodu B je v homogenních souřadnicích určena rovnicí (27):

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x & y & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}x - x_0 = 0,$$

neboli $x = -2x_0$ (v afinních souřadnicích $x = -2$).

Průsečíkem této přímky s kuželosečkou jsou body dotyku tečen; ty obdržíme řešením rovnice

$$-2x_0 y + y^2 + 4x_0^2 - 2yx_0 - x_0^2 = y^2 - 4x_0 y + 3x_0^2 = 0.$$

Ta pro $x_0 = 0$ nemá vyhovující řešení; pro $x_0 \neq 0$ dostáváme

$$\frac{y}{x_0} = \frac{4 \pm 2}{2} = \text{buď } 3, \text{ nebo } 1.$$

Příklad: pokračování

Body dotyku tedy jsou

$$T_1 = (-2 : 3 : \underline{1}) \quad \text{a} \quad T_2 = (-2 : 1 : \underline{1}).$$

Tečna v bodě T_1 je polárou tohoto bodu:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} x & y & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}x + y - 2x_0 = 0.$$

Podobně určíme tečnu v bodě T_2...

Tečny kuželosečky procházející (nevlastním) bodem B jsou v afinních souřadnicích určeny rovnicemi[19]

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 2 \quad \text{a} \quad y = -\tfrac{1}{2}x.$$

[19] srovnejte závěry s obrázkem na s. 65

Projektivní klasifikace

Druh kuželosečky podle seznamu na s. 22 **není** projektivně invariantní:

Při projektivních zobrazeních mohou být libovolně zaměňovány vlastní a nevlastní body, proto např. elipsa, hyperbola a parabola jsou projektivně nerozlišitelné, neboli ekvivalentní.[20]

Věta

Každá kuželosečka v projektivní rovině je vzhledem k vhodně zvolené bázi vyjádřena některou z následujících rovnic:

$x^2 + y^2 + x_0^2 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární regulární kuželosečka)*
$x^2 + y^2 - x_0^2 = 0$	*regulární kuželosečka*
$y^2 - x^2 = 0$	*dvě přímky*
$y^2 + x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních přímek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

Zde jsou kuželosečky rozděleny podle míry degenerovanosti: regulární (hodnost 3), singulární hodnosti 2 a singulární hodnosti 1.

[20] viz též položky (E) v definicích na s. 3, 17 a 18

Znovu o polaritě

Přestože druh kuželosečky se při projektivních zobrazeních nezachovává, polární sdruženost **ano**:

Věta

Ozn. A', B' a $\mathcal{K}'$ obrazy bodů A, B a kuželosečky $\mathcal{K}$ vzhledem k nějakému (bijektivnímu) projektivnímu zobrazení.

Potom body A a B jsou polárně sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}$ $\iff$ body A' a B' jsou polárně sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}'$.

Důkaz.

Plyne ze základní věty projektivní geometrie (a předchozích definicí). □ (s. 43)

Naposledy o polaritě

Odtud a z předchozí interpretace polární sdruženosti vyplývá: (s. 81)

Věta

Ozn. p poláru obecného bodu P vzhledem k regulární kuželosečce $\mathcal{K}$. Pro lib. přímku procházející P ozn. U, V a Q její průsečíky s $\mathcal{K}$ a p.

Potom platí, že tyto body jsou v harmonickém poměru, tzn. *(s. 42)*

$$(PQ\,UV) = -1.$$

Důkaz.

Stačí uvažovat nějaký velmi specifický případ a obecné projektivní zobrazení…

< OBR > □

O středu

V důkazu předchozí věty jsme operovali se středem kružnice a uvědomili jsme si, že to není projektivní invariant.

Střed kuželosečky (= její střed souměrnosti) je však zachován při afinních zobrazeních a platí

Věta

Střed kuželosečky je pólem nevlastní přímky.

Průměr kuželosečky je polárou nějakého nevlastního bodu.

Poznámky

Regulární kuželosečka má právě jeden střed, singulární kuželosečky mohou mít středů víc.[21]

Středové kuželosečky mají (aspoň jeden) vlastní střed, nestředové nemají (žádný) vlastní střed.

[21] zejména každý singulární bod je středem

O středu

Uvažme kuželosečku $\mathcal{K}$ určenou rovnicí

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxx_0 + 2eyx_0 + fx_0^2 = 0, \tag{28}$$

tzn. matice odpovídající kvadratické formy je

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad \text{ozn.} \quad \underline{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Bod $S = (x : y : \underline{x_0})$ je středem kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když platí

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = 0,$$

tedy, právě když je řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

O středu

Věta

Kuželosečka $\mathcal{K}$ má právě jeden vlastní střed $\iff$ $\det \underline{\mathbf{F}} \neq 0$.

Důkaz.

Střed S je vlastní $\iff$ $x_0 \neq 0$.

V takovém případě má soustava (30) jednoznačné řešení $\iff$ determinant matice soustavy je $\neq 0$. □

Poznámky

Pokud $\mathcal{K}$ nemá vlastní střed, potom nutně $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$.

Pokud $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$, potom $\mathcal{K}$ nemá vlastní střed (např. parabola) nebo má vlastních středů víc (např. dvojice rovnoběžek).

O nevlastních bodech

Nevlastní body kuželosečky jsou její průsečíky s nevl. přímkou $x_0 = 0$.

Tedy bod $N = (x : y : 0)$ je nevlastním bodem kuželosečky (28), právě když platí

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0. \tag{31}$$

Věta

Kuželosečka $\mathcal{K}$ má

- *žádný nevlastní bod (dva komplexně sdružené)* $\iff$ $\det \underline{\mathbf{F}} > 0$,
- *dva různé nevlastní body* $\iff$ $\det \underline{\mathbf{F}} < 0$,
- *jeden nevlastní bod (dvojnásobný)* $\iff$ $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$.

Důkaz.

Nemůže být současně $x = 0$ a $y = 0$; po dělení x, resp. y je (31) kvadratickou rovnicí vzhledem k $\frac{y}{x}$, resp. $\frac{x}{y}$, jejíž diskriminant je

$$D = 4b^2 - 4ac = -4 \det \underline{\mathbf{F}}.$$ □

Poznámky

Pokud je $F' = k \cdot F$ jiná kvadratická forma určující tutéž kuželosečku, potom platí

$$\det \mathbf{F}' = k^3 \cdot \det \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \det \underline{\mathbf{F}'} = k^2 \cdot \det \underline{\mathbf{F}}.$$

Zejména $\det \underline{\mathbf{F}'}$ a $\det \underline{\mathbf{F}}$ mají stejná znaménka, takže předchozí diskuze vskutku nezávisí na zastupující kvadratické formě!

Tečna v nevlastním bodě kuželosečky je její *asymptotou*.

Díky všem těmto vymezením se určování středů, průměrů a asymptot neliší od určování pólů, polár a tečen...[22]

[22] konkrétní ukázky jsou v úvodním příkladu na s. 67–69, viz též s. 82

Afinní klasifikace

Afinní klasifikace kuželoseček se neliší od seznamu na s. 22, akorát konstanty a, b, p a k nemají výše uvedený význam.

Věta

Každá kuželosečka v afinní rovině je vzhledem k vhodně zvolené afinní souřadné soustavě vyjádřena některou z následujících rovnic:

$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární elipsa)*
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	*elipsa*
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	*hyperbola*
$y^2 - 2x = 0$	*parabola*
$y^2 - x^2 = 0$	*dvě různoběžné přímky*
$y^2 - 1 = 0$	*dvě rovnoběžné přímky*
$y^2 + x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních různoběžek)*
$y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$ *(průsečík dvou imaginárních rovnoběžek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

Afinní klasifikace

Vzhledem ke značení a pozorování na s. 88–90 můžeme předchozí klasifikaci zpřehlednit následovně:

	$\det \mathbf{F} \neq 0$	$\det \mathbf{F} = 0$
$\det \underline{\mathbf{F}} > 0$	elipsa (re, im)	bod
$\det \underline{\mathbf{F}} < 0$	hyperbola	různoběžky
$\det \underline{\mathbf{F}} = 0$	parabola	rovnoběžky (re, im, =)

Poznámka

Případy „re“ a „im“ značí existenci reálných bodů („im“ znamená $\emptyset$).

Případ „=“ značí jednu dvojnásobnou přímku; to je singulární kuželosečka hodnosti 1.

V klasifikaci neuvažujeme singulární kuželosečky, jejichž tvořící přímka je nevlastní; takové kuželosečky nelze vyjádřit v afinních souřadnicích.

Metrické vlastnosti

S metrickými záležitostmi jsme celý kurz zahajovali, takže se nemusíme opakovat.

Zejména osy, hlavní průměry a jejich velikosti, excentricita, ohniska, řídící přímky apod. jsou všechno pouze metrické invarianty.

Pro zajímavost doplňujeme:

Věta

Ohnisko je pólem řídící přímky, řídící přímka je polárou ohniska.

Důkaz.

Plyne z předchozího popisu, viz též upřesnění na s. 11. □ (C.13)

Poznámky

Ohnisko a řídící přímka byly definovány pouze pro regulární kuželosečky, a to vztahem[23]

$$|XF| : |Xd| = \text{konst.},$$

kde F je ohnisko, d řídící přímka a X lib. bod na kuželosečce.

Je zajímavé, že v tomto duchu lze charakterizovat také (některé) ostatní kuželosečky... [Ja–Se, věta 18.4]

	$F \notin d$	$F \in d$
konst. < 1	elipsa (re)	bod
konst. > 1	hyperbola	různoběžky
konst. $= 1$	parabola	rovnoběžky (=)

[23] viz položky (C) v definicích na s. 3, 17 a 18

Metrická klasifikace

Metrickou klasifikaci známe ze s. 22; pro pořádek ještě zopakujeme:

Věta

Každá kuželosečka v eukleidovské rovině je vzhledem k vhodně zvolené kartézské souřadné soustavě vyjádřena některou z následujících rovnic:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární elipsa)*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*elipsa, příp. kružnice (pro $a = b$)*
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbola*
$y^2 - 2px = 0$	*parabola*
$y^2 - k^2x^2 = 0$	*dvě různoběžné přímky*
$y^2 - k^2 = 0$	*dvě rovnoběžné přímky*
$y^2 + k^2x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních různoběžek)*
$y^2 + k^2 = 0$	$\emptyset$ *(průsečík dvou imaginárních rovnoběžek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

Upřesnění: charakteristická čísla

Hlavní vektory kuželosečky jsou charakteristickými vektory matice $\underline{\mathbf{F}}$. (s. 57)

Charakteristický polynom lze vyjádřit takto[24]

$$\det(\underline{\mathbf{F}} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\underline{\mathbf{F}}\cdot\lambda + \det\underline{\mathbf{F}} = 0,$$

kde tr značí stopu matice, tj. součet čísel na diagonále.

Kořeny, tzn. charakteristická čísla, označíme λ_1 a λ_2; tedy

$$\det\underline{\mathbf{F}} = \lambda_1\cdot\lambda_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{tr}\underline{\mathbf{F}} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Zejména znaménko, příp. nulovost $\det\underline{\mathbf{F}}$ souvisí se znaménky, příp. nulovostí λ_1 a λ_2, viz dále.

[24] viz (C.9) a příklad na s. 71

Upřesnění: klasifikace

Vzhledem k dosavadním značením a pozorováním můžeme předchozí klasifikaci formulovat následovně:

	$\det\mathbf{F} \neq 0$	$\det\mathbf{F} = 0$
$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2$	elipsa (re, im)	bod
$\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2$	hyperbola	různoběžky
$\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_2 = 0$	parabola	rovnoběžky (re, im, =)

Poznámky

Speciálně, pokud platí $\lambda_1 = \lambda_2$, potom je každý směr hlavní, tzn. každý průměr určuje osu souměrnosti (např. u kružnice).

Pokud je $\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_2 = 0$, potom odpovídající směr ukazuje na nevlastní střed kuželosečky (např. u paraboly).

Upřesnění: středové

Jaký je vztah mezi charakteristickými čísly matice $\underline{\mathbf{F}}$ a číselnými charakteristikami kuželosečky $\mathcal{K}$?

Středová kuželosečka má ve vhodné kartézské souřadné soustavě (tvořené normovanými hlavními vektory) rovnici

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \ell = 0 \quad \text{pro nějaké } \ell \in \mathbb{R}.$$

Při přechodu mezi ortonormálními bázemi se $\det\mathbf{F}$ ani $\det\underline{\mathbf{F}}$ nezmění, tedy $\det\mathbf{F} = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ell$ a $\det\underline{\mathbf{F}} = \lambda_1\cdot\lambda_2$.

Odtud vyjádříme ℓ a předchozí rovnice má tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\det\mathbf{F}}{\det\underline{\mathbf{F}}} = 0.$$

Porovnáním s kanonickými tvary na s. 96 zjišťujeme, že

$$a^2 = \left|\frac{\det\mathbf{F}}{\det\underline{\mathbf{F}}\cdot\lambda_1}\right| \quad \text{a} \quad b^2 = \left|\frac{\det\mathbf{F}}{\det\underline{\mathbf{F}}\cdot\lambda_2}\right| \quad \text{resp.} \quad k^2 = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|. \tag{32}$$

Upřesnění: nestředové

Regulární nestředová kuželosečka má ve vhodné kartézské souřadné soustavě (tvořené normovanými hlavními vektory) rovnici

$$\lambda_2 y^2 + 2mx = 0, \quad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{R}.$$

Při přechodu mezi ortonormálními bázemi se $\det \mathbf{F}$ (ani $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$) nezmění, tedy $\det \mathbf{F} = -\lambda_2 \cdot m^2$.

Odtud můžeme vyjádřit m; porovnáním s kanonickým tvarem na s. 96 zjišťujeme, že

$$p^2 = \left| \frac{\det \mathbf{F}}{\lambda_2^3} \right|. \tag{33}$$

Pro singulární nestředové kuželosečky je $\det \mathbf{F} = \det \underline{\mathbf{F}} = 0$, tedy vztah mezi λ_2 a k z kanonického tvaru není zřejmý...

Poznámky

Pokud je $F' = k \cdot F$ jiná kvadratická forma určující tutéž kuželosečku, potom platí

$$\det \mathbf{F}' = k^3 \cdot \det \mathbf{F}, \quad \det \underline{\mathbf{F}}' = k^2 \cdot \det \underline{\mathbf{F}}, \quad \lambda_1' = k \cdot \lambda_1 \quad \text{a} \quad \lambda_2' = k \cdot \lambda_2.$$

Tedy předchozí úvahy a zejména závěry v (32) a (33) vskutku nezávisí na zastupující kvadratické formě!

Cvičení

(C.10) Podle návodů z této kapitoly rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0 \quad \text{nebo} \quad 8x^2+4xy+5y^2+16x+4y=28.$$

Určete nevlastní body, střed, hlavní směry (osy) a číselné charakteristiky kuželosečky. Doplňte obrázek a porovnejte se závěry cvičení (C.5).

(C.11) Pro kuželosečku z předchozího cvičení určete tečnu v nějakém jejím regulárním bodě.

(C.12) Ukažte, že rovnice polár na obrázku na s. 81 jsou správně.

(C.13) Dokažte tvrzení na s. 94.

Obecné kvadriky

Díky velmi obecnému algebraickému základu tušíme, že pojem kuželosečky má vícerozměrné analogie: (s. 73)

Definice

n-rozměrná *kvadrika* v projektivním prostoru $Q \subset \mathcal{P}(V)$ dimenze $n+1$ je množina všech bodů, jejichž zastupující vektory ve V jsou nulovými vektory nějaké (nenulové) kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$, tzn.

$$Q = \{X \in \mathcal{P}(V) : F(\mathbf{x}) = 0\}. \tag{34}$$

Poznámky

1-rozměrné kvadriky jsou právě kuželosečky.

2-rozměrné kvadriky jsou např. sféry, elipsoidy, hyperboloidy; kužele, válce; dvojice rovin apod.

Průnikem roviny s kteroukoli 2-rozměrnou kvadrikou je (zpravidla) nějaká kuželosečka.

Obecně: průnikem n-rozměrné kvadriky Q s n-rozměrným projektivním podprostorem je $(n-1)$-rozměrná kvadrika.[25]

[25] pokud Q onen podprostor neobsahuje

Analogie

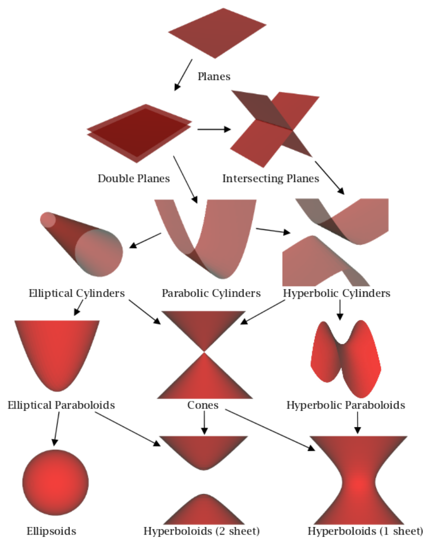
Většina poznatků, které jsme formulovali pro kuželosečky ($n = 1$), mají zřejmá zobecnění:

- *n-rozměrná kvadrika je jednoznačně určena $\frac{1}{2}(n+4)(n+1)$ body v dostatečně obecné poloze*; (s. 74)
- *regulární/singulární* body a kvadriky beze změny; (s. 76)
- *polární sdruženost* beze změny, akorát místo polár máme *polární nadroviny* a místo tečen *tečné nadrovinu*; (s. 77)
- *středy* a *průměry* beze změny, akorát místo asymptot máme *asymptotické nadroviny*; (s. 87)
- *osy*, *hlavní průměry* a jejich velikosti beze změny. (s. 99)

Podstatnější rozdíly pozorujeme pouze při klasifikacích — myšlenky jsou stejné, akorát se musíme zorientovat ve více možnostech; podrobnosti a ostatní zajímavosti lze najít např. v [Ja–Se, Sek]. . .

$n = 2$: klasifikace

Náznak afinní klasifikace 2-rozměrných kvadrik je na následujícím obrázku:



Úloha Apollóniova

Úkolem obecné Apollóniovy úlohy je sestrojit kružnici (resp. cyklus),[26] která se dotýká tří daných kružnic (resp. cyklů).

Středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů tvoří vždy nějakou kuželosečku (k) — pro cykly a, b se středy A, B a poloměry r_a, r_b platí:

Věta

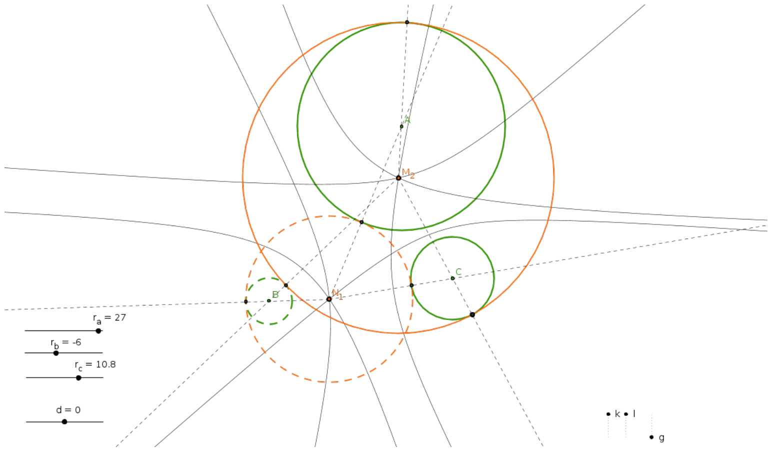
- *Je-li $|r_a - r_b| > |AB|$, pak k je elipsa s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$.*
- *Je-li $|r_a - r_b| < |AB|$, pak k je hyperbola s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$.*

Zde uvažujeme $r_a, r_b \in \mathbb{R}$ jako orientované poloměry, tzn. znaménko r_a odpovídá orientaci cyklu a.

Ve speciálních, resp. mezních případech může být kuželosečka k kružnicí nebo přímkou. . .

[26] cyklus = orientovaná kružnice

Řešení pomocí průniku kuželoseček



(1) Středy cyklů, které se dotýkají tří dvojic daných cyklů, tvoří tři kuželosečky;

(2) středy hledaných cyklů (M_1 a M_2) jsou společnými body těchto tří kuželoseček;

(3) dotykové body jsou na spojnicích středů.

Gergonovo řešení

Jiné řešení Apollóniovy úlohy je založeno na polární sdruženosti (vzhledem k daným kružnicím).

Zdůvodnění následující konstrukce plyne z těchto poznatků:

(a) *spojnice (l_i) dvojic dotykových bodů na každém cyklu prochází společným bodem (P), jež je potenčním středem daných tří kružnic;*

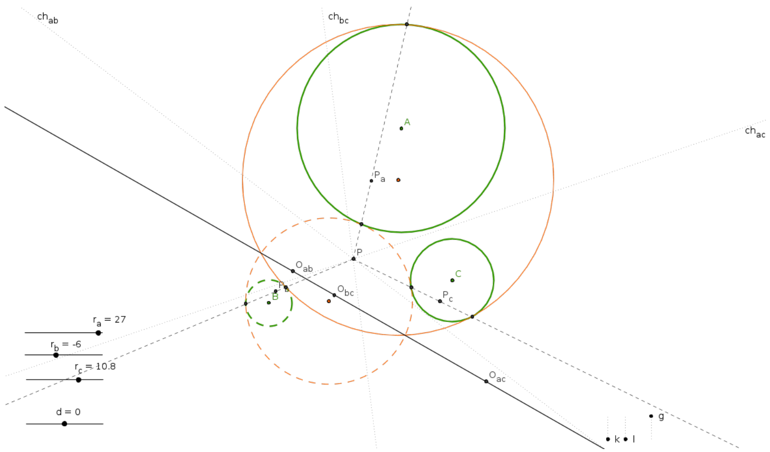
(b) *póly (L_i) těchto spojnic vzhledem k odpovídajícím kružnicím leží na jedné přímce (ch), jež je právě chordálou dvou kružnic řešení;*

(c) *přímka ch je osou podobnosti tří daných cyklů;*[27]

(d) *protože $L_i \in ch$ a L_i je pól l_i, musí pól ch vzhledem ke každé z daných kružnic ležet na odpovídající přímce l_i.*

[27] tj. spojnice tří středů stejnolehlosti

Gergonovo řešení



(1) $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$ jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem P;

(2) O_{ab}, O_{bc}, O_{ac} jsou středy stejnolehlostí tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti;

(3) P_a, P_b, P_c jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím;

(4) dotykové body jsou na spojnicích PP_a, PP_b, PP_c.

Lieova kvadrika

Jiné řešení úlohy Apollóniovy je založeno na identifikaci cyklů v eukleidovské rovině s body na 3-rozměrné tzv. *Lieově kvadrice* a polární sdruženosti (vzhledem k této kvadrice):

Cyklus c se středem $(C_1 : C_2 : \underline{1})$ a poloměrem r_c určuje bod ve 4-rozměrném projektivním prostoru

$$\hat{C} := (C_1 : C_2 : r_c : C_1^2 + C_2^2 - r_c^2 : \underline{1}),$$

a ten navíc leží na 3-rozměrné kvadrice $Q \subset \mathcal{P}(V)$ určené kvadratickou formou $F : V \to \mathbb{R}$ s maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lieova kvadrika

Přiřazení

$$\text{cyklus } c \text{ v eukleidovské rovině} \quad \mapsto \quad \text{bod } \hat{C} \text{ na Lieově kvadrice}$$

je injektivní;[28] přímým rozepsáním se přímo ověří, že

Věta

Cykly c a d se dotýkají $\iff$ body $\hat{C}$ a $\hat{D}$ jsou polárně sdružené.

Tedy algebraické řešení úlohy Apollóniovy vypadá takto:

(1) Pro tři dané cykly a, b, c[29] uvažme odpovídající body $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ na Lieově kvadrice $Q \subset \mathcal{P}(V)$;

(2) všechny body v $\mathcal{P}(V)$, které jsou polárně sdružené k $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ vzhledem ke Q, tvoří přímku (řešení soustavy 3 lineárních rovnic);

(3) tato přímka protíná kvadriku Q ve dvou bodech $\hat{M}, \hat{N}$ (řešení 1 kvadratické rovnice);

(4) tyto body odpovídají dvěma hledaným cyklům m, n.

[28] lze rozšířit také pro body ($r = 0$) a přímky ($r = \infty$)...

[29] v dostatečně obecné poloze (ve spec. případech může být řešení víc nebo taky žádné)

Cvičení

(C.14) S využitím poznatků tohoto kurzu zpracujte jakýkoli (váš oblíbený) příklad, a to nejlépe interaktivní formou.[30]

[30] viz např. `http://geogebra.org`

Literatura

- J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, MU, 1996, `http://www.math.muni.cz/~janyska/LAKUZ.pdf`
- F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996
- K. Rektorys a kol., *Přehled užité matematiky*, SNTL, 1968
- M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988
- Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, 2011
- P. Zlatoš, *Lineárna algebra a geometria*, Bratislava, 2011, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf`