Logika

Doc. RNDr. Luděk Jančář, CSc.
1692@mail.muni.cz

1. Základní pojmy

Zakladatel logiky

Aristoteles *ze Stageiry* (384 – 322 př. n. l.) – formuloval základy logiky v těsné souvislosti s tvořícím se matematickým a přírodovědným myšlením.

Definice
Logika je věda, která se zabývá principy, jež rozhodují o správnosti argumentace (usuzování).

Usuzování samo jako myšlenkový proud, není předmětem logiky, ale psychologie. Předmětem psychologie je v podstatě dynamika (něco, co probíhá ve vědomí člověka) procesu usuzování. Logika naopak hledá zákony, které mají stanovit obecná pravidla, na základě kterých by bylo možno rozhodnout, že tvrzení B_j určité osoby objektivně vyplývá z tvrzení A_i.

Předmět studia
Psychologie: myšlení – myšlenkové procesy. **Logika**: myšlenky – formulované myšlenky.

Logické vyplývání
A_1 .... Žádný cizinec neviděl Uherský Brod.
A_2 .... Někteří přítomní jsou cizinci.
B .... Někteří přítomní neviděli Uherský Brod.

Předpokládejme pravdivost tvrzení A_1 a A_2. O pravdivosti tvrzení B se můžeme přesvědčit dvěma způsoby:
a) dotazem všech přítomných
b) objektivním posouzením myšlenek A_1 a A_2, B na základě zákonů logiky.

Jestliže způsobem b) zjistíme, že tvrzení B je pravdivé, pak říkáme, že logicky vyplývá z tvrzení A_1 a A_2.

Vyvození závěru B z A_1 a A_2 se nazývá **dedukce** (poznání nepřímé). Vedle deduktivního usuzování existují i jiné formy usuzování, jako je induktivní, reduktivní pravděpodobnostní a analogické. Tyto typy studuje logika pouze okrajově.

2. Úloha logiky v učitelském vzdělávání

Výuka logiky je zařazena do vzdělávání studentů učitelství z následujících důvodů:
1. Logika se zabývá stanovením objektivních zákonů umožňujících kontrolu správnosti myšlenkových procesů, tj. činností, která neustále prolíná procesem učení.
2. Většina poznatků zprostředkovávaných v pedagogickém procesu je předávána nepřímo a od objektu tohoto procesu se požaduje myšlenkové operace usuzování.
3. Přesné myšlení a jasné vyjadřování jsou dovednosti, které logika kultivuje a které mají významnou roli v pedagogické praxi.
4. Studium logiky pěstuje návyk přesného abstraktního, zdůvodněného myšlení a získání tohoto návyku je důležitou složkou profesionálního vybavení učitele.
5. Logika je jedním ze základních kamenů metodologie věd a poskytuje tedy učiteli důležitý metodologický aparát pro jeho vlastní pedagogickou a vědeckou práci a pro řízení vědecké práce jeho studentů a žáků.
6. Logika je zcela nezbytná pro rozvoj informatiky a kybernetiky a znalost logiky patří v současné době k základům vzdělání všech učitelů.

3. Jazyk a myšlení

Logika považuje myšlení za určité kombinování obsahů slov, resp. kombinování myšlenek. Předmětem logického rozboru myšlenek jsou výrazy, kterými jsou myšlenky vyjádřeny. Jen na formulovaných myšlenkách, tedy na výrazech, můžeme studovat logickou stavbu a logické vztahy mezi myšlenkami.

Pro kontrolu správnosti myšlení musíme vždy vědět:

1. Jakou kombinaci myšlenek právě kontrolujeme.
2. Kdy je myšlenka věcně správná (když se shoduje se skutečností) a zda je v daném případě věcně správná.
3. Kdy je myšlení formálně správné a zda je v daném případě formálně správné.

Formální správnost myšlení je nezávislá na věcné správnosti myšlenek.

Tvůrci moderní koncepce logiky:
Leibnitz *Gottfried Wilhelm* (01. 07. 1646 – 14. 11. 1716)
de Morgan *Augustus* (27. 06. 1806 – 18. 03. 1871)
Boole *Georg* (02. 11. 1815 – 08. 12. 1864)
Frege *Gottlob* (08. 11. 1848 – 26. 07. 1925).

Moderní logika zdůrazňuje nutnost upřesnění jazyka, jímž vyjadřujeme myšlenky, které činíme předmětem logické analýzy. Tohoto cíle dosahujeme většinou tím, že pracujeme se symbolickými vyjadřovacími soustavami, které jsou prostředkem, ne cílem, moderní logiky.

Cíle studia logiky:

1. Seznámení se s principy výstavby symbolického jazyka.
2. Seznámení se se základy výrokové, predikátové a třídové logiky.
3. Seznámení se s principy kontroly správnosti argumentace (usuzování).

4. Výroková logika

Lidské poznání je odrazem objektivní reality. Výchozím bodem lidského poznání jsou **podněty**, které jsou v mozku prostřednictvím **počitků** přeměňovány na odrazy událostí v našem vědomí. **Vjemy** jsou základem našeho poznání. Bez počitků a vjemů nejsme schopni vytvářet myšlenky, výroky a pojmy. Podstata věcí, zákonité souvislosti mohou být formulovány a pochopeny pouze prostřednictvím abstraktního myšlení. Základní formou odrazu skutečnosti ve vědomí, jeho myšlenkou formulovaná forma, je **výrok** (soud) – dynamický proces, ve kterém probíhá v našem vědomí vytváření výroku.

4.1. Výrok – jeho podstata

Pojmy tvoří základní kameny **výroku**, tak jako **slova** jsou základními kameny **vět**. V logice bude pro nás mít význam pouze **jeden druh vět** a to **oznamovací**.

Definice výroku

Výroky jsou takové myšlenky, vyjádřené pomocí jazykových útvarů, které mají tu vlastnost, že mohou být pravdivé nebo nepravdivé.

Definice pravdivosti (*Aristoteles*)

Pravdivé říká ten, který oddělené jako oddělené, spojené jako spojené vidí; nepravdivé ten, jehož mínění je opačné, ne proto, poněvadž my míníme, jsi v pravdě bílý, jsi bílý, nýbrž protože jsi bílý, my to říkáme, pak říkáme pravdu.

Z Aristotelových slov vyplývá, že u pravdy jde o vztah mezi výrokem a jevem, podstatou, které je výrokem vyjádřeno. To znamená 2 věci:

a) Není pravdivých výroků o neexistujících jevech.

b) U existujících jevů je výrok pravdivý, jestliže vypovídá o souhlasném vztahu mezi jevem a obsahem výroku.

Definice

Relace pravdivosti je to, co spolu s výrokem spojuje výrok a jev, na který se výrok vztahuje.

Definice

Výroky jsou ty myšlenky, vyjádřené formou oznamovací věty, které mají tu vlastnost, že mohou být pravdivé nebo nepravdivé, to znamená ty, které potvrzují vznik nebo absenci nějakého jevu, stavu nebo věci.

4.2. Sémantický aspekt výroku

U každého výroku existují 3 faktory, které je nutno rozlišovat:

1. Člověk, v jehož vědomí výrok existuje.
2. Jev, který výrok zobrazuje.
3. Jazyková forma, ve které výrok existuje.

Stejné rozlišení platí i pro pojmy.

Vztahy těchto 3 faktorů studuje **pragmatika**. **Sémantika** abstrahuje faktor 1. a zkoumá vztah mezi 2. a 3. faktorem. **Syntax** se zabývá pouze 3. faktorem a na ostatní dva nehledí. Věda shrnující pragmatiku, sémantiku a syntax se nazývá **sémiotika**.

4.3. Konstanty a proměnné výrokové logiky

4.3.1. Výrokové proměnné

Jako **proměnné** budeme ve výrokové logice používat:
malá latinská písmena p, q, r, …, p_1, p_2, …,
popř. velká latinská písmena A, B, C, D, …, A_1, A_2, … (výrazy).

Pod pojmem **pravdivostní hodnota** výroku rozumíme tu vlastnost výroku, že může být pravdivý či nepravdivý.
Hodnota **pravda** se označuje **1** (p), p = 1 (A = 1) znamená **pravdivý výrok**.
Hodnota **nepravda** se označuje **0** (n), p = 0 (A = 0) znamená **nepravdivý výrok**.
1, 0 nazýváme **logické konstanty**.

4.3.2. Výrokové spojky

Výrokové spojky jsou logické konstanty, které spojené s výrokovou proměnnou nebo proměnnými vytváří **výrok** nebo **výrokovou formuli**.

Označme si logickou konstantu představující libovolnou logickou spojku symbolem $\boldsymbol{L_m}$ (tabulka 1), resp. $\boldsymbol{C_n}$ (tabulka 2):

p	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	$\boldsymbol{L_4}$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0
	tautologie	identita	negace	kontradikce

Tabulka 1 Spojení logické spojky s výrokovou proměnnou

Formule $\boldsymbol{L_1}$ se nazývá **tautologie**, je pravdivá pro všechna udělení hodnot proměnné p. Formule $\boldsymbol{L_2}$ se nazývá **identita**, neboť pravdivostní hodnoty jsou identické s pravdivostními hodnotami proměnné p. Formule $\boldsymbol{L_3}$ se nazývá **negace**, neboť pravdivostní hodnoty, které formule nabývá, jsou opačné než pravdivostní hodnoty proměnné p. Formule $\boldsymbol{L_4}$ se nazývá **kontradikce**, neboť je nepravdivá pro libovolné udělení hodnot proměnné p.

Z přirozeného jazyka víme, že je obvyklé zřetězovat výroky pomocí spojek do složitějších výrazů (**složené výroky**), které ale zůstávají výrokem majícím základní vlastnost výroku, tj. mohou být pravdivé nebo nepravdivé (např. prší a svítí slunce, vyhraji peníze a budu bohatý).

p	q	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		tautologie	**disjunkce**			**implikace**		**ekvivalence**	**konjunkce**		disjunkce 2						**kontradikce**

Tabulka 2 Spojení dvou výrokových proměnných jednou logickou spojkou

4.4. Jazyk výrokové logiky

Slovníkem budeme rozumět seznam symbolů (znaků), jedině z nich je možno sestavovat výrazy daného jazyka. **Gramatikou** budeme rozumět soubor pravidel určujících, které znaky a řetězce znaků jsou v daném jazyce správné. **Formulemi** daného jazyka budeme nazývat napsané symboly ze slovníku způsobem respektujícím gramatická pravidla.

4.4.1. Slovník jazyka výrokové logiky

1. **výrokové proměnné** p, q , r, s, popř. s indexy $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m, \dots$
2. **výrokové spojky** (logické konstanty, funktory):
   1. negace $\neg$ (***L₃***)
   2. konjunkce $\wedge$ ($\boldsymbol{C_8}$)
   3. disjunkce $\vee$ ($\boldsymbol{C_2}$)
   4. implikace $\rightarrow$ ($\boldsymbol{C_5}$)
   5. ekvivalence $\leftrightarrow$ ($\boldsymbol{C_7}$)
3. **pomocné symboly** ( ), [ ], { }.

4.4.2. Gramatika

1. Symboly p, q, r, s jsou samy o sobě gramaticky správné.
2. Jestliže je výraz A formulí výrokové logiky, pak je formulí také výraz $\neg$A.
3. Jsou-li formulí výrazy A, B, pak jsou formulemi také výrazy
   $A \wedge B \quad A \vee B \quad A \rightarrow B \quad A \leftrightarrow B.$
4. Žádné jiné výrazy nejsou formulemi.

4.4.3. Výrokové spojky

4.4.3.1. Negace

$\neg$ ($\boldsymbol{L_3}$) není pravda, že …. nebo předpona ne

p	**¬p**
1	0
0	1

Tabulka 3 Pravdivostní tabulka negace

Definice

Negace je logická konstanta, která činí formuli skládající se z jedné proměnné nepravdivou, když proměnná nabývá pravdivostní hodnoty pravda.

4.4.3.2. Konjunkce

$\wedge$ (***C**$_8$*) a, někdy i, (ale), (nýbrž)

p	q	**p ∧ q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabulka 4 Pravdivostní tabulka konjunkce

Definice

Konjunkce je logická konstanta, která činí formuli skládající se ze dvou proměnných pravdivou pouze tehdy, je-li oběma proměnným přiřazena pravdivostní hodnota pravda.

4.4.3.3. Disjunkce

$\vee$ (***C**$_2$*) nebo

p	q	**p ∨ q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabulka 5 Pravdivostní tabulka disjunkce

Definice

Disjunkce je logická konstanta, která činí formuli skládající se ze dvou proměnných nepravdivou pouze tehdy, je-li oběma proměnným přiřazena pravdivostní hodnota nepravda.

Čeština rozlišuje **3 spojky nebo**:

1. **nebo$_1$** užijeme tehdy, záleží-li nám na tom, abychom vyjádřili, že z daných alternativ musí platit nejméně jedna. Logická interpretace spojky **nebo$_1$** odpovídá přesně interpretaci **disjunkce** dle tabulky 5.
2. **nebo$_2$** vylučující (alternace) se užívá tehdy, chceme-li vyjádřit, že ze dvou neslučitelných možností (alternativ) platí pouze jedna alternativa, není ovšem známo, která.
3. **nebo$_3$** vylučující (alternace) se užívá tehdy, když hodláme vyjádřit, že ze dvou realizovatelných možností (alternativ) platí pouze jedna, není ovšem známo, která.
   (nebo$_3$ se liší od nebo$_2$ tím, že neslučitelnost alternativ přímo konstatuje, zatímco u nebo$_2$ neslučitelnost je dána fakty, která jsou obsahem složeného výroku).

4.4.3.4. Implikace

$\rightarrow$ (***C**$_5$*)

jestliže …. pak jestliže platí p, pak platí q (I)

Výroku, který je dosazen v implikaci jako první (v (I) za p) říkáme **antecedent**, výroku, který stojí na druhém místě (v (I) za q), říkáme **konsekvent**.

P	q	**p → q**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabulka 6 Pravdivostní tabulka implikace

Definice

Implikace je logická konstanta, která činí formuli skládající se ze dvou proměnných nepravdivou pouze tehdy, je-li antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý.

4.4.3.5. Ekvivalence

↔ (C_7) když a jen když

P	q	**p ↔ q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabulka 7 Pravdivostní tabulka ekvivalence

Definice

Ekvivalence je logická konstanta, která činí formuli skládající se ze dvou proměnných pravdivou pouze tehdy, je-li konsekvent a antecedent pravdivý nebo konsekvent a antecedent nepravdivý.

Ve výrokové logice je možné **ekvivalenci** považovat **za zkratku** výroku (jestliže p, pak q) a (jestliže q, pak p).

4.4.4. Pravdivostní tabulky formulí

Překladem výroku, nebo složeného výroku z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky je formule jazyka výrokové logiky, která se s daným výrokem shoduje ve všech řádcích **pravdivostní tabulky**.

Dvě různá tvrzení přirozeného jazyka, interpretovaná logicky stejnou pravdivostní tabulkou, jsou z hlediska formální **logiky shodná**.

Postupně lze od menších celků k větším určit pravdivostní hodnoty složených výroků, nebo formulí, až zjistíme **pravdivostní hodnotu složeného výrazu**.

Při zavádění spojek jsme se seznámili s pravdivostními tabulkami těchto spojek. U každého složeného výroku je možno vytvořit tabulku, jejíž řádky představují všechna možná ohodnocení elementárních výroků, obsažených ve složeném výroku. Obecně je **počet řádků** (m) pravdivostní tabulky dán vzorcem:

$$m = 2^n$$

kde n …. počet různých elementárních výroků ve formuli.

Existují 3 výsledky řešení pravdivostních tabulek:

1. Výsledný sloupec obsahuje samé 1, tj. výraz je pravdivý pro každé ohodnocení elementárních proměnných a nazýváme jej **tautologie** neboli logický zákon (vesměs pravdivé).

2. Výsledný sloupec obsahuje samé 0, tj. formule je nepravdivá pro každé ohodnocení elementárních výrokových proměnných a nazýváme ji **kontradikce** výrokové logiky (vesměs nepravdivé).
3. Výsledný sloupec obsahuje 1 a 0, tj. výraz je pro některá ohodnocení pravdivý a pro jiná nepravdivý.

Výrazy 1. a 2. mají v logice zvláštní postavení, pravdivostní hodnota takových výroků nezáleží na pravdivostní hodnotě elementárních výroků, nebo výrokových proměnných, ale je určena pouze **formou** výroku nebo formule. Takové výroky tedy **nevyjadřují žádné skutečnosti** a **nemohou vypovídat nic o objektivní realitě**.

Výroky, vyjadřující nějaký obsah, nebo ty, které jsou formálním obrazem výroků přeložených ze skutečnosti, mají tabulku **smíšenou** a nazývají se **faktuální** nebo také **splnitelné výroky** nebo **splnitelné formule**.

4.4.4.1. Převod výrazu v přirozeném jazyce na formuli výrokové logiky

K tomu existují 2 algoritmy možných postupů při překladu:
1. přímý způsob překladu.
2. nepřímý způsob překladu.

4.4.5. Zkracování výrazu a vzájemná nahraditelnost funktorů

Gramaticky správné výrazy je možno podle potřeby zkracovat – zjednodušovat. Obecně musí o těchto zkrácených výrazech platit:

a) Dvě formule jsou navzájem nahraditelné, jsou-li ekvivalentní pro každé ohodnocení pravdivostních hodnot.
b) Každý zkrácený výraz se musí dát převést zpět na původní nezkrácený.

Principů zkracování je řada, jsou obtížné a nebudeme se jimi zabývat. Uvedeme jen 2 pravidla:

a) Má-li gramaticky správný výraz vnější závorky, je možno je vynechat. Například výraz $(p \rightarrow q)$ je možno zkrátit na výraz $p \rightarrow q$, ale výraz $\neg(p \rightarrow q)$ nikoliv, neboť nemá vnější závorky.
b) Závorky uvnitř gramaticky správných výrazů lze vynechat podle přednosti spojek: implikace + ekvivalence mají přednost před disjunkcí, ta před konjunkcí a ta před negací. Při řešení postupujeme od nejméně důležitých spojek k vyšším, v pořadí: $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow)$.

4.4.6. Úplné formy UDF a UKF

Libovolný funktor můžeme nahradit pomocí funktorů $\vee$, $\wedge$, $\neg$, využijeme-li možnost popsat tabulku tohoto funktoru pomocí **úplné disjunktní formy** (UDF) nebo **úplné konjunktní formy** (UKF).

Pravidlo pro sestrojení úplné disjunktní formy (UDF)

Nahraď všechny výskyty pravdivostní hodnoty **1** zadané pravdivostní tabulky hledané formule $\boldsymbol{F_d}$ elementárními konjunkcemi K_1, K_2, …, K_m proměnných p_1, p_2, … p_n nebo jejich negací tak, že aby tyto elementární konjunkce nabyly pravdivostní hodnoty 1. Spoj získané konjunkce pomocí funktoru disjunkce do formule $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$. Získaný výraz je hledanou formulí $\boldsymbol{F_d}$ a nazývá se **úplná disjunktní forma** (UDF).

Pravidlo pro sestrojení úplné konjunktní formy (UKF)

Nahraď všechny výskyty pravdivostní hodnoty **0** zadané pravdivostní tabulky hledané formule $\boldsymbol{F_k}$ elementárními disjunkcemi D_1, D_2, …, D_k proměnných p_1, p_2, … p_n nebo jejich negacemi tak, že aby tyto disjunkce D_1, D_2, …, D_k nabývaly hodnoty 0. Pak spoj získané disjunkce pomocí funktoru konjunkce do formule $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$. Získaný výraz je hledanou formulí $\boldsymbol{F_k}$ a nazývá se **úplná konjunktní forma** (UKF).

Definice: de Morganovo pravidlo
Toto pravidlo umožňuje nahradit konjunkci disjunkcí a opačně:

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \qquad p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

4.4.7. Využití úpravy a zkracování formulí

Metody uvedené v předchozí kapitole 4.4.6. se využívají při vytváření formulí překladem z přirozeného jazyka nepřímou metodou.

Jsou výchozím bodem pro využití logiky v technické praxi, neboť umožňují při konstrukci automatů a zařízení využívajících logické obvody přechod od slovního popisu automatu k popisu tohoto automatu formulí výrokové logiky. Na základě formule je možno sestrojit technickou realizaci. Výše nastíněnému postupu říkáme **logická identifikace**.

4.5. Pravidla správného usuzování

Dostáváme ke klíčovému pojmu logiky, k důsledkovému vztahu, tj. ke vztahu, podle něhož je možno rozhodnout o správnosti usuzování.

Sekvenci $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (premisy) $\Rightarrow$ B (závěr) (II)
nazveme pravidlem správného usuzování tehdy a jen tehdy, splňuje-li následující definici:

Definice
Vztah mezi výrazy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B vyjádřený (II) bude potvrzen, právě když každé udělení hodnot elementárním složkám výrazů $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B, jež činí pravdivými všechny výrazy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, činí též pravdivým výraz B, čili nenajde se takové udělení hodnot, které by verifikovalo všechny výrazy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a falzifikovalo závěr B.

5. Predikátová logika

Prozatím jsme se seznámili pouze s takovým logickým rozborem výrazů, jehož výsledkem byly formule sestávající se z výrokových proměnných a logických spojek.
O větách typu: Brno je velkoměsto. (1)
Sněžka je nejvyšší hora České republiky. (2)
jsme tvrdili, že jsou to výroky, v daném případě pravdivé. Jak ale rozhodneme, že výrok (1) je pravdivý a výrok
Uherský Brod je velkoměsto. je nepravdivý?

Jakému logickému rozboru a s jakým teoretickým vybavením musíme přistupovat k těmto výrokům, abychom mohli objektivně stanovit pravdivost či nepravdivost výroků? Právě tyto otázky úzce souvisí s prací učitele, snažícího se naučit své žáky definovat a chápat nové pojmy. Učitel dostatečně vybavený teoretickým aparátem moderní logiky je schopen strukturovat probíranou látku do navzájem do sebe navazujících celků.

Výrok (1) můžeme rozložit na jednotlivé složky. Je to především slovo **Brno**. Toto slovo nic netvrdí, není to výrok, označuje však nějaký objekt, a to právě jeden objekt.

Brno je **jméno** jedinečného, individuálního objektu, tzv. **individua**. **Jméno**, které označuje individuum, nazýváme **individuální konstanta**.

Slovo **velkoměsto** označuje celou množinu (třídu) velkoměst. Je to jméno **třídy**, čili **třídová konstanta**.

Při logickém rozboru budeme nejprve psát jméno třídy a pak individuální konstantu:
Velkoměsto(Brno) (1‘)
Velkoměsto(Uherský Brod). (1‘a)

Do třídy, jejímž jménem zápis (1‘) začíná, zařazujeme nikoliv individuální konstantu, která následuje v závorce, nýbrž individuum, které tato konstanta pojmenovává. Říkáme, že pojmenovávané individuum je **denotátem** individuální konstanty.

Postupným dosazováním individuálních konstant do závorek za třídovou konstantu dostaneme různé výroky, mající stejnou formu, kterou můžeme napsat např. takto:

Velkoměsto(x), čteme **x** je **velkoměsto**. (5‘)

Je (5‘) výrok, či není? Podle toho, jak jsme charakterizovali výrok, (5‘) výrokem není, nemůžeme totiž říct, je-li výraz (5‘) pravdivý nebo ne.

Výraz, skládající se z třídové konstanty a výrazu, za který je možno dosadit individuální konstantu, nazveme **výrokovou formou**.

Rozdíl mezi výrazem (1‘) a (5‘) je v tom, že v (1‘) je v závorce za třídovou konstantou individuální konstanta, tj. výraz pojmenovávající určitý denotát individuum. V (5‘) je v závorce za jménem třídové konstanty písmeno, nejčastěji x, y, z, popř. x_1, x_2, …, x_n. Tato písmena nejsou konstanty, a nemají určitý význam, neoznačují jediný objekt. Tato písmena se nazývají **proměnné**, a to **individuální proměnné**.

Individuální proměnná zastupuje ve výrokové formě individua z určitého **oboru hodnot**. **Obor hodnot proměnné** je množina individuí, ze které může určitá proměnná nabývat hodnot.

Máme určitou třídu objektů (v našem případě měst), kterou nazýváme **oborem proměnnosti**. Udělujeme-li postupně proměnné x ve výraze (5‘) hodnoty z oboru proměnnosti, vznikne z výrazu (5‘) postupně řada pravdivých a nepravdivých výroků, např. (1‘), (1‘a). Forma typu (5‘) obsahuje jedinou individuální proměnnou: říkáme jí proto **jednomístná výroková forma**.

Z různých třídových konstant vznikají různé jednomístné formy, např.

Řezník(x) Hora(y) Planeta(z)

Podobně můžeme také přejít od třídové konstanty k **třídové proměnné**. Zavedením třídové proměnné získáváme **jednomístnou formu** ve tvaru:

P(x) (6)

Výraz (6) je obecným tvarem, ve kterém můžeme třídovou proměnnou nahradit třídovou konstantou a individuální proměnnou individuální konstantou, a tak dostaneme pravdivý nebo nepravdivý výrok.

Protože ve výrocích zkoumaného typu **vypovídáme** (**predikujeme**) o příslušném individuu, že patří do dané třídy, můžeme jméno této třídy nazývat **predikátem**. Jinými slovy – nahradíme-li ve výroku individuální konstantu dlouhou pomlčkou, pak zbylá část výroku je **predikátem**.

Obecně existují tvrzení, ve kterých se vyskytuje **více** individuálních konstant nebo proměnných. Vypuštěním těchto konstant nebo proměnných a jejich nahrazením dlouhými pomlčkami můžeme získat vícemístné predikáty.

Brno leží mezi Prahou a Košicemi. (7)
——$_1$ leží mezi Prahou a Košicemi. (7‘)
——$_1$ leží mezi ——$_2$ a Košicemi. (7‘‘)
——$_1$ leží mezi ——$_2$ a ——$_3$. (7‘‘‘)

Z výrazu (7) lze postupným vypouštěním individuálních konstant (Brno, Praha, Košice) získat jednomístný (7‘), dvoumístný (7‘‘) a trojmístný (7‘‘‘) predikát. Zatímco **jednomístné predikáty** vyjadřují většinou nějakou **vlastnost** – planeta( ), řezník( ), **vícemístné predikáty** představují uspořádané dvojice, trojice, …, n-tice **nějaký vztah**.

Souhrn:
1. Při zjišťování pravdivosti výroků rozdělíme výrok na **predikát** a **individuální konstanty**.
2. **Predikát** vznikne z výroku vypuštěním individuálních konstant a je **tvořen** jedním nebo několika **výskyty dlouhé pomlčky** a **zbytkem výroku**.
3. **Jednomístné predikáty** vyjadřují **vlastnosti** individuí, **vícemístné** vyjadřují **vztahy** mezi individui.
4. Z hlediska rozboru výroku musíme nezbytně rozlišovat mezi **denotátem individua** a **pojmenováním denotátu**.
5. Výrazy, které se podobají výrokům a skládají se z **individuální proměnné** a **predikátu**, se nazývají **výrokové formy**.
6. Individuální proměnnou je možno nahradit některým individuem z oboru dané úvahy. Tímto nahrazením proměnné nabude hodnotu tohoto individua a výroková forma se změní na **výrok**.

Pro vytvoření jazyka predikátové logiky potřebujeme následující symboly:

a) **individuální proměnné** x, y, z, popř. $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$

b) **individuální konstanty** a, b, c, popř. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$

c) **predikátové proměnné** P_n^m, Q_n^m, R_n^m, kde horní index vyjadřuje počet volných míst v predikátu, dolní index rozlišení různých predikátů.

Využití zavedené symboliky pro překlad výroku:

Gerlachovský šťít je vyšší než Sněžka. (8)

$——_1$ je vyšší než $——_2$.

a ≡ Gerlachovský šťít b ≡ Sněžka

$R_1^2(a, b)$ (8‘)

Ze zápisu (8‘) lze říci, že výraz je výrokem skládajícím se z dvoumístného predikátu, vyjadřující vztah mezi dvěma individuálními konstantami. Pro verifikaci výrazu potřebujeme znát denotáty (hodnoty) individuálních konstant a určit, jsou-li tyto denotáty ve vztahu udaném predikátem (Gerlachovský štít – 2655 m, Sněžka – 1602 m).

Žáky naučíme následující postup:
1. Pochop vlastnost nebo vztah (**predikát**).
2. Seznam se s denotáty individuí nebo s oborem úvahy individuální proměnné.
3. Posuď, zda individua splňují vztah.
4. Rozhodni o logické pravdivosti výroku.

Verifikace výrokových forem

Znění výrokových forem v přirozeném jazyce:

Béďa je plnoletý. ………… třída Béďů.

Člověk je inteligentní. ………… třída lidí.

Pokud v obou případech nemáme na mysli konkrétního (určitého) člověka – denotát – pak tato výše uvedená tvrzení nejsou výroky, ale **výrokové formy**, tedy překlad do jazyka predikátové logiky:

Člověk je živočich. (9)

P^1 ………… $——_1$ je živočich

x ………… člověk

$P^1(x)$ (9‘)

Při využívání výrokových forem nebo při práci s nimi postupujeme 2 způsoby:
1. Nahradíme proměnnou některým individuem z oboru úvahy a pak postupujeme jako v předchozím případě, tj. při verifikaci výroku.
2. Použijeme kvantifikace, tj. učiníme z dané výrokové formy **existenční** nebo **obecné** tvrzení.

Existenční tvrzení je tvrzení sestávající z výrokové formy a ze zjištění, že tato výroková forma platí nejméně pro jedno individuum z oboru úvahy. **Existenční tvrzení** je možno uvést slovy: **existuje individuum, o kterém platí ….**

Obecné tvrzení je tvrzení sestávající z výrokové formy a ze zjištění, že tato výroková forma je pravdivá pro všechna individua z oboru úvahy. **Obecné tvrzení** je možno uvést slovy: **o každém individuu platí ….**

Existuje člověk, který je inteligentní. (10)
O každém člověku platí, že je živočich. (9)

Existenční kvantifikátor

Zápis $\exists$**x** čteme .... **existuje x, pro které platí**. Tvrzení (10) tedy zapíšeme v jazyce predikátové logiky:

$$\exists x\ Q^1(x) \qquad (10')$$

Obecný kvantifikátor

Zápis $\forall$**x** čteme .... **pro každé x platí**. Tvrzení (9) tedy zapíšeme v jazyce predikátové logiky:

$$\forall x\ P^1(x) \qquad (9')$$

Při práci s existenčními a obecnými tvrzeními ve výuce je možno využít následujících pravidel:

1. Rozložíme výraz na vysvětlení predikátu a na vysvětlení individuální proměnné.
2. Vymezíme obor úvahy, který je individuální proměnné přisouzen.
3. U existenčních tvrzeních vysvětlíme, že výrok se vztahuje nejméně na jedno individuum z daného oboru.
4. U obecných tvrzeních vysvětlíme, že výrok se vztahuje na všechna individua z daného oboru úvahy.
5. V obou případech je vhodné podpořit výklad příkladem, který vytvoříme dosazením individuální konstanty za proměnnou.

5.1. Jazyk predikátové logiky

Slovník

1. logické **konstanty**
   1. a, b, c ………… individuální konstanty
   2. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ………… logické spojky
   3. $\exists, \forall$ ………… kvantifikátory.
2. deskriptivní **proměnné**
   1. x, y, z ………… proměnné individuí
   2. P_n^m, Q_n^m, R_n^m ………… proměnné m-místných predikátů $m \neq 0$
   3. ( ), [ ], { } ………… pomocné znaky.

Gramatika

Formule predikátové logiky budeme nazývat **elementárními**, jestliže se budou skládat z m-místných predikátů ($m \neq 0$) a n individuálních proměnných nebo konstant.

Logické formule predikátové logiky jsou výrazy, které vznikají:

1. Když v logických formulích výrokové logiky za výrokové proměnné dosadíme elementární formule predikátové logiky, tj. logické formule predikátové logiky jsou elementární predikátové formule a výrazy, které z nich lze sestrojit pomocí výrokových spojek a pomocných znaků.
2. Když před logickou formuli predikátové logiky, nebo před nějaký její argument pravdivostního funktoru, klademe existenční nebo obecný kvantifikátor.
3. Jen výrazy, vytvořené podle pravidel ad 1. a ad 2. gramatiky, jsou **logické formule predikátové logiky**.

5.1.1. Volná a vázaná proměnná

Máme-li nějakou formuli predikátové logiky, která obsahuje kvantifikátor, pak můžeme vyznačit podtržením dosah kvantifikátoru (tu část formule, na kterou se kvantifikátor vztahuje). Označíme-li naznačeným způsobem dosah kvantifikátoru, pak jako **vázanou proměnnou** budeme označovat proměnnou, která **je v dosahu kvantifikátoru** a jako **volnou proměnnou** tu, která **není v dosahu kvantifikátoru**. Vázaná proměnná je tedy ta, která je podtržena plnou čarou, na jejímž začátku je tato proměnná vyznačena.

Definice

Obsahuje-li výraz **pouze vázané proměnné**, pak není výrokovou formou, ale **výrokem**.

Přiřadíme-li v nějakém výraze hodnoty proměnným, pouze **volné** výskyty proměnných **nabývají hodnot**.

5.1.2. Negace kvantifikátoru

Kvantifikovaný výraz je buď výrok (jsou-li všechny proměnné vázány) nebo logická formule. V obou případech lze výraz negovat tak, že před něho položíme funktor ¬, pak:

$\neg\exists x\, P^1(x)$ …. čteme: neexistuje x, které má vlastnost P

nebo

$\neg\forall x\, P^1(x)$ …. čteme: není pravda, že každé x má vlastnost P.

Negace kvantifikátoru má týž význam jako negace výrazu tvořeného kvantifikátorem a jeho dosahem.

Zamysleme se nad rozdílem mezi:

$\neg\exists x\, P^1(x)$ a $\exists x\, \neg P^1(x)$

$\neg\forall x\, P^1(x)$ a $\forall x\, \neg P^1(x)$

Vzájemná nahraditelnost kvantifikátorů podle de Morganových pravidel

$$\forall x\, P^1(x) \equiv \neg\exists x\, \neg P^1(x) \quad (13)$$
$$\forall x\, \neg P^1(x) \equiv \neg\exists x\, P^1(x) \quad (14)$$
$$\neg\forall x\, \neg P^1(x) \equiv \exists x\, P^1(x) \quad (15)$$
$$\neg\forall x\, P^1(x) \equiv \exists x\, \neg P^1(x) \quad (16)$$

Také i v predikátové logice použijeme jazyk predikátové logiky, abychom výrazy, vyslovené v přirozeném jazyce, přeložili do jazyka predikátové logiky. Ke každému seznamu premis nalézt odpovídající sekvenci predikátové logiky.

5.1.3. Pravidla správného usuzování v predikátové logice

Ve výrokové logice kontrola správných argumentů (úsudků) vyžadovala mechanický postup sestrojení tabulky k dané sekvenci, který umožňoval po konečném počtu kroků konstatovat, zda daná sekvence je pravidlem správného usuzování.

Americký logik ***Church*** *Alfonzo* dokázal, že pro predikátovou logiku nemůže být žádný takový návod vytvořen.

V predikátové logice musíme postupovat tak, že o zkoumané sekvenci si vytvoříme domněnku, že:

1. **není**, nebo
2. **je**

pravidlem správného usuzování.

V 1. případě se snažíme najít **protipříklad** správného usuzování, v 2. případě se domněnku snažíme potvrdit tím, že závěr sekvence odvodíme z premis.

Protipříklady pravidla správného usuzování

Definice

Říkáme, že sekvenci $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ ($n \geq 0$) jsme nalezli **protipříkladem** správného usuzování tehdy, jestliže jsme nalezli nějaký takový obor úvahy (množinu individuí) a nějaké takové přiřazení, pro které formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nabude pravdivostní hodnoty **1** a závěr pravdivostní hodnoty **0**.

Pravidla správného usuzování
např. usuzování z obecného na existenci.

Definice

Sekvence predikátové logiky je pravidlem správného usuzování tehdy a jen tehdy, když neexistuje obor úvahy a přiřazení hodnot proměnným, při kterém by premisy sekvence nabyly pravdivostní hodnoty **1** (**pravda**) a závěr **0** (**nepravda**). Tedy: tehdy a jen tehdy, neexistuje-li protipříklad k dané sekvenci.

6. Třídová logika

Třídovou logiku, která je někdy identifikována s **teorií množin**, lze chápat jako relativně samostatnou teorii nebo jen jako **variantu logiky jednomístných predikátů**.

V úvodu k predikátové logice jsme vysvětlili vztah mezi třídou a predikátem tak, že ke každé vlastnosti reprezentované nějakým predikátem lze konstruovat třídu objektů, mající tuto vlastnost.

V logice tříd budeme používat následující proměnné:

a) **individuové proměnné** x, y, z
b) **proměnné tříd individuí** X, Y, Z.

Základní logickou proměnnou **je členství ve třídě** $\in$, vyjadřující vztah mezi individui a třídou: $x \in X$ …. vztah čteme x **je prvkem** třídy X.

Tento vztah je třeba odlišovat zejména od **inkluze** $\subset$, která je vztahem mezi **třídami**.

Není-li x prvkem třídy X, vyjadřujeme to výrazem:

$x \notin X$ (x **není prvkem** třídy X),

který má stejný význam jako: $\neg(x \in X)$, tj. není pravda, že x je prvkem třídy X.

V teorii tříd rozlišujeme několik tříd s obecnými vlastnostmi:

Jednotková třída obsahuje právě jeden prvek. Tuto třídu je však třeba odlišovat od jejího prvku.

Univerzální třída je obecně definována vztahem $x = x$ a obsahuje jako své prvky všechna individua dané oblasti zkoumání. Označíme ji symbolickým znakem ***1°***; v grafických schématech je vyznačena obdélníkem.

Prázdná třída je obecně definována vztahem $x \neq x$, přičemž $\neq$ označuje negaci logické konstanty identity, neobsahuje žádný prvek. Tato třída je definována vlastností, které nepřísluší žádné individuum (např. být kulatým čtvercem atd.). Označíme ji ***0°***.

Univerzální a prázdná třída mají přesně stejné strukturální vlastnosti jako prvky **1** a **0** v binární algebře.

Definice

Libovolná třída je obsažena v univerzální třídě. $X \subset 1°$

Definice

Prázdná třída je obsažena v každé třídě. $0° \subset X$

Inkluze tříd: $X \subset Y \leftrightarrow \forall x\,(x \in X \rightarrow x \in Y)$

Rovnost tříd: $X = Y \leftrightarrow \forall x\,(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$

Nerovnost tříd: $X \neq Y \leftrightarrow \forall x\,(x \in X \leftrightarrow x \notin Y)$

Operace s třídami nám umožňují zavést pomocí daných tříd novou třídu. Operací **logického sčítání** vzniká součet:

Sjednocení dvou tříd: $x \in (X \cup Y) \leftrightarrow \forall x\,((x \in X) \vee (x \in Y))$

Definice

Libovolná individuální proměnná x je prvkem sjednocení $X \cup Y$ právě tehdy, je-li x prvkem třídy X nebo Y.

Operací **logického násobení** vzniká logický součin:

Průnik dvou tříd: $x \in (X \cap Y) \leftrightarrow \forall x\,((x \in X) \wedge (x \in Y))$

Definice

Libovolná individuální proměnná x je prvkem průniku $X \cap Y$ právě tehdy, je-li x prvkem třídy X a prvkem třídy Y.

Definice

Třídy jsou navzájem **disjunktní** tehdy a jen tehdy, je-li jejich průnik prázdná množina.

$$X \cap Y = \boldsymbol{0}°$$

Třídy jsou **nedisjunktní**, jestliže platí:

$$X \cap Y \neq \boldsymbol{0}°$$

Operací tvoření doplňku vzniká **doplňková třída**:

$$(x \in X') \leftrightarrow (x \notin X)$$

Libovolná individuová proměnná x je prvkem doplňkové třídy X' tehdy a jen tehdy, není-li prvkem třídy X. Pro třídu a doplňkovou třídu platí, že jejich průnik je prázdná třída:

$$X \cap X' = \boldsymbol{0}°$$

Definice

Sjednocením třídy a jejího doplňku je univerzální třída:

$$X \cup X' = \boldsymbol{1}°$$

Další zákony třídové logiky:

Zákony absorpce:

$$X \cap (X \cup Y) = X$$
$$X \cup (X \cap Y) = X$$

Zákony expanze:

$$X = X \cap (Y \cup Y') = (X \cap Y) \cup (X \cap Y')$$
$$X = X \cup (Y \cap Y') = (X \cup Y) \cap (X \cup Y')$$

Zákony agresivnosti pro průnik a sjednocení:

$$X \cap \boldsymbol{0}° = \boldsymbol{0}°$$
$$X \cup \boldsymbol{1}° = \boldsymbol{1}°$$

Zákony neutrálnosti pro průnik a sjednocení:

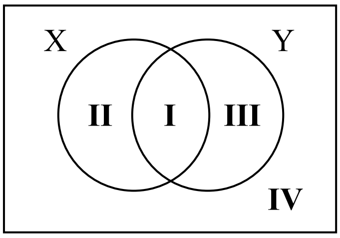
$$X \cap \boldsymbol{1}° = X$$
$$X \cup \boldsymbol{0}° = X$$

Zákony tautologie:

$$X \cap X = X$$
$$X \cup X = X$$

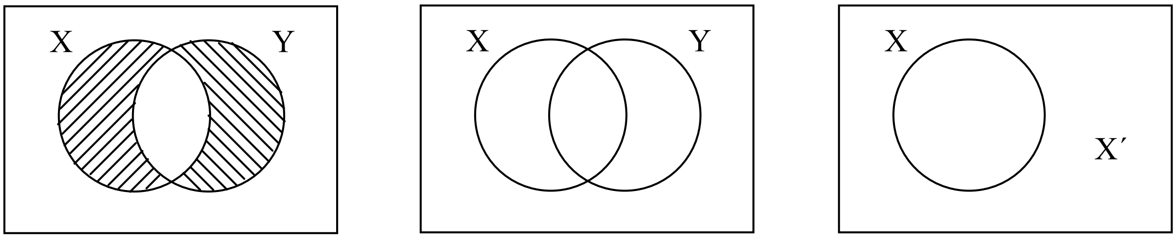
Operace s třídami lze výhodně zobrazit graficky. Třídám přiřadíme určité plošné obrazce – **univerzální třídě obdélník** a **ostatním třídám** nejčastěji **kružnice**, znázorněné uvnitř tohoto obdélníka. Operace s 2 třídami můžeme znázornit pomocí na základě grafického schématu na obrázku 4, v němž jsme zvolili polohu kruhů znázorňujících X a Y tak, aby vznikla pole:

I. $X \subset Y$
II. $X \not\subset Y$
III. $Y \not\subset X$
IV. $x \in (X \cup Y)'$



Obrázek 4 Grafické schéma dvou tříd

Využitím zavedeného grafu můžeme vyjádřit všechny třídové operace. **Vyšrafovaná** je **prázdná** třída (viz obrázek 5).

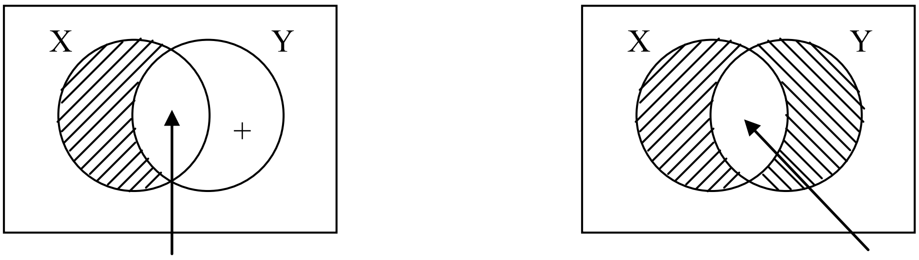


$X \cap Y$ $X \cup Y$ X'

Obrázek 5 Grafické znázornění průniku a sjednocení dvou tříd a doplňkové třídy

Elementární výroky třídové logiky vyjadřují vztahy mezi třídami. Tvrdí, že třídy jsou rovné nebo nerovné.

Platí-li mezi třídami X a Y vztah **inkluze** $X \subset Y$, pak X je **podtřídou** Y. Graficky zobrazíme tento vztah, jak je patrno z obrázku 6.



$X \subset Y \quad Y \not\subset X$ $X \subset Y,\ Y \subset X \Rightarrow X = Y$

Obrázek 6 Grafické znázornění podtřídy a rovnosti tříd

(+ …. třída obsahuje alespoň (nejméně) jeden prvek)

Výroky třídové logiky mají tvar rovnosti tříd, nebo to jsou složené výroky, jejichž argumenty jsou rovnosti tříd (obdobně platí i pro formule, jenže místo tříd vystupují třídové proměnné).

Formule třídové logiky, která je nutně pravdivá po dosazení libovolných tříd za proměnné, se nazývá **zákon třídové logiky**.

6.1. Subjekt – predikátové výroky

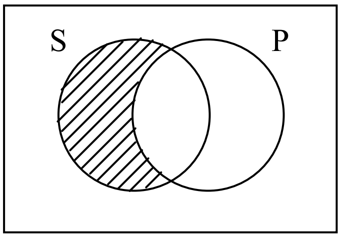
Elementární výroky, které tvrdí nebo popírají, že jedna třída S je obsažena v druhé třídě P, případně P′, nazýváme **subjekt – predikátové výroky**.

Máme **4 typy** subjekt – predikátových výroků:

1. Obecně kladné výroky S a P

$S \subset P$ …. každé S je P

$S \cap P' = \boldsymbol{0}°$ …. všechna S jsou P.



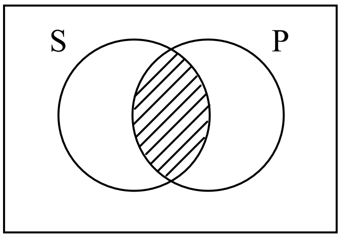
Obrázek 7 Grafické znázornění obecně kladných výroků S a P

$\forall x\ (S^1(x) \rightarrow P^1(x))$ …. Pro všechna x platí: jestliže x má vlastnost S^1, pak má vlastnost P^1.

2. Obecně záporné výroky S e P

$S \subset P'$ …. žádné S není P.

$S \cap P = \boldsymbol{0}°$



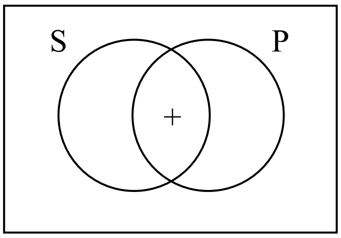
Obrázek 8 Grafické znázornění obecně záporných výroků S e P

$\forall x\ (S^1(x) \rightarrow \neg P^1(x))$ …. Pro všechna x platí: jestliže x má vlastnost S^1, pak nemá vlastnost P^1.

3. Částečně kladné výroky S i P

$S \not\subset P'$ …. existuje alespoň jedno S, které je P.

$S \cap P' \neq \boldsymbol{0}°$



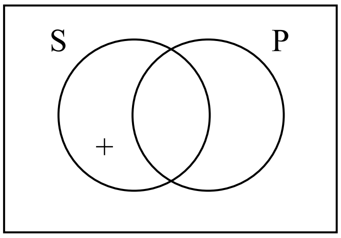
Obrázek 9 Grafické znázornění částečně kladných výroků S i P

$\exists x\ (S^1(x) \wedge P^1(x))$ …. některá x, mající vlastnost S^1, mají vlastnost P^1.

4. Částečně záporné výroky S o P

$S \not\subset P$ …. existuje alespoň jedno S, které není P.

$S \cap P \neq \boldsymbol{0}°$



Obrázek 10 Grafické znázornění částečně záporných výroků S o P

$\exists x\ (S^1(x) \rightarrow \neg P^1(x))$ …. Pro x platí: jestliže x má vlastnost S^1, pak nemá vlastnost P^1.

6.1.1. Kategorický sylogismus

Už od dob *Aristotelových* se logikové zabývají speciálním typem argumentu (úsudku) nazývaným **sylogismus**, který se skládá ze **dvou premis** a **závěru**, přičemž všechny výroky v něm obsažené, mají tvar subjekt – predikátových výroků.

Sylogismus tvoří:

a) **2 premisy** mají celkem **3 názvy**
b) **1 název** je **společný** oběma premisám a **není obsažen** v závěru (důsledku)
c) závěr (důsledek), jehož **subjekt** vystupuje v jedné a **predikáty** v druhé premise.

7. Literatura

Použitá
1. STRACH, J.: *Logika*. 2. vydání. Brno: MU, 2009, 84 s. ISBN 978-80-210-5025-9.

Doporučená
2. GAHÉR, F. *Logika pre každého*. 2. doplnené vydanie. Bratislava: Iris, 1998, 413 s. ISBN 80-88778-77-8.
3. SOUSEDÍK, P. *Logika pro studenty humanitních oborů*. Druhé, rozšířené vydání. Praha: Vyšehrad, 2001, 222 s. ISBN 80-7021-509-7.
4. ŠTĚPÁN, J. *Formální logika*. 2. vyd. Olomouc: FIN, 1995, 109 s. ISBN 80-17182-004-0.

Obsah