Přednáška k 70. narozeninám prof. J. Jankavého, 1993

Co viděl pan Tompkins?

Jan Novotný

Úvod

Obrázek (obr.1) zkráceného bicyklu s eliptickými koly, zachycující sen pana Tompkinse po vyslechnutí profesorovy přednášky [1], odpovídá názoru, který panoval po vzniku speciální teorie relativity: kdybychom mohli vidět či fotografovat rychle se pohybující tělesa, jevila by se nám zkrácena ve směru svého pohybu. Jak připomíná komentář ke Gamowově knize, teprve v r. 1959 Terrell [2] a Penrose [3] vzali do úvahy, že v důsledku konečné rychlosti světla nevidíme různé části tělesa v týž okamžik; pokud se těleso pohybuje, je tím jeho tvar zkreslen stejným způsobem, jako by se pouze při nezměněných klidových rozměrech natočilo.

Dalšímu rozpracování a různým matematickým formulacím tohoto objevu bylo věnováno mnoho prací (např. přehledné články [4], [5], kde je mnoho dalších citací). Jak se zdá, jeho výklad však většinou nepronikl do učebnic a základních přednášek. Jedním z důvodů je snad dojem, že jde o příliš subtilní a technicky náročný problém. Navíc stručné informace o jeho řešení jsou často nepříliš jasné anebo dokonce zavádějící.

Chtěl bych zde proto načrtnout způsob, jak s využitím pouze elementárních poznatků z kinematiky a geometrie pochopit všechny podstatné rysy objevu a zpřístupnit jej tak studentům, kteří si jej mohou v rámci cvičení zopakovat a zakusit tak "dobrodružství poznání".

Poznamenávám, že "viditelnost těles" je v dalším posuzována z čistě geometrického hlediska, nezabýváme se změnami frekvence tělesy vysílaného či odráženého světla v důsledku Dopplerova jevu.

Podélné a příčné zkreslení

Počátkem našich úvah mohou být pochybnosti studenta nad popsaným obrázkem po přečtení komentáře. Jak se může cyklista jedoucí podél obruby chodníku jevit natočen, nemá-li se zčásti ocitnout na chodníku?

Rozložme si nejprve problém na dvě části. Začněme tyčí bicyklu (obr.2), kterou považujeme za jednorozměrný útvar pohybující se ve směru své délky rychlostí v. Nechť θ je úhel mezi přímkou pohybu a paprskem vedeným z bodu pozorování. Předpokládáme, že délka tyče je velmi malá ve srovnání s její vzdáleností od pozorovatele, takže paprsky vedené k němu od různých bodů tyče jsou prakticky rovnoběžné. Pro určitost vezměme případ, kdy tyč se od pozorovatele vzdaluje. Je zřejmé, že pozorovaná délka l^* je menší než skutečná délka l, která se ovšem podle teorie relativity liší od klidové délky l_0

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1}$$

V okamžiku, kdy pozorovatel vidí počátek tyče v bodě A, vidí její konec v jistém bodě O, předbíhajícím bod B, v němž je konec tyče v okamžiku, kdy pozorovaný paprsek vyšel z A. Bod O je určen tím, že konec tyče urazí dráhu z B do O za stejnou dobu, za niž se paprsek z A dostane do bodu X, který je patou kolmice, spuštěné z O na tento paprsek. Tedy

$$\frac{l - l^*}{v} = \frac{l^* \cos\theta}{c} \tag{2}$$

a proto s přihlédnutím k (1)

$$l^* = \frac{l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{3}$$

Vzorec (3) udává vztah mezi pozorovanou a klidovou délkou. Projevuje se v něm jak vliv Lorentzovy kontrakce, tak i konečné rychlosti světla. Pro dostatečně šikmá pozorování je druhý vliv jakožto efekt 1. řádu výraznější. Dostatečně vzdálená přibližující se tyč se proto jeví jako prodloužená. Pro kolmé pozorování je ovšem $\cos\theta = 0$ a (3) přechází v (1), tj. v tomto případě (kdy začátek a konec tyče jsou od pozorovatele stejně vzdáleny) přímému pozorování Lorentzovy kontrakce nic nebrání.

Dále si všimněme řídítek bicyklu (obr.3), která budeme považovat za tyč orientovanou kolmo na směr pohybu. Předpokládejme, že oko pozorovatele leží ve stejné vodorovné rovině jako tato tyč. V okamžiku, kdy pozorovatel vidí vzdálenější konec tyče v bodě A, vidí její bližší konec v bodě O, který předbíhá před polohou bližšího konce B v okamžiku, kdy pozorovaný paprsek vyšel z A. Tyč se proto jeví "zkosena" o úhel ψ. Bod O je určen tím, že bližší konec tyče do něho dorazí z B za stejnou dobu, za kterou světlo dospěje z A do X, kde X je pata kolmice spuštěné na paprsek z O. Je tedy

$$\frac{\sin\psi}{v} = \frac{\sin(\theta - \psi)}{c} \tag{4}$$

a odtud

$$\tan\psi = \frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{5}$$

Kontrolní otázka pro čtenáře: Pro které θ má ψ maximální hodnotu? Při kterém θ přestává být vidět přední a stává se viditelnou zadní stěna tyče?

Pro úplnost dodejme, že tyč kolmá jak na směr pohybu tak na rovinu pozorování se pochopitelně jeví ve své skutečné klidové velikosti.

Natočení

Dostatečně vzdálené těleso můžeme proložit kubickou mřížkou, jejíž hrany se zkracují, popř. prodlužují ve směru pohybu podle vzorce (3), ve směru kolmém na pohyb v rovině pozorování jsou zkoseny podle (5) a ve zbývajícím směru se nemění. Pro zjištění změny tvaru takového tělesa proto stačí uvažovat o změně tvaru čtverce v rovině pozorování. Nechť délka jeho strany je jednotková. Na obr.4 vidíme deformaci viditelného tvaru čtverce způsobenou pohybem (tučně vytažený kosodelník vzniklý zkrácením a zkosením). Označíme-li p, q průměty příčné a podélné strany do směru kolmého na spojnici pozorovatele s pozorovaným objektem, s využitím (3), (5) pro ně dostáváme

$$p = \frac{\cos(\theta - \psi)}{\cos\psi} = \frac{cos\theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{6}$$

$$q = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sin\theta}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{7}$$

Snadno si ověříme, že platí

$$p^2 + q^2 = 1 \tag{8}$$

To však znamená, že průměty jsou stejné, jako by se čtverec natočil o jistý úhel α, neboť v tomto případě jsou průměty $p = \cos(\theta - \alpha)$, $q = \sin(\theta - \alpha)$ a přirozeně splňují (8).

Označme (viz obr.4) $ABCD$ vrcholy deformací vzniklého kosodelníku, $AEFG$ vrcholy otočeného čtverce. Jak je vidět, B a E, C a F, D a G se při pozorování kryjí. Označme dále P a Q krajní body průmětů p a q na kolmici k paprskům pozorování jdoucí bodem A. S využitím shodnosti trojúhelníků GPA, AQE můžeme psát

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{q}{p} \tag{9}$$

a po dosazení (6), (7) a úpravě odtud dostaneme vztah vyjadřující závislost úhlu α zdánlivého natočení tělesa na pozorovacím úhlu θ a rychlosti v

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}\sin^2\theta \tag{10}$$

Zdůrazněme, že jde o natočení "jakoby", fakticky je pozorovaný tvar tělesa deformován. Deformace je neodlišitelná od natočení pouze tehdy, nejsou-li dostupné údaje o vzdálenostech jednotlivých částí tělesa. Předpokládáme-li již, že pan Tompkins byl schopen rychle se pohybující tělesa vidět, viděl je plasticky a odlišil by tedy šikmý hranol od otočené krychle podobně jako zkosený disk od koule. Vskutku tedy mohl vidět cyklistu tenkého jako list papíru, s tím dodatkem ovšem, že rychle jedoucí cyklista seděl na bicyklu zkoseně a obracel se tedy k pozorovateli zády (přičemž rozpětí jeho ramen se prodloužilo). Kromě plastického vidění by pomohl vyloučit natočení také "nehybný kontext" obrazu - bicykl se pohyboval podél obruby chodníku rovnoběžně s ní, a dále znalost zákona zachování momentu hybnosti - pro skutečné natáčení bicyklu v souladu se vzorcem (10) nebyl žádný fyzikální důvod.

Kruhový obrys rychle se pohybující koule

Předchozí závěry platí pro tělesa dostatečně malá ve srovnání s pozorovací vzdáleností. Z prací Terrella a Penrose však víme, že pozorovaný obrys koule libovolné velikosti zůstává kruhový bez ohledu na její pohyb. Užijme příležitosti k uvedení jednoduchého důkazu (obr.5).

Dva pozorovatelé vidí kouli ze stejného místa, jeden z nich je vzhledem k ní v klidu, druhý se pohybuje rychlostí v. Pro klidového pozorovatele paprsky dopadající z obrysu koule do jeho oka tvoří kužel. Tento kužel můžeme reprezentovat vektory rychlosti světla, které se sbíhají v místě pozorování. Vyznačují se konstantním průmětem do osy kužele - pro jejich komponenty c_x, c_y, c_z tedy platí

$$c_x P + c_y Q + c_z R = K \tag{11}$$

kde P, Q, R, K jsou jisté konstanty, a dále konstantní velikostí, tedy

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = c^2 \tag{12}$$

Systémy obou pozorovatelů lze spojit speciální Lorentzovou transformací pro komponenty rychlosti c_x, c_y, c_z. Snadno se zjistí, že rovnice (11) přejde opět v rovnici roviny, v níž se pouze změní koeficienty, tedy

$$c_x^{'} P' + c_y^{'} Q' + c_z^{'} R' = K' \tag{13}$$

zatímco rovnice (12) zůstane nezměněna

$$c_x^{'\,2} + c_y^{'\,2} + c_z^{'\,2} = c^2 \tag{14}$$

Počátky vektorů světelné rychlosti na paprscích směřujících k pozorovateli z obvodu tělesa tedy opět splňují rovnici roviny a rovnici koule se středem v bodě pozorování a musejí tvořit kružnici, na kterou se pozorovatel dívá ve směru její kolmé osy. Zmíněné paprsky tvoří tedy i pro něho kužel a jím pozorovaný obrys je kruhový.

Kdybychom místo Lorentzovy transformace užili transformace Galileiho, zůstala by rovnice (11) rovnicí roviny, ale namísto (12) bychom měli

$$(c_x^{'} + v)^2 + c_y^{'\,2} + c_z^{'\,2} = c^2 \tag{15}$$

tj. koule by měla střed mimo bod pozorování a kružnice vzniklá protětím roviny koulí by byla nazírána "zešikma". Paprsky by proto již netvořily (kruhový) kužel.

Povšimněme si, že v předešlé úvaze byl důležitý pouze kruhový obrys koule, nikoliv samotné těleso. Dokázali jsme tedy zároveň, že míjejí-li se těsně dva pozorovatelé a jeden z nich vidí těleso ohraničené kruhem, vidí je takto i druhý.

To nás vrací zpět k panu Tompkinsovi. Vynikající relativisté v knize [6] na základě předchozího zjištění (získaného pomocí spinorového počtu) konstatují, že eliptický tvar kol je nedostatkem "jinak výtečné Gamowovy knížky".

Je však tato kritika oprávněná? Uvažujme o dvou cyklistech, kteří jedou vedle sebe, ale v jistém rozestupu, takže druhý přejede těsně za zády pana Tompkinse pozorujícího prvního cyklistu. V okamžiku, kdy druhý cyklista Tompkinse míjí, musí Tompkins stejně jako on vidět kola prvního cyklisty kruhová. V důsledku konečné rychlosti světla se ovšem první cyklista jeví Tompkinsovi opožděn za svým kolegou. Tompkins se tedy na něho dívá zešikma a kruhový obrys kol proto svědčí o jejich prodloužení, které nastává u přibližujících se těles podle vzorce (2). Když se později pan Tompkins dívá na prvního cyklistu kolmo, je už druhý cyklista o kus vpředu a jeho kruhový obrys nemusí být kruhovým obrysem pro Tompkinse. V té chvíli však může těsně za Tompkinsem projíždět třetí cyklista, sledující v závěsu svého předchůdce. Ten se dívá na prvního cyklistu před sebou šikmo a vidí proto jeho kola jako elipsy, stejně jako je vidí i pan Tompkins.

Závěr

Pohleďme znovu na obrázek 1, odmysleme si však okolní "nepohyblivý" svět a pro jistotu i samotného cyklistu. Můžeme si dokonce samotný bicykl obkreslit či okopírovat a předložit jej nezasvěcenému bližnímu, nejlépe nevinnému dítěti neobeznámenému s Lorentzovou kontrakcí. Bezpochyby nám na základě své zkušenosti řekne, že bicykl byl vzhledem k malíři natočen. (Čtenář má jistě po ruce nějaký předmět, na němž se může přesvědčit na vlastní oči, že natočený kruh se jeví jako elipsa.) Co nebral do úvahy spisovatel, to bezděčně zachytil malíř.

Pedant může přesto vznést vůči obrázku jednu oprávněnou námitku. Všechno by bylo v pořádku, kdyby se kolo bicyklu pohybovalo translačním pohybem. Ve skutečnosti se ovšem kolo bicyklu točí. To se naštěstí neprojeví na jeho obrysu, protože si můžeme představovat jiné translačně se pohybující kolo, jehož obvod se ve svém klidovém systému S' stále kryje s obvodem rotujícího kola. Oba obvody se tedy musejí krýt i pro pana Tompkinse. Rotace však ovlivní "špice" kola. Ty v systému S pana Tompkinse nebudou úsečkami, ale oblouky, a v horní části (eliptického) kola budou hustší než v části spodní.

Literatura

[1] G. Gamow: Pan Tompkins v říši divů (s ilustracemi autora a J. Hookhama a komentáři J. Bičáka), Mladá fronta 1986.

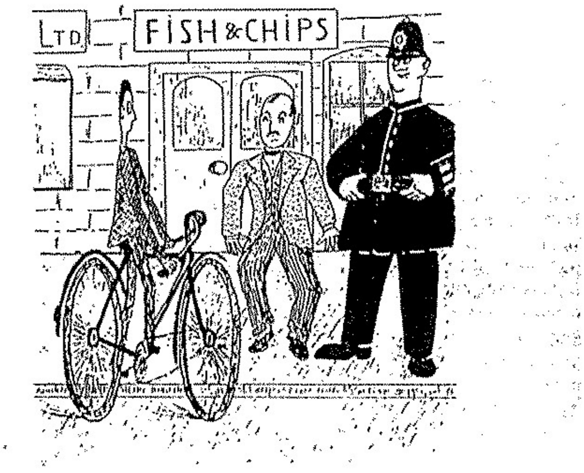
[2] J. Terrell: Invisibility of the Lorentz contraction, Phys. Rev. 1959, 116, 7; 3, 10.

[3] R. Penrose: The apparent shape of a relativistically moving sphere, Proc. Camb. Phil. Soc. 1959, 55, 1.

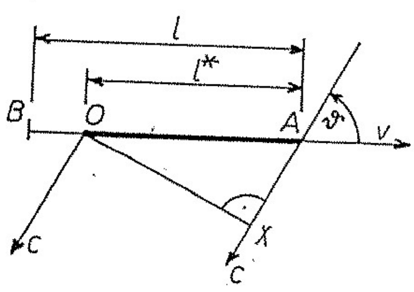
[4] B. M. Bolotovskij: O vidimoj forme bystrodvižuščichsa těl, Einsteinovskij sbornik 1980-81, Moskva 1985.

[5] B. M. Bolotovskij: O vidimoj forme dvižuščegosa těla, Einsteinovskij sbornik 1986-90, Moskva 1991.

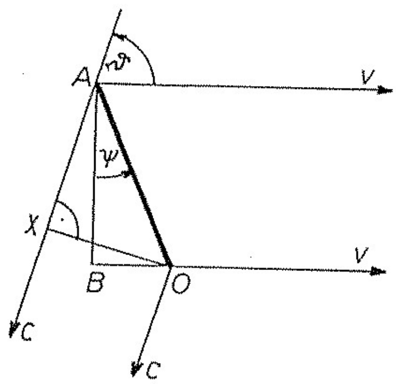
[6] W. Kopczynski, A. Trautman.: Czasoprzestrzen i gravitacja, PWN, Warszawa 1981, str. 111.



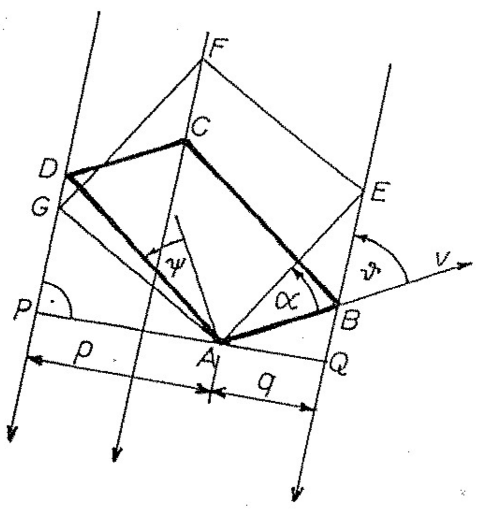
Obr.1



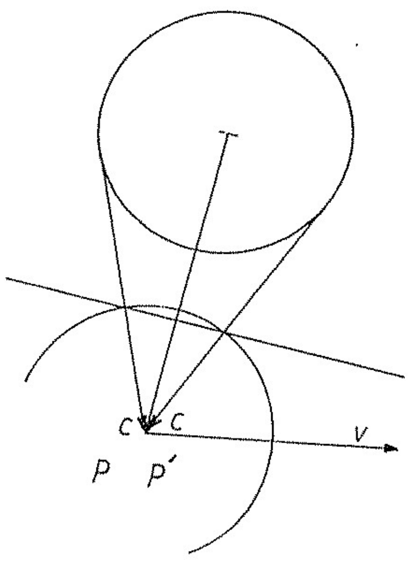
Obr.2



Obr.3



Obr.4



Obr.5