Příklady na procvičení

Úlohy

3.6 V C řešte rovnice a jejich kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

a) $x^3 - \mathrm{i} = 0$ b) $x^6 + 64 = 0$

c) $x^6 - 64 = 0$ d) $x^3 + \mathrm{i} = 0$

3.7 V C řešte rovnice a jejich kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

a) $x^4 - 1 = 0$ b) $x^8 - 1 = 0$

c) $x^4 + 1 = 0$ d) $x^8 + 1 = 0$

3.8 V C řešte rovnice:

a) $x^5 - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$ b) $x^5 + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$

c) $x^3 - 1 + \mathrm{i} = 0$ d) $x^3 + 1 - \mathrm{i} = 0$

3.9 V C řešte následující rovnice jednak jako kvadratické, jednak jako binomické:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 - 2x + 4 = 0$ d) $x^2 + 2x + 2 = 0$

[Návod: Kvadratickou rovnici $x^2 - 2x + 2 = 0$ lze chápat jako rovnici binomickou $(x-1)^2 + 1 = 0$.]

3.10 Dokažte, že platí: Jsou-li čísla x, x' kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$, pak čísla $x \cdot x'$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x'}$ jsou také jejími kořeny.

VÝSLEDKY:

d) $\left[x - \frac{1}{2}\left(3 + \mathrm{i}\sqrt{11}\right)\right]\left[x - \frac{1}{2}\left(3 - \mathrm{i}\sqrt{11}\right)\right]$. **3.6** a) $x_k = \cos\frac{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}{3}$ $+ \mathrm{i}\sin\frac{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$; b) $x_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k}{6}\right)$, $k = 0,1,\ldots,5$; c) $x_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\right)$, $k = 0,1,\ldots,5$; d) $x_k = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$. **3.7** a) $x_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4}$ $k = 0,1,2,3$; b) $x_k = \cos\frac{2k\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{8}$, $k = 0,1,\ldots,7$; c) $x_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}$, $k = 0,1,2,3$; d) $x_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{8}$, $k = 0,1,\ldots,7$. **3.8** a) $x_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi}{5}\right)$, $k = 0,1,2,3,4$; b) $x_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{5}\right)$, $k = 0,1,2,3,4$; c) $x_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)$, $k = 0,1,2$; d) $x_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)$, $k = 0,1,2$. **3.9** a) $x_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$; b) $x_{1,2} = \pm\mathrm{i}$; c) $x_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$; d) $x_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$. **3.11** a) $x_1 = -4 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$; b) $x_1 = 2 - 3\mathrm{i}$, $x_2 = $ c) $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = -3 + \mathrm{i}$; d) $x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$. a) $x_1 = x_2 = -\mathrm{i}$; b) $x_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. **3.13** a) $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, $y_1 = 1 - \mathrm{i}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + y_2 = -2 - 2\mathrm{i}$; b) $x_1 = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $y_1 = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$; $x_2 = -1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ **3.14** a) $x_{1,2} = \pm 64$; b) $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\mathrm{i}\sqrt{3}$. **3.15** a) $p = 8 + 6\mathrm{i}$.

Úlohy

3.11 V množině C řešte rovnice:

a) $x^2 + 3x + 10\mathrm{i} = 0$

b) $x^2 - 2x + 9 + 6\mathrm{i} = 0$

c) $x^2 + (2 - 3\mathrm{i})x - 5(1 + \mathrm{i}) = 0$

d) $x^2 - 4 = 3\mathrm{i}$

d) $x_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$. **3.11** a) $x_1 = -4 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$; b) $x_1 = 2 - 3\mathrm{i}$, $x_2 = 3\mathrm{i}$; c) $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = -3 + \mathrm{i}$; d) $x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$. **3.12** a) $x_1 = x_2 = -\mathrm{i}$; b) $x_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. **3.13** a) $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, $y_1 = 1 - \mathrm{i}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, $y_2 = -2 - 2\mathrm{i}$; b) $x_1 = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $y_1 = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$; $x_2 = -1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$. **3.14** a) $x_{1,2} = \pm 64$; b) $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\mathrm{i}\sqrt{3}$. **3.15** a) $p = 8 + 6\mathrm{i}$.

KVADRATICKÉ ROVNICE S KOMPLEXNÍMI KOEFICIENTY

1) $x^2 - 6ix - 8 = 0$

2) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$

3) $ix^2 + 2x - 5i = 0$

4) $(1-i)x^2 - (5-i)x + 6 - 4i = 0$

5) $x^4 + 2ix^2 + 8 = 0$

6) $x^2 - 1 - i = 0$

VÝSLEDKY: 1) $4i, 2i$

2) $-1+2i\,;\ 3-i$

3) $2+i\,;\ -2+i$

4) $2+3i,\ 1-i$

5) $1+i, -1-i, \sqrt{2}(-1+i), \sqrt{2}(1-i)\}$

6) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\,i\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1+\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\,i$

nebo $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\,;\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi\right)$.