Polynomy - Vietovy vztahy

• mezi kořeny a koeficienty polynomů platí tzv. Vietovy vztahy:

• Nechť $f \in \mathbb{C}[x]$; $st(f) = n \geq 1$, kde $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
a nechť $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou kořeny polynomu f. Pak platí:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_1 \cdot c_4 + \dots + c_1 c_n + c_2 \cdot c_3 + \dots + c_{n-1} \cdot c_n$$

$$\vdots$$

$$(-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} = \sum_{i1 < \dots < ik} c_{i1} \cdot c_{i2} \cdots c_{ik}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n = \frac{a_0}{a_n} = c_1 \cdot c_2 \cdots c_n$$

Pravé strany ve Vietových vztazích jsou elementární symetrické polynomy vytvořené z kořenů polynomu f.

(A) Kvadratické polynomy (tyto vztahy se probírají už na SŠ)

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 (x - c_1)(x - c_2) \quad , \text{ kde } c_1, c_2 \text{ jsou kořeny polynomu}$$

$$a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2}\right) = a_2 \left(x^2 - c_1 x - c_2 x + c_1 c_2\right) \quad / : a_2$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = x^2 + (-c_1 - c_2) x + c_1 c_2$$

$$x^1: \quad \frac{a_1}{a_2} = (-c_1 - c_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^1: \quad & -\frac{a_1}{a_2} = c_1 + c_2 \\ x^0: \quad & \frac{a_0}{a_2} = c_1 \cdot c_2 \end{aligned}}$$

Poznámka: $x^2 + px + q = 0$
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

PŘÍKLAD 1: Nalezněte kvadratický polynom o kořenech, jejichž součet je -1 a jejichž převrácené hodnoty mají součet $\frac{1}{2}$.

$$c_1 + c_2 = -1$$

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c_2 + c_1}{c_2 \cdot c_1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{-1}{c_2 \cdot c_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 \cdot c_1 = -2$$

$$\underline{f(x) = x^2 + x - 2}$$

PŘÍKLAD ② Naleznite polynom, jehož kořeny jsou dvojnásobky kořenů polynomu $f(x) = x^2 - x - 6$.

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 2 \cdot (c_1 + c_2) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$c_1 \cdot c_2 = -6 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot c_1 \cdot 2 \cdot c_2 = 4 \cdot (c_1 \cdot c_2) = 4 \cdot (-6) = -24$$

koeficienty nového polynomu

$$g(x) = x^2 - x - 24$$

PŘÍKLAD ③ V rovnici $4x^2 - 8x + c = 0$ určete c tak, aby pro kořeny c_1, c_2 této rovnice platilo $c_1 = c_2 + 1$

$$4x^2 - 8x + c = 0 \quad / :4$$
$$x^2 - 2x + \frac{c}{4} = 0$$

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad\qquad c_1 \cdot c_2 = \frac{c}{4}$$
$$c_2 + 1 + c_2 = 2 \qquad\qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 3$$
$$2c_2 = 1$$
$$c_2 = \frac{1}{2} \; ; \; c_1 = \frac{3}{2}$$

Ⓑ Kubické polynomy

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot (x - c_3)$$; kde c_1, c_2, c_3 jsou kořeny polynomu

$$a_3\left(x^3 + \frac{a_2}{a_3} \cdot x^2 + \frac{a_1}{a_3} \cdot x + \frac{a_0}{a_3}\right) = a_3(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot (x - c_3) \quad / :a_3$$

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3} \cdot x^2 + \frac{a_1}{a_3} \cdot x + \frac{a_0}{a_3} = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot (x - c_3) = (x^2 - c_1 x - c_2 \cdot x + c_1 \cdot c_2) \cdot (x - c_3)$$

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3} \cdot x^2 + \frac{a_1}{a_3} \cdot x + \frac{a_0}{a_3} = x^3 - c_1x^2 - c_2x^2 + c_1c_2x - c_3x^2 + c_1c_3x + c_2c_3x - c_1c_2c_3$$

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3} \cdot x^2 + \frac{a_1}{a_3} \cdot x + \frac{a_0}{a_3} = x^3 - (c_1 + c_2 + c_3) \cdot x^2 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) \cdot x - c_1c_2c_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2: &\quad -\frac{a_2}{a_3} = c_1 + c_2 + c_3 \\ x^1: &\quad \frac{a_1}{a_3} = c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 \\ x^0: &\quad -\frac{a_0}{a_3} = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \end{aligned}}$$

PŘÍKLAD 4 Nalezněte alespoň jednu kubickou rovnici, která má kořeny 1, 2 a 3.

$c_1 = 1;\ c_2 = 2;\ c_3 = 3$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_2}{a_3} &= 1+2+3 = 6 \Rightarrow \underline{\frac{a_2}{a_3} = -6} \\ \frac{a_1}{a_3} &= 1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3 = \underline{11} \\ -\frac{a_0}{a_3} &= 1\cdot2\cdot3 = 6 \Rightarrow \underline{\frac{a_0}{a_3} = -6} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0}}$$

PŘÍKLAD 5 Jeden z kořenů kubické rovnice $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$ je -2. Pomocí Vietových vztahů najděte další kořeny.

$$c_1 = -2: \quad \left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -4 \\ c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3 &= 5 \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -2 + c_2 + c_3 &= -4 \\ -2c_2 - 2c_3 + c_2 \cdot c_3 &= 5 \\ -2 \cdot c_2 \cdot c_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_2 + c_3 &= -2 \\ -2c_2 - 2c_3 + c_2 \cdot c_3 &= 5 \\ c_2 \cdot c_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$c_2 = -1$$
$$\underline{\underline{c_3 = -1}}$$

Kubická rovnice má další dvojnásobný kořen -1.

PŘÍKLAD 6 Víme, že rovnice $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$ má tři přirozené kořeny takové, že 1. od 2. a 2. od 3. se liší o 3. Pomocí Vietových vztahů najděte tyto kořeny.

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &= 3 \\ c_3 - c_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 15 \\ c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_3 + c_1 \cdot c_3 &= 66 \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 &= 80 \end{aligned}$$

$$c_2 - 3 + c_2 + c_2 + 3 = 15$$
$$3c_2 = 15$$
$$\underline{\underline{c_2 = 5}}\ ;\ \underline{\underline{c_1 = 2}};\ \underline{\underline{c_3 = 8}}$$

Kořeny jsou 5; 2; 8.