NEURČITÉ ROVNICE

Růžena Blažková

Lineární neurčitou rovnicí o dvou neznámých x, y rozumíme rovnici

$$ax + by = c, \; kde \quad a \neq 0, \; b \neq 0,$$

koeficienty a, b, c této rovnice jsou celá čísla a x, y jsou také celá čísla.

Podmínky řešitelnosti:

a) Jestliže $D(a, b) > 1$ a D nedělí c, pak rovnice nemá řešení. Např. rovnice $6x + 8y = 17$ nemá řešení tak, aby x a y byla celá čísla.

b) Jestliže $D(a, b) > 1$ a D dělí c, upravíme rovnici na tvar tak, aby $D(a, b, c) = 1$, pak rovnice má řešení. Např. rovnice $6x + 8y = 10$ pravíme na tvar $3x + 4y = 5$.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby neurčitá rovnice $ax + by = c$ měla alespoň jednu dvojici řešení x_0, y_0 je, aby největší společný dělitel koeficientů a, b této rovnice dělil c. Jestliže celá čísla x_0, y_0 jsou řešením této neurčité rovnice, pak všechna řešení rovnice jsou dána parametrickými rovnicemi $x = x_0 + \frac{b}{D}t$, $y = y_0 - \frac{a}{D}t$,

kde t je celé číslo.

Motivační úloha

Je dána rovnice $x + y = 10$. Tato rovnice může mít např. v množině všech reálných čísel nekonečně mnoho řešení. Doplníme-li další podmínky, počet řešení můžeme omezit.

1. Doplníme další rovnici, např. $x - y = 4$, dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením je $x = 7$, $y = 3$.
Tato soustava může být formulována jako slovní úloha: Najděte čísla x, y, jejich součet je 10 a jejich rozdíl je 4.

2. Rovnici řešíme v oboru přirozených čísel, řešením jsou uspořádané dvojice:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

3. Požadujeme-li, aby x a y byla přirozená čísla a přitom $x > y$, dostáváme uspořádané dvojice:

x	6	7	8	9
y	4	3	2	1

Metody řešení neurčitých rovnic:

a) metoda experimentální
b) redukční metoda
c) pomocí kongruencí

Příklady

1. Maminka chtěla koupit ledňáčky za 70 Kč. Měla možnost koupit dva druhy, za 8 Kč za kus a za 6 Kč za kus. Kolik kterých mohla koupit, když chtěla utratit právě 70 Kč.

2. Jana měla 50 Kč a chtěla za ně koupit žvýkačky. V obchodě jí nabídli žvýkačky za 6 Kč a za 4 Kč. Kolik kterých mohla koupit, když chtěla utratit právě 50 Kč?

3. Kolika způsoby můžeme zaplatit 53 Kč, jestliže máme k dispozici pouze pětikorunové a dvoukorunové mince? Najděte všechny možnosti.

4. Jak podělíme 100 osob, jestliže má každá osoba dostat jeden dárek, máme k dispozici 1 000 Kč a dárkové předměty v ceně 5 Kč, 30 Kč, 100 Kč ?

5. Máme rozdělit 100 Euro mezi 100 osob tak, že každý muž dostane 3 Euro, každá žena dostane 2 Euro a dvě děti dohromady 1 Euro.

6. Za 100 Kč máme koupit 100 kusů tužek. Modré stojí 4 Kč, zelené 2,50 Kč a červené 0,50 Kč. Modrých má být třikrát více než zelených, červených sedmkrát více než modrých. Kolik kterých koupíme?

7. V místnosti jsou čtyřnohé a trojnohé židle. Na každé židli sedí jedna osoba. Všech nohou v místnosti je 39. Kolik je v místnosti židlí čtyřnohých, kolik trojnohých a kolik osob ?

8. Dopravní podnik má k dispozici dva druhy autobusů, označíme je A, B. Autobus A pojme 90 osob, autobus B pojme 150 osob. Je třeba přepravit 12 000 osob. Kolik kterých autobusů je třeba vypravit?

9. Turistického zájezdu se zúčastnilo 286 lidí. K dispozici byly autobusy se 17 sedadly a s 19 sedadly (řidiče a jeho sedadlo neuvažujeme). Kolik autobusů každého druhu bylo pro zájezd použito, jestliže byla obsazena všechna sedadla?

10. Jestliže vytváříme skupiny žáků po sedmi, zbude jeden žák. Jestliže vytváříme skupiny po šesti, zbude pět žáků. Kolik je ve třídě všech žáků? Po kolika žácích bychom mohli skupiny vytvářet, aby žádný nezbyl?

11. Určete takové číslo a, které při dělení číslem 5 dává zbytek 4 a při dělení číslem 7 dává zbytek 3.

12. Určete nejmenší a největší trojciferné číslo, které při dělení sedmi i při dělení třinácti dává zbytek 5.

13. Určete celé číslo, jehož pětinásobek dává při dělení třemi zbytek 5 a zároveň jeho dvojnásobek dává při dělení sedmi zbytek 3.

14. Určete nejmenší trojciferné přirozené číslo, které při dělení sedmi i při dělení třinácti dává vždy zbytek o jednu menší než je dělitel.

15. Strany pravoúhelníku jsou zadány celými čísly. Jakou mají délku, jestliže obsah pravoúhelníku je číselně roven obvodu?

Neurčité rovnice

1. Řešte neurčité rovnice:

a) $-3x+7y=4$ b) $6x-22y=12$

c) $-14x-3y=10$ d) $5x-3y=15$

2. Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

3. Alena má 50 Kč a chce je utratit za lízátko a čokoládové tyčinky. Lízátko stojí 4 Kč a tyčinka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik tyčinek si může Alenka koupit za 50 Kč?

4. Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

5. Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

6. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě (ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30)?

7. Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Neurčité rovnice

1. Řešte neurčité rovnice:

a) $-3x+7y=4$ b) $6x-22y=12$

c) $-14x-3y=10$ d) $5x-3y=15$

2. Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

3. Alena má 50 Kč a chce je utratit za lízátko a čokoládové tyčinky. Lízátko stojí 4 Kč a tyčinka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik tyčinek si může Alenka koupit za 50 Kč?

4. Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

5. Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

6. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě (ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30)?

7. Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Neurčité rovnice

1. Řešte neurčité rovnice:

a) $-3x+7y=4$ b) $6x-22y=12$

c) $-14x-3y=10$ d) $5x-3y=15$

2. Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

3. Alena má 50 Kč a chce je utratit za lízátko a čokoládové tyčinky. Lízátko stojí 4 Kč a tyčinka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik tyčinek si může Alenka koupit za 50 Kč?

4. Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

5. Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

6. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě (ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30)?

7. Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Neurčité rovnice

1. Řešte neurčité rovnice:

a) $-3x+7y=4$ b) $6x-22y=12$

c) $-14x-3y=10$ d) $5x-3y=15$

2. Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

3. Alena má 50 Kč a chce je utratit za lízátko a čokoládové tyčinky. Lízátko stojí 4 Kč a tyčinka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik tyčinek si může Alenka koupit za 50 Kč?

4. Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

5. Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

6. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě (ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30)?

7. Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Neurčité rovnice = (Diofantické)

Řešené příklady

⑥ Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě, víme-li, že je jich více než 20 a méně než 30.

a … počet žáků ve třídě
x … počet čtveřic
y … počet trojic

$$4x + 1 = a$$
$$3y + 2 = a \quad / \cdot (-1)$$

$$4x - 3y - 1 = 0$$

$$\boxed{4x - 3y = 1}$$ Neurčitá = diofantická rovnice

$NSD(4,-3) = 1$

$1 | 1 \Rightarrow$ rovnice má řešení

I. způsob: x_0, y_0 uhodneme

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \frac{3}{1} \cdot t \\ y = 1 - \frac{4}{1} t \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{array}} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Řešení diofantické rovnice

dosadíme do vzorce

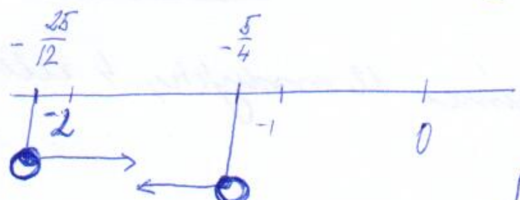
$$\boxed{\begin{array}{ll} x = x_0 + b \cdot \frac{1}{NSD(a,b)} \cdot t & \\ y = y_0 - \frac{a}{NSD(a,b)} \cdot t & t \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Podmínky slovní úlohy:

$$20 < a < 30$$
$$20 < 4x+1 < 30$$
$$20 < 4(1-3t) + 1 < 30$$
$$20 < 5 - 12t < 30$$

$$20 < 5 - 12t \quad \wedge \quad 5 - 12t < 30$$
$$12t < -15 \qquad -25 < 12t$$
$$t < -\frac{15}{12} \qquad -\frac{25}{12} < t$$
$$t < -\frac{5}{4}$$

$$t \in \left(-\frac{25}{12}; -\frac{5}{4}\right) \wedge t \in \mathbb{Z}$$



$\Downarrow$

$$\boxed{t = -2}$$

pro $t = -2$: $x = 7$

$$a = 4x + 1$$
$$a = 29$$

Ve třídě je 29 žáků.

6) Za 100 Kč máme koupit 100 ks lužek. Modré stojí 4 Kč, zelené 2,50 Kč a červené 0,50 Kč. Modrých má být třikrát více než zelených, červených sedmkrát více než modrých. Kolik kterých koupíme?

modrých ... x ks
zelených ... y ks
červených ... z ks

$$x + y + z = 100 \qquad /$$
$$4x + 2{,}50\cdot y + 0{,}5\cdot z = 100 \qquad /\cdot 2$$

$$x = 3y$$
$$z = 7\cdot x$$

$$\boxed{7x + 4y = 100}$$ Diofantická (= neurčitá) rovnice

I kongruence

$$4y = 100 - 7x$$
$$-4y = -100 + 7x$$
$$-4y \equiv -100 \pmod 7 \quad /\cdot(-1)$$
$$4y \equiv 100 \pmod 7 \quad /:4$$
$$y \equiv 25 \pmod 7$$
$$y \equiv 4 \pmod 7$$
$$y = 7t + 4 \qquad t \in \mathbb{Z}$$

$$-4\cdot y = -100 + 7x$$
$$-4(7t+4) = -100 + 7x$$
$$-28t - 16 = -100 + 7x$$
$$7x = -28t + 84 \quad /:7$$
$$x = 12 - 4t \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Řešení diofantické rovnice

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 12 - 4t \\ y &= 7t + 4 \end{aligned} \quad t \in \mathbb{Z}}$$

Podmínky slovní úlohy:

$$x = 3\cdot y$$
$$12 - 4t = 3\cdot(7t+4)$$
$$12 - 4t = 21t + 12$$
$$\boxed{t = 0} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 4 \\ z &= 7\cdot x = 84 \end{aligned}}$$

Zk: $12 + 4 + 84 = 100$
$4\cdot 12 + 2{,}5\cdot 4 + 0{,}5\cdot 84 = 100$

Koupíme 12 modrých, 4 zelené a 84 červených lužek

Polynomy

Rozklad polynomů

1. Rozložte polynomy v **R**:
   - a) $f(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$
   - b) $f(x) = 2x^4 - x^3 + x - 2$
2. Rozložte kvadratický polynom v **Z**:
   - a) $f(x) = x^2 + 10x + 24$
   - b) $f(x) = x^2 - x - 6$
   - c) $f(x) = x^2 - 2x + 6$
3. Rozložte polynom na součin kořenových činitelů:
   - a) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2$
   - b) $f(x) = x^6 + 7x^3 - 8$
   - c) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 2$
   - d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
4. Určete rozklad polynomu $f(x) = x^6 - 1$ v **N**, **Z**, **Q**, **R**.

Největší společný dělitel

5. Najděte největší společný dělitel polynomů $f(x)$ a $g(x)$:
   - a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6$; $g(x) = x^4 - 1$
   - b) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$; $g(x) = x^4 - 1$
   - c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $g(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
   - d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$; $g(x) = x^3 - 9x$
   - e) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6$; $g(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
   - f) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$; $g(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$
   - g) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$; $g(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 12x + 10$
   - h) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$; $g(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$

Taylorův rozvoj polynomu

6. Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ v $c = -3$.
7. Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ v $c = -1$.

Užití Hornerova schématu

- dělení polynomu lineárním normovaným polynomem

8. Vypočítejte $(x^4 - 1) : (x - 1)$.

- výpočet koeficientů Taylorova rozvoje
- zjištění hodnoty polynomu v daném bodě

9. Vypočítejte hodnotu polynomu $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ v bodě -1.

- zjištění, zda dané číslo je kořenem polynomu

10. Rozhodněte, zda číslo -2 je kořenem polynomu $f(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$.

Lagrangeův interpolační polynom

11. Najděte polynom procházející body $[-1; 9]$, $[1; 1]$, $[2; 6]$.
12. Najděte polynom procházející body $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 1]$.
13. Najděte polynom procházející body $[-1; 1]$, $[3; 2]$, $[4; 8]$.

Viětovy vztahy

14. Nalezněte polynom, jehož kořeny jsou dvojnásobky kořenů polynomu $f(x) = x^2 - x - 6$.
15. Nalezněte kvadratický polynom o kořenech, jejichž součet je -1 a jejichž převrácené hodnoty mají součet 0,5.
16. V polynomu $f(x) = 4x^2 - 8x + a_0$ určete a_0 tak, aby pro kořeny c_1, c_2 daného polynomu platilo $c_1 = c_2 + 1$.
17. V polynomu $f(x) = a_2x^2 - 8x + 4$ určete a_2 tak, aby jedním kořenem bylo číslo $\frac{2}{3}$.
18. Najděte alespoň jeden kubický polynom, který má kořeny 1, 2 a 3.
19. Jeden kořen kubického polynomu $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ je -2, najděte další kořeny.
20. Víme, že polynom $f(x) = x^3 - 15x^2 + 66x - 80$ má tři přirozené kořeny takové, že se první od druhého a druhý od třetího liší o 3. Najděte tyto kořeny.
21. Je dán polynom $f(x) = 15x^3 - 23x^2 + 8x - 14$ s kořeny c_1, c_2, c_3. Čemu je roven součin $(c_1 + 1)(c_2 + 1)(c_3 + 1)$?

Výsledky

5. a) $NSD = x^2 + 1$; b) $NSD = x^2 - 1$; c) $NSD = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; d) $NSD = x^2 - 9$;
   e) $NSD = x^2 + 5x + 6$; f) $NSD = x^2 + 5x + 6$; g) $NSD = x^2 - 6x + 5$; h) $NSD = x^2 + 2x - 3$

POLYNOMY

Největší společný dělitel

(5) Najděte $NSD(f(x), g(x))$:

(b) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6 = f(x)$

$x^4-1 = g(x)$

(I) Eukleidův algoritmus

$x^4+5x^3+5x^2-5x-6 : x^4-1 = 1$

$-(x^4 \quad -1)$

$5x^3+5x^2-5x-5 = 5(x^3+x^2-x-1)$ zbytek

$x^4-1 : x^3+x^2-x-1 = x$

$-(x^4+x^3-x^2-x)$

$-x^3+x^2+x-1$ ... zbytek

$x^3+x^2-x-1 : (-x^3+x^2+x-1) = -1$

$-(x^3-x^2-x+1)$

$2x^2-2 = 2(x^2-1)$ ... zbytek

$-x^3+x^2+x-1 : x^2-1 = -x$

$-(-x^3+x)$

$\boxed{x^2-1}$ zbytek → poslední nenulový zbytek

$NSD(f,g) = x^2-1$

$x^2-1 : x^2-1 = 1$

$-(x^2-1)$

0 zbytek

II. Hornerovo schéma

$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$

$g(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) =$
$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$d(a_0) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$d(a_n) = \pm 1$

možné korene: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	5	5	-5	-6	
1	1	6	11	6	$\boxed{0}$	... $x = 1$
-1	1	5	6	$\boxed{0}$		.... $x = -1$
-2	1	3	$\boxed{0}$			
-3	1	$\boxed{0}$				

$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+5x+6)$

$f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+2)$

$g(x) = (x-1)(x+1)\ (x^2+1)$

$f(x) = (x-1)(x+1)\ (x+3)(x+2)$

$NSD(f,g) = x^2 - 1$

Algebraické rovnice a nerovnice

1. Řešte v **R** rovnice pomocí vytýkání:
   - a) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
   - b) $10x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = 0$
   - c) $x^3 + 2\sqrt{5}\,x^2 + 5x = 0$

2. Řešte v **R** rovnice a nerovnice:
   - a) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, $x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$
   - b) $10x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = 0$, $10x^3 - 5x^2 + 2x - 1 < 0$
   - ! c) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$, $6x^3 - 7x^2 - x + 2 \leq 0$
   - d) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$, $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 > 0$

3. Řešte v **C** rovnici a nerovnici:
   $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$, $x^3 - x^2 + 3x - 10 > 0$

4. Řešte v **R** rovnice:
   - a) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$
   - b) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$
   - c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$
   - d) $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 0$
   - e) $12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 0$

5. Řešte v **C** rovnice:
   - a) $3x^2 + 2x + 4 = 0$
   - b) $x^7 + x^4 = 0$
   - c) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$
   - d) $x^4 - 16 = 0$
   - e) $x^6 + 2x^4 - 4x^2 - 8 = 0$
   - f) $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$
   - g) $4x^5 + 19x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 19x + 12 = 0$
   - h) $x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 10x - 3 = 0$

Výsledky

1. a) $K = \{-1;1\}$; b) $K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; c) $K = \{-\sqrt{5};0\}$

4. a) $K = \left\{-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; b) $K = \left\{1;\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right\}$; c) $K = \{1;-1;3\}$;

   d) $K = \left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2};1;2\right\}$; e) $K = \left\{-1;1;\frac{7}{4};\frac{1}{3}\right\}$

5. a) $K = \left\{\frac{-1-i\sqrt{11}}{\cancel{2}\,3};\frac{-1+i\sqrt{11}}{\cancel{2}\,3}\right\}$; b) $K = \left\{0;-1;\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$; c) $K = \{-1;1;-i;i\}$;

   d) $K = \{-2;2;-2i;2i\}$; e) $K = \{\sqrt{2};-\sqrt{2};-i\sqrt{2};i\sqrt{2}\}$; f) $K = \left\{\frac{-1-i\sqrt{19}}{2};\frac{-1+i\sqrt{19}}{2};2\right\}$;

   g) $K = \left\{-\frac{3}{4};-4;-1;\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$; h) $K = \left\{-1;-3;1;\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$