

Kongruence, rozklad na zbytkové třídy

Kongruence: $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Platí $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a - b)$.

Dávají-li celá čísla a, b po dělení přirozeným číslem m týž zbytek r ($0 \leq r < m$), řekneme, že čísla a, b jsou spolu kongruentní podle modulu m .

Vlastnosti kongruencí; Eulerova funkce; Eulerova věta viz přednáška.

Příklady

- Určete, zda jsou čísla a, b kongruentní podle modulu m .
 - $a = 5, b = 15, m = 4$ (ne)
 - $a = 3, b = 1, m = 2$ (ano)
 - $a = 7, b = 25, m = 3$ (ano)
 - $a = 7, b = 25, m = 4$ (ne)
- Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26. (1)
- Nalezněte zbytek po dělení čísla 3^{123} číslem 17. (7)
- Dokažte, že mezi 82 libovolně zvolenými přirozenými čísly existují dvě, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 81.
- Dokažte, že každé prvočíslo větší než tři lze zapsat ve tvaru $6k + 1$ nebo $6k + 5$.
- Dokažte, že $13 \mid (2^{60} + 7^{30})$.
- Dokažte, že $112 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1$.
- Dokažte, že platí: $\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid (37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n)$.
- Dokažte, že některý násobek čísla 21 končí na 241.
- Nalezněte poslední dvě číslice čísla 3^{1234} . (69)

Úlohy k procvičení

- Nalezněte zbytek po dělení čísla 12^{144} číslem 65. (1)
- Pomocí kongruencí dokažte, že $65 \mid (12^{136} + 47^2)$.
- Nalezněte zbytek po dělení čísla 2^{10^5} číslem 31. (1)
- Nalezněte zbytek po dělení čísla 7^{51} číslem 144. (55)
- Určete poslední číslici v dekadickém zápisu čísla $13^{13^{12}}$. (1)
- Určete poslední číslici v dekadickém zápisu čísla 8^{7^6} . (4)
- Řešte kongruenci:
 - $12x \equiv 7 \pmod{17}$ ($x \equiv 2 \pmod{17}$)
 - $14x \equiv 23 \pmod{31}$ ($x \equiv 26 \pmod{31}$)
 - $72x \equiv 2 \pmod{10}$ ($x \equiv 1 \pmod{5}$)
 - $29x \equiv 31 \pmod{37}$ ($x \equiv 10 \pmod{37}$)