A. Ve 4-rozměrném afinním prostoru jsou dány podprostory

$$\mathcal{B} = \left\{ [1,1,0,0] + t_1(2, a, 1, 1) + t_2(0, 1, -2, 1) \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathcal{C} = \{ x_1 + 2x_2 = 2,\ x_2 - x_3 - x_4 = 1 \}.$$

Chceme zjistit jejich vzájemnou polohu, a to v závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$.

Vzájemnou polohu lze vždy jednoznačně určit podle společných bodů a vektorů:

	$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \max$	$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \max$
$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$	incidentní	různoběžné
$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$	rovnoběžné	mimoběžné

Vzhledem k tomu, že oba podprostory jsou dvourozměrné, je maximální možná dimenze průniku rovna 2.

Společné body $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ odpovídají řešení soustavy 2 lin. rovnic o 2 neznámých:

$$\left\{ \begin{aligned} (1+2t_1) + 2(1+at_1+t_2) &= 2 \\ (1+at_1+t_2) - (t_1-2t_2) - (t_1+t_2) &= 1 \end{aligned} \right\} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{aligned} (2a+2)t_1 + 2t_2 &= -1 \\ (a-2)t_1 + 2t_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \sim \left\{ \begin{aligned} (2a+2)t_1 + 2t_2 &= -1 \\ (a+4)t_1 &= -1 \end{aligned} \right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má řešení} \iff a \neq -4,$$

a v takovém případě je řešení jednoznačné, tedy $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ bod.

Společné vektory $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ odpovídají řešení homogenizované soustavy:

$$\left\{ \begin{aligned} (2t_1) + 2(at_1+t_2) &= 0 \\ (at_1+t_2) - (t_1-2t_2) - (t_1+t_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \sim \cdots \sim \left\{ \begin{aligned} (2a+2)t_1 + 2t_2 &= 0 \\ (a+4)t_1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má netriviální řešení} \iff a = -4,$$

a v takovém případě má $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ dimenzi 1.

Celkem tak dostáváme:

- pro $a = -4$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\dim(\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}) = 1$,
  tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **mimoběžné** (a mají společný směr),
- pro $a \neq -4$ je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ bod a $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}} = \{\mathbf{o}\}$,
  tedy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou **různoběžné** (a mají společný bod).

Pro úplnost můžeme dořešit odpovídající soustavy:

- pro $a = -4$ odpovídá $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ řešení $t_2 = 3t_1$, kde $t_1 =$ lib.,
  tedy společný směr je generován vektorem $(2, -1, -5, 4)$,
- pro $a \neq -4$ odpovídá $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ řešení $t_1 = -\frac{1}{a+4}$ a $t_2 = \frac{a-2}{2a+8}$,
  tedy společný bod jest $\left[\frac{a+2}{a+4}, \frac{a+6}{2a+8}, \frac{-a+1}{a+4}, \frac{a-4}{2a+8}\right]$.

B. Předpokládejme, že oba podprostory jsou dány parametricky,

$$\mathcal{B} = \left\{ [1,1,0,0] + t_1(2,a,1,1) + t_2(0,1,-2,1) \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ [2,0,0,-1] + s_1(-2,1,0,1) + s_2(0,0,1,-1) \,\middle|\, s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Myšlenky jsou stejné, akorát technické provedení se různí...

Společné body $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ odpovídají řešení soustavy 4 lin. rovnic o 4 neznámých:

$$\left\{\begin{aligned} 1 + 2t_1 &= 2 - 2s_1 \\ 1 + at_1 + t_2 &= s_1 \\ t_1 - 2t_2 &= s_2 \\ t_1 + t_2 &= -1 + s_1 - s_2 \end{aligned}\right\} \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{llllcr} 2t_1 & & +2s_1 & & = & 1 \\ at_1 & + t_2 & - s_1 & & = & -1 \\ t_1 & -2t_2 & & - s_2 & = & 0 \\ t_1 & + t_2 & - s_1 & + s_2 & = & -1 \end{array}\right\} \sim \cdots \sim \left\{\begin{array}{rlllcr} (a+4)t_1 & & & & = & -1 \\ (a-2)t_1 & +2t_2 & & & = & 0 \\ 2t_1 & - t_2 & - s_1 & & = & -1 \\ t_1 & + t_2 & - s_1 & + s_2 & = & -1 \end{array}\right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má řešení} \iff a \neq -4,$$

a v takovém případě je řešení jednoznačné, tedy $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \text{bod}$.

Společné vektory $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ odpovídají řešení homogenizované soustavy:

$$\cdots \sim \left\{ \begin{array}{rrrrl} (a+4)t_1 & & & & = 0 \\ (a-2)t_1 & +2t_2 & & & = 0 \\ 2t_1 & -t_2 & -s_1 & & = 0 \\ t_1 & +t_2 & -s_1 & +s_2 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má netriviální řešení} \iff a = -4,$$

a v takovém případě má $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ dimenzi 1.

Závěry jsou samozřejmě stejné jako na str. 3.

Pro úplnost můžeme dořešit odpovídající soustavy:

K vyjádření průniku $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, resp. průniku zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ můžeme dojít dvojím způsobem, a to buď dosazením t_1 a t_2 do parametrického vyjádření $\mathcal{B}$, nebo dosazením s_1 a s_2 do $\mathcal{C}$.

V obou případech dostaneme totéž, což navíc bude souhlasit s výsledky uvedenými výše. . .

C. Předpokládejme, že oba podprostory jsou dány rovnicově,

$$\mathcal{B} = \{\, 3x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 3,\ (a-1)x_1 - 2x_2 + 2x_4 = a - 3 \,\},$$
$$\mathcal{C} = \{\, x_1 + 2x_2 = 2,\ x_2 - x_3 - x_4 = 1 \,\}.$$

Myšlenky jsou pořád stejné, akorát technické provedení se různí. . .

Společné body $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ odpovídají řešení soustavy 4 lin. rovnic o 4 neznámých:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = 3 \\ (a-1)x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & = a-3 \\ x_1 & +2x_2 & & & = 2 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = 1 \end{array}\right\} \sim \cdots \sim \left\{\begin{array}{rrrrl} (a+4)x_1 & & & & = a-2 \\ x_1 & +2x_2 & & & = 2 \\ (a-1)x_1 & & -2x_3 & & = a-1 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = 1 \end{array}\right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má řešení} \iff a \neq -4,$$

a v takovém případě je řešení jednoznačné, tedy $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \text{bod}$.

Společné vektory $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ odpovídají řešení homogenizované soustavy:

$$\dots \sim \left\{ \begin{array}{rrrrl} (a+4)x_1 & & & & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & & & = 0 \\ (a-1)x_1 & & -2x_3 & & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Odtud je vidět, že

$$\text{soustava má netriviální řešení} \iff a = -4,$$

a v takovém případě má $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ dimenzi 1.

Závěry jsou samozřejmě stejné jako na str. 3.

Pro úplnost můžeme dořešit odpovídající soustavy:

Vyjádření průniku $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, resp. průniku zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ bude souhlasit s výsledky uvedenými výše. . .