7. Vektory

Repetitorium z matematiky

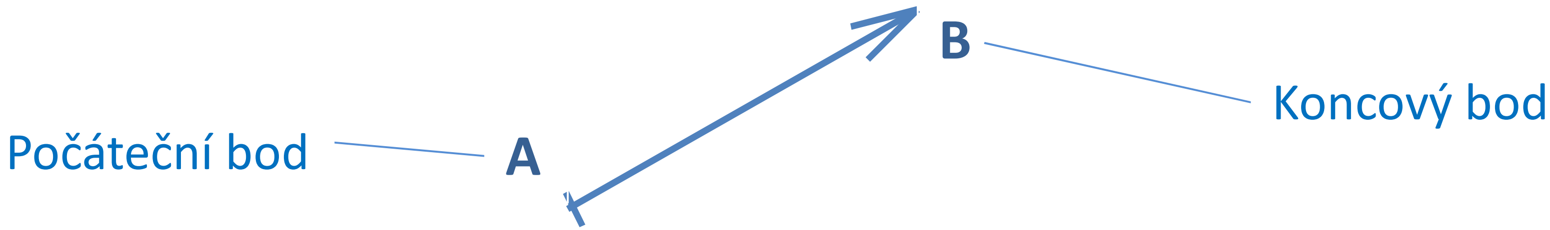
Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

1 Orientovaná úsečka

- Orientovaná úsečka **AB** = úsečka, u níž je určen počáteční a koncový bod.



Nulová orientovaná úsečka = úsečka, jejíž počáteční bod je totožný s koncovým bodem.

Aplikace

Např. : Pro znázornění síly, která působí na těleso

- směr úsečky udává směr působení síly
- velikost úsečky udává velikost působící síly

1.1 Velikost a střed orientované úsečky

Velikost orientované úsečky **AB =** vzdálenost bodů **A, B:**

V rovině:

- A $[a_1, a_2]$ a B $[b_1, b_2]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

V prostoru:

- A $[a_1, a_2, a_3]$ a B $[b_1, b_2, b_3]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Střed S úsečky **AB:**

V rovině:

- A $[a_1, a_2]$, B $[b_1, b_2]$

$$\mathrm{S}[s_1, s_2], \text{kde}$$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

V prostoru:

- A $[a_1, a_2, a_3]$ a B $[b_1, b_2, b_3]$

$$\mathrm{S}[s_1, s_2, s_3], \text{kde}$$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Úlohy

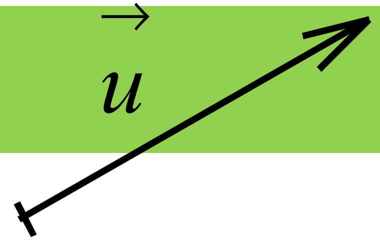
Př.1: Vypočítejte vzdálenost bodů A [3,1,5] a B[1,2,3].

Př.2: Jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB, jestliže:

a) A [1, -1, 2], B [0, 3, 1]
b) A [1, -3, -1], B [2, 5, 1]

Př.3: Jsou dány body A [1, -1, 3], S[2, 1, 0]. Určete bod B tak, aby bod S byl střed úsečky AB.

2 Vektor



- **Nenulový vektor =** množina všech orientovaných úseček, které mají **stejnou velikost** a **stejný směr**.
- **Nulový vektor =** množina všech **nulových** orientovaných úseček.

Souřadnice vektoru

V rovině:

- je-li vektor **u** = (u_1, u_2) určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2 souřadnice vektoru **u** a platí pro ně tyto vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \end{aligned}}$$

V prostoru:

- je-li vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2 , u_3 souřadnice vektoru **u** a platí pro ně tyto vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \\ u_3 &= b_3 - a_3 \end{aligned}}$$

Úlohy

Př.1: Jsou dány body A, B. Určete vektor ***u*** = B – A, je-li

a) A [1, 3], B [-1, 2]
b) A [-1, -1, -3], B [-2, -4, 1]

Př.2: V prostoru je dán bod B [1, 3, 3] a vektor ***u*** **=** (3, 1, 2).
Určete bod A tak, aby platilo ***u*** **=** B - A.

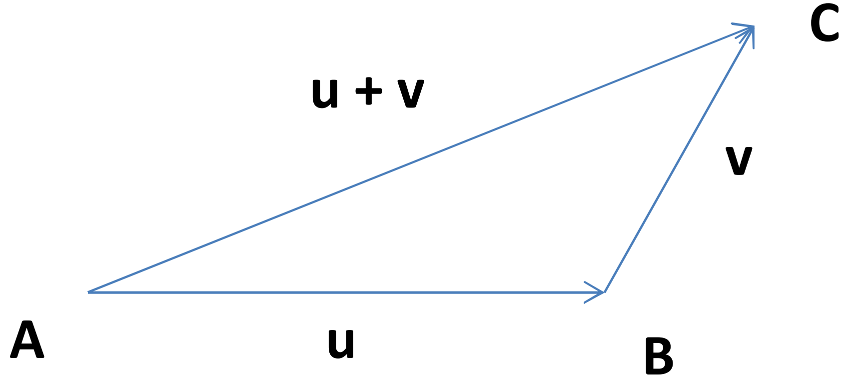
3 Sčítání vektorů

Součet vektorů u = B – A,

v = C – B

⇒ je vektor C – A.

Zapisujeme: **u + v = C – A**



V rovině:

- **u** = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2)

$$\boxed{u+v=\left(u_1+v_1;u_2+v_2\right)}$$

- Pro každé dva vektory **u, v** platí:

$$\boxed{u+v=v+u}$$

V prostoru:

- **u** = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3)

$$\boxed{u+v=\left(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3\right)}$$

- Pro každé tři vektory **u, v, w** platí:

$$\boxed{\left(u+v\right)+w=u+\left(v+w\right)}$$

Úlohy

<u>Př.1:</u> Vypočítejte součty a rozdíly vektorů ***u*** a ***v***, je-li

a) ***u*** = (1, 2, -2), ***v*** = (3, 1, 1)
b) ***u*** = (2, -1, 2), ***v*** = (1, 1, 0)

4 Násobení vektoru číslem

V rovině:

- Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2) v rovině a každé číslo *k* platí:

$$\boxed{ku = \left(ku_1; ku_2\right)}$$

V prostoru:

- Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) v prostoru a každé číslo *k* platí:

$$\boxed{ku = \left(ku_1; ku_2; ku_3\right)}$$

Dále pro každé dva vektory u, v a každá čísla k, l platí:

$$0 \cdot u = o$$ Nulový vektor

$$(-1) \cdot u = -u$$ Opačný vektor

$$k(lu) = (kl)u$$

$$k(u+v) = ku + kv$$

$$(k+l)u = ku + lu$$

<u>Př.1:</u> Vypočítejte souřadnice vektoru ***u =*** 2(3, -1, 1) + 2(1, 2, 5).

<u>Př.2:</u> Vypočítejte souřadnice vektoru ***w*** = 5 ***v* –** 3 ***u***, je-li

a) ***u*** = (-1, 2, 1), ***v*** = (1, 0, 1)
b) ***u*** = (2, -1, 2), ***v*** = (1, 1, 0)

5 Lineární kombinace vektorů

- Vektor $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$, kde $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, se nazývá **lineární kombinace** vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.

- Samozřejmě můžeme utvořit lineární kombinaci i dvou, čtyř, pěti atd. vektorů.

- Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

<u>Př.2:</u> Zjistěte, zda vektor ***w*** je lineární kombinací vektorů ***u, v***:

a) ***w*** = (-2, 4, -6), ***u*** = (1, 3, -2), ***v*** = (2, 1, 1)
b) ***w*** = (1, 1, 2), ***u*** = (-1, 0, 1), ***v*** = (2, 2, 3)

6 Velikost vektoru

- **Velikost vektoru *u*** je velikost kterékoliv orientované úsečky **AB** určující vektor ***u***
- **Velikost vektoru *u*** označujeme symbolem **|*u*|**.

V rovině:	**V prostoru:**
Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2) platí:	Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) platí:
$$\boxed{\lvert u \rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$	$$\boxed{\lvert u \rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Dále platí:

- Jestliže **|*u*|**= 1 , nazývá se vektor ***u* jednotkový vektor**
- ***u*** = ***o*** $\Leftrightarrow$ **|*u*|** = 0

Úlohy

<u>Př.1:</u> Vypočítejte velikost vektoru ***u*** = (4, -3).

<u>Př.2:</u> Vypočítej velikost vektoru ***AB***, je-li A [-1, 3, -2], B [0, 5, -3].

7 Skalární součin vektorů

V rovině:

Skalární součin dvou vektorů
u = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2) je číslo:

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2}$$

V prostoru:

Skalární součin dvou vektorů
u = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3) je číslo:

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$$

Dále platí:

$$\boxed{u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2}$$

$$\boxed{u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

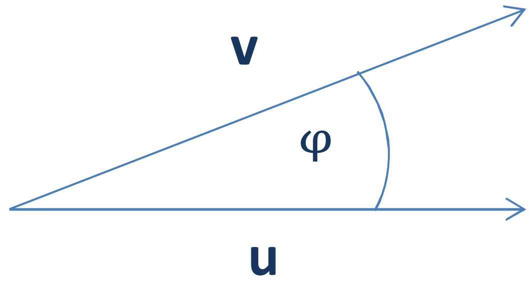
- Pro každé vektory ***u, v, w*** (v rovině nebo v prostoru) a každé ***c ϵ R*** platí:

$$\boxed{\begin{aligned} &uv = vu \\ &(cu)v = c(uv) \\ &w(u+v) = wu + wv \end{aligned}}$$

<u>Př.1:</u> Vypočítejte skalární součin vektorů ***u, v***, pro které platí:

a) $\boldsymbol{u} = (1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 1)$
b) $\boldsymbol{u} = (3, -2, -4)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, -2)$

8 Úhel dvou vektorů



Pro **velikost úhlu** vektorů ***u, v*** platí následující vztahy:

V rovině:

u = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2)

$$\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

V prostoru:

u = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3) :

$$\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$\Rightarrow \quad u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

Úlohy

Př.1: Vypočítejte úhel dvou vektorů ***u, v***, pro které platí:

a) ***u*** = (1, 1), ***v*** = (-1, 1)
b) ***u*** = (-1, 1, 0), ***v*** = (-2, 4, 2)

Př.2: Je dán vektor ***v.*** Určete vektor ***u*** tak, aby platilo $v \perp u$

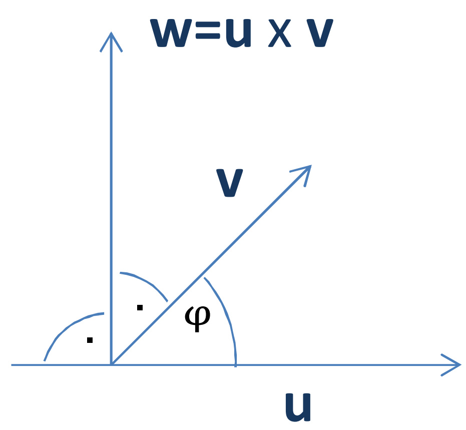
a) ***v*** = (1, 3)
b) ***v*** = (1, 0, -2)

8 Vektorový součin

-> provádíme, pokud chceme ke dvěma vektorům ***u, v***, které neleží na jedné přímce, najít vektor kolmý k oběma vektorům.

- Jestliže **u** = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3), pak vektor k oběma vektorům kolmý je vektor

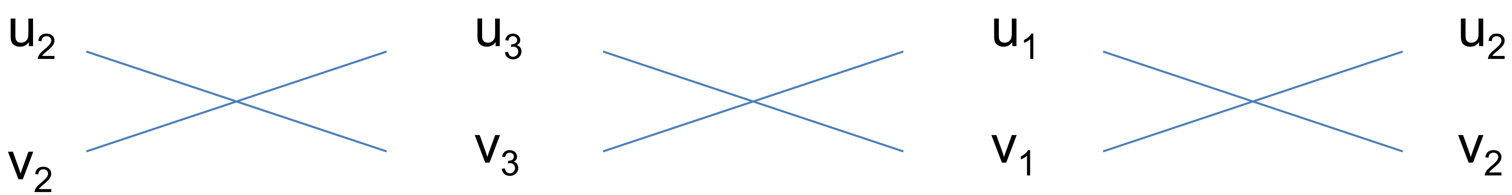
$$\boxed{w = (u_2 v_3 - u_3 v_2 ; u_3 v_1 - u_1 v_3 ; u_1 v_2 - u_2 v_1)}$$



- Pro velikost vektoru ***w*** platí:

$$\boxed{w = |u| \cdot |v| \cdot \sin \alpha}$$

Pozn.: Mnemotechnická pomůcka pro výpočet vektorového součinu:



$u_2 v_3 - u_3 v_2$ $\quad$ $u_3 v_1 - u_1 v_3$ $\quad$ $u_1 v_2 - u_2 v_1$

<u>Př.1:</u> Vypočítejte souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, je-li:

a) $\boldsymbol{u} = (2, -2, 4)$, $\boldsymbol{v} = (3, -2, 1)$

b) $\boldsymbol{u} = (1, 0, 3)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 0, -2)$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.