9. Derivace funkce

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

1 Pojem derivace

2 Geometrický význam derivace funkce

3 Derivace základních funkcí

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

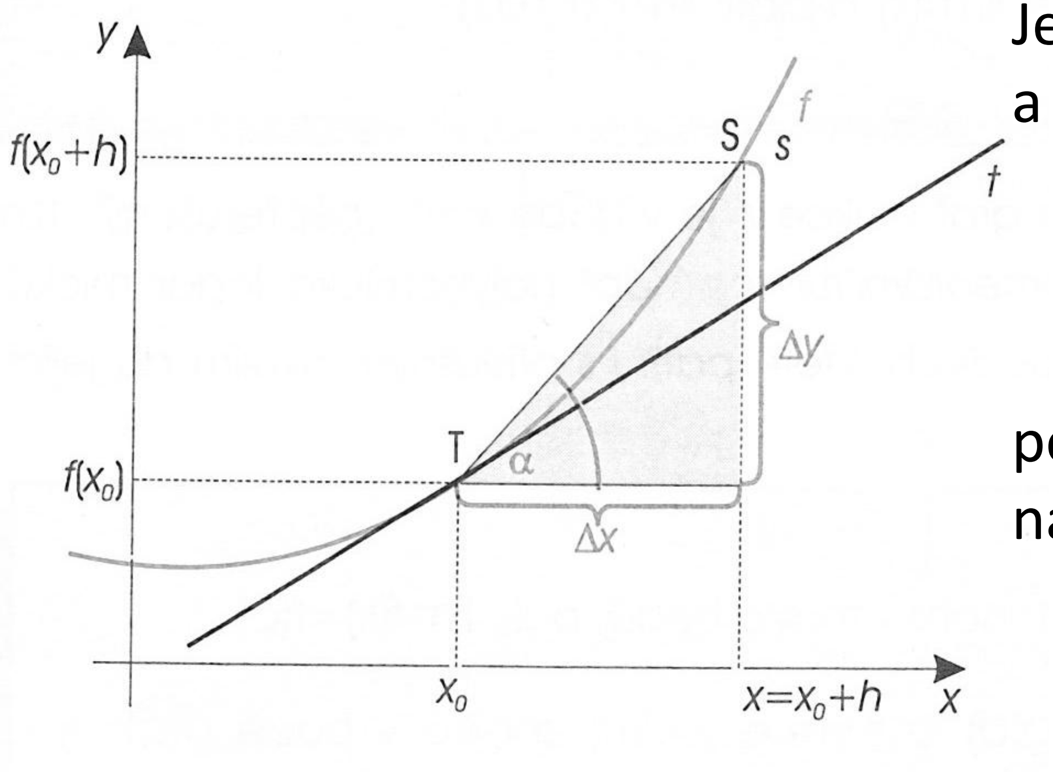
5 Vzorce pro derivaci složené funkce

6 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce

  6. 1 Vyšetřování monotónnosti funkce užitím derivací

  6. 2 Vyšetřování lokálních extrémů funkce užitím derivací

1 Pojem derivace



Je-li funkce *f* definována v okolí bodu x_o a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

potom tuto limitu označujeme ***f`(x_o)*** a nazýváme ji **derivací funkce f v bodě *x_o*.**

Derivace funkce *f* v bodě x_o je tedy číslo:

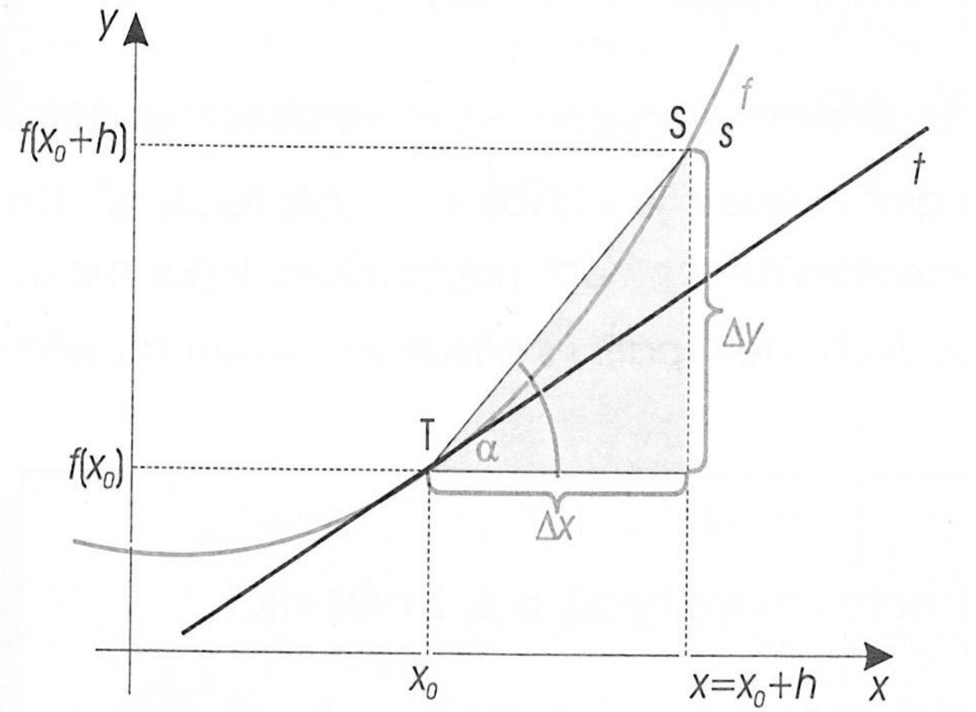
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Pozn.: Při označení $x = x_o + h$ a $x - x_o = h$:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

2 Geometrický význam derivace funkce

Pro **směrnici tečny k_T** ke grafu funkce ***f*** v bodě **T [x_o,y_o]** platí: $\boxed{k_T = f'(x_0)}$



Platí totiž: směrnice sečny ST je

$$k_S = tgx = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě T [x_o, y_o].

Pro směrnici tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Rovnici tečny pak můžeme psát ve tvaru: $\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

3 Derivace základních funkcí

Funkce f: $y = f(x)$	Vzorce pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathsf{D}(f')$)
$y = c \ (c \in \mathsf{R})$	$y' = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n, \ n \in \mathsf{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k, \ k \in \mathsf{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r, \ r \in \mathsf{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x \ (a > 0, \ a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \log_a x \ (a > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce f: u = f(x), g: v = g(x) mají derivaci v každém bodě x ϵ M, pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna x ϵ M (u podílu g (x) ≠ 0) následující vzorce:

a) $(u + v)' = u' + v'$,

b) $(u - v)' = u' - v'$,

c) $(uv)' = u'v + uv'$,

d) $(cu)' = cu'$, $c \in \mathsf{R}$,

e) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad v \neq 0$.

Úlohy:

Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných funkčními předpisy:

a) $y = x^5 + x^3$

b) $y = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$

c) $y = x^3 + \ln x - \sin x$

d) $y = x^2 \sin x$

e) $y = (x - 1) / (x + 1)$

f) $y = (1/x^2)\, e^x$

5 Vzorce pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána složená funkce **F: y = f(g(x))**, přičemž vnitřní funkce **g** má derivaci v každém bodě **x є M** a vnější funkce **f** má derivaci f` v každém odpovídajícím bodě **u = g(x)**, pak složená funkce **F = f ° g** má derivaci F` v každém bodě x є M, pro niž platí:

$$F`(x) = f`(u)\, g`(x)$$

<u>Úlohy:</u>

Vypočtěte derivaci složené funkce:

a) $y = \sin(7x)$

b) $y = (3x^2 - 2)^4$

c) $y = 5 \sin^2 x$

d) $y = \cos(1 - 2x)$

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu <a,b> a má v každém bodě x ϵ (a; b) derivaci f\`(x_o). Pak platí:

- Je-li f\`(x_o) > 0 pro každé x ϵ (a;b) $\Rightarrow$ f je **rostoucí** na <a,b> .
- Je-li f\`(x_o) < 0 pro každé x ϵ (a;b) $\Rightarrow$ f je **klesající** na <a,b> .

Úlohy:

Určete intervaly, v nichž jsou rostoucí, resp. klesající funkce

a) f : $y = x^3 - 5x^2 + 3x$

b) f: $y = x^3 - 12x$

c) f: $y = x^2 + 4x - 5$

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce f v bodě x_o derivaci a je-li f\`(x_o) = 0, pak x_o nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě x_o může, ale nemusí mít funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý “ z extrému.

Nechť f\`(x_o) = 0 a nechť existuje v bodě x_o druhá derivace. Pak:

- Je-li f\`\`(x_o) < 0 ⇨ má funkce f v bodě x_o ostré **lokální maximum**.
- Je-li f\`\`(x_o) > 0 ⇨ má funkce f v bodě x_o ostré **lokální minimum**.

Úloha:

Vyšetřete průběh funkce f : $y = x^3 - 3x^2$ a načrtněte její graf.

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.