

Mocniny, odmocniny, úpravy algebraických výrazů

Repetitorium z matematiky

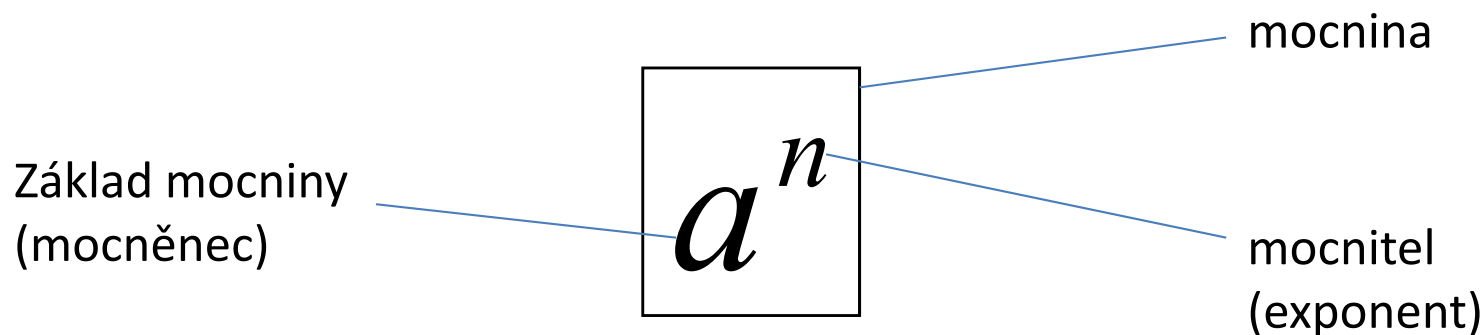
Podzim 2011

Ivana Vaculová

1. Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

- Pro každé reálné číslo a a každé přirozené číslo n platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$$



Pravidla pro počítání s mocninami:

Pro $\forall a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ platí:

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow a^{2n-1} < 0$$

Věty pro počítání s mocninami

Pro $\forall a, b \in R$ a $\forall r, s \in Z$ platí :

$$a) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$b) (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$c) a^r \div a^s = a^{r-s}$$

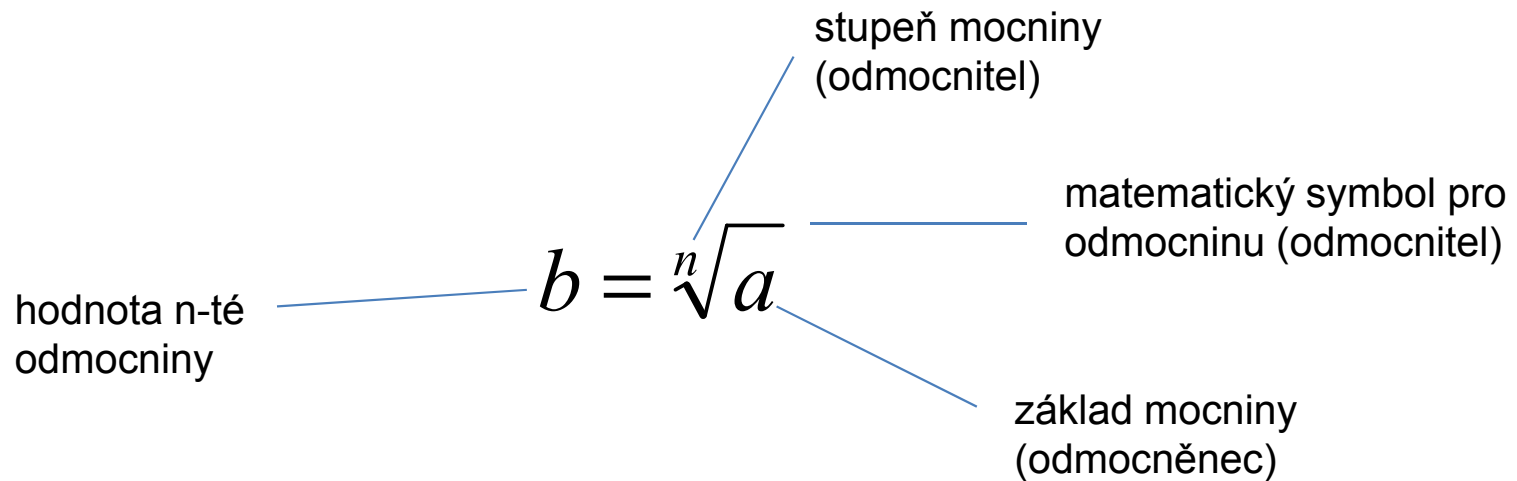
$$d) (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$e) \left(\frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r}, b \neq 0$$

$$f) a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a} \right)^m$$

2. n-tá odmocnina

Pro $\forall n \in N$ je n -tá odmocnina z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b , pro něž platí $b^n = a$. Budeme zapisovat: $b = \sqrt[n]{a}$



Pravidla pro počítání s odmocninami

| | |
|---|--|
| a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ | kde $a, b \in R \wedge a, b \geq 0; n \in N$ |
| b) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ | kde $a, b \in R \wedge a \geq 0 \wedge b > 0; n \in N$ |
| c) $(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$ | kde $a \in R \wedge a \geq 0; n, s \in N$, nebo $a \in R \wedge a > 0; n \in N; s \in Z$ |
| d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | kde $a \in R \wedge a \geq 0; n, m \in N$ |

Poznámka:

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ | kde $a \in R \wedge a \geq 0; n \in N$ |
| $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ | kde $a \in R \wedge a \geq 0; n, m \in N$ |
| $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ | kde $a \in R \wedge a > 0; n \in N$ |

3. Algebraické výrazy

= zápisy, ve kterých se mohou vyskytovat jak určitá čísla (konstanty), tak také písmena (proměnné) a symboly aritmetických operací (+, -, $\sqrt{\quad}$, 2 , atd.)

Algebraickými výrazy jsou např.:

1; $1 + 2$; $3 \div 7 - 14$; $5 + (2 \cdot 3 - 6)$;
 x ; $1 + x$; $3 \cdot (x + 7) - 4$;
 $\frac{1}{3} \pi r^2 v$ (objem rotačního kužele)

Algebraickými výrazy nejsou:

- Logický výrok = tvrzení, u kterého má smysl posuzovat pravdivost (např. $2 = 7$)
- Výroková forma – z ní získáme logický výrok dosazením čísel za proměnné, např.: $6x + 5 > 9$

Proměnné zastupují čísla z určité množiny (obor proměnné). Tyto číselné množiny, ze kterých můžeme za proměnné dosazovat, určují **definiční obor** daného výrazu (pro tyto hodnoty má daný výraz smysl).

3.1 Mnohočleny

= zvláštní případy algebraických výrazů.

= výrazy ve tvaru:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

kvadratický člen

lineární člen

absolutní člen

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$

$n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 0$

x je proměnná

Je-li $a_n \neq 0 \Rightarrow$ Jde o mnohočlen n -tého stupně

Mnohočlen 1. stupně = **LINEÁRNÍ**

2. stupně = **KVADRATICKÝ**

3. stupně = **KUBICKÝ**

$$a_1x + a_0$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

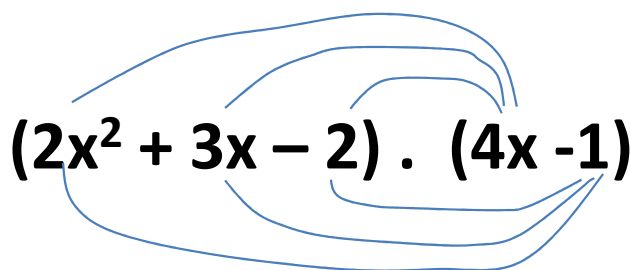
$$ax + b$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Operace s mnohočleny

- **SČÍTÁNÍ** – sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty
- **ODEČÍTÁNÍ (ROZDÍL)** – odstraníme závorky (změníme znaménka u menšitele) a sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty)
- **NÁSOBENÍ** – vynásobíme dle schématu a poté sečteme:

$$(2x^2 + 3x - 2) \cdot (4x - 1)$$


Operace s mnohočleny

- **DĚLENÍ**

a) beze zbytku:

$$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1) / (x^2 + 1) = 2x^2 - 3x - 1$$

b) se zbytkem

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}$$

Postup:

1. Dělece i dělitele uspořádáme sestupně.
2. Vydělíme 1. člen dělece 1. členem dělitele (dostaneme 1. člen podílu).
3. Vynásobíme tímto členem dělitele a výsledný polynom odečteme od dělece a získáme dělece pro další postup.
4. Opakujeme postup vždy s novým dělencem, dokud není zbylý polynom nižšího stupně než dělitel.
5. Uvedeme předpoklady (dělitel musí být různý od nuly).

Operace s mnohočleny

- **n-tá mocnina, $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|---|---|-------|
| 1 | | | | | | | $n=0$ |
| 1 | 1 | | | | | | $n=1$ |
| 1 | 2 | 1 | | | | | $n=2$ |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | $n=3$ |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | $n=4$ |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | $n=5$ |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | $n=6$ |

Operace s mnohočleny

- **ROZKLAD MNOHOČLENŮ**

= vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které se zpravidla už nedají dále rozložit.

a) **Vytýkáním před závorku:** Př.: $(3x^2y^3 + 6xy^2) = 3xy^2 \cdot (xy + 2)$

b) **Použitím vzorců:**

$$(a + b)^n \dots \text{viz str. 11}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

3.2 Lomené výrazy

- a) **KRÁCENÍ** = vydělení čitatele i jmenovatele stejným výrazem
ROZŠIŘOVÁNÍ = vynásobení čitatele i jmenovatele stejným výrazem

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 ($V_2 \neq 0, V_3 \neq 0$) platí:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{krácení}} \\ \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2} \\ \xleftarrow{\text{rozšiřování}} \end{array}$$

3.2 Lomené výrazy

b) SOUČET LOMENÝCH VÝRAZŮ

= lomený výraz, jehož čítec je součet číteců obou výrazů převedených na společného jmenovatel a jehož jmenovatel je tento společný jmenovatel.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0, V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1V_4 + V_2V_3}{V_2V_4}$$

3.2 Lomené výrazy

c) NÁSOBENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ (součin)

= lomený výraz, jehož čítec je součin číteců a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0, V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$$

Pozn.: Při násobení jednotlivé výrazy neroznásobujeme, naopak, snažíme se je vhodně rozložit a podle možností i krátit.

3.2 Lomené výrazy

d) UMOCŇOVÁNÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

= umocnění čitatele i jmenovatele.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2 ($V_2 \neq 0$) a pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$$

3.2 Lomené výrazy

e) DĚLENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

→ pokud dělíme lomeným výrazem, znamená to, že násobíme jeho převrácenou hodnotou.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0, V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

3.2 Lomené výrazy

f) ZJEDNODUŠENÍ SLOŽENÉHO LOMENÉHO VÝRAZU

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0, V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

3.2 Lomené výrazy

g) ÚPRAVY IRACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- při těchto úpravách využíváme vzorce pro počítání s mocninami, odmocninami, mnohočleny i vzorce pro operace s lomenými výrazy.

Příklad:

$$\frac{\left[(x-y)^{\frac{3}{5}} \right]^{-\frac{4}{3}} + \sqrt[10]{(x-y)^{-8}}}{\sqrt[5]{(x-y)^{-2}}} \cdot \frac{x-y}{\sqrt[5]{(x-y)^3}}$$

4 Aplikace

- Vyjádření neznámé ze vzorce

Př.1: Ze vzorce pro objem rotačního kužele vyjádřete poloměr jeho podstavy:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v \Rightarrow 3V = \pi r^2 v$$

$$\frac{3V}{\pi v} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{3V}{\pi v}} = r$$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.