Funkce
(Zavedení pojmu funkce, vlastnosti funkcí,lineární, kvadratické a mocninné funkce)

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

A) Zavedení pojmu funkce

V odborných a přírodovědných předmětech se často setkáváme s úlohami, ve kterých se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách jiné veličiny. Tuto závislost popisujeme pomocí pojmu **funkce** jako zobrazení v **R**.

*Nechť **A** a **B** jsou dvě neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu **x** z množiny **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo **y** z množiny **B**, které označíme **y=f(x)**, pak množina **f** uspořádaných dvojic **[x;f(x)]** se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně **funkce f**).*

$$f : y = f(x), x \in D(f)$$

Množinu A označujeme **D(f)** a nazýváme **definičním oborem funkce f.**
Množinu B označujeme **H(f**) a nazýváme **oborem hodnot funkce f.**
Číslo ***x*** je **nezávisle** proměnná, argument funkce f.
Číslo ***y*** je **závisle** proměnná, funkční hodnota funkce f v bodě x.

Úlohy

Př.1: Zapište pomocí intervalů definiční obor funkcí:

$$a)\ \ f: y=\frac{3x+2}{2x^2+x-3} \qquad\qquad b)\ \ f: y=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+\frac{1-x}{1+x}$$

Př.2: Je dána funkce:

$$f: y=\frac{2}{x^2-1}$$

a) Určete *f(0), f(-7), f(3)*

b) Patří čísla -4, 0 do oboru hodnot funkce f?

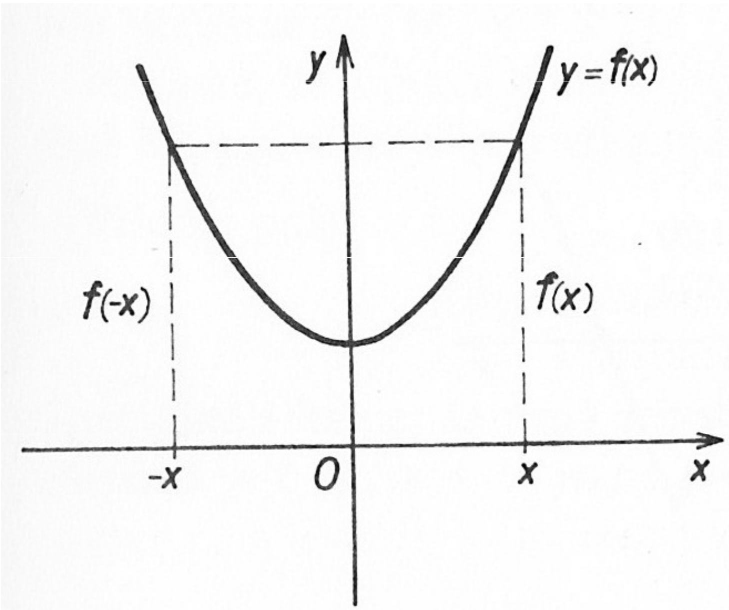
Vlastnosti funkcí

a) Sudé funkce, liché funkce

Sudá funkce

$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$

$\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

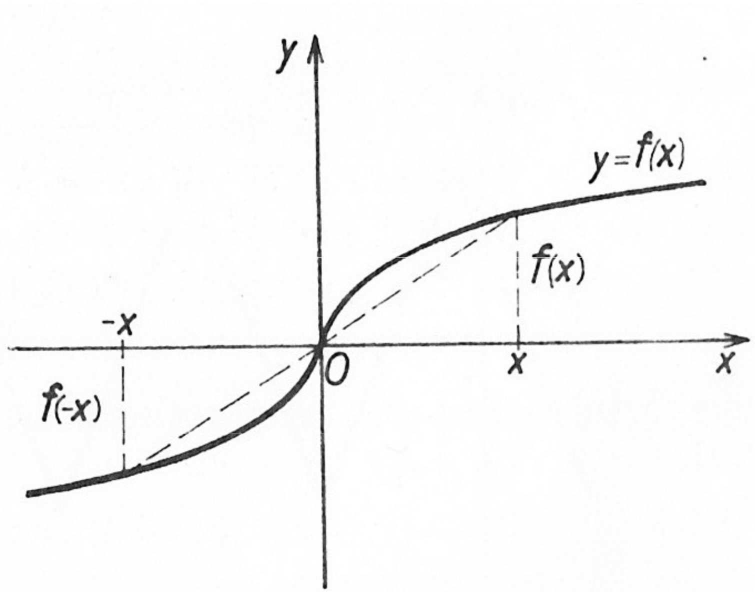


Graf je souměrný podle osy y.

Lichá funkce

$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$

$\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$



Graf je středově souměrný podle počátku.

Např.: $f_1: y = x^2, D(f) = R$

$f_2: y = x^{-2}, D(f) = R - \{0\}$

Např.: $f_1: y = x^3, D(f) = R$

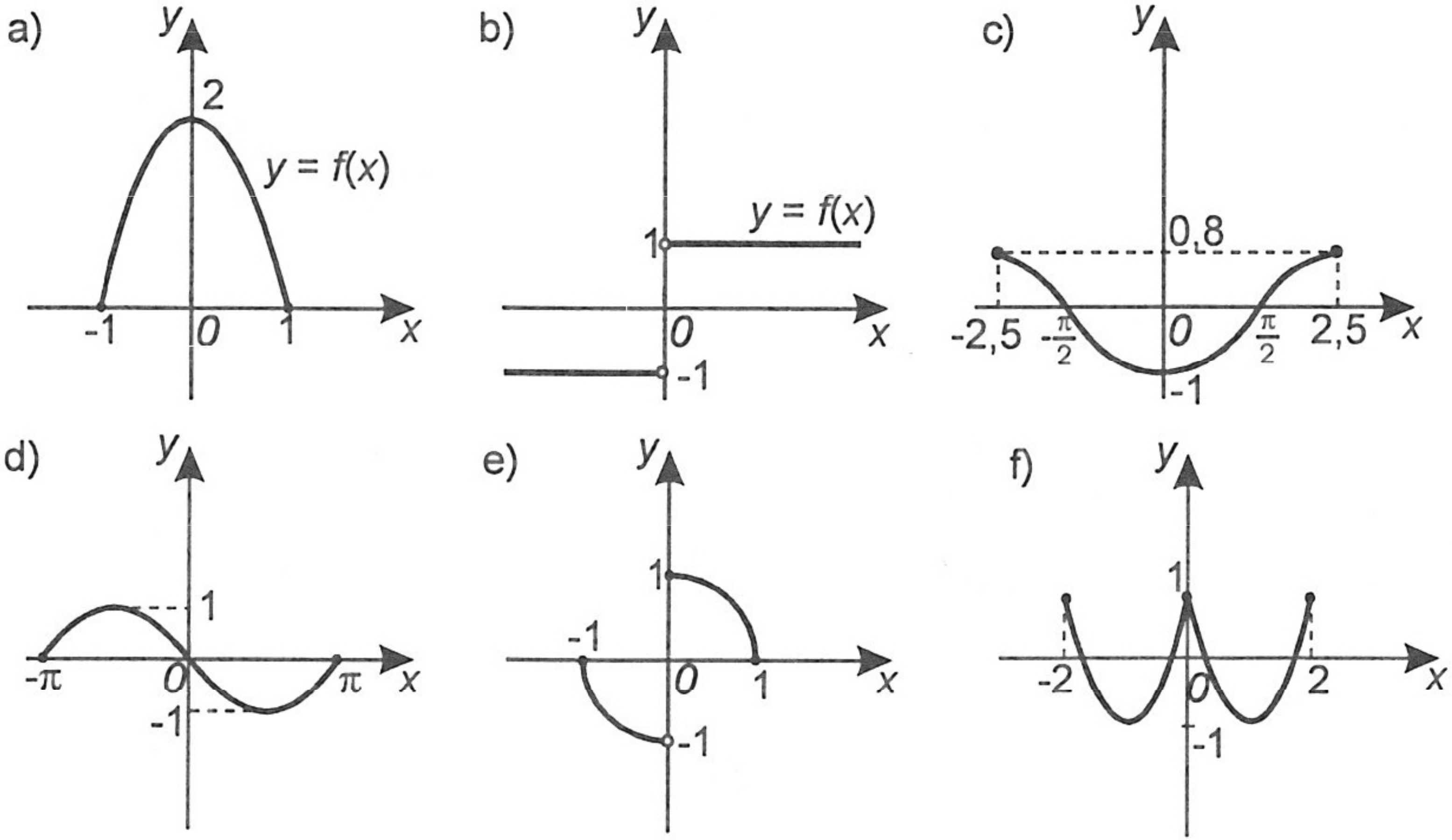
$f_2: y = x^{-3}, D(f) = R - \{0\}$

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, které z daných funkcí f jsou sudé nebo liché:

$$a)\ f: y = x$$
$$b)\ f: y = 2$$
$$c)\ f: y = 2x^2 + 1$$
$$d)\ f: y = x + 2$$

Př.2: Rozhodněte, které z daných funkcí f jsou sudé nebo liché:



Vlastnosti funkcí

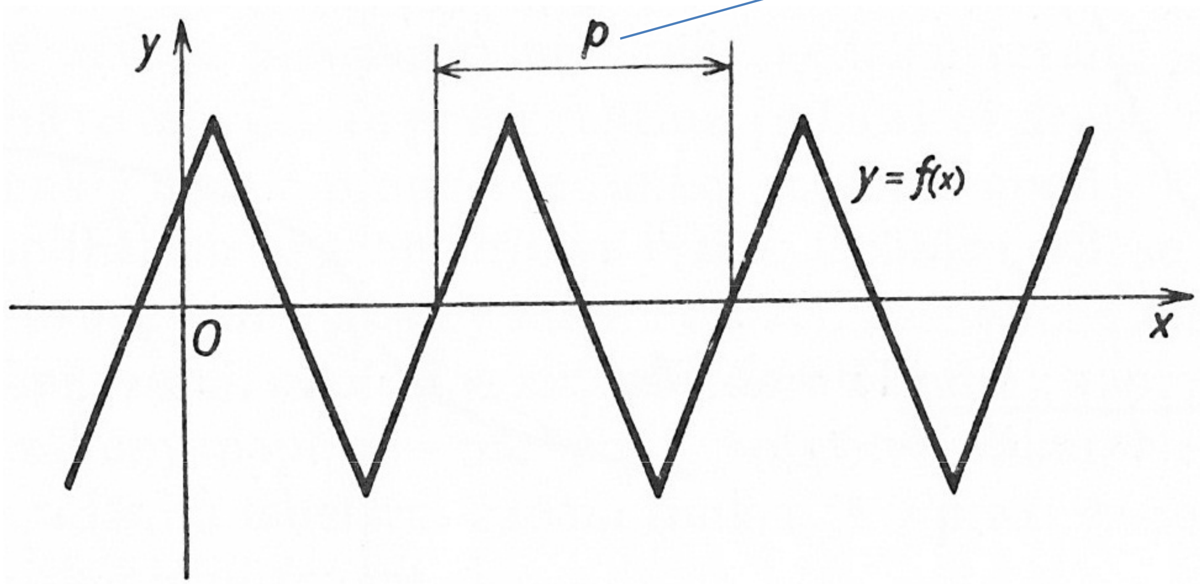
b) Periodické funkce

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo **p > 0**, že pro každé **k ϵ Z** platí:

1) Je-li *x ϵ D(f)*, pak *x + kp ϵ D(f)*

2) *f (x + kp) = f (x)*

perioda funkce



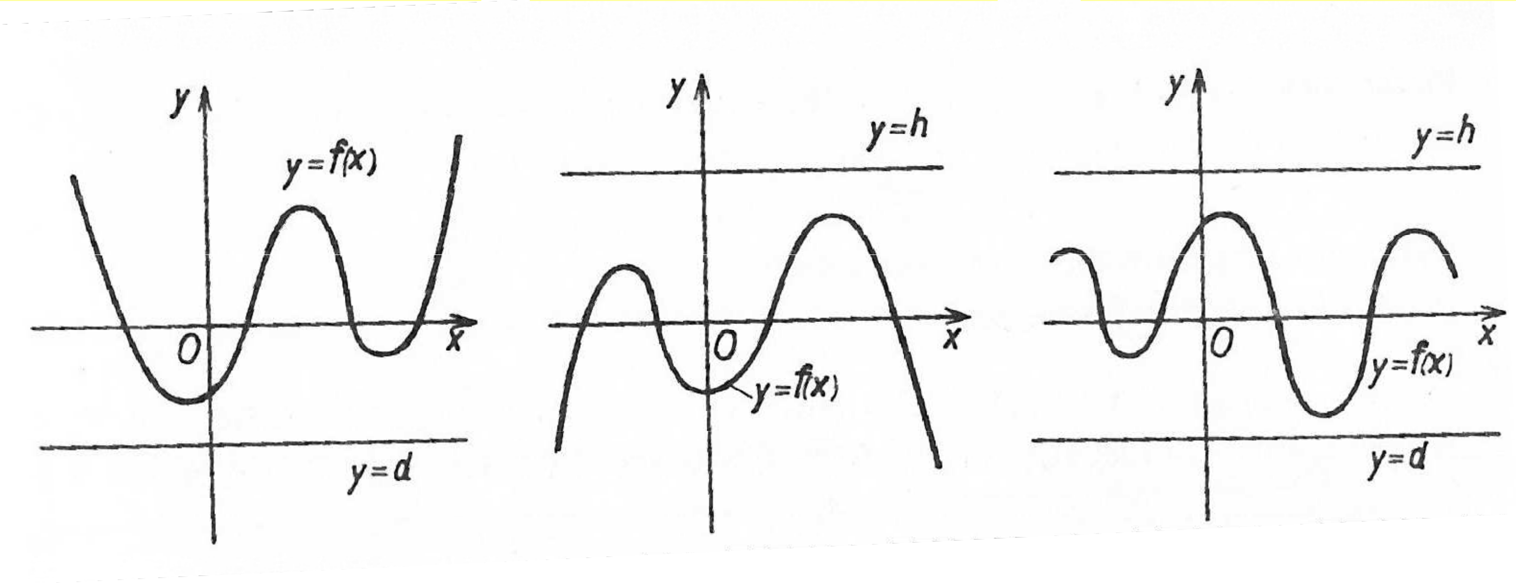
Např.: $f_1 : y = \cos\ x,\ f_2 : y = \sin\ x$

$f_3 : y = tg\ \ x,\ f_4 : y = \text{cotg}\ \ \text{x}$

Vlastnosti funkcí

c) <u>Funkce omezená (zdola, shora), maximum a minimum funkce</u>

Zdola omezená	Shora omezená	Omezená
$\exists d: \forall x \in D(f)\ \text{je}\ f(x) \geq d$	$\exists h: \forall x \in D(f)\ \text{je}\ f(x) \leq h$	Je omezená shora i zdola.



Funkce ***f*** má v bodě ***a*** **maximum**, právě když: $\forall x \in D(f)\ \text{je}\ f(x) \leq f(a)$

Funkce ***f*** má v bodě ***b*** **minimum**, právě když: $\forall x \in D(f)\ \text{je}\ f(x) \geq f(b)$

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, ve kterých bodech mají následující funkce maximum nebo minimum:

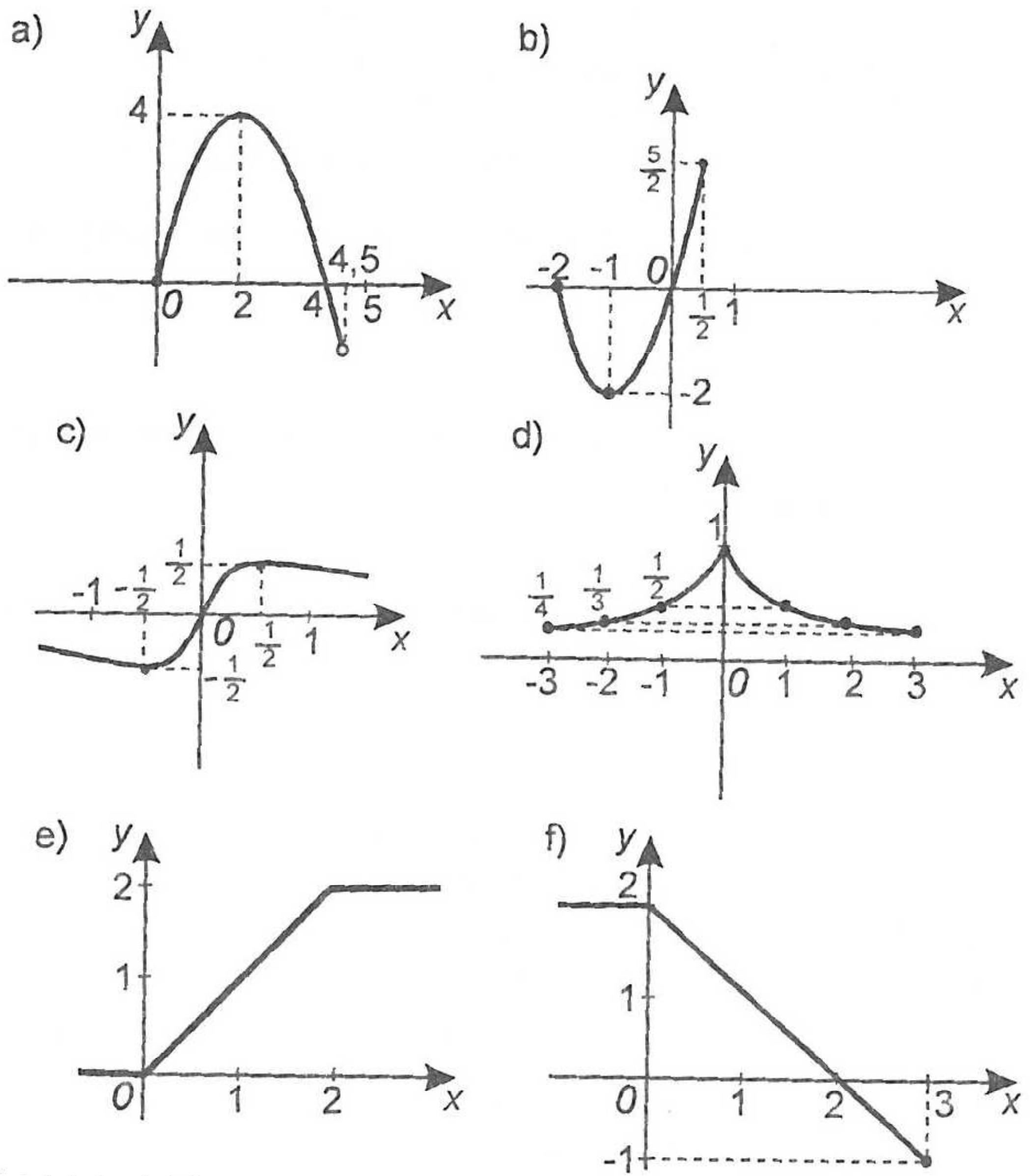
$a)\ \ f: y = 2x + 5$

$b)\ \ f: y = 1$

$c)\ \ f: y = (x-1)^2 + 2$

$d)\ \ f: y = 2|x|$

Př.2: Určete maxima nebo minima následující funkcí :

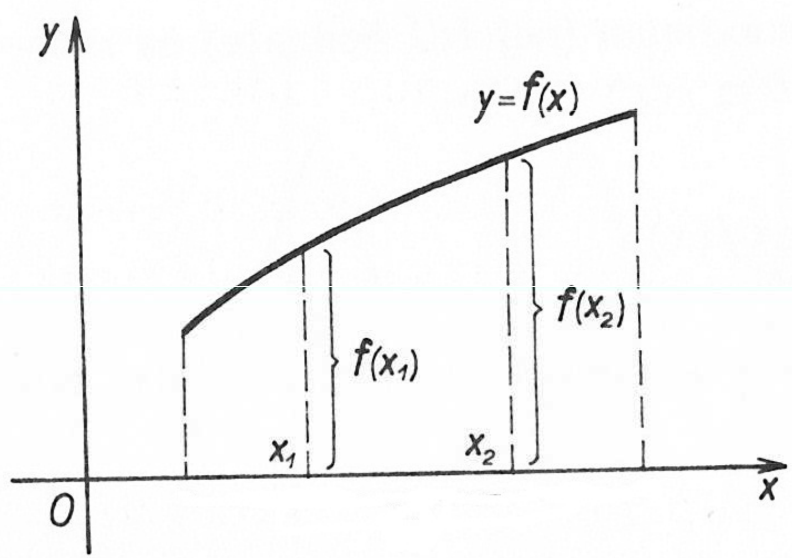


Vlastnosti funkcí

d) Rostoucí a klesající funkce

Rostoucí funkce

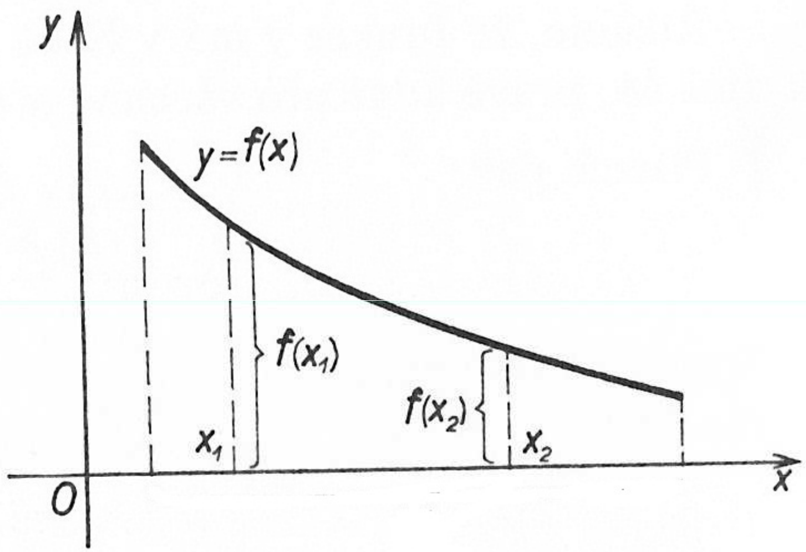
$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) < f(x_2)$



Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.

Klesající funkce

$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) > f(x_2)$



Je-li funkce klesající, pak je prostá.

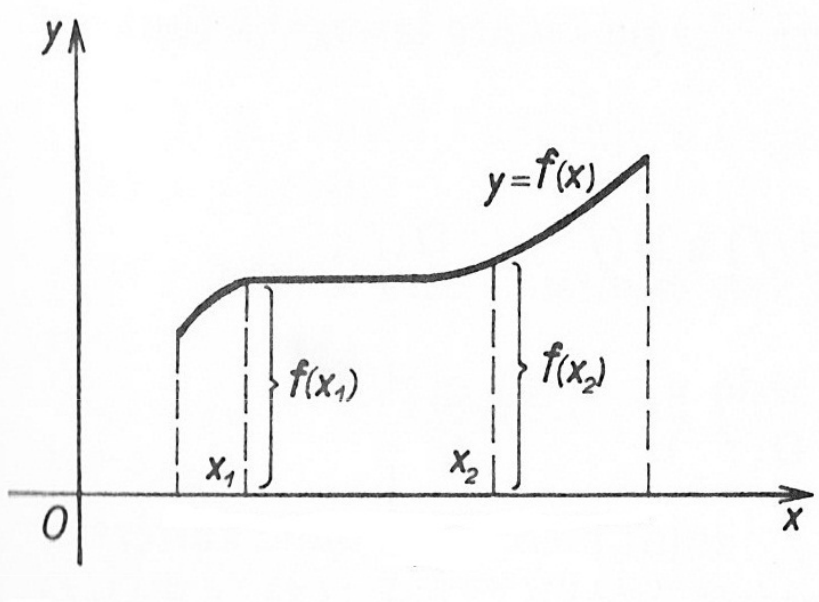
$$\mathit{Funkce}\ \text{je}\ \mathit{prostá} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \neq f(x_2)$$

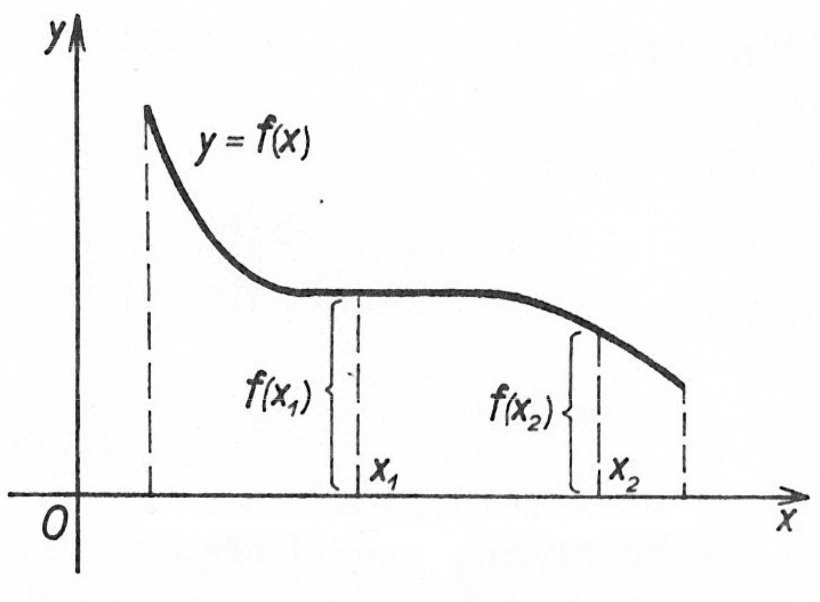
Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **RYZE MONOTÓNNÍ.**

Vlastnosti funkcí

d) Neklesající a nerostoucí funkce

Neklesající funkce	Nerostoucí funkce
$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \leq f(x_2)$	$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \geq f(x_2)$





Funkce nerostoucí a neklesající se souhrnně nazývají **MONOTÓNNÍ.**

Vlastnosti funkcí

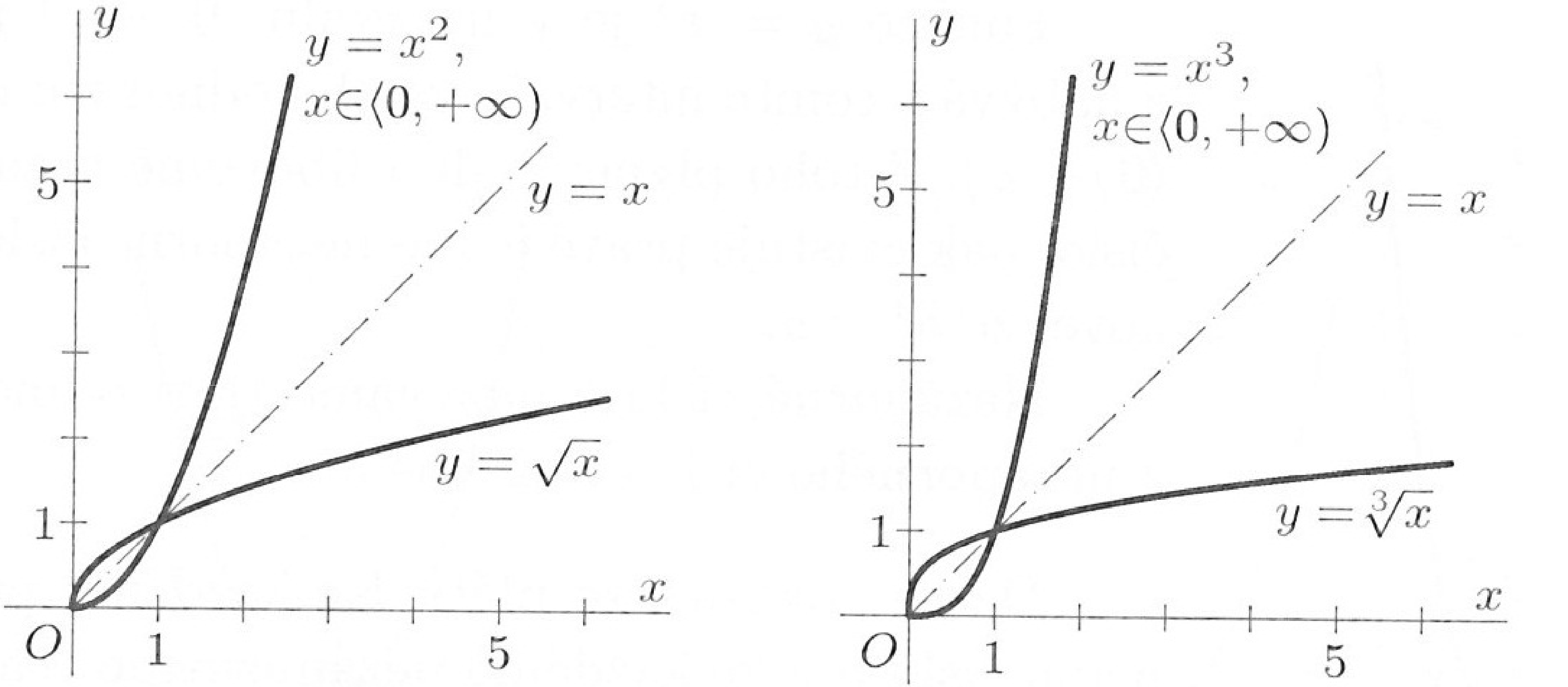
e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k ***prosté*** funkci ***f*** je funkce $\boldsymbol{f^{-1}}$, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Grafy funkcí *f* a $\boldsymbol{f^{-1}}$ sestrojené v téže soustavě souřadnic *0xy* se stejnou délkovou jednotkou na obou osách **jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$.**

Např.:



Vlastnosti funkcí

e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k ***prosté*** funkci ***f*** je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ *a* $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Příklady funkcí a funkcí k nim inverzních :

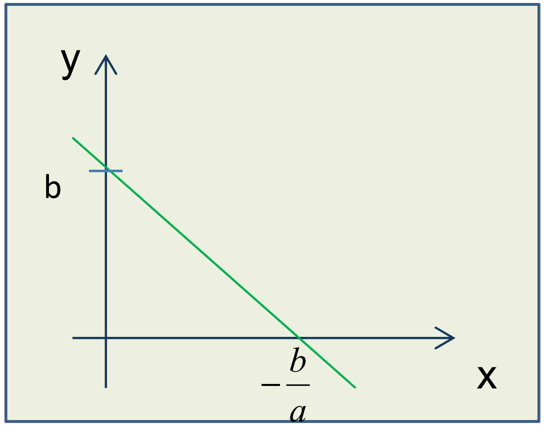
f	f^{-1}
$y = a^x$	$y = \log_a x$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y = \mathrm{arccotg}\, x$
$y = 2x$	$y = \frac{x}{2}$
$y = x^3$	$y = \sqrt[3]{x}$

1 LINEÁRNÍ FUNKCE

$$f: y = ax + b, \quad D(f) = R$$

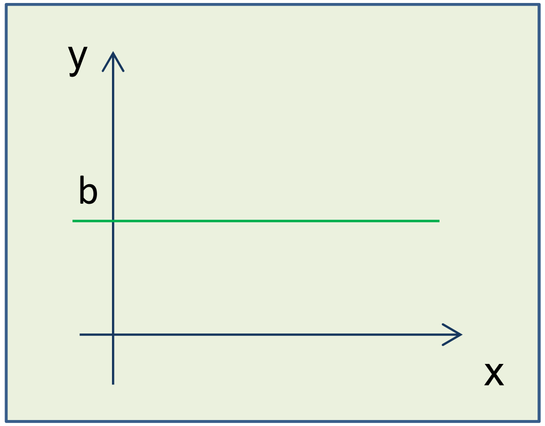
Graf: Přímka

a < 0



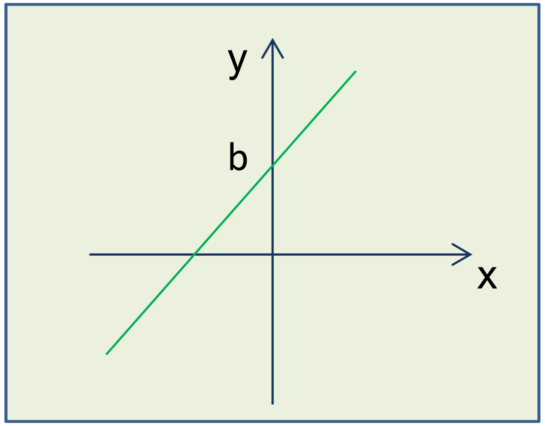
D(f) = R, H(f) = R
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je **klesající**, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.

a = 0



D(f) = R, H(f) = {b}
Je omezená.
Je **nerostoucí a neklesající**.
Není prostá.
Má maximum a minimum pro každé x∊R.
Je spojitá v R.

a > 0



D(f) = R, H(f) = R
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je **rostoucí,** tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.

Úlohy

Př. 1: Pro lineární funkci f: y = -2x+5 určete souřadnice průsečíku grafu s osami x, y.

Př. 2: Načrtněte grafy lineárních funkcí:

$$a)\, f_1 : y = 2x$$
$$b)\, f_2 : y = 2x + 3$$
$$c)\, f_3 : y = -2x + 5$$
$$d)\, f_4 : y = 2$$

Př. 3: Pro lineární funkci *f* platí: *f(3) = -5*

f (-1) = 4

Vyjádřete ji předpisem *y = ax + b* a načrtněte graf.

Př. 4: Řešte graficky i početně soustavu rovnic *y = 3x - 2*

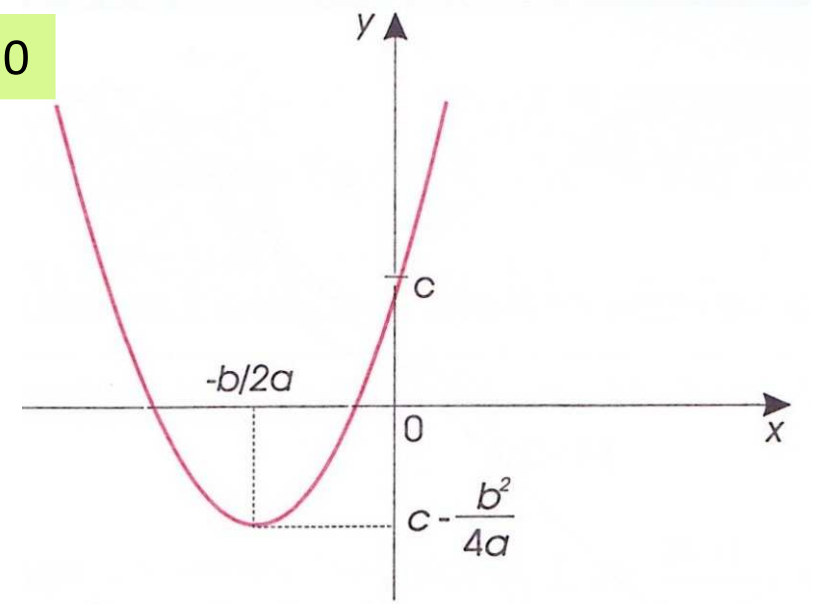
y = -x +1

2 KVADRATICKÁ FUNKCE

= každá funkce typu: $f: y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, D(f) = R$

Graf: Parabola

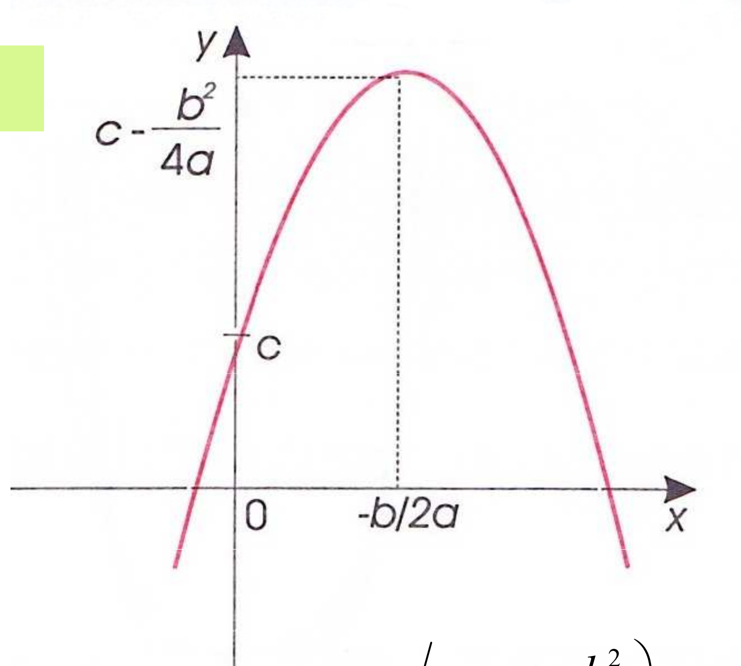
a > 0



$$D(f) = R, \; H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right)$$

Je zdola omezená, není shora omezená.
Pro b=0 je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro x ϵ <-b/2a, +∞) .
Je klesající pro x ϵ (+∞, -b/2a>.
Není prostá.
Má ostré minimum [-b/2a;c-b^2/4a]
Je spojitá v R.

a < 0



$$D(f) = R, \; H(f) = \left(-\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

Je shora omezená, není zdola omezená.
Pro b=0 je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro x ϵ (+∞, -b/2a> .
Je klesající pro x ϵ <-b/2a, +∞).
Není prostá.
Má ostré maximum [-b/2a;c-b^2/4a]
Je spojitá v R.

2.1 GRAFY KVADRATICKÝCH FUNKCÍ

= **parabola**, která je **souměrná podle osy *o*** rovnoběžné s osou *y*.

a) Graf funkce $\boldsymbol{f_1 : y = ax^2}$

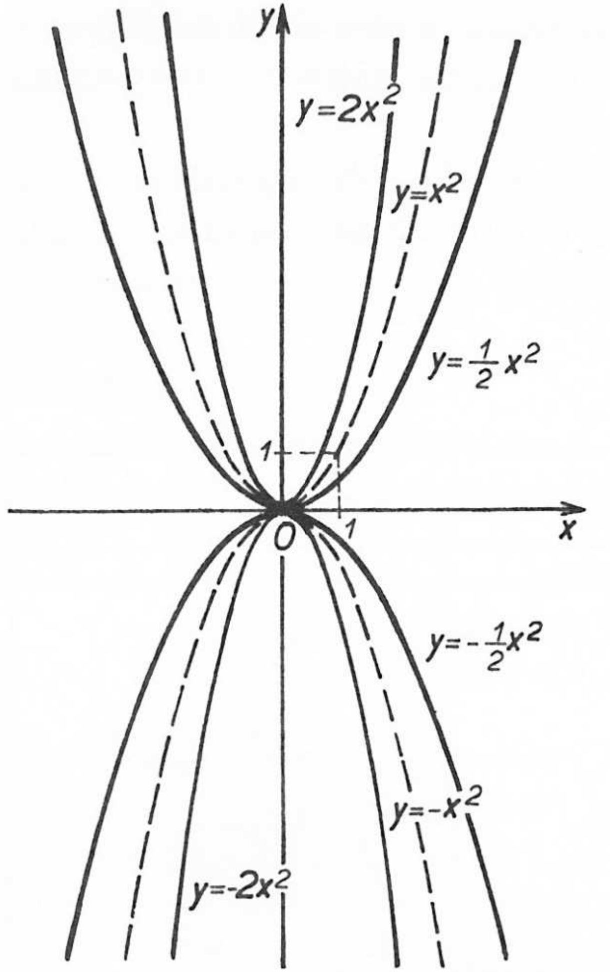
= **parabola** s vrcholem v počátku [0,0]

b) Graf funkce $\boldsymbol{f_2 : y = ax^2 + c}$

= **parabola**, která vznikne z paraboly funkce $\boldsymbol{f_1: y = ax^2}$ **posunutím** jejího vrcholu z bodu **[0,0]** do bodu **[0,c].**

c) Graf funkce $\boldsymbol{f_3 : y = a(x-x_0)^2}$

= **parabola**, která vznikne z paraboly funkce $\boldsymbol{f_1: y = ax^2}$ **posunutím** jejího vrcholu z bodu **[0,0]** do bodu **[x_0,0].**



d) Graf funkce $\boldsymbol{f_4 : y = ax^2 + bx + c}$

= **parabola**, kterou opět získáme z grafu funkce $\boldsymbol{f_1: y = ax^2}$:

1. Doplníme na úplný čtverec: $$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

2. Posuneme graf funkce $\boldsymbol{f_1}$ z bodu **[0,0]** do bodu **[x_0,y_0]:** $$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \text{ kde } x_0 = \frac{b}{2a}, y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

Úlohy

Př. 1: Načrtněte grafy funkcí:

$$a)\, y = 2x^2;\; y = -2x^2$$

$$b)\, y = 2x^2 - 3;\; y = -2x^2 + 2$$

$$c)\, y = 2(x+1)^2;\; y = -2(x-1)^2$$

$$d)\, y = x^2 - 2x + 3$$

$$e)\, y = 2x^2 - 8x + 9$$

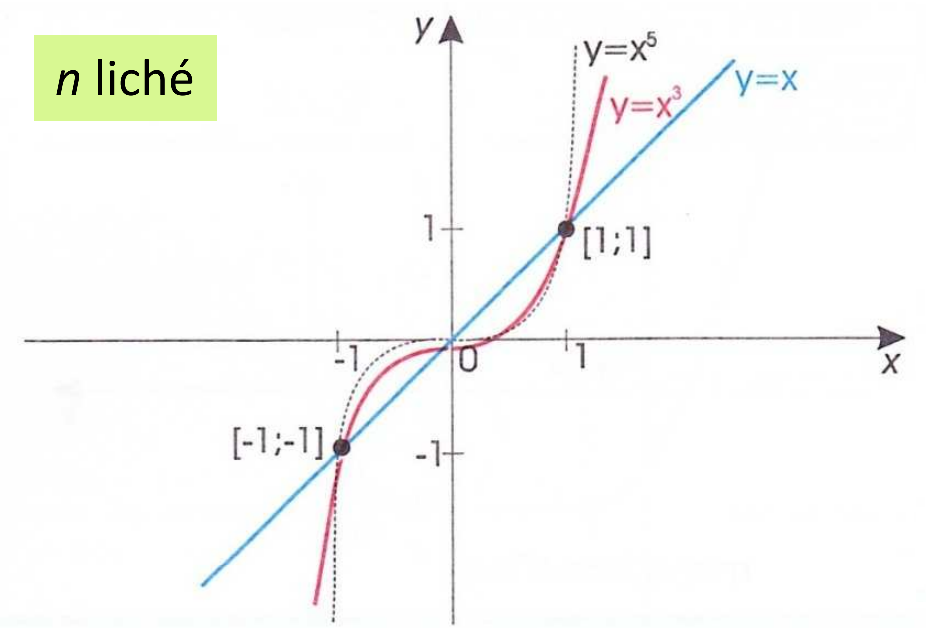
3 MOCNINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

$f: y = x^n, \quad n \in N, D(f) = R$

Graf: n = 1: přímka
n > 1: parabola n-tého stupně

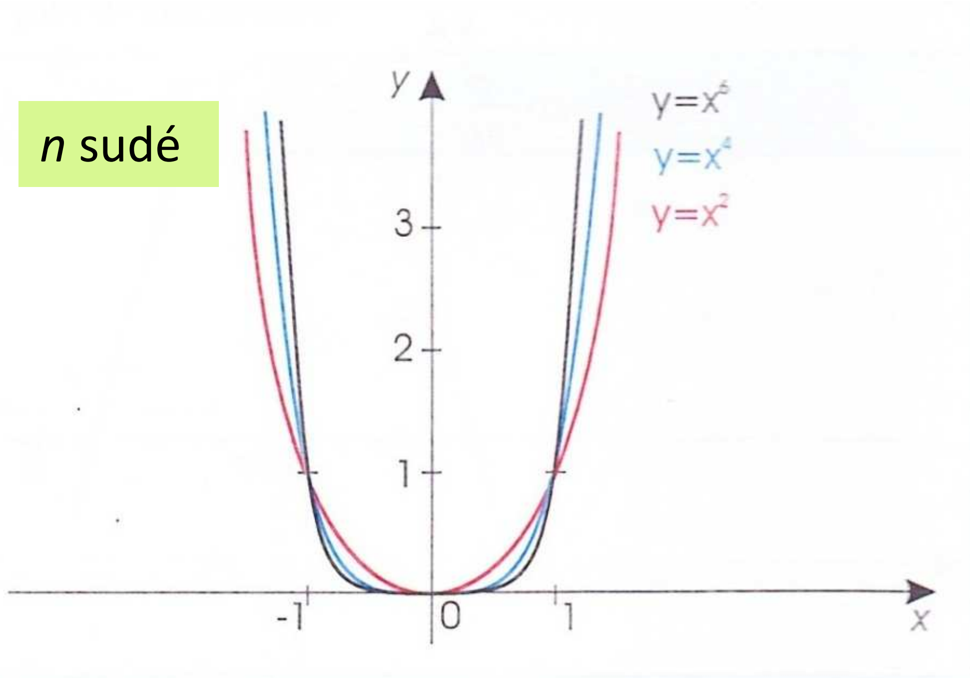
Pro: n = 1: lineární funkce *f: y = x*
n = 2: kvadratická funkce *f: y = x²*
n = 3: kubická funkce *f: y = x³*

n liché



D(f) = R, H(f) = R
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.

n sudé



D(f) = R, H(f) = <0, +∞)
Je sudá.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Je rostoucí pro x ϵ <0, +∞) .
Je klesající pro x ϵ (-∞, 0>.
Není prostá.
Nemá maximum, má minimum [0,0].
Je spojitá v R.

Úlohy

Př. 1: Načrtněte grafy funkcí:

$$a)\, y = x^3 - 1$$

$$b)\, y = (x-1)^5$$

$$c)\, y = x^4 + 3$$

$$d)\, y = -0{,}5x^6$$

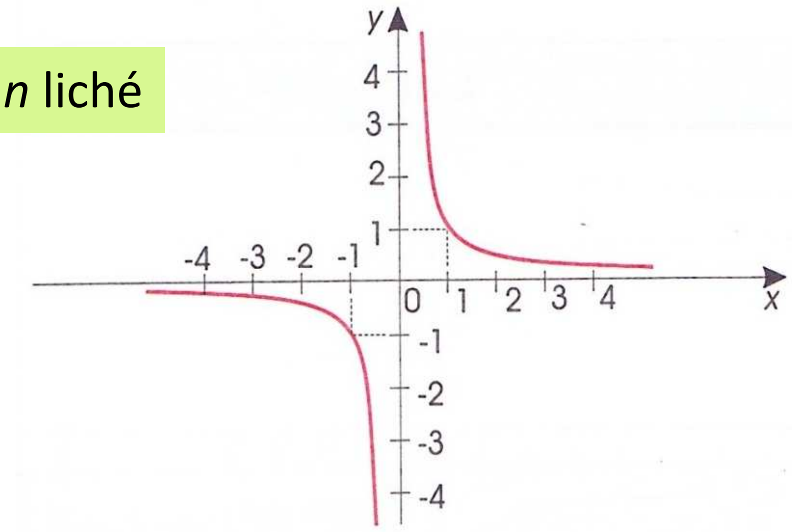
$$e)\, y = -2x^5$$

4 MOCNINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

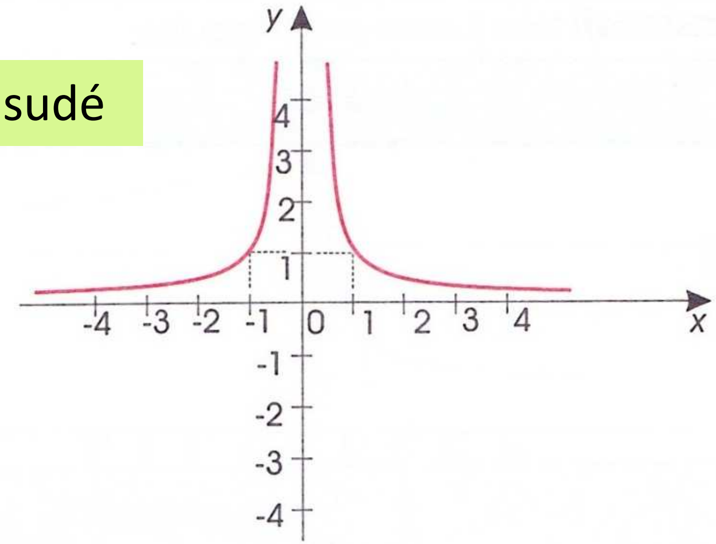
= funkce $f: y = x^{-n}, \ \ n \in N, D(f) = R$

Graf:
hyperbola stupně n+1

n liché



n sudé

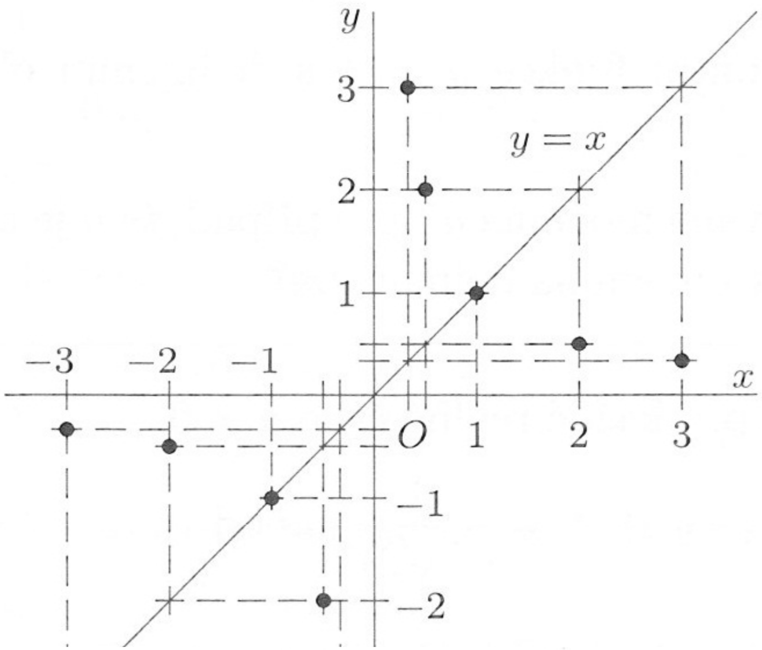


D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Klesá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.

D(f) = R – {0}, H(f) = (0, +∞).
Je sudá.
Je omezená zdola, není shora omezená.
Je rostoucí pro x ϵ (-∞, 0) .
Je klesající pro x ϵ (0, +∞).
Není prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

Úlohy

Př. 1: Načrtněte graf funkce $y = x^{-1}$

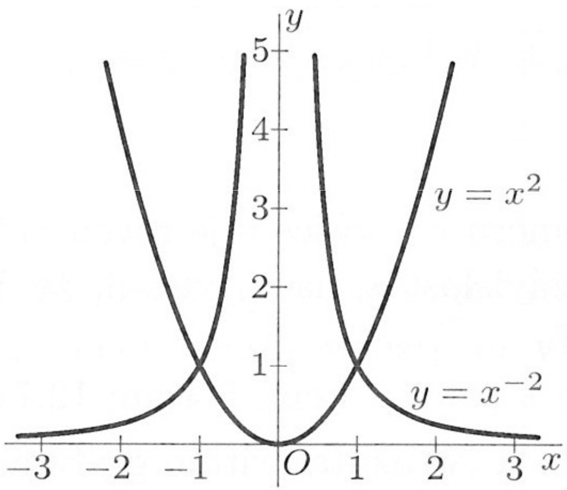


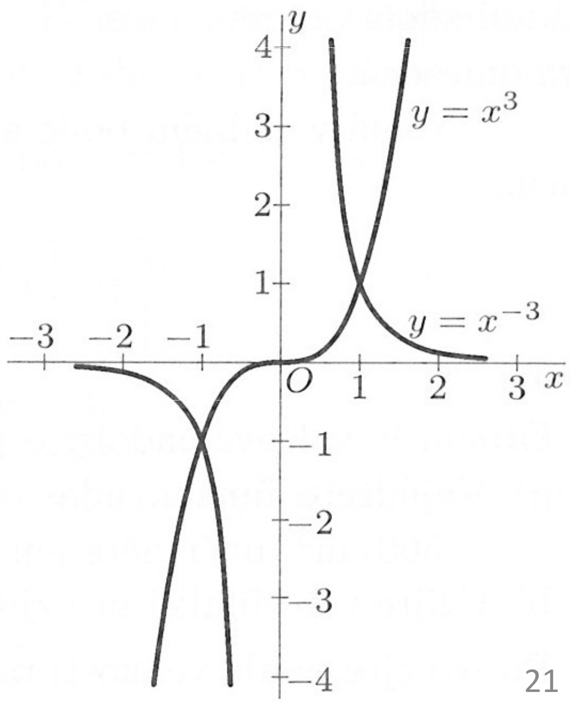
Řešení:
Body grafu funkce $y = x^{-1} = 1/x$ získáme tak, že sestrojíme graf funkce y = x a pro zvolené hodnoty proměnné x hledáme k hodnotám této funkce v téže soustavě souřadnic jejich převrácené hodnoty.

Př. 2: Načrtněte grafy funkcí:

$$a)\, y = x^{-2}$$

$$b)\, y = x^{-3}$$





5 LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

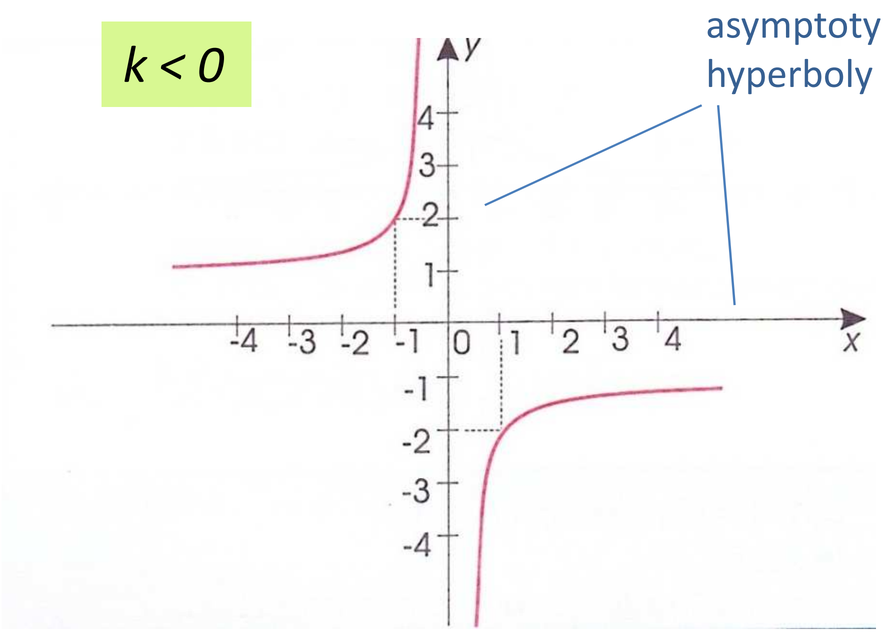
$$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

Nepřímá úměrnost:

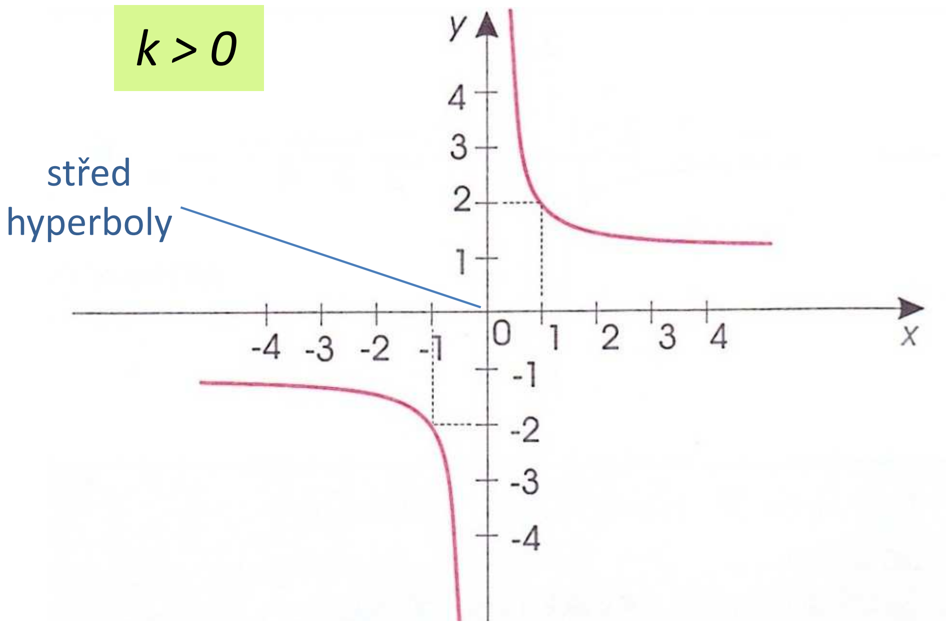
$$f: y = \frac{k}{x} \quad , \quad k \neq 0, D(f) = R - \{0\}$$

Graf: rovnoosá hyperbola

k < 0



k > 0



D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je rostoucí pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}.
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je klesající pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

Lineární lomená funkce

$$f: y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad , \quad c \neq 0, ad \neq bc$$

Graf: rovnoosá hyperbola

se středem v bodě $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$

Úlohy

Př. 1: Načrtněte graf funkce $f: y = \frac{2x-5}{x-1}$

Literatura

- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.