Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

Studijní obor: Matematika - Ekonomie

KONCEPT UČEBNICE MATEMATIKY PRO EKONOMY

Mathematics for economists: a textbook proposal

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: Ing. Daniel Němec

Autor: Bc. Roman SLÁDEK

Brno, květen 2009

Jméno a příjmení autora: Bc. Roman Sládek
Název diplomové práce: Koncept učebnice matematiky pro ekonomy
Název práce v angličtině: Mathematics for economists: a textbook proposal
Katedra: Ústav matematiky a statistiky
Vedoucí diplomové práce: Ing. Daniel Němec
Rok obhajoby: 2009

Anotace

Diplomová práce je konceptem učebnice matematiky pro ekonomy, která by se zaměřovala na základní, v ekonomii používanou, matematickou teorii. Současně témata podává srozumitelnou formou a doplňuje je množstvím příkladů z aplikace teorie na ekonomickou problematiku. Zaměřuje se především na teorii množin, na reálná čísla, reálné funkce a posloupnosti a nekonečné řady. Cílem je nabídnout studentům Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity učebnici přesně podle jejich potřeb.

Annotation

The present thesis represents a proposal of textbook of mathematics for economists, which should be focused on basic mathematic theory used in economics. It presents the theory in intelligible way and adds a number of exemples from the applications to economic problematics. It focuses principally on the theory of sets, on real numbers, real functions, sequences and infinite series. The goal is to propose students of Faculty of Economics and administration a textbook adapted to their needs.

Klíčová slova

Množiny, reálná čísla, reálná funkce, limita, spojitost, derivace, posloupnost, nekonečná řada, ekonomické aplikace.

Keywords

Sets, real numbers, real functions, limit, continuity, derivation, sequence, infinite series, economic applications.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Koncept učebnice matematiky pro ekonomy* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Daniela Němce a uvedl v ní všechny použité literární a jiné odborné zdroje v souladu s právními předpisy, vnitřními předpisy Masarykovy univerzity a vnitřními akty řízení Masarykovy univerzity a Přírodovědecké fakulty MU.

V Brně dne 11. května 2009

vlastnoruční podpis autora

Poděkování

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval Ing. Danielu Němcovi za cenné připomínky k textu této práce, za odborné rady, díky kterým se mi podařilo vyřešit nejeden problém, a za občasné usměrňování, co se týče obsahového zaměření práce, bez něhož bych stěží dokázal udržet stanovený rozsah textu.

Obsah

Úvod

Mezi jednotlivými vědními disciplínami lze pozorovat nejrůznější provázané vztahy. V rámci přírodních věd hraje roli jakéhosi univerzálního propojovacího prvku matematika poskytující aparát ostatním přírodním vědám. Její poznatky slouží jako nástroj nejen při popisu přírodních zákonů, ale statistika, jako její subdisciplína, má nezastupitelnou úlohu dokonce i při objevování a formulování těchto zákonů. Co se týče ekonomie, ta leží na pomezí mezi přírodními a společenskými vědami. Popisuje jevy související se společností a s produkty lidského konání a chování. Nicméně je ojedinělá tím, že ke studiu využívá prostředky podobné těm používaným v přírodních vědách. Hovoříme zde právě o využívání matematiky.

Historicky má vztah matematiky a ekonomie za sebou již poměrně dlouhý vývoj. Matematika byla jednotlivými ekonomickými školami používána ve velice odlišném měřítku, např. Německá historická škola používající tzv. historickou metodu její aparát nevyužívala vůbec. Naopak nástup marginalistické revoluce na konci devatenáctého století znamenal průlom ve vztahu těchto dvou vědních disciplín.

V současné době již nelze o významu matematického aparátu v moderní ekonomii a přidružených subdisciplínách vůbec diskutovat. A to ať už na poli firemních financí, v mikroekonomii, při analýze chování spotřebitele, v makroekonomické analýze, ekonometrii, či v praktické monetární politice centrálních bank.

Z těchto důvodů se jeví jako značně opodstatněné studovat matematiku současně se studiem ekonomie, ne-li před jeho samotným začátkem. Získáme tak vědomosti, které využijeme k lepšímu pochopení a jednoduššímu zápisu ekonomických zákonitostí.

Předkládaný text si klade za cíl navrhnout koncept učebnice matematiky, která by přesně odpovídala základním potřebám studentů na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity. Tím máme na mysli nejen výběr vhodných tématických celků, ale především připojení příkladů z ekonomické teorie, na kterých je možno ukázat praktické využití probírané látky a současně studentům umožnit si ji procvičit.

V ekonomii se nejčastěji setkáváme s využitím matematické analýzy a základních pojmů lineární algebry. S těmito, pro ekonomii fundamentálními, tématy se v předkládané práci seznámíme. Skladba učebnice je postavena na logické návaznosti jednotlivých partií.

Nejprve se tak seznámíme se základy teorie množin. Poté bude následovat krátký exkurz do teorie týkající se množiny reálných čísel. Na tyto teoretické partie navážeme matematickou analýzou, z níž se budeme věnovat především jednorozměrnému diferenciálnímu počtu.

Každá kapitola bude mít analogickou strukturu. Nejprve studentům představíme dané téma a vysvětlíme jej ve zjednodušené a srozumitelné formě. Výklad budeme doplňovat základními definicemi a jednoduchými příklady. Na něj pak navážeme částí s ekonomickou interpretací a příklady, které ukáží praktické využití matematické teorie.

Věty a definice přebíráme z literatury uvedené v seznamu na konci práce. Vzhledem k tomu, že se některé formulace (nikoliv však význam!) definic a vět v různých zdrojích nepatrně liší, pokusíme se uvést vždy takovou formulaci, kterou považujeme za nejsrozumitelnější pro cílovou skupinu studentů. Ze stejného důvodu někdy použijeme i vlastních slov k vyjádření téhož obsahu. Jedná se navíc o „obecně známé skutečnosti". Proto nebudeme v textu u definic, vět apod. uvádět citace. V případě, že budeme beze zbytku přebírat graf, nebo vysvětlující komentář z konkrétního zdroje, citaci samozřejmě uvedeme.

1. Množiny

Teorie týkající se množin není příliš používaná v ekonomii přímo a osamoceně, nicméně je základním prvkem, který je potřeba pochopit pro porozumění další látce. Množiny se využívají nejen pro definování definičního oboru[1] funkce a různých intervalů, ale jsou nezbytné i pro formulování pojmu „vektor“ a práci s ním. Dalších využití v následující látce bychom nalezli ještě mnoho. Navíc pojmy týkající se množin se objevují v dalších definicích a větách všude nejen v základním kurzu matematiky, ale i v předmětu statistika. Proto je rozumné touto látkou začít celou učebnici. Současně je možné teorii množin (omezeně) aplikovat v ekonomii. A to například při agregování dílčích trhů, které použijeme jako příklad v závěru kapitoly.

1.1. Základní pojmy a operace s množinami

Def. 1.1: **Množina** je soubor prvků (obecně objektů) jednoznačně určený právě prvky, které obsahuje.

Množiny obvykle značíme velkým písmenem, naopak jejich prvky malým písmenem. Pokud je x prvkem množiny *M*, píšeme $x \in M$, pokud není prvkem množiny *M*, píšeme naopak $x \notin M$. Tyto dva zápisy jsou obecně používany a i my je v dalším textu budeme využívat v některých vzorcích.

1 Pojem bude vysvětlen v kapitole o reálných funkcích jedné reálné proměnné (kapitola 3.).

Z definice 1.1 je zřejmé, že množinu M, která obsahuje prvky x_i, i = 1, 2, 3, ...[2] můžeme zapsat pomocí jejích prvků. V takovém případě vypíšeme prvky do složených závorek takto:

$$M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

To, že lze množinu zapsat pomocí jejích prvků, má i další důsledky. Pokud například máme množinu M, která obsahuje právě[3] prvky a, b, a dále množinu N, která obsahuje také právě tyto dva prvky a, b, pak platí, že tyto dvě množiny jsou identické, tedy $M = N$. Neboli množinu, která obsahuje prvky a, b, značíme M a současně ji značíme i N. Pořád se ale jedná o stejnou množinu.

Def. 1.2: Množina M je **podmnožinou** množiny N, jestliže každý prvek množiny M je současně i prvkem množiny N. Mluvíme o tzv. **množinové inkluzi**. Celou definici můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$M \subseteq N \Leftrightarrow (\forall x \in M \Rightarrow x \in N),$$

což čteme: „M je podmnožinou N právě tehdy, když pro všechny prvky množiny M platí, že jsou současně i prvkem N.“

Neboli každý prvek množiny M můžeme nalézt i v množině N. Opačně to ale obecně neplatí. Tedy mohou existovat prvky množiny N, které množina M neobsahuje. Pokud existují prvky M, které nejsou v N, M není podmnožinou N, což zapíšeme $M \not\subseteq N$. Pro lepší pochopení definice 1.2 budeme celou záležitost ilustrovat na následujícím příkladu:

2 Tento zápis znamená, že mluvíme o prvcích, které jsou značeny x_1, x_2, x_3, atd. s dalšími následujícími indexy, jako 4, 5 ... To znamená, že za index i u x dosazujeme postupně všechna čísla, která máme umožněna (což je definováno zápisem i = 1, 2, 3, ...).

3 Přesně tyto prvky a žádné jiné.

Př. 1.1: Uvažujme následující příklad: $M=\{a,b,c\}$, $N=\{a,b,c,d,e\}$[4]. Když porovnáme prvky obou množin, vidíme, že každý prvek množiny M nalézáme i v množině *N*. Tedy množina M je podmnožinou množiny *N*.

Pokud máme tři množiny *A*, *B*, *C*, pro něž platí $A \subseteq B$ a současně $B \subseteq C$ (což můžeme zapsat pomocí matematického operátoru $. \wedge .$, který znamená „a současně", takto: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$), pak platí $A \subseteq C$. Můžeme to jednoduše dokázat. *A* je podmnožinou *B* (první vztah), takže všechny prvky *A* jsou současně i v *B*. *B* je přitom podmnožina *C*, proto všechny prvky *B* jsou současně v *C*. Avšak mezi prvky *B* patří i ty, které jsou v *A* (vzhledem k prvnímu vztahu leží všechny prvky *A* v *B*), takže i ty musí nutně být v *C*. Vztah *A* a *C* přesně naplňuje definici 1.2. Proto platí $A \subseteq C$.

V předchozím textu jsme zmínili případ, kdy se dvě množiny rovnají. Označíme je *M* a *N*. Pokud bychom se zajímali o jejich vztah ve smyslu podmnožin, zjistíme, že podle definice 1.2 je *M* podmnožinou *N* a současně N je podmnožinou *M*. Je tomu tak proto, že všechny prvky množiny M nalézáme i v množině N a současně všechny prvky množiny N jsou i v množině *M*. Matematicky můžeme psát $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$, což je ekvivalentní zápisu $M = N$.

Z toho můžeme odvodit i vztah množinové inkluze pro množinu (označíme M) se sebou samou. Pokud zkusíme striktně aplikovat definici 1.2, tak, vzhledem k tomu, že „všechny prvky množiny M se současně nacházejí i v množině M", můžeme psát $M \subseteq M$.

Pokud je množina *M* podmnožinou množiny *N*, ale současně víme, že se obě množiny nerovnají, můžeme místo znaku $. \subseteq .$ použít znak ostré inkluze $. \subset .$, který přímo vyjadřuje skutečnost, že jedna množina je podmnožinou druhé, ale že se množiny

4 Všimněte si, že jsme pro zápis množin *M* a *N* již použili zápis ve tvaru, který jsme odvodili z definice 1.1.

nerovnají. Naopak, pokud je možné, že se obě množiny rovnají, používáme obecnější znak .$\subseteq$. .

Def. 1.3: Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme **prázdná množina**. Značíme ji $\emptyset$.

Pro prázdnou množinu platí, že je podmnožinou jakékoliv množiny *M*. Tedy $\forall M$ je $\emptyset \subseteq M$, a to včetně případu, kdy je sama množina M prázdná.

Co se týče velikosti množin, ta se určuje podle počtu prvků, které daná množina obsahuje. Obecněji se množina *M* nazývá konečná, obsahuje-li pouze konečně mnoho různých prvků. V opačném případě je *M* nekonečná množina. Jak dále uvidíme, ani nekonečné množiny nejsou „stejně velké".

Nyní se zaměřme na základní operace s množinami. Mezi ty patří sjednocení, průnik a rozdíl. Každou z nich si definujeme a vysvětlíme na příkladu množin $A=\{1,2,3,4,5\}$ a $B=\{4,5,6,7,8\}$.

Def. 1.4: **Sjednocením** množin A a B je množina, kterou značíme $A\cup B$. Je tvořena těmi prvky, které jsou buď prvky množiny A nebo prvky množiny *B*, tedy těmi prvky, které se nacházejí alespoň v jedné z množin *A*, *B*. Matematicky zapsáno $A\cup B=\{x : x\in A\vee x\in B\}$,
což čteme: „Sjednocení množin A a B je množina obsahující takové prvky, které leží buď v A, nebo v B." V našem příkladu $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Def. 1.5: **Průnik** množin A a B je množina značená $A\cap B$. Je tvořena těmi prvky, které jsou současně prvky množiny A a prvky množiny *B*, tedy všemi prvky, které se nacházejí současně v obou množinách *A*, *B*. To znamená, že klademe $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ [5]. Pokud je průnik dvou množin prázdný (prázdná množina), mluvíme o těchto dvou množinách jako o **disjunktních**. V našem příkladu $A \cap B = \{4,5\}$.

Def. 1.6: **Rozdílem** množin A a B je množina $A \setminus B$ (můžeme značit i *A* - *B*), která je tvořena všemi prvky, které jsou prvky množiny *A*, ale současně nejsou prvky množiny *B*. Tedy těmi prvky, které se nacházejí v *A*, ale nenacházejí se v *B*. Klademe $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Pozor! $A \setminus B$ není to stejné, co $B \setminus A$. První obsahuje prvky z A, které nejsou v B, druhá obsahuje prvky z B, které nejsou v A. V případě množin *A*, *B* z našeho příkladu je $A \setminus B = \{1,2,3\}$, ale $B \setminus A = \{6,7,8\}$.

Pracovat můžeme také s vícenásobnými operátory, které nám umožní obecně a jednoduše zapsat sjednocení, nebo průnik více množin. Mluvíme o obecném sjednocení a obecném průniku.[6] Ty zapíšeme následujícím způsobem:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ obecné sjednocení

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$ obecný průnik

Někdy je takový zápis nezbytný, protože můžeme potřebovat zapsat sjednocení i nekonečně mnoha množin. Například pokud bychom vzali čtveřice po sobě jdoucích přirozených čísel {1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12} atd. a chtěli bychom provést jejich sjednocení, abychom dostali celou množinu přirozených čísel. Je jasné, že čtveřic bude nekonečno, a proto bychom je pomocí klasického sjednocení nikdy nedokázali zapsat.

5 Význam všech znaků v rovnosti jsme již vysvětlili výše, proto neuvádíme jejich „překlad“.

6 Podobný zápis pak můžeme pozorovat i u dalších operátorů (např. suma).

V příloze 1 je uvedeno několik rovnic, které zobrazují vztahy mezi sjednoceními, průniky a rozdíly dvou až třech množin. Do práce je zahrnujeme z toho důvodu, abychom studentům umožnili pracovat s kombinacemi množinových operací.

1.2. Kartézský součin, relace, zobrazení

V této subkapitole se seznámíme především s pojmem kartézského součinu, který nám později umožní konstruovat vícerozměrné prostory a jejich prvky - vektory. Současně s tím vysvětlíme pojmy relace a zobrazení, které nám poslouží v celém dalším textu.

Def. 1.7: **Kartézský součin** množiny A (jejíž prvky označíme obecně a) a množiny B (jejíž prvky označíme obecně b) je množina $A \times B$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Tedy

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

To znamená, že prvkem $A \times B$ není jenom a, nebo jenom b samostatně. Prvky $a \in A$ vytvoří spolu s $b \in B$ tzv. uspořádané dvojice (a, b), kde jedním prvkem kartézského součinu je „celá závorka“ (a, b). Přitom tato dvojice je uspořádaná, tzn. že prvním členem dvojice je vždy prvek z té množiny, která v kartézském součinu vystupuje jako první (v našem případě A), a druhým členem dvojice je vždy prvek pocházející z druhé množiny kartézského součinu. Pro lepší pochopení uvedeme příklad.

Př. 1.2: Mějme množinu $M=\{x,y\}$ a množinu $N=\{1,2,3\}$. Vypiště všechny prvky $M\times N$ a poté i všechny prvky $N\times M$.

Řešení:

$$M\times N=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$$

$$N\times M=\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$

Vzhledem k tomu, že v $M\times N$ jsou na prvním místě v uspořádané dvojici prvky z M a na druhém z N, zatímco v $N\times M$ je tomu naopak, je zřejmé, že obecně $M\times N\neq N\times M$. Rovnost by platila pouze tehdy, pokud by $M = N$.

Pokud máme $A\times B$, kde $A = B$, tj. máme $A\times A$, značíme tento kartézský součin také A^2.

Def. 1.8: **Relace** (značíme např. ρ) mezi množinami A, B je podmnožina jejich kartézského součinu, tedy $\rho\subseteq A\times B$. Pokud máme nějaký konkrétní prvek $a\in A$ a konkrétní prvek $b\in B$ takové, že jimi tvořená uspořádaná dvojice (a,b) (což je prvek množiny $A\times B$) je prvkem relace ρ, tedy $(a,b)\in\rho$, pak říkáme, že a je v relaci ρ s b a značíme „$a\ \rho\ b$“.[7]

Př. 1.3: Pokud bychom vzali kartézský součin $M\times N$ z příkladu 1.2 ($M\times N=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$), pak můžeme jako příklad relace uvést např. $\rho=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$, nebo jakoukoliv jinou podmnožinu $M\times N$.

7 Vzhledem k našim znalostem o podmnožinách můžeme odvodit, že i prázdná množina je relací, protože je podmnožinou jakékoliv množiny, tedy i kartézského součinu jakýchkoliv dvou množin. V tom případě hovoříme o **prázdné relaci**. A naopak, i celý kartézský součin, což je množina, je svou vlastní podmnožinou, tedy i relací mezi množinami, které jej tvoří. Pak mluvíme o **univerzální relaci**.

Ke každé relaci ρ mezi množinami A, B, tj. $\rho \subseteq A \times B$, existuje tzv. inverzní relace, kterou označíme ρ^{-1}. Pro ni platí:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) : ((b, a) \in B \times A) \quad \wedge \quad a \rho b\} \quad .$$

Je to tedy podmnožina „opačného" kartézského součinu než ρ ($B \times A$ proti $A \times B$) taková, že pokud bychom převrátili všechny její prvky (b,a) do tvaru (a,b) (tzn. že bychom prohodili první složku uspořádané dvojice (b,a), tj. b, na druhé místo a druhou složku, tj. a, na první místo), pak všechny takto vzniklé (a,b) jsou prvky původní relace.

Pokud máme množiny A (její prvky označíme a), B (její prvky označíme b) a C (její prvky označíme c) a dvě relace mezi nimi - $\rho \subseteq A \times B$ a $\sigma \subseteq B \times C$, pak můžeme tyto relace skládat. Výsledkem je složená relace $\sigma \circ \rho$ (čteme σ po ρ), kterou můžeme vyjádřit takto: $\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C : \exists\, b \in B : ((a, b) \in \rho) \wedge ((b, c) \in \sigma)\}$. Je to tedy relace na kartézském součinu $A \times C$, jejíž prvky (a,c) vznikly prostřednictvím nějakého prvku b množiny B, který je spojuje skrze prvky relací ρ a σ. To znamená, že prvky složené relace $\sigma \circ \rho$ jsou ty uspořádané dvojice (a,c) z kartézského součinu $A \times C$, pro jejichž složky a, c platí, že existuje nějaký prvek $b \in B$ takový, že dvojice (a,b), resp. (b,c) jsou prvky ρ, resp. σ.

Def. 1.9: Relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme **zobrazení** množiny A do množiny B, jestliže platí, že ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden jeden prvek $y \in B$ takový, že spolu tvoří uspořádanou dvojici, která je prvkem této relace (tj. $(x, y) \in f$). Množinu A nazýváme **definiční obor** f a značíme $D(f)$. Množinu všech prvků $y \in B$ takových, že pro nějaké $x \in A$ je $(x, y) \in f$, nazýváme **obor hodnot** f a značíme $H(f)$.

Př. 1.4: Pokud se vrátíme k příkladu 1.2, kde jsme měli množiny $M=\{x,y\}$ a $N=\{1,2,3\}$, jejich kartézským součinem byla množina $M\times N=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$

Příkladem obecné relace na tomto kartézském součinu je $\rho=\{(x,1),(x,2),(y,3)\}$. Nicméně, protože ($x$, 1) a současně ($x$, 2) jsou prvky ρ, není to zobrazení. K x totiž neexistuje pouze jeden prvek z N, s nímž tvoří uspořádanou dvojici, která je prvkem ρ, ale dva (1 a 2). Naopak, pokud bychom měli relaci $\sigma=\{(x,1),(y,3)\}$, pak ta by byla zobrazením.

Je-li relace $f\subseteq A\times B$ zobrazením, pak skutečnost, že uspořádaná dvojice $(x,y)\in f$, zapisujeme ve tvaru $y = f(x)$. Používáme také zápis $f:A\rightarrow B$, který znamená, že f je zobrazení z A do B. První složku uspořádaných dvojic, tj. $x\in A$, nazýváme nezávisle proměnnou, druhou jejich složku, tj. $y\in B$, závisle proměnnou.

Def. 1.10: Zobrazení $f\subseteq A\times B$ nazýváme „zobrazení **na**", nebo také **surjektivní**, pokud je jeho obor hodnot $H(f)$ roven celé množině B, tedy celé množině, do které zobrazuje. Neboli každý prvek B je obrazem nějakého prvku z A.

Def. 1.11: Zobrazení, které je surjektivní a současně injektivní, nazýváme **bijektivní**.[8]

Pojem bijektivního zobrazení (např. $f:A\rightarrow B$) je velmi důležitý, protože pro něj, jakožto pro typ relace, existuje inverzní zobrazení $f^{-1}:B\rightarrow A$, které každému prvku množiny B přiřadí zpět ten prvek množiny A, jehož je daný prvek z B obrazem přes zobrazení z f. Schématicky zapsáno, máme $x\in A$ a $y\in B$ takové, že $f(x)=y$.

8 Tento pojem zavádíme mimo jiné proto, že i některé reálné funkce jsou bijektivní na určitém intervalu. Poznáme je tak, že jsou na daném intervalu buď pouze rostoucí, nebo pouze klesající.

Pak $f^{-1}(y)=x$. No a protože se relace (tedy i zobrazení) dají skládat, tak pokud složíme $f: A\rightarrow B$ s jeho inverzním zobrazením $f^{-1}: B\rightarrow A$, dostaneme $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$, tedy obraz $x\in A$ přes toto složené zobrazení je to stejné *x*. Takovému zobrazení říkáme **identita**, značíme ho $Id: A\rightarrow A$.

Intuitivně vnímáme, že definice zobrazení je již velmi podobná „klasické“ funkci známé z matematiky na středních školách. A opravdu, reálné funkce (ať už reálné, nebo komplexní proměnné) jsou zobrazeními. Jimi se začneme zabývat v kapitole 3.

1.3. Ekonomické aplikace teorie množin

Stejně, jako tomu bude v pozdějších kapitolách, i k teorii množin se pokusíme najít odpovídající okruh ekonomických problémů, kde se může uplatnit.

V kurzu Neoklasické makroekonomie[9] výklad začíná popisem rozhodování Robinsona Crusoe, kolik svého času má strávit rybařením (což mu přináší obživu) a kolik si má ponechat volného času (který je příjemnější, než rybaření). Má přitom k dispozici pouze 24 hodin denně. Jedná se tedy o klasické hledání optima spotřebitele při výběru mezi dvěma druhy statků (ryby, volný čas). Je evidentní, že tento příklad, stejně jako všechny ostatní podobné modely rovnováhy spotřebitele (opět výběr mezi dvěma statky), jsou značně zjednodušené. Statků je ve skutečnosti mnoho. Pro potřeby modelu je nicméně potřeba statky nějak rozdělit na dvě skupiny. Proto rozdělíme statky do dvou množin podle jejich typu. Jednotlivé statky jsou prvky těchto množin. Například ryby jsou v případě Robinsona zástupcem, který ve skutečnosti reprezentuje všechno, co si může vlastní prací zabezpečit (natrhané banány, pomeranče, ulovená zvěř,

9 Nazývaná někdy také Nová klasická makroekonomie.

nachytané ryby). Pro zjednodušení analýzy tedy rozdělíme statky do skupin (množin), jichž je méně a proto se snáz analyzují.

Podobně je tomu v předmětu Makroekonomie II, kde se pracuje s koncepty „Tradeable“ a „No-tradeable“ goods (obchodovatelné a neobchodovatelné statky). Opět se jedná o dvě množiny, do nichž shrnujeme mnoho různých statků a služeb.

Uvažujme indiferenční křivky v analýze optima spotřebitele. Celá plocha grafu ohraničená osami je ve své podstatě kartézský součin $A \times B$, protože každý bod na ní je kombinací množtví statku A a množství statku B a je tedy uspořádanou dvojicí. Indiferenční křivky jsou určité podmnožiny kartézského součinu takové, že všechny kombinace statků na této křivce poskytují spotřebiteli stejný užitek. Jedná se tedy o relace mezi množinou množství statku A a množinou množství statku B.

Př.1.5: Spotřebitel, který si vybírá ze dvou statků X a Y má užitkovou funkci $U = X.Y$. Když roste spotřeba statků X, roste jeho užitek. Stejně to platí i pro statek Y. Znamená to, že oba statky jsou žádoucí a indiferenční křivky mají „normální“ tvar.[1] Každá indiferenční křivka je sama o sobě relací a je dána nějakou konstantní úrovní celkového užitku. Vezměme například $U = 2$.

Pro každý bod A této indiferenční křivky pak platí $X_A.Y_A = 2$. Což můžeme převést na tvar $Y_A = \frac{2}{X_A}$. To znamená, že indiferenční křivka je relací, pro niž platí, že (X, Y) je jejím prvkem, pokud pro X a Y platí $Y = \frac{2}{X}$

Poslední aplikace, kterou uvedeme, se týká trhů. Existuje mnoho způsobů, jak rozdělit trh na dílčí trhy. A to například podle jejich velikosti (tím máme na mysli množství konkrétních typů zboží, které do jednotlivých trhů zahrneme). Trh ovoce je sjednocením dílčích trhů s jednotlivými druhy ovoce, trh s elektronikou sjednocením trhů s televizemi, rádii, počítači apod. Pokud chceme vědět, jakými výrobky si dvě (nebo více) firmy konkurují, vezmeme množiny jejich výrobků (typů výrobků) a vytvoříme jejich průnik. V případě, že na nějakém trhu funguje oligopol s jednou dominantní firmou a my chceme studovat ostatní firmy na tomto trhu, použijeme rozdíl množin (celý trh mínus dominantní firma).

Př.1.6: Na českém automobilovém trhu jsou segmentu malých vozů dostupné (mezi jinými) Škoda Fabia, Renault Clio, VW Golf, Kia Ceed (mn. M). Škoda je dominantní firma, která vyrábí vozy Fabia, Octavia, Superb, Roomster a Yeti (mn. S). Jestliže chceme studovat trh malých vozů bez dominantní firmy, použijeme rozdíl M – S, čímž dostaneme množinu obsahující pouze vozy Renault Clio, VW Golf, Kia Ceed.

2. Reálná čísla

Vzhledem k tomu, že v tomto textu budeme po většinu času funkce a další matematické pojmy studovat na množině reálných čísel, což nejlépe odpovídá potřebám ekonomie, je vhodné udělat na tomto místě, tedy za úvodní kapitolou věnovanou množinám, o reálných číslech krátkou poznámku. Nebudeme však vysvětlovat konstrukci, pomocí níž se k množině reálných čísel dojde, protože to přesahuje rámec této práce.

Vraťme se k množinám a jejich velikosti. Mezi nekonečně velké množiny řadíme i přirozená čísla $\mathbb{N}$, celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$ (zlomky) a pak i reálná čísla $\mathbb{R}$. Přechod k nim je trochu obtížnější, definují se tak, že mezi racionálními čísly „vyplníme mezery“ a dostaneme tak „souvislou“ množinu. Pro zajímavost uvedeme, že množina reálných čísel je větší (mluvíme o mohutnosti), než množina přirozených čísel, celých čísel a racionálních čísel. Tyto tři množiny jsou ale stejně velké, což se dokazuje pomocí bijektivních zobrazení.

Podmnožiny množiny reálných čísel mohou mít podobu tzv. **intervalů**, což jsou „souvislé výseky“ číselné osy. Tyto podmnožiny sdružují taková reálná čísla *x*, která jsou větší, resp. větší nebo rovna než počátek intervalu *a*, a současně menší, resp. menší nebo rovna než konec intervalu *b*. Pokud hranice *a*, *b* do intervalu patří, jedná se o interval uzavřený, pokud ne, mluvíme o intervalu otevřeném. Pokud je jedna z hranic uvnitř intervalu a druhá ne, je to interval zleva nebo zprava otevřený. Jestliže konec intervalu sahá až do nekonečna, resp. interval začíná v mínus nekonečnu, mluvíme o intervalu neohraničeném.

Píšeme otevřený interval $(a ; b) = \{x : a < x < b\}$

uzavřený interval $[a ; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

zprava otevřený interval $[a ; b) = \{x : a \leq x < b\}$

zleva otevřený interval $(a ; b] = \{x : a < x \leq b\}$

zleva neohraničený a zprava uzavřený interval $(-\infty ; a]$

zleva neohraničený a zprava otevřený interval $(-\infty ; a)$

zprava neohraničený a zleva uzavřený interval $[\mathrm{b} ; +\infty)$

zprava neohraničený a zleva otevřený interval $(\mathrm{b} ; +\infty)$

2.1. Uspořádání a operace na množině reálných čísel

Vraťme se nyní k relacím mezi množinami v kartézském součinu. Pokud studujeme relaci tzv. **na množině**, tj. jedná se o kartézský součin dvou stejných množin, např. $A \times A$, můžeme studovat jisté její vlastnosti. Jejich soupis a vysvětlení je umístěno v Příloze 2.

Pokud má relace na množině A vlastnosti reflexivity (každý prvek je v relaci se sebou samým), antisymetričnosti (pokud x je v relaci s y a současně y s x, pak musí být x a y stejné) a tranzitivity (pokud x je v relaci s y a současně y se z, musí být v relaci i x se z)[10], nazýváme ji **uspořádání** na množině A. Příkladem uspořádání je $\leq$. Pak dvojici $(A, \leq)$ říkáme **uspořádaná množina**.[11]

10 Viz. Příloha 2.

11 Pokud navíc pro každé dva prvky množiny A (jeden z nich označíme x, druhý y) platí, že x je v relaci s y, nebo y je v relaci s x (nebo obojí), tj. že $(x, y) \in \leq$ nebo $(y, x) \in \leq$, nazveme $\leq$ úplné uspořádání a $(A, \leq)$ úplně uspořádaná množina.

Na množinách dále můžeme definovat tzv. **operace**. Jedná se o zobrazení, které ovšem nevede z A do A, ale z $A \times A$ do A. Jediný význam této změny je v tom, že z dvojice prvků množiny dostaneme užitím operace jeden prvek množiny. Typickým příkladem jsou operace sčítání (+) a násobení (.). Pro motivaci vezmeme úplně jednoduchý příklad, na kterém princip operace velmi dobře pochopíme: 2 + 3 = 5. Na začátku máme dvě čísla (dva prvky množiny), 2 a 3. Užitím operace zobrazíme tuto dvojici na jedno číslo, jeden prvek, tj. 5.

Na množině reálných čísel pak máme definováno uspořádání $\leq$ a operace + (sčítání) a . (násobení), pro něž platí všechny klasické axiomy známé ze střední školy, jako komutativita $a + b = b + a$ a asociativita $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Mezi prvky množiny reálných čísel patří i tzv. **nulový** a **jednotkový prvek**. Pro nulový prvek (0) platí, že $x + 0 = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro jednotkový (1) pak to, že $1.x = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Navíc ke každému reálnému číslu $x \in \mathbb{R}$ existuje **opačný** a **inverzní prvek**. Opačný prvek k prvku x značíme $(-x)$ a platí, že $x + (-x) = 0$, tedy součet jakéhokoliv prvku množiny reálných čísel s prvkem k němu opačným dává nulový prvek. Inverzní prvek k prvku x značíme $\frac{1}{x}$ a platí $x.\frac{1}{x}=1$. Tedy vynásobení jakéhokoliv reálného čísla číslem k němu inverzním dává jednotkový prvek.

2.2. Odčítání a dělení na množině reálných čísel

Studenti se mohou dotázat, proč jsme nedefinovali také odčítání a dělení, které jsou také známé jako základní operace a jsou každodenně používány. Pravdou však je, že jsme tyto dvě operace již definovali. Možná ne přímo, ale pomocí operací sčítání a násobení ano. Odčítání je totiž ve skutečnosti sčítání. Stejně tak dělení je ve skutečnosti násobení. Již v minulé subkapitole jsme definovali pojmy nulového, jednotkového, opačného a inverzního prvku. Ty nám umožní pomocí operací sčítání, resp. násobení dosáhnout odčítání a dělení.

Pokud budeme, pro zjednodušení, uvažovat kladný prvek a zeptáme se „Co s ním udělá k němu opačný prvek, pokud je sečteme?“, odpověď je, že sníží hodnotu původního prvku na nulu (nulový prvek), neboli sníží hodnotu původního prvku přesně o jeho celou hodnotu až na nulu. Pokud vezmeme nějaké číslo *x*, tak přesně o tolik, o kolik by přičtení nějakého čísla k *x* zvýšilo jeho hodnotu (tj. o kolik by byl jejich součet vyšší, než původní *x*), přesně o tolik se hodnota *x* sníží, pokud k němu přičteme místo původně uvažovaného prvku prvek k němu opačný. Tedy pokud chceme od *x* odečíst *y*, stačí vzít opačný prvek k *y* (tj. (-*y*)) a přičíst ho k *x*.
Platí: $x-y=x+(-y)$

Odčítání je pouze zjednodušený zápis přičítání opačného prvku. Zatím jsme uvažovali odčítání kladného čísla. Pro odčítání záporného čísla to platí analogicky. Jeho odčítání je přičítání k němu opačného prvku, tedy kladného čísla. Jediný rozdíl je v tom, že odčítání záporného čísla, na rozdíl od čísla kladného, výsledek zmenšuje. Pro dělení vše platí analogicky, pouze místo opačného prvku používáme prvek inverzní. Dělení čísla *x* číslem *y* je násobení čísla *x* číslem $\left(\frac{1}{y}\right)$. Opět dělení je jen zjednodušený zápis pro popsanou operaci. Následující zápisy jsou ekvivalentní: $x:y=x/y=\frac{x}{y}=\frac{x.1}{y}=x.\frac{1}{y}$

2.3. Pravidla počítání v R

Třetí subkapitola má za úkol pouze shrnout a vysvětlit některá pravidla počítání na množině reálných čísel. Jedná se o opakování látky ze střední školy, která je nezbytná pro další pochopení textu. Věříme, že tato jednoduchá a krátká část poslouží především k upevnění a sjednocení dosavadních znalostí.

Pravidla pro počítání s operacemi násobení/ dělení a sčítání/odčítání jsme ukázali již v minulé subkapitole. Jen pro úplnost doplníme, že stejně, jako je možné dělení vyjádřit pomocí násobení, je možné i vyjádřit násobení jako dělení. Podobně je to se sčítáním. Stačí opět místo násobení prvkem dělit prvkem k němu inverzním:

$$x.y=\frac{x}{\left(\frac{1}{y}\right)}$$

Pro sčítání:

$$x+y=x-(-y)$$

Nyní se věnuje vztahu mezi sčítáním a násobením. Platí, že součet několika stejných prvků je roven součinu tohoto prvku s počtem sčítanců. Například:

$\underbrace{x+x+x+x+x+x}_{6\,krát}=6.x$, a obecně $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n\,krát}=n.x$. Naopak, pokud máme $x.y$, kde y je možné vyjádřit jako $y=r+s$, pak můžeme součin zapsat jako:

$$y.x=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{y}=\underbrace{(x+x+\ldots+x)}_{r}+\underbrace{(x+x+\ldots+x)}_{s}=r.x+s.x=(r+s).x$$

Obecně, pokud máme dva (nebo více) sčítance, z nichž je každý tvořen součinem dvou (nebo více) prvků a některé z těchto prvků se vyskytují v obou (všech) sčítancích, můžeme tyto prvky **vytknout**, tj. zapsat je dopředu, a zbytky členů, ze kterých jsme je vzali, dát za vytknutý prvek do závorky.

$$a.b.x + c.b.y = b.(a.x + c.y)$$

Opačné operaci se říká **roznásobení**.

Nyní se věnujme mocninám. Pokud mezi sebou násobíme *n* stejných čísel *x*, můžeme tuto operaci zapsat jako *n*-tou mocninu čísla *x*. Platí $\underbrace{x.x.x. \dots .x}_{n\ krát} = x^n$. V tomto zápisu číslu *n* říkáme **exponent**. Zatím budeme uvažovat pouze případ, kdy n je přirozené číslo.

Pro jakékoliv reálné číslo *a* platí:

$a^1 = a$ (z definice – *a* v násobení vystupuje pouze jednou)

$a^0 = 1$ (obecně mezi sebou násobíme n krát číslo a. Vynásobení jedničkou výsledek nezmění – je to jednotkový prvek. Takže máme $1.\underbrace{a.a. \dots .a}_{n\ krát}$. A pokud v součinu číslo a vystupuje nula-krát, zůstane v součinu pouze jednička. Odtud výsledek.

Pokud číslo umocňujeme zápornou *n*-tou mocninou, platí, že výsledek je roven kladné *n*-té mocnině inverzního čísla. Tedy

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n .$$

Dále popíšeme některé vztahy mezi mocninami, které budou užitečné pro řešení konkrétních příkladů. Všimněte si, že vždy při dokazování platnosti rovností využijeme definice mocniny, inverzních prvků a dalších již dokázaných a definovaných platných vztahů.

Jestliže mezi sebou násobíme dvě mocniny stejného čísla, pak platí, že jejich součin je roven tolikáté mocnině stejného čísla, jako je součet exponentů v původních mocninách. Tedy $a^c . a^d = a^{c+d}$. Proč tomu tak je vysvětlíme následujícím výpočtem:

$$a^c . a^d = \underbrace{(a.a.a. \dots .a)}_{c\ krát} . \underbrace{(a.a.a. \dots .a)}_{d\ krát} = \underbrace{a.a.a. \dots .a}_{c+d\ krát} = a^{c+d}$$

Odtud můžeme odvodit i řešení případu, kdy mezi sebou dělíme *c*-tou a *d*-tou mocninu stejného reálného čísla *a*. Dělení *d*-tou mocninou stejného čísla je totiž ekvivalentní násobení *d*-tou mocninou inverzního čísla. A již víme, že kladná *d*-tá mocnina inverzního čísla je rovna záporné d-té mocnině původního čísla (a naopak). Proto můžeme psát (pokud uvažujeme $c > d$):

$$\frac{a^c}{a^d}=a^c.\left(\frac{1}{a}\right)^d=a^c.a^{-d}=a^{c+(-d)}=a^{c-d}$$

Rovnost platí, protože:

$$\frac{a^c}{a^d}=\frac{\overbrace{a.a.\ \dots\ .a}^{c\ krát}}{\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{d\ krát}}=\overbrace{a.a.\ \dots\ .a}^{c\ krát}.\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right).\left(\frac{1}{a}\right).\left(\frac{1}{a}\right).\ \dots\ .\left(\frac{1}{a}\right)}_{d\ krát}=(\textit{přeskupíme pro zpřehlednění})=$$

$$=\underbrace{\left(a.\frac{1}{a}\right).\left(a.\frac{1}{a}\right).\ \dots\ .\left(a.\frac{1}{a}\right)}_{(d)\ krát}.\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{(c-d)\ krát}=\underbrace{1.1.\ \dots\ .1}_{d\ krát}.\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{(c-d)\ krát}=\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{(c-d)\ krát}=a^{c-d}$$

V případě, kdy by *c* bylo menší, než *d*, na konci místo *d* jedniček bude *c* jedniček a místo c -d krát *a* bude d -c krát $\frac{1}{a}$. Formálně budeme mít výsledek taky a^{c-d}, avšak exponent mocniny bude záporný, což lze také zapsat pomocí inverzního čísla a opačného znaménka exponentu jako $\left(\frac{1}{a}\right)^{-(c-d)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{d-c}$, což je výsledek, který jsme před chvílí naznačili.

Dále budeme studovat mocninu mocniny reálného čísla. Pokud budeme uvažovat *d*-tou mocninu *c*-té mocniny reálného čísla *a*, pak po výpočtu získáme výsledek, že tato „mocnina mocniny“ je rovna $(c\,.d)$-té mocnině čísla *a*. Je tomu tak proto, že platí:

$$\left(a^c\right)^d=\left(\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{c-krát}\right)^d=\underbrace{\left(\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{c-krát}\right).\left(\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{c-krát}\right).\ \dots\ .\left(\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{c-krát}\right)}_{d-krát}=\underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{c.d-krát}=a^{c.d}$$

Pro mocninu součinu dvou (nebo více) reálných čísel platí:

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b).\dots.(a.b)}_{n} = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n}.\underbrace{b.b.\dots.b}_{n} = a^n.b^n$$

Pro mocninu podílu platí obdobně:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right).\dots.\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ krát} = \underbrace{\left(a.\frac{1}{b}\right).\left(a.\frac{1}{b}\right).\dots.\left(a.\frac{1}{b}\right)}_{n\ krát} = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\ krát}.\underbrace{\left(\frac{1}{b}\right).\left(\frac{1}{b}\right).\dots.\left(\frac{1}{b}\right)}_{n\ krát} =$$

$$= a^n.\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Dalším pojmem, který se v souvislosti s mocninami definuje, je *n*-tá **odmocnina**. *n*-tá odmocnina reálného čísla *a* je takové číslo, že jeho *n*-tá mocnina je rovna původnímu číslu *a*. Neboli pokud *n*-tou odmocninu čísla *a* zpětně umocníme na *n*, dostaneme opět původní *a*. *n*-tou odmocninu z čísla *a* značíme $\sqrt[n]{a}$. A tedy platí: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Jestliže bychom chtěli odmocninu vyjádřit pomocí mocniny, dospějeme k závěru, že $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Tedy *n*-tá odmocnina je $\left(\frac{1}{n}\right)$-tá mocnina. Proč tomu tak je? Vyjdeme z definice odmocniny, kterou jsme před chvílí uvedli. Pokud předpokládáme, že je možné odmocninu zapsat jako nějakou mocninu, kterou označíme *x*, budeme počítat:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^x\right)^n = (\textit{dle předchozích výsledků}) = a^{x.n}(\textit{a přitom platí}) = a = a^1$$

Pokud se rovnají dvě mocniny stejného libovolného čísla, musí být exponenty stejné, tedy: $x.n = 1$

Ale dle definice násobení tohle platí pouze pokud *x* a *n* jsou navzájem inverzní prvky. Protože *n* známe a je libovolně zvolené, musí být $x = \frac{1}{n}$. Odtud platí uvedený vztah.

Posledním tvarem, který v rámci shrnutí počítání s mocninami uvedeme, je možnost, že exponent je zlomek. Pak platí:

$$a^{\frac{c}{d}} = a^{c.\frac{1}{d}} = (\text{dle vztahu pro mocninu mocniny}) = \left(a^{\frac{1}{d}}\right)^{c} =$$
$$= (\text{vztah pro vyjádření odmocniny jako mocniny}) = \left(\sqrt[d]{a}\right)^{c}$$

Současně platí $\left(\sqrt[d]{a}\right)^{c} = \sqrt[d]{a^{c}}$, čehož lez dosáhnout pouze výměnou pozic mezi exponenty mezi druhým a třetím krokem.

3. Reálná funkce

Po úvodních kapitolách zaměřených spíše na podpůrnou teorii, o níž se budeme opírat v celé učebnici, se nyní dostáváme k jednomu z nejvýznamnějších témat s velmi širokým praktickým využitím, k reálným funkcím. Již ze středoškolských kurzů matematiky víme, že funkce vyjadřuje určitý typ závislosti mezi dvěma proměnnými a máme jistou představu o základních typech funkcí. V této kapitole znalosti upřesníme a navážeme je na poznatky z minulých kapitol.

Nejprve se zaměříme na samotnou definici **reálné funkce**. Vyjdeme přitom právě ze středoškolských znalostí. Víme, že číslu x funkce přiřazuje podle určitého vztahu nějaké číslo y. Současně funkce nikdy nemůže jednomu číslu x přiřadit dvě, nebo více čísel y. Jestliže se vrátíme k definicím 1.8 a 1.9, dojdeme k závěru, že (reálná) funkce je zobrazením. Každé číslo x, které je zobrazováno funkcí do čísla y, je reálné číslo. Stejně tak každé číslo y, které je obrazem nějakého čísla x přes funkci, je reálné číslo. Samotná funkce je pak předpisem, podle něhož přiřazujeme každému číslu x nějaké číslo y (obraz čísla x). Celkově můžeme tyto poznatky shrnout v následující definici:

Def. 3.1: Zobrazení $f: A \to B$ nazveme **reálnou funkcí jedné reálné proměnné**, jestliže platí, že $A \subseteq \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$. Pro $y \in B$, které je obrazem konkrétního $x \in A$, píšeme $y = f(x)$.

Def. 3.2: **Graf funkce** f (značíme $G(f)$) je podmnožina kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, pro kterou platí $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} : x \in D(f)\}$. Tedy je to množina uspořádaných dvojic, kde první složkou jsou prvky definičního oboru funkce a druhou jsou jejich obrazy přes funkci f.

3.1. Vlastnosti reálných funkcí

Na tomto místě shrneme několik pravidel počítání s funkcemi, které jsou užitečné nejen v teorii, ale i při konkrétních výpočtech. Zaměříme se na absolutní hodnotu funkce, na sčítání, násobení funkcí a na mocninné funkce.

Absolutní hodnotu funkce f značíme $|f|$ a platí, že tato funkce zobrazí každý prvek svého definičního oboru (ten je stejný, jako definiční obor původní funkce f) do absolutní hodnoty obrazu tohoto prvku ve funkci f. Neboli $|f|(x)=|f(x)|$. Při výpočtu tedy můžeme nejprve spočítat funkční hodnotu funkce bez absolutní hodnoty, a poté na ni aplikovat absolutní hodnotu.

Zápisem $f+g$ značíme **součet funkcí** f a g. Platí, že obraz prvku x, který patří do průniku jejich definičních oborů, přes tento součet funkcí, tedy $(f+g)(x)$, je roven součtu obrazů tohoto prvku ve funkcích f a g . Neboli $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Při výpočtu tedy spočítáme hodnotu $f(x)$ a $g(x)$ a ty poté sečteme. Pro rozdíl platí analogický vztah.

Pro **součin funkcí** $f.g$ platí podobný vztah. Obraz prvku x přes tento součin funkcí (tj. funkční fodnota $(f.g)(x)$) je roven součinu obrazů prvku x ve funkcích f a g. Neboli $(f.g)(x)=f(x).g(x)$. Opět tedy můžeme nejprve spočítat funkční hodnoty zvlášť a poté je mezi sebou vynásobit.

Funkce mohou také vystupovat jako exponenty v mocninách jiných funkcí. Pro dvě funkce f a g pak máme f^g . Takové funkce nazýváme **mocninné funkce**. Platí pro ně analogické pravidlo, jako v předchozích případech, tedy $\left(f^g\right)(x)=f(x)^{g(x)}$, a opět můžeme funkční hodnotu takové fukce spočítat ve dvou krocích, nejprve spočítáme hodnoty dílčích funkcí a poté hodnotu první funkce umocníme s exponentem rovným hodnotě druhé funkce.

Obraťme se nyní k vlastnostem funkcí. Nejprve se budeme zabývat tzv. **monotonií**. Funkci nazýváme rostoucí, jestliže funkční hodnoty s rostoucími hodnotami x rostou. Klesající funkce je taková, jejíž funkční hodnoty s rostoucími hodnotami x klesají. Podobně definujeme také neklesající funkce jako funkce, jejichž funkční hodnoty s rostoucími hodnotami x rostou, nebo jsou konstantní (tedy neklesají), a nerostoucí funkce jako takové funkce, jejichž funkční hodnoty s rostoucím x klesají, nebo jsou konstantní (tzn. nerostou). Přesná znění definic uvedeme v následující pasáži textu. Ta jsou přitom důležitá, pokud chceme ověřit, jestli některá z vlastností funkce platí.

Def.3.3: **Rostoucí funkcí** nazýváme takovou funkci f, pro niž platí, že pro libovolná x_1 a x_2 z definičního oboru funkce taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

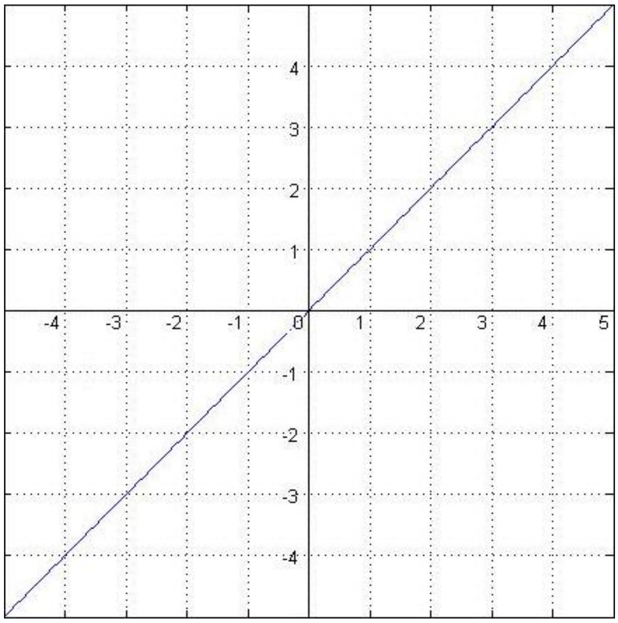
Def.3.4: **Klesající funkcí** nazýváme takovou funkci f, pro niž platí, že pro libovolná x_1 a x_2 z definičního oboru funkce taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Def.3.5: **Neklesající funkcí** nazýváme takovou funkci f, pro niž platí, že pro libovolná x_1 a x_2 z definičního oboru funkce taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Def.3.6: **Nerostoucí funkcí** nazýváme takovou funkci f, pro niž platí, že pro libovolná x_1 a x_2 z definičního oboru funkce taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \geq f(x_2)$.

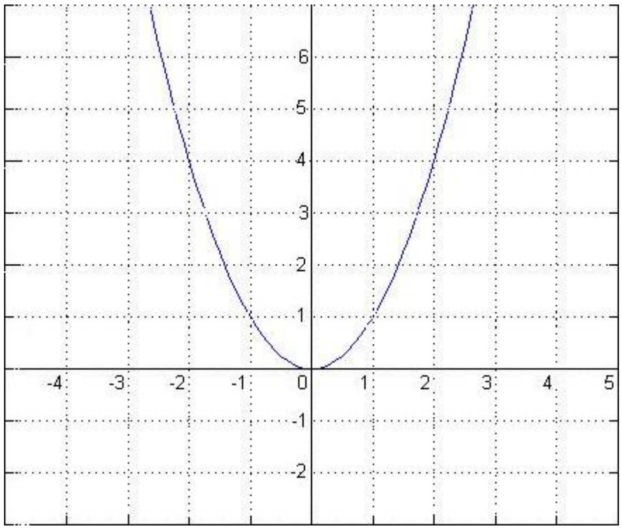
Uvedené vlastnosti mohou pro některé funkce platit pouze na nějaké podmnožině definičního oboru, resp. na nějakém intervalu. Potom říkáme, že funkce je rostoucí, klesající, neklesající, nebo nerostoucí **na** tomto **intervalu**.

Př.3.1: Uvádíme příklady jednoduchých funkcí, u nichž budeme studovat monotonii. Funkce $f(x) = x$ je rostoucí, protože pokud vezmeme dvě různá x_1, x_2, $x_1 < x_2$ z definičního oboru, pro příslušné funkční hodnoty platí $f(x_1) < f(x_2)$. Např. pro $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$ je $f(x_1) = 1 < 4 = f(x_2)$.



Obr.1: funkce $f(x) = x$ je rostoucí na celém definičním oboru.(autor)

Naproti tomu pokud budeme studovat funkci $f(x) = x^2$, zjistíme, že pro $x_1, x_2 > 0$ je $f(x_1) < f(x_2)$, zatímco pro $x_1, x_2 < 0$ dostaneme $f(x_1) > f(x_2)$. Například pro $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$ je $f(x_1) = 1 < 4 = f(x_2)$, ale pro $x_1 = -1$ a $x_2 = -2$ je $f(x_1) = 4 > 1 = f(x_2)$. Funkce $f(x) = x^2$ je tedy klesající na intervalu (-∞ ; 0) a rostoucí na intervalu (0 ; +∞).



Obr.2: funkce $f(x)=x^2$ je klesající na intervalu (-∞ ; 0) a rostoucí na intervalu (0 ; +∞).(autor)

V první kapitole jsme definovali vlastnosti, které musí mít zobrazení, aby bylo tzv. bijektivní. Současně s tím jsme řekli, že k takovému zobrazení existuje inverzní zobrazení a popsali jsme jeho vlastnosti. Protože reálné funkce jsou zobrazeními, můžeme i u nich definovat bijektivnost a k funkcím s touto vlastností existují i inverzní funkce.

Bijektivní funkce je taková, že každý prvek jejího oboru hodnot je obrazem nějakého prvku z jejího definičního oboru a současně je funkce tzv. prostá (injektivní), což znamená, že žádné dva různé prvky definičního oboru nejsou zobrazeny do stejného prvku oboru hodnot. Jednoduše řečeno, funkční hodnoty žádných dvou různých *x*, prvků definičního oboru, nejsou stejné.

Ke každé bijektivní funkci f existuje **inverzní funkce** f^{-1}, pro kterou platí následující: jestliže obraz čísla *x* přes funkci f je *y*, tj. $f(x)=y$, pak obraz čísla y přes funkci f^{-1} je roven *x*, tj. $f^{-1}(y)=x$, pro jakékoli x z definičního oboru funkce *f*.

Vzhledem k tomu, že funkce jsou zobrazeními, jsou i relacemi, a lze je tedy skládat stejně, jako relace. Funkce $f \circ g$ je **složenou funkcí**, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Hodnoty funkce f nejsou na proměnné x závislé přímo, ale nepřímo přes hodnoty funkce *g*. Pro konkrétní číslo x z definičního oboru složené funkce se tedy nejprve vytvoří obraz čísla x ve funkci g a tato funkční hodnota $g(x)$ vstupuje do funkce f namísto proměnné a z ní se ve funkci f vytvoří obraz. Celkově se tento postup dá zapsat takto:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Pokud bychom funkční hodnotu funkce g v bodě x označili jako *y*, tedy $g(x) = y$, pak můžeme psát:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(y)$$

Vraťme se nyní k inverzní funkci. Stejně jako u relací, i zde platí, že složená funkce, jejímiž složkami jsou určitá bijektivní funkce a funkce k ní inverzní, pak složená funkce je tzv. **identita**. Tu obvykle značíme $Id(x)$. Je tomu tak proto, že platí:

$$f(x) = y \quad \textit{a současně} \quad f^{-1}(y) = x$$

Pro složenou funkci tak dostaneme pro každé x z definičního oboru $D(f)$, resp. pro každé y z definičního oboru $D(f^{-1})$:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$$

Dalšími pojmy, které je potřeba v souvislosti s vlastnostmi funkcí zmínit, je ohraničenost zdola a shora. Pokud existuje nějaké reálné číslo takové, že hodnota funkce pod něj nikdy neklesne, resp. jej nikdy nepřekročí, mluvíme o ohraničenosti zdola, resp. shora. Jestliže je funkce ohraničená současně zdola i shora, říkáme, že je ohraničená. Přesněji vše popíšeme v následujících definicích.

Def.3.7: Funkce f je **zdola ohraničená**, jestliže existuje takové takové reálné číslo $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna x z definičního oboru funkce f platí $f(x) \geq K$.

Příkladem zdola ohraničené funkce je již zmíněná funkce $f(x) = x^2$, která je zdola ohraničená hodnotou 0 (viz. Obr.2).

Def.3.8: Funkce f je **shora ohraničená**, jestliže existuje takové takové reálné číslo $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna x z definičního oboru funkce f platí $f(x) \leq K$.

Def.3.9: Funkce f je **ohraničená**, jestliže existuje takové takové reálné číslo $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna x z definičního oboru funkce f platí $|f(x)| \geq K$.

Mezi reálnými funkcemi můžeme najít i třídy funkcí s různými jinými vlastnostmi. Jedná se například o funkce **sudé** a **liché**, nebo o funkce **periodické**. Ve všech třech případech se jedná o významné třídy funkcí. Mezi liché funkce patří sinus, mezi sudé kosinus. A oba dva příklady jsou součsně funkcemi periodickými, jak uvidíme dále.

Def.3.10: Funkci nazýváme **sudou**, jestliže má symetrický definiční obor (tj. pro každé $x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$) a jestliže pro každé x z jejího definičního oboru platí, že hodnota funkce v bodě x je rovna hodnotě funkce v bodě -*x*. Neboli $\forall x \in D(f): f(x) = f(-x)$.

Z definice vyplývá, že v každých dvou bodech definičního oboru, které jsou umístěny ve stejné vzdálenosti od nuly je hodnota funkce stejná. Graf funkce tedy bude symetrický přes osu y. Příkladem sudé funkce je $f(x) = x^2$, jejíž graf je uveden v obr. 2.

Def.3.11: Funkci nazveme **lichou**, jestliže má symetrický definiční obor (tj. pro každé $x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$) a jestliže pro každé x z definičního oboru je funkční hodnota v tomto bodě opačným číslem k funkční hodnotě v bodě -*x*. Neboli $\forall x \in D(f): f(x) = -f(-x)$

Z definice vyplývá, že v každém bodě x definičního oboru bude mít funkce hodnotu rovnou záporně vzaté funkční hodnotě v bodě -*x*. Například, pokud v bodě $x = 5$ bude $f(x) = 3$, pak v bodě $-x = -5$ bude $f(-x) = -3$. Příkladem liché funkce je $f(x) = x$, jejíž graf je v obr. 1.

Podmínka symetričnosti definičního oboru je velmi důležitá, protože pokud by existoval prvek x definičního oboru, k němuž opačný prvek $-x$ by v definičním oboru nebyl, pak by pro tento bod x nemohlo platit, že $f(-x)$ je roven $f(x)$ pro sudou a $-f(x)$ pro lichou funkci, neboť by hodnota $f(-x)$ vůbec nebyla definována. Tedy i kdyby pro všechny ostatní body vztah mezi nimi a k nim opačnými body platil, funkce by se nedala považovat za sudou, resp. lichou.

Posledním typem funkcí, který na tomto místě v souvislosti s vlastnostmi, které můžeme u funkcí sledovat, jsou **funkce periodické**. Vyznačují se tím, že průběh funkce na intervalu určité délky se opakuje. Délku tohoto intervalu nazýváme **periodou**. Přesná definice pracuje s reálným číslem p značícím délku periody tak, že říká, že pro každé x z definičního oboru je i $x + p$ v definičním oboru a hodnota funkce je v těchto dvou bodech stejná. To znamená, že nestačí najít nějaké jedno číslo, v němž podmínka platí. Uvedené musí platit pro všechna *x*, proto se průběh funkce musí přesně opakovat.

Def.3.12: Nechť p je reálné číslo. Funkci f nazveme **periodická s periodou *p***, jestliže platí:

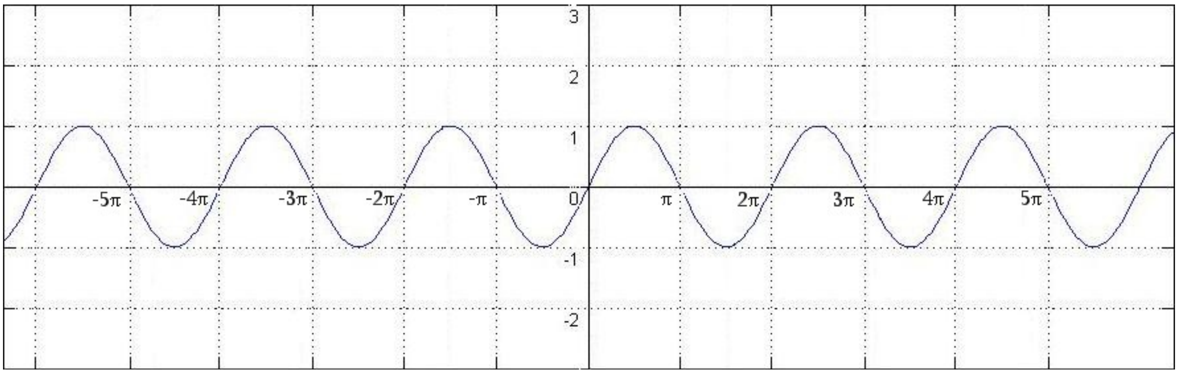
1) Pro každé x z definičního oboru funkce f je i číslo $(x + p)$ prvkem definičního oboru funkce *f*. Neboli $\forall x \in D(f): (x+p) \in D(f)$.
2) pro každé x z definičního oboru funkce f je funkční hodnota v bodě $(x + p)$ rovna funkční hodnotě v bodě *x*. Zapsáno $\forall x \in D(f): f(x+p)=f(x)$.

Pro každou periodickou funkci však neexistuje pouze jedno p značící délku periody. Ve skutečnosti takových čísel existuje celá množina. Je to logické. Pokud se průběh funkce opakuje po periodě *p*, pak další následující perioda začíná za $2p$, to znamená, že za $2p$ se znova opakuje průběh funkce a hodnota funkce v bodě $(x + 2p)$ je stejná jako její hodnota v bodě $(x + p)$. Ta je ale stejná, jako hodnota v *x*, tzn. že hodnota v $x + 2p$ je stejná jako hodnota v x a tedy $2p$ je také perioda funkce *f*. Celou úvahu ukážeme ještě na výpočtu:

$$f(x+2\mathrm{p})=f(x+p+p)=f((x+p)+p)$$
$$\textit{funkce } f \textit{ je periodická s periodou } p\textit{, takže funkční hodnota ve dvou bodech}$$
$$\textit{vzdálených od sebe o } p \textit{ je stejná a platí}$$
$$f((x+p)+p)=f(x+p)$$
$$\textit{Stejné pravidlo ale platí pro body } (x+p) \textit{ a x. Takže}$$
$$f(x+p)=f(x)$$
$$\textit{A celkově tak máme}$$
$$f(x+2\mathrm{p})=f(x+p)=f(x)$$

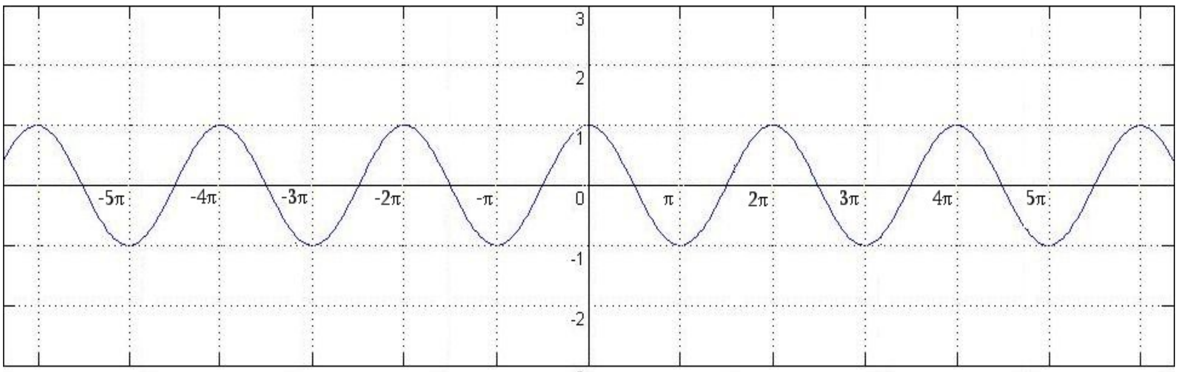
Podle definice je tedy $2p$ také periodou funkce *f*. Celočíslené násobky periody jsou tedy také periodami funkce *f*. Nejmenší perioda se nazývá **elementární perioda**.

Př.3.2: Na příkladu funkcí sinus a kosinus ukážeme výše zmíněné vlastnosti sudosti, lichosti a periodicity.



Obr.3: Funkce $f(x) = \sin x$ je lichá a periodická s elementární periodou 2π.(autor)

Z grafu funkce sinus (obr.3) je patrné, že graf je symetrický přes počátek. Pro každé x z definičního oboru je $f(-x) = -f(x)$. Podívejte se např. na hodnotu funkce v π/2 a v -π/2. Zatímco v prvním případě je hodnota funkce 1, ve druhém je to -1. Současně vidíme, že se průběh funkce opakuje s periodou 2π. Jedná se o elementární periodu, protože žádná kratší perioda, po níž by se průběh funkce začal opakovat, neexistuje. Ovšem existují periody delší, které jsou celočíselnými násobky elementární periody, např. 4π.



Obr.4: Funkce $f(x) = \cos x$ je sudá a periodická s elementární periodou 2π.(autor)

Z grafu funkce kosinus je patrné, že se jedná o sudou funkci, neboť je symetrická přes osu y. To, že platí podmínka z definice 3.10, můžeme ilustrovat například na bodech $x = \pi$ a $-x = -\pi$, pro něž platí, že $f(\pi) = f(-\pi) = -1$. Současně se jedná, stejně jako v případě funkce sinus, o periodickou funkci s elementární periodou 2π.

3.2. Některé typy funkcí

Nyní se zaměříme na několik významných typů funkcí, které se v praxi velmi často vyskytují a jsou hojně využívány za různými účely. Nejprve se zaměříme na polynomy, poté naše úvahy rozšíříme na lomené racionální funkce. Dále vysvětlíme základní vlastnosti logaritmických a exponenciálních funkcí

3.2.1. Polynomy

Funkce nazývané „polynomy (obecně) řádu n“ jsou typické tím, že mají tvar lineární kombinace různých mocnin proměnné x až do n-tého řádu:

$$f(x)=a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_0$$

Jedná se tedy o tvar součtu různých násobků mocnin proměnné x. Mocnina nejvyššího řádu (tj. řádu n) se v polynomu musí vyskytovat, žádné nižší mocniny už nemusí. Z povahy polynomů vyplývá, že definiční obor tohoto typu funkcí je celá množina reálných čísel.

Taková čísla x_0 z definičního oboru, pro která je hodnota polynomu rovna nule, se nazývají kořeny polynomu. Jestliže x_0 je kořen polynomu $P(x)$, pak platí, že $P(x)$ je možno vyjádřit jako součin $(x - x_0)$ a nějakého jiného polynomu $Q(x)$:

$$P(x)=(x-x_0).Q(x) \quad .$$

Postup lze opakovat s tím, že kořeny polynomu $Q(x)$ jsou současně i kořeny polynomu $P(x)$. Jestliže se některý kořen v rozkladu objeví vícekrát, jedná se o tzv. vícenásobný kořen (dvojnásobný, trojnásobný atd.). Celkový počet kořenů včetně jejich násobností je roven stupni daného polynomu (tzv. Základní věta algebry [2]).

Př.3.3 Mějme polynom $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$. Jeho rozklad bude následující:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-2)(x^3 + x^2 - 5x + 3) =$$
$$= (x-2)(x+3)(x^2 - 2x + 1) = (x-2)(x+3)(x-1)^2$$

Polynom má tedy kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ a $x_3 = 1$, přičemž tento kořen je dvojitý. Jestliže sečteme počet kořenů včetně jejich násobností, dostaneme číslo 4, což skutečně odpovídá řádu studovaného polynomu.

3.2.2. Lomené racionální funkce

Jedná se o funkce, které jsou dány jako podíl polynomů n-tého a m-tého stupně. Tedy $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy stupňů n a m.

Jestliže stupeň polynomu v čitateli (tj. n) je větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli (m), jedná se o **neryze lomenou racionální funkci**. Pokud je naopak, tj. $n < m$, pak mluvíme o **ryze lomené racionální funkci**.

Př.3.4: Máme polynomy $P(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 3$, $Q(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5$. Pak funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 3}{3x^3 - 4x^2 + x - 5}$ je neryze lomená racionální funkce, zatímco funkce $g(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3x^3 - 4x^2 + x - 5}{5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 3}$ je ryze lomená racionální funkce.

Platí, že každou neryze lomenou racionální funkci tvořenou polynomy stupňů n a m lze převést na součet polynomu stupně $n - m$ a ryze lomené racionální funkce.

Současně lze každou ryze lomenou racionální funkci vyjádřit ve tvaru součtu tzv. parciálních zlomků. To jsou výrazy ve tvaru $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{(x-\alpha)^j}$, kde α je k-násobný kořen polynomu ve jmenovateli racionální lomené funkce, nebo výrazy ve tvaru $\sum_{j=1}^{r} \frac{b_j x + c_j}{[(x-n)^2+v^2]^j}$ pro r-násobnou dvojici komplexních kořenů $n \pm i.v$.

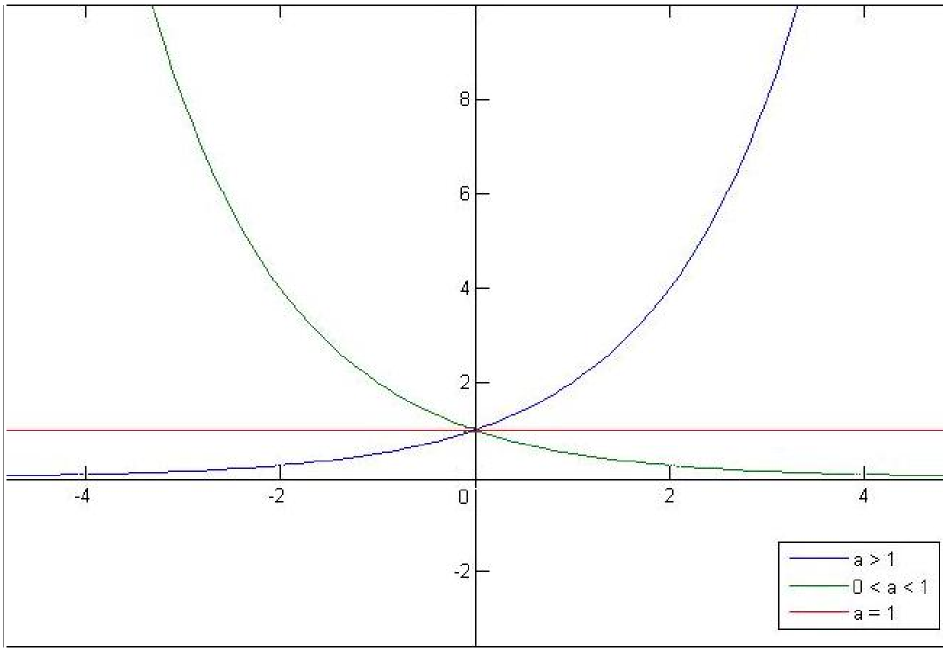
Postup převodu spočívá na následujícím principu: Vyjádříme polynom ve jmenovateli ryze lomené funkce ve tvaru součinu. Pak od sebe oddělíme jednotlivé členy součinu a zapíšeme je jako jmenovatele samostatných zlomků podle návodu daného výše. Do čitatelů zlomků zapíšeme obecně neznámé hodnoty parametrů (tj. použijeme nějakého označení parametrů). Pak provedeme součet těchto parciálních zlomků, to znamená všechny zlomky převedeme na společného jmenovatele, sečteme čitatele a vše zapíšeme jako jediný zlomek. Dostaneme zlomek, jehož jmenovatel je shodný se jmenovatelem ve studované ryze lomené funkci a v jehož čitateli vystupují zatím neznámé parametry. Ze všech sčítanců v čitateli, jejichž součástí je konkrétní mocnina proměnné x, vytkneme tuto mocninu a pak porovnáme obsah závorky za vytknutým prvkem s parametrem u stejné mocniny proměnné v původní funkci. Tak získáme pro neznámé parametry soustavu rovnic, kterou vyřešíme. Výsledky zapíšeme na místo původně neznámých parametrů do parciálních zlomků.

Vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku nesmí být nulový, definiční obor neobsahuje kořeny polynomu ve jmenovateli (protože by v nich hodnota polynomu byla nulová).

3.2.3. Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální funkce jsou typem funkcí, který je dán ve tvaru $f(x)=a^x$, kde a je kladné reálné číslo, které nazýváme základem funkce. Definičním oborem exponenciálních funkcí je celá množina reálných čísel a platí pro ně některá následující zásady: V nule (tj. pro $x = 0$) je funkční hodnota rovna nule. Je tomu tak proto, že $f(0)=a^0=1$. V jedničce je funkční hodnota rovna základu a, $f(1)=a^1=a$.

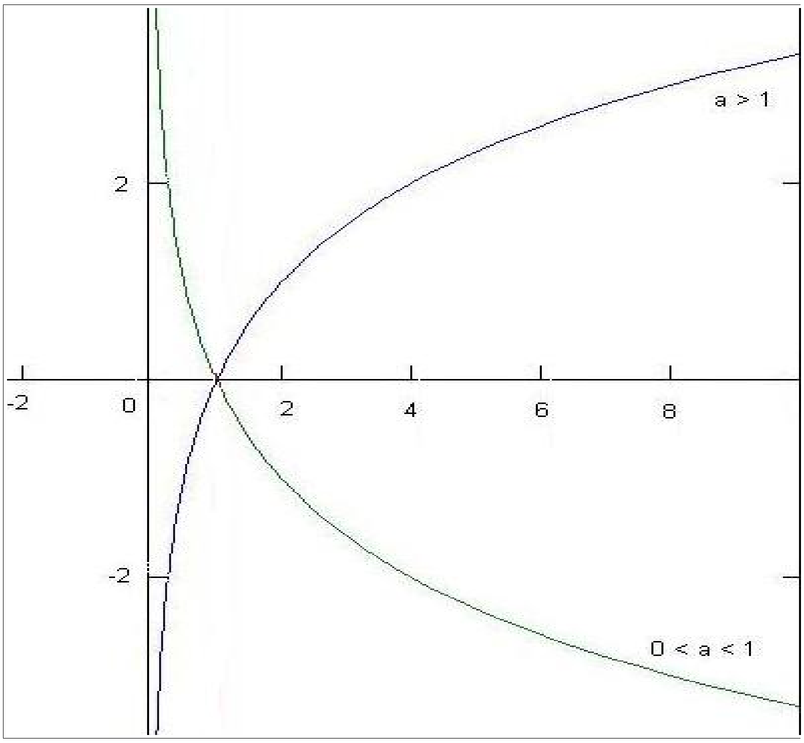
Funkce je rostoucí nebo klesající podle velikosti základu *a*. Pro *a* > 1 je funkce rostoucí, pro $0<a<1$ je klesající. Pokud je *a* rovno jedné, je funkce konstantní (tj. ani neroste, ani neklesá, setrvává stále na hodnotě 1). Toto tvrzení můžeme snadno odvodit dosazením dvou různých čísel za x pro konkrétní zvolenou hodnotu základu funkce. Vzhledem k tomu, že žádná mocnina žádného kladného čísla není záporná ani nulová, jsou všechny exponenciální funkce zdola ohraničené nulou.



Obr.5: Exponenciální funkce.(autor)

Ať už je a > 1 a funkce je tedy rostoucí, nebo je 0 < a <1 a funkce je klesající, pokaždé je ryze monotónní a je bijektivní. Existuje k ní tedy inverzní funkce taková, že složením těchto dvou funkcí do složené funkce dostaneme identitu. Onou inverzní funkcí je **logaritmus** o stejném základu *a*, který má i původní exponenciální funkce.

Logaritmus o základu *a* je specifickým druhem funkce, který značíme $f(x)=\log_a x$. Jeho definiční obor zahrnuje pouze kladná reálná čísla, $D(f)$ =] $0;\infty$ [, což vyplývá z toho, že je inverzní funkcí k exponenciální funkci, jejíž obor hodnot zahrnuje pouze kladná reálná čísla.



Obr.6: Logaritmická funkce.(autor)

Pro dvě čísla z definičního oboru (označíme je třeba x, y) a logaritmus o základu a platí $\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$. Tento vztah vyplývá opět z vlastností exponenciální funkce a lze jej jednoduše dokázat:

Stačí vybrat libovolné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \; f(x_1)=a^{x_1}=y_1, \; f(x_2)=a^{x_2}=y_2$. Odtud je patrné, že platí $f^{-1}(y_1)=\log_a(y_1)=x_1, \; f^{-1}(y_2)=\log_a(y_2)=x_2$. Vyjádříme hodnotu funkce f v bodě $x_1 + x_2$: $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}.a^{x_2}=y_1.y_2$. Je zřejmé, že hodnota inverzní funkce f^{-1} v bodě $(y_1.y_2)$ je rovna $(x_1 + x_2)$. Tedy $\log_a(y_1.y_2)=(x_1+x_2)=\log_a(y_1)+\log_a(y_2)$.

Odtud můžeme odvodit i následující vlastnosti:

$$\log_a(x^n)=\log_a(\underbrace{x.x.x.\ldots.x}_{n\ krát})=\underbrace{\log_a x+\log_a x+\ldots+\log_a x}_{n\ krát}=n.\log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a\left(x.\frac{1}{y}\right)=\log_a\left(x.y^{-1}\right)=\log_a x+\log_a\left(y^{-1}\right)=$$
$$=\log_a x+(-1).\log_a y=\log_a x-\log_a y$$

Dále platí, že $\log_a(1)=0$ a $\log_a(a)=1$ pro všechna a. Tzn. logaritmus o jakémkoli základu z čísla jedna je roven nule a logaritmus čísla, které je stejné, jako jeho základ, je roven jedné.

Pro dva různé základy logaritmu (označíme je a, b) platí následující převod:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Logaritmus o základu 10 označujeme pouze log x (tj. v zápise neudáváme základ logaritmu), logaritmus o základu e (Eulerovo číslo, e ≈ 2,718[12]) nazýváme **přirozený logaritmus** a značíme jej ln x.

3.3. Ekonomické aplikace

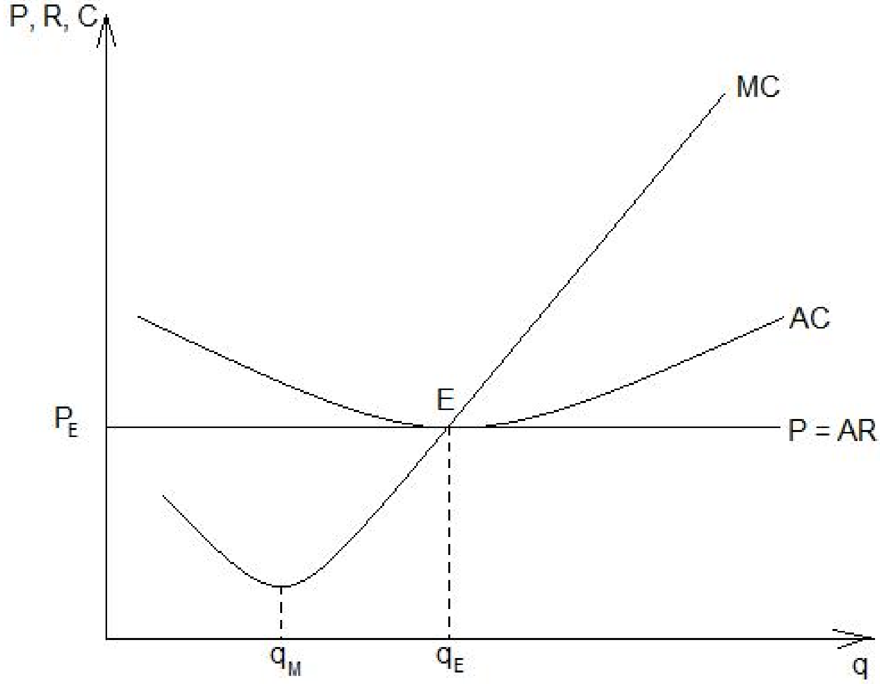
I když nejsou výrobní faktory vstupující do produkční funkce dokonale dělitelné, pro zjednodušení ekonomických konstruktů a modelů se s nimi jako s dokonale dělitelnými pracuje. Proto jsou množství vyrobených statků a zapojených výrobních faktorů práce a kapitál reprezentována reálnými čísly, stejně jako tržní ceny, úrokové míry a další ekonomické veličiny. Produkční funkce, mezní produkt práce, kapitálu, mezní náklady, průměrné náklady, celkové náklady a všechny podobné funkce vystupující v ekonomické teorii jsou pak funkcemi na množině reálných čísel a jejich hodnoty jsou rovněž reálná čísla, jedná se tedy o reálné funkce.

U nich můžeme samozřejmě sledovat vlastnosti, které jsme citovali v této kapitole. Například celkový užitek je, pokud budeme brát v potaz axiom nenasycenosti

12 Přesná definice eulerova čísla bude dána v kapitole o posloupnostech a nekonečných řadách.

spotřebitele, rostoucí funkce. Oproti tomu mezní užitek je funkce klesající. Mezní užitek je přitom vždycky kladný, i když se zmenšuje. Tato funkce je tedy zdola ohraničená hodnotou nula.

Jestliže vezmeme v úvahu například situaci dokonalé konkurence z mikroekonomie, pak funkce průměrných a mezních nákladů jsou nejprve klesající a od určitého množství produkce rostoucí. Funkce průměrných příjmů, která je totožná s tržní cenou, je konstantní, tedy neroste, ani neklesá.



Obr.7: Dokonalá konkurence: Funkce mezních nákladů MC je klesající do bodu q_M, od tohoto bodu dál je rostoucí. Průměrné náklady AC jsou klesající do bodu, než se jejich funkční hodnota vyrovná funkční hodnotě mezních nákladů v bodě q_E, od tohoto bodu dál je již rostoucí. Funkce průměrného příjmu AR je konstantní.(autor)

V podmínkách nedokonalé konkurence, kdy firmy mohou dlouhodobě vytvářet zisk, se ukazuje, že funkce zisku dosahuje maximální hodnoty v bodě, kdy se mezní příjem MR je roven mezním nákladům MC. Tato maximální hodnota je konečná, a tedy funkce zisku je shora ohraničená.

Jestliže bychom se zaměřili na makroekonomii, tak můžeme najít příklady periodických funkcí. Ekonomický cyklus je typický periodickými výkyvy okolo trendové hodnoty HDP. Pokud bychom vzali v úvahu odchylky výkonu ekonomiky od trendu, jedná se o periodickou funkci oscilující kolem nuly (samozřejmě s notným zjednodušením, do skutečného vývoje tohoto tzv. Gapu HDP se promítají náhodné vlivy). Délka periody by se lišila podle toho, jaký typ oscilací bychom sledovali (Juglarovy cykly cca 8 – 10 let, Kitchinovy cykly cca 3 roky, Kondratěvovy vlny cca 50 let).[3]

Exponenciální funkce mohou modelovat některé makroekonomické situace. Přístup ukáže na následujícím ilustrativním příkladu:

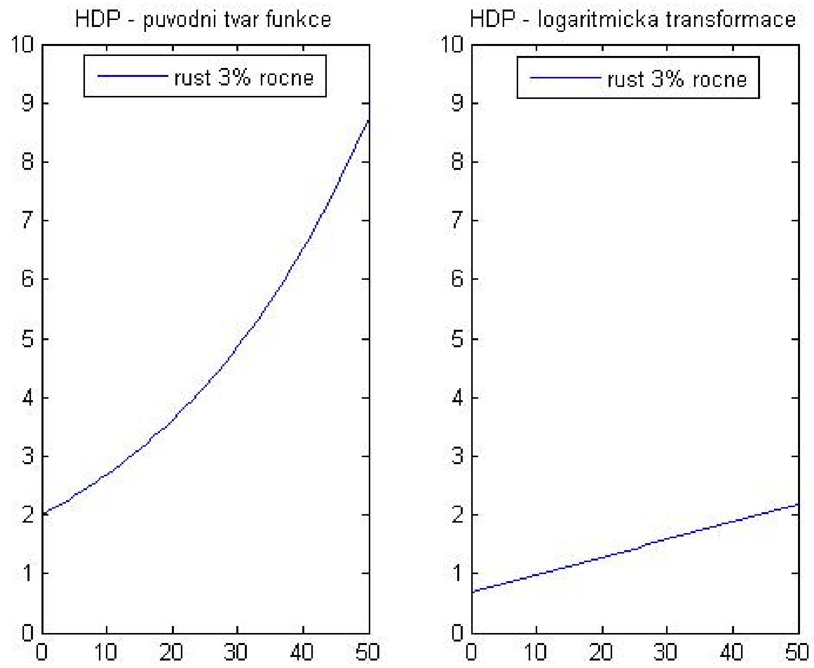
Př.3.5: Pokud máme ekonomiku, jejíž HDP roste stabilním tempem růstu (např. 3% ročně), HDP je exponenciální funkcí. Je tomu tak proto, že každý další rok je HDP rovno HDP předchozího roku zvětšenému o určitý počet procent z tohoto HDP. Tedy

$$HDP_1 = HDP_0 + 0{,}03 . HDP_0 = 1{,}03 . HDP_0$$
$$HDP_2 = HDP_1 + 0{,}03 . HDP_1 = 1{,}03 . HDP_1 = 1{,}03^2 . HDP_0$$
$$HDP_3 = HDP_1 + 0{,}03 . HDP_2 = 1{,}03 . HDP_2 = 1{,}03^3 . HDP_0$$
$$\vdots$$
$$HDP_n = 1{,}03^n . HDP_0$$

tento tvar přepsat do podoby spojité funkce jako

$$HDP(x) = f(x) = HDP_0 . 1{,}03^x$$

Pro lepší přehlednost grafů se pak na tento typ makroekonomických funkcí používá tzv. logaritmická transformace. To znamená, že místo původní funkce vykreslujeme složenou funkci, kde vnitřní funkcí je původní funkce a vnější funkcí je log *y*. Vzhledem k vlastnostem logaritmu tak dostaneme tvar grafu, kde je konstantní růst veličiny znázorněn lineárním průběhem funkce (lineárním růstem).



Obr.8: Logaritmická transformace na příkladu 3% růstu HDP.(autor)

Na závěr zmiňme ještě využití funkcí ve tvaru polynomů. Ty můžeme najít v některých statistických (regresních) modelech, nebo například v oblasti firemních financí, kde se provádí tzv. diskontování při výpočtu výnosnosti investic pomocí metody tzv. vnitřního výnosového procenta. Při diskontování je klíčový tzv. diskontní faktor, jehož mocniny (různého stupně) vstupují do výpočtu a který hraje současně roli proměnné. Pak má tedy funkce, která se k výpočtům používá, tvar polynomu.

4. Limita funkce, spojitost

Než se zaměříme na samotné limity a na pojem spojitosti, je potřeba zavést pojem δ-okolí, který je nezbytný pro jejich definici. δ-okolí bodu x_0 (který je prvkem definičního oboru funkce) je podmnožina definičního oboru, jejíž prvky jsou nejvýše ve vzdálenosti δ od bodu x_0. Delta okolí, které značíme o_δ , můžeme tedy množinově vyjádřit takto:

$$o_\delta=\{x:(x\in D(f))\wedge(|x-x_0|<\delta)\}=\{x:(x\in D(f))\wedge(x_0-\delta<x<x_0+\delta)\} \quad .$$

Pokud je bodem x_0 plus, nebo mínus nekonečno, pak je δ-okolím interval $\left(\frac{1}{\delta};+\infty\right)$, resp. $\left(-\infty;\frac{1}{\delta}\right)$.

4.1. Limita funkce

Nyní již přejdeme k definici limity. Limitu funkce v bodě x_0 si můžeme představit jako číslo, ke kterému směřuje hodnota dané funkce $f(x)$, jestliže se x přibližuje ke známému x_0.

K přesné definici limity se využívá například tzv. „epsilon-delta definice“. Jestliže limita funkce f v bodě x_0 je rovna L, tedy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad ,$$

pak platí, že pro jakékoliv ε-okolí čísla L existuje δ-okolí bodu x_0, v němž má funkce f takové hodnoty, které jsou v daném ε-okolí čísla L. To můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\ \mathit{tak, že}\ \forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon$$.[2]

Jiná možná definice:

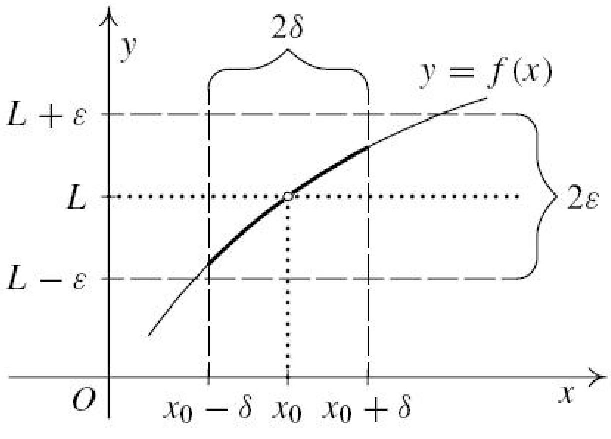
Def.4.1: Nechť $x_0, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu L a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad ,$$

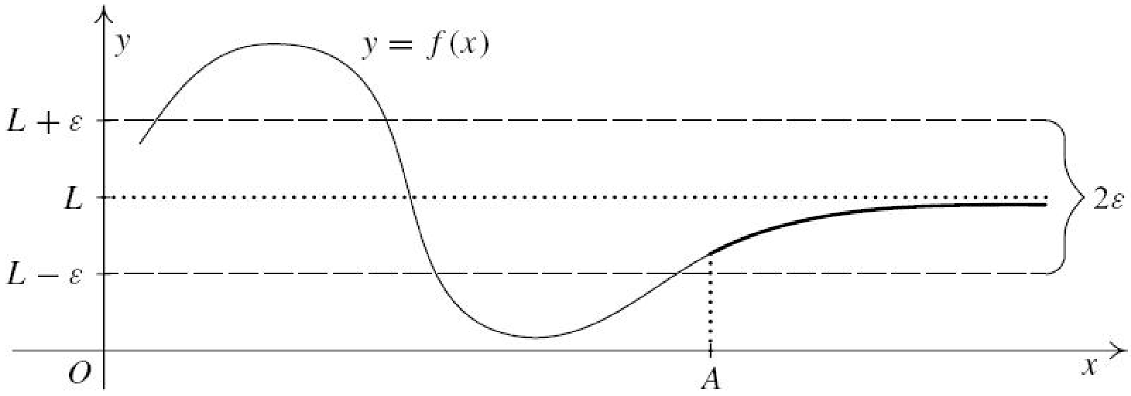
jestliže ke každému okolí $o(L)$ bodu L existuje okolí $o(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in o(x_0) \setminus x_0$ platí $f(x) \in o(L)$.[2]

Neboli když si zvolím jakékoliv okolí čísla L (v grafickém znázornění bychom je našli na ose y, protože hodnoty budu porovnávat s hodnotami funkce, které také nanáším na osu y), pak v tomto okolí leží funkční hodnoty funkce f a tyto hodnoty patří takovým prvkům x z definičního oboru funkce, které se nacházejí v okolí bodu x_0 (na ose x).

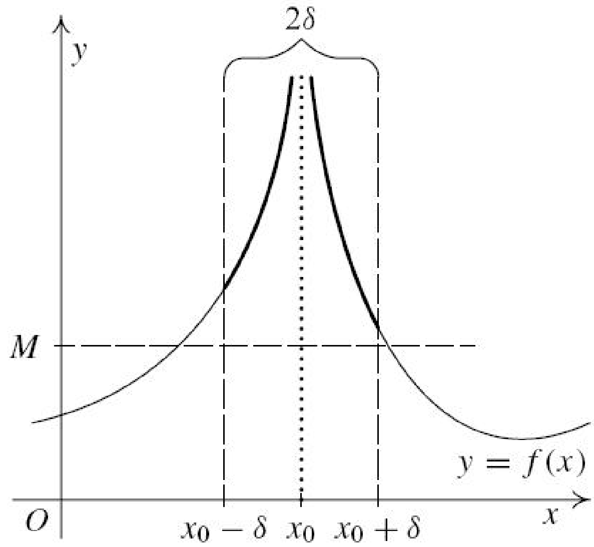
V případě, že $x_0 = \pm\infty$, mluvíme o limitě v nevlastním bodě. Jinak se jedná o limitu ve vlastním bodě. Pokud je L = $\pm\infty$, jedná se o nevlastní limitu. Jinak mluvíme o vlastní limitě. Celkově tedy máme tyto možné případy:



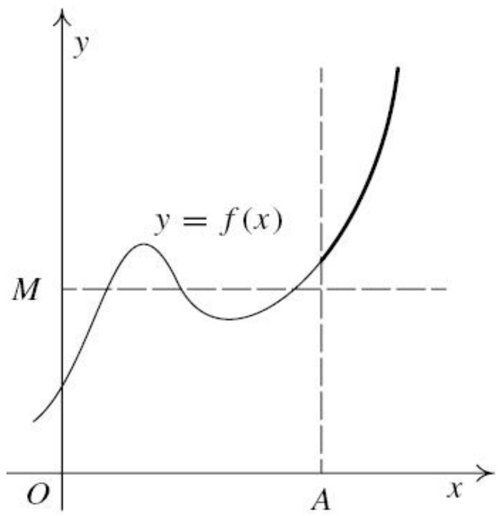
Obr.9: Vlastní limita ve vlastním bodě.([2])



Obr.10: Vlastní limita v nevlastním bodě.([2])



Obr.11: Nevlastní limita ve vlastním bodě.([2])



Obr.12: Nevlastní limita v nevlastním bodě.([2])

Podobně jako limitu („oboustrannou“) definujeme i **jednostranné limity**, tzv. **limitu zprava** a **limitu zleva**. Uvidíme, že jsou velmi důležité v mnoha případech. Může se stát, že limita („oboustranná“) neexistuje. V tom případě studujeme jednostranné limity.

Princip limity zprava, resp. zleva spočívá v tom, že studujeme hodnoty funkce pouze v jedné polovině okolí bodu x_0. Pro limitu zprava jsou to body $x > x_0$, pro limitu zleva body $x < x_0$. Přesně můžeme limitu zprava definovat takto:

Def.4.2: Nechť $x_0 \in \mathbb{R};\ L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnu L, a píšeme $\lim f(x) = L$, jestliže platí:

$$\forall o(L) \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) \in o(L)$$

Obdobně definujeme limitu zleva $\lim f(x) = L$.

K tématu limit se vztahuje několik důležitých vět, které nyní uvedeme:

- V prvé řadě platí, že **funkce f může mít v konkrétním bodě x_0 nejvýše jednu limitu**. To vyplývá ze samotné definice limity za pomocí okolí čísla L. Pokud by existovalo více limit, např. dvě, s různými hodnotami L_1 a L_2, Pak by hodnoty funkce f v nějakém okolí bodu x_0 musely být současně v okolí obou hodnot L_1 a L_2. „Velikost“ okolí obou hodnot (tj. ε_1 a ε_2) přitom můžeme zvolit libovolné, tedy i dostatečně malé na to, aby se okolí „nepřekrývala“, tj. aby jejich průnik byl prázdný. Pak by ale hodnoty $f(x)$ pro x z nějakého okolí bodu x_0 musely patřit do prázdné množiny (průniku okolí L_1 a L_2), což je spor.
- Věta o vztahu limity a jednostranných limit uvádí, že funkce f má ve vlastním bodě (tj. konečné reálné číslo) x_0 limitu právě tehdy, když v tomto bodě má pravostrannou i levostrannou limitu a hodnoty obou těchto jednostranných limit jsou si rovny. Tedy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \wedge \lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

- Co se týče pravidel počítání s limitami, vše je poměrně intuitivní a shodné s tím, co již víme o počítání s funkcemi. Pro dvě funkce a jejich limity v bodě x_0, tj. pro $\lim_{x\to x_o} f(x)=L_1$, $\lim_{x\to x_o} g(x)=L_2$, platí:

$$\lim_{x\to x_o} |f|(x)=|L_1|$$

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x)=L_1+L_2$$

$$\lim_{x\to x_o} (f.g)(x)=L_1.L_2$$

$$\lim_{x\to x_o} \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{L_1}{L_2}$$

Doplňme, že pokud výpočet dle těchto pravidel vede na tvary

$$(\pm\infty)+(\mp\infty);\ (\pm\infty)-(\pm\infty);\ 0.(\pm\infty);\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)};\ \frac{(\pm\infty)}{(\mp\infty)};\ \frac{0}{0};\ \frac{(\pm\infty)}{0};\ \frac{x}{0}\ ,$$

výraz nedefinujeme a nazýváme jej neurčitým výrazem.

- Vraťme se k limitě součinu dvou funkcí pro $x\to x_0$. Jestliže limita jedné z nich pro je $x\to x_0$ rovna nule a druhá funkce je v okolí bodu x_0 omezená (tj. neroste do + ∞ ani neklesá do - ∞), pak je limita součinu rovna nule. Jestliže by byla limita jedné ± ∞ a druhá by byla kladná v okolí bodu x_0, pak bude limita součinu ± ∞. Pokud by druhá funkce byla v okolí bodu x_0 záporná, dosahovala by limita součinu také nekonečné hodnoty, ale s opačným znaménkem, než by byla nekonečná hodnota první funkce.
- Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že na nějakém okolí bodu x_0 je pro všechna x z tohoto okolí (kromě x_0) $f(x)\geq g(x)$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x)\geq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

- Jestliže budeme mít tři funkce f, g, h, pro které na okolí (obdobně jako v minulé odrážce) bodu x_0 bude platit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ale přitom $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, pak bude platit, že $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.
- Posledním pravidlem, které zde zmíníme, je způsob výpočtu limity složené funkce. Jestliže počítáme $\lim_{x \to x_0} f[g(x)]$ a přitom platí, že $\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha$ a $\lim_{y \to \alpha} f(y) = a$, pak $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{y \to \alpha} f(y) = a$. Neboli limita složené funkce je rovna limitě vnější funkce, ale pro y jdoucí ne k x_0, ale k hodnotě limity vnitřní funkce. Nejprve tedy spočítáme limitu vnitřní funkce a pak hodnotu této limity vložíme na místo bodu, k němuž směřuje proměnná, do limity vnější funkce.

Př.4.1: Mějme $\lim_{x \to 1} 3^{5x+1}$. Vnitřní funkce $g(x) = 5x + 1$, vnější funkce $f(y) = 3^y$. Spočítáme limitu vnitřní funkce $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (5x + 1) = 6$. Limita vnější funkce pro y jdoucí k 6: $\lim_{y \to 6} f(y) = \lim_{y \to 6} 3^y = 3^6 = 729$. Pak limita složené funkce je také rovna 729. Pro ověření správnosti postupu je u takto jednoduchého příkladu možné spočítat limitu složené funkce přímo.

4.2. Spojitost

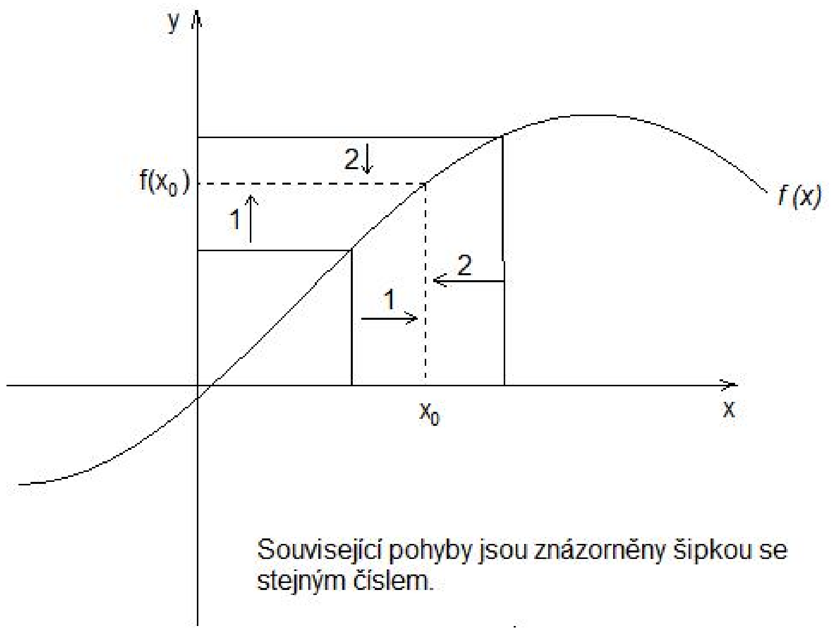
Předchozí podkapitola, v níž jsme definovali limitu funkce v bodě x_0, ukázali její vlastnosti a upřesnili pravidla počítání s limitami, nám dala nástroj, který použijeme k definování dalších významných vlastností funkcí, jmenovitě spojitosti (v této podkapitole) a derivace (v následující kapitole).

Def.4.3: O funkci f řekneme, že je **v bodě x_0 spojitá**, pokud je její limita v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Neboli pokud platí následující rovnice:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

To klade jisté podmínky. Zaprvé bod x_0 musí být prvkem definičního oboru funkce, aby v něm existovala funkční hodnota, a zadruhé musí existovat limita funkce v tomto bodě.

Jestliže je význam limity takový, že vyjadřuje hodnotu, k níž by se blížila hodnota funkce, pokud bychom se čím dál tím více přibližovali k bodu x_0, a spojitost je definována tak, že tato limita musí být rovna funkční hodnotě v bodě x_0, je možné význam spojitosti vysvětlit následujícím způsobem. Funkce je spojitá v bodě, pokud se hodnoty funkce v okolí tohoto bodu blíží (se zmenšující se vzdáleností od x_0) k hodnotě funkce v samotném bodě x_0. Můžeme to vidět na obrázku 13. Přibližování x k x_0 zleva a související pohyb na ose y zobrazují šipky 1, přibližování zprava šipky 2.



Obr.13: Ilustrativní zobrazení principu spojitosti.(autor)

Jestliže je funkční hodnota v bodě x_0 rovna hodnotě jedné z jednostranných limit (limita zprava, resp. zleva), pak mluvíme **spojitosti zprava** , resp. **zleva** . Obdobně jako v případě vztahu mezi jednostrannými limitami a limitou „oboustrannou" i zde platí, že jestliže je funkce v bodě x_0 spojitá zprava i zleva, pak je spojitá (tj. „oboustranně"), a naopak.

O spojitosti složené funkce platí, že je spojitá v bodě x_0, pokud je v tomto bodě spojitá vnitřní funkce a současně pokud je vnější funkce spojitá v bodě, který je roven funkční hodnotě vnitřní funkce v bodě x_0. Tedy pokud $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0);\ g(x_0) = a$ a současně $\lim_{y \to a} f(y) = f(a)$, pak je $f[g(x)]$ spojitá v x_0. Je to poměrně intuitivní podmínka, protože bod x_0 se přímo aplikuje do $g(x)$, tedy $g(x)$ v něm musí být spojitá. Do f se už nedostává x_0 samo o sobě, ale jeho obraz přes g, tedy funkční hodnota g v bodě x_0, kterou jsme označili jako a. Proto musí být f spojité v a a ne v x_0.

Def.4.4: V případě, že je funkce spojitá ve všech bodech určitého intervalu (a pokud je interval uzavřený, tak v krajních bodech zprava, resp. zleva spojitá), říkáme, že je **spojitá na intervalu**.

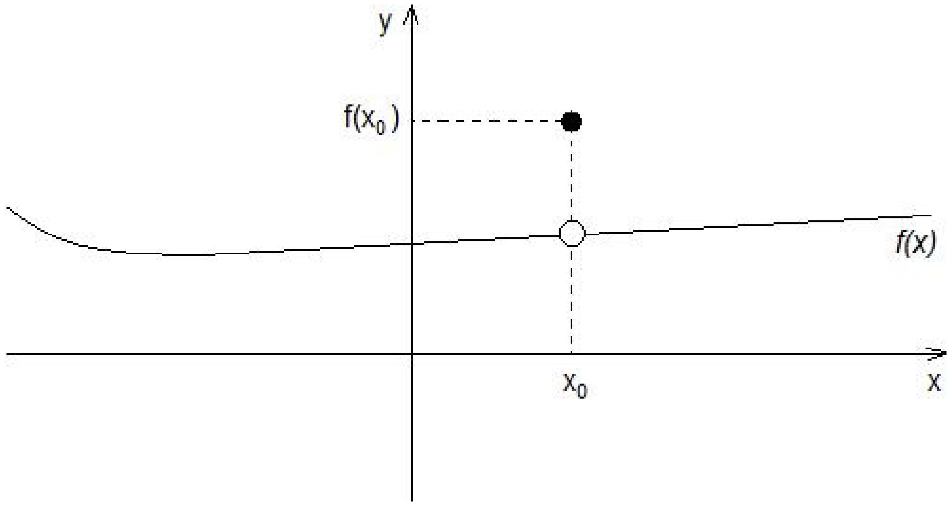
Pokud k funkci f existuje na určitém intervalu inverzní funkce (tzn. funkce f musí být monotónní) a funkce f je spojitá na tomto intervalu, pak je na obraze tohoto intervalu spojitá i inverzní funkce f^{-1}.

Pro funkci spojitou na uzavřeném intervalu platí následující věty:

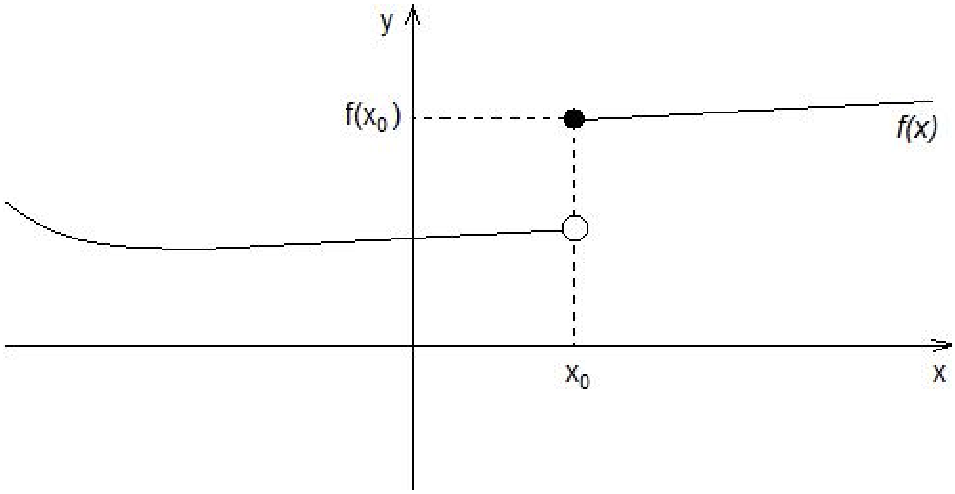
- Funkce je na tomto intervalu ohraničená. To je zřejmé, protože pokud by nebyla ohraničená, v blízkosti nějakého bodu by šly hodnoty k $\pm\infty$. Pak by v něm ale neexistovala funkční hodnota a funkce by v něm nemohla být spojitá.
- Funkce na tomto intervalu nabývá své největší a nejmenší hodnoty.
- Jestliže je funkční hodnota v jednom z krajních bodů intervalu záporná, pak existuje vnitřní bod intervalu, v němž je funkční hodnota nulová (tj. funkce prochází nulou).
- Funkce na něm nabývá všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou na tomto intervalu.

Body, v nichž funkce není spojitá (tzv. body nespojitosti) můžeme rozdělit do několika skupin.

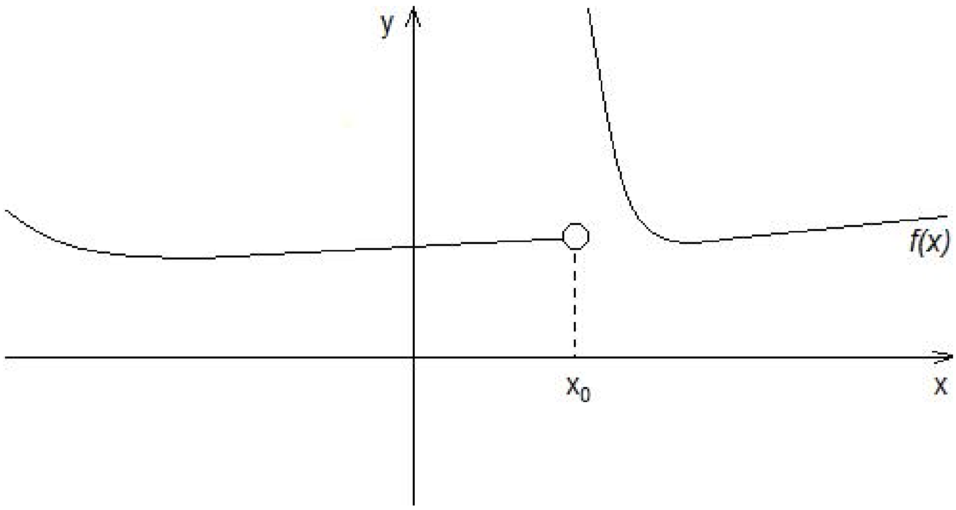
- Odstranitelná nespojitost, kdy limita v bodě nespojitosti existuje, ale funkční hodnota v něm je buď různá od hodnoty limity, nebo neexistuje.
- Nespojitost prvního druhu, neboli nespojitost typu skoku, kdy neexistuje limita, protože pravostranná a levostranná limita jsou různé, ale obě dvě jsou vlastní (tj. rovnají se reálnému číslu, a ne $\pm\infty$).
- Nespojitost druhého druhu, kdy je alespoň jedna z jednostranných limit nevlastní (tj. je rovna $\pm\infty$).



Obr.14: Odstranitelná nespojitost.(autor)



Obr.15: Nespojitost prvního druhu.(autor)



Obr.16: Nespojitost druhého druhu.(autor)

4.3. Ekonomické aplikace

Vzhledem ke zjednodušení ekonomických modelů ve smyslu předpokladu spojitosti veličin, který jsme nastínili v minulé kapitole, je možné i u funkcí, které se v ekonomii používají a jsou na těchto veličinách závislé, studovat spojitost. Většinou jsou funkce spojité, ale je možné nalézt i některé příklady nespojitosti.

Kdybychom uvažovali případ firmy, která má nenulové fixní náklady, tak tato složka celkových nákladů zůstává konstantní až do určitého rozsahu produkce. Pokud je však dosaženo určitého rozsahu výroby, mohou se i fixní náklady zvýšit, a to skokově. Pak se v grafu funkce fixních nákladů, ale i v grafu celkových nákladů, objeví nespojitost typu skoku. Jako příklad takové situace může posloužit montážní hala, která má určitou kapacitu a z jejího provozu plynou fixní náklady (hlídači, osvětlení, nájem). Pokud se firmě daří a zvyšuje svou produkci do té míry, že je kapacita haly naplněna, musí si pronajmout (či jinak zabezpečit) druhou halu, ve které by montovala tu část produkce, která překračuje kapacitu první haly. A s druhou halou budou opět souviset fixní náklady (druhý hlídač, osvětlení, nájem). Proto dojde ke skokovému zvýšení fixních nákladů. Uveďme tento konkrétní příklad:

Př.4.2: Firma vyrábí mobilní telefony. Náklady na jeden vyrobený mobilní telefon zahrnují mzdu (100 Kč) a komponenty (1000 Kč). Výroba probíhá v hale s maximální kapacitou 500 kusů za den, za kterou musí firma platit nájem a služby v přepočtu za 20000 Kč na den. Jestliže by se výroba rozšířila nad maximální kapacitu, firma by si pronajala srovnatelnou vedlejší halu za stejných podmínek.

Variabilní náklady na jeden telefon jsou 1000 Kč + 100 Kč = 1100 Kč. Fixní náklady odpovídají nákladům na provoz haly (tj. 20000 Kč). Funkce celkových nákladů TC $= VC + FC$, odtud $TC(x) = VC(x) + TC(x)$

$=1100.x + 20000$ pro $x \leq 500$

$=1100.x + 20000.2$ pro $500 < x \leq 1000$

Jestliže spočítáme jednostranné limity pro x jdoucí k 500, dostaneme následující výsledky

$$\lim_{x \to 500^-} TC(x) = (1100.500 + 20000) = 570000$$

$$\lim_{x \to 500^+} TC(x) = (1100.500 + 40000) = 590000$$

Vidíme, že hodnoty jednostranných limit se liší, tzn. v bodě $x_0 = 500$ nemá funkce celkových nákladů limitu a tedy zde není spojitá. Vzhledem k hodnotám jednostranných limit (jsou vlastní) je zřejmé, že se v tomto bodě nachází nespojitost typu skoku.

Příkladem použití limit může být celkový a mezní užitek, který jsme uváděli již v minulé kapitole. Vzhledem k axiomu nenasycenosti s rostoucí spotřebou roste celkový užitek, avšak čím dál tím „pomaleji". Hodnota Limity celového užitku pro spotřebu jdoucí k nekonečnu tak může být jak konečné číslo, tak nekonečno. Záleží na tvaru užitkové funkce. Ovšem pro funkci mezního užitku je limita pro spotřebu jdoucí k nekonečnu rovna vždy nule.

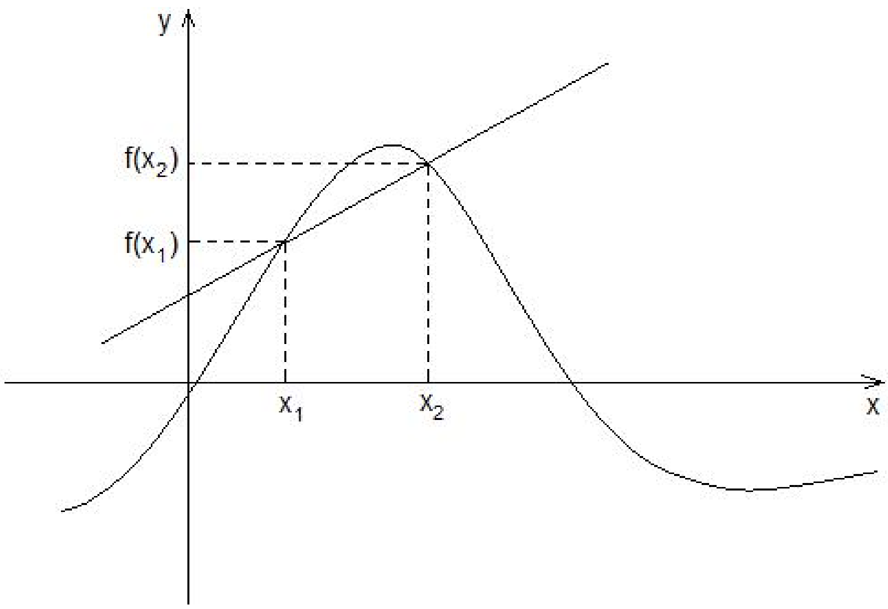
5. Derivace funkcí jedné proměnné

Derivace funkce je pojmem, ke kterému jsme v předchozích kapitolách postupně směřovali. Je to významný prvek v analýze reálných funkcí a je široce využíván i v ekonomii. Jeho ekonomické aplikace zmíníme, stejně jako v předchozích částech textu, na konci kapitoly. Abychom pojem derivace přehledně vysvětlili, je potřeba začít mírnou oklikou.

5.1. Derivace funkce

Součástí středoškolské látky matematiky jsou lineární funkce. To jsou funkce, které mají daný sklon q a jistou konstantu c udávající vertikální posunutí funkce od počátku. Celý tvar funkce tedy je $f(x)=q.x+c$. Jestliže se posuneme do bodu $x = 0$, člen $q.x$ je nulový a hodnota funkce je rovna konstantě c. Graf funkce tedy prochází bodem o souřadnicích $[\ 0,\ c\ ]$. Sklon funkce udává, o kolik hodnota funkce vzroste, resp. klesne, pokud se x zýší o jedna. K přesnému určení funkce nám stačí souřadnice dvou bodů, kterými prochází její graf. Jestliže spočítáme rozdíl funkčních hodnot (souřadnice y) a rozdíl hodnot proměnné x v těchto bodech a rozdíl funkčních hodnot podělíme rozdílem hodnot x, dostaneme hodnotu parametru q, neboli sklon funkce. Je tomu tak proto, že na rozdílu $(x_1 - x_2)$ funkce vzrostla, nebo klesla o $(f(x_1) - f(x_2))$. Sklon je rozdíl funkčních hodnot vyjádřený při změně x o jedničku, proto musíme mezi sebou dva spočítané rozdíly podělit. Poté stačí vybrat jeden ze dvou známých bodů a pro jeho souřadnici x spočítat výraz $q.x$, který udává, jakou hodnotu by měla funkce v tomto bodě x, pokud by procházela počátkem a tedy c by bylo rovno nule. Rozdíl skutečnou funkční hodnotou v daném bodě a takto spočítanou hodnotou udává skutečnou velikost konstanty *c*. Jestliže je lineární funkce rostoucí, je $q > 0$, pokud je klesající, $q < 0$. Funkce, která je konstantní, má $q = 0$. To lze snadno ověřit. Podle toho, jaká je velikost $|q|$ můžeme určit, jak moc funkce klesá, nebo jak moc roste. Větší absolutní hodnota sklonu znamená výraznější trend.

Nyní se už vraťme ke složitějším funkčním tvarům. Jistě i u nich můžeme chtít zjistit, jak moc funkce klesá, nebo jak moc roste. Problémem je zde však to, že složitější tvary funkce nemají všude stejný sklon (někde rostou víc, někde míň, někde klesají, někde jsou konstantní atd.). Pokud vezmeme souřadnice dvou bodů grafu funkce, můžeme z nich vypočítat skon **sečny** naší funkce v těchto dvou bodech, která je lineární funkcí. Odtud tedy můžeme zjistit jakýsi průměrný sklon funkce na intervalu ohraničeném prvními souřadnicemi bodů.



Obr.17: Sečna grafu funkce je lineární funkcí.(autor)

To ovšem náš problém neřeší, protože nás zajímá sklon v jednom konkrétním bodě x_0. Možností je přejít od sečny, která graf funkce protíná ve dvou bodech, k **tečně**, která se grafu „dotýká" pouze v jednom bodě a je také lineární funkcí. Výše jsme ale ukázali, že se sklon lineární funkce (a tedy i tečny) počítá ze souřadnic dvou bodů, což před nás opět staví problém.

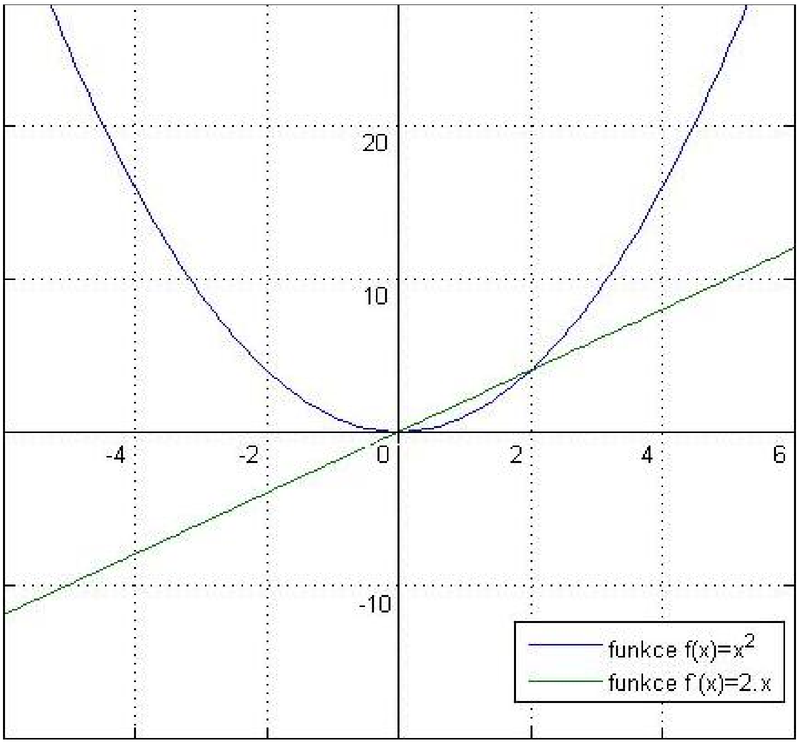
Řešení přináší koncept derivace v bodě x_0, který spojuje oba přístupy (tj. sečnu a tečnu). Vychází z toho, že použijeme sečnu, jejíž jeden bod průniku s grafem funkce umístíme do námi požadovaného bodu x_0 a druhý někam v jeho okolí. Pokud budeme druhý bod přibližovat k bodu x_0, průměrný sklon funkce na intervalu (počítaný pomocí sklonu sečny) se bude přibližovat sklonu v bodě x_0. Nakonec použijeme limitu výrazu pro výpočet sklonu sečny pro x (tj. druhý sečný bod) jdoucí k x_0. Tak oba body natolik přiblížíme, že přejdeme od sečny k tečně a získáme přesnou hodnotu sklonu funkce v bodě x_0.

Derivace v bodě x_0 je vyjádřena ve tvaru, který vychází z výše zmíněné metody výpočtu sklonu lineární funkce. Značíme ji $f\,'(x_0)$:

$$f\,'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Def.5.1: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci, jestliže existuje $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (vlastní i nevlastní) a označíme ji $f\,'(x_0)$. Pokud místo limity použijeme analogicky jednostrannou limitu, mluvíme o tzv. jednostranné derivaci.

Platí, že derivace je dána jednoznačně a dále také, že pokud má funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci (tj. derivaci s konečnou hodnotou), je v tomto bodě spojitá. To lze jednoduše dokázat přímo z definic spojitosti a derivace. Vzhledem k tomu, co jsme uvedli o sklonu lineární funkce, platí, že pokud je funkce v bodě x_0 rostoucí a má zde derivaci, pak má derivace kladnou hodnotu. Jestliže v tomto bodě roste, je hodnota derivace záporná. Pokud neroste, ani neklesá, je derivace nulová.



Obr.18: Funkce a její derivace: Když funkce klesá, její derivace < 0, pokud roste, derivace je > 0.(autor)

Jestliže máme dvě funkce f a g, které mají v bodě x_0 derivaci, pak platí následující pravidla:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).\,g(x_0) + f(x_0).\,g'(x_0)$$

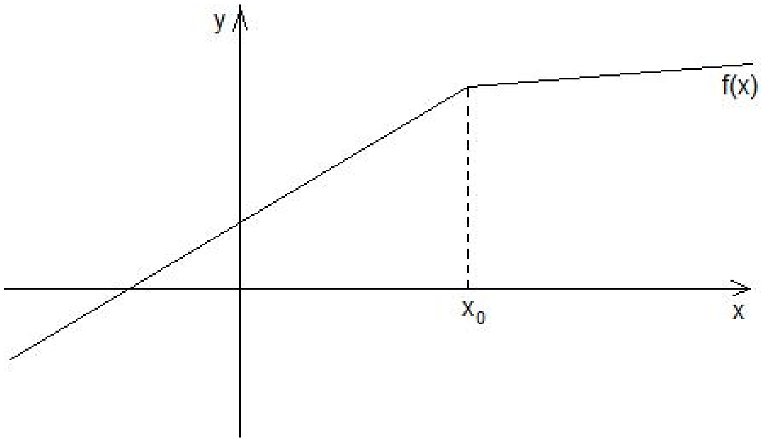
$$je - li\ g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0).\,g(x_0) - f(x_0).\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Jestliže máme složenou funkci $f(g(x))$, pak její derivace v bodě x_0 existuje, pokud má funkce $g(x)$ derivaci v bodě x_0 a funkce $f(y)$ derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$. Pak je derivace složené funkce rovna součinu derivace vnější a vnitřní funkce. Pozor! Nejprve derivujeme pouze vnější funkci a v jejím argumentu necháme celý výraz pro vnitřní funkci. Pak teprve derivujeme vnitřek.

$$
\begin{aligned}
(f(g))'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} . \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}_{=1} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} . \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= f'(y_0).g'(x_0)
\end{aligned}
$$

Protože derivaci funkce f můžeme vypočítat v různých bodech x_0, nedostaneme pouze jedno číslo, ale celou množinu čísel, z níž jsou jednotlivé prvky příslušné různým hodnotám x_0. Je zřejmé, že pak můžeme celý zápis zobecnit a derivaci zapsat jako funkci proměnné x. Pak mluvíme o derivaci funkce f a značíme ji f'. Máme tedy dvojici funkcí, které jsou spojeny vztahem, kdy jedna je derivací druhé.

Protože f' je funkce, můžeme i u ní sledovat definiční obor, to, zda roste, klesá, nebo je konstantní, apod. Vzhledem k výše uvedenému vztahu mezi spojitostí funkce f v bodě a existencí její derivace v tomto bodě platí, že funkce f je spojitá na definičním intervalu funkce f'. Opačně (tedy existence derivace na intervalu, kde je f spojitá) to ale neplatí, protože funkce může být spojitá i tam, kde nemá derivaci. Příkladem bodu, v němž je funkce spojitá, ale nemá zde derivaci, je bod, kdy se funkce „láme“. V takovém bodě totiž nelze jednoznačně sestrojit tečnu.



Obr.19: V bodě x_0 je funkce spojitá, ale nemá zde derivaci.(autor)

Uveďme nyní několik elementárních typů funkcí a k nim tvar příslušné derivace:

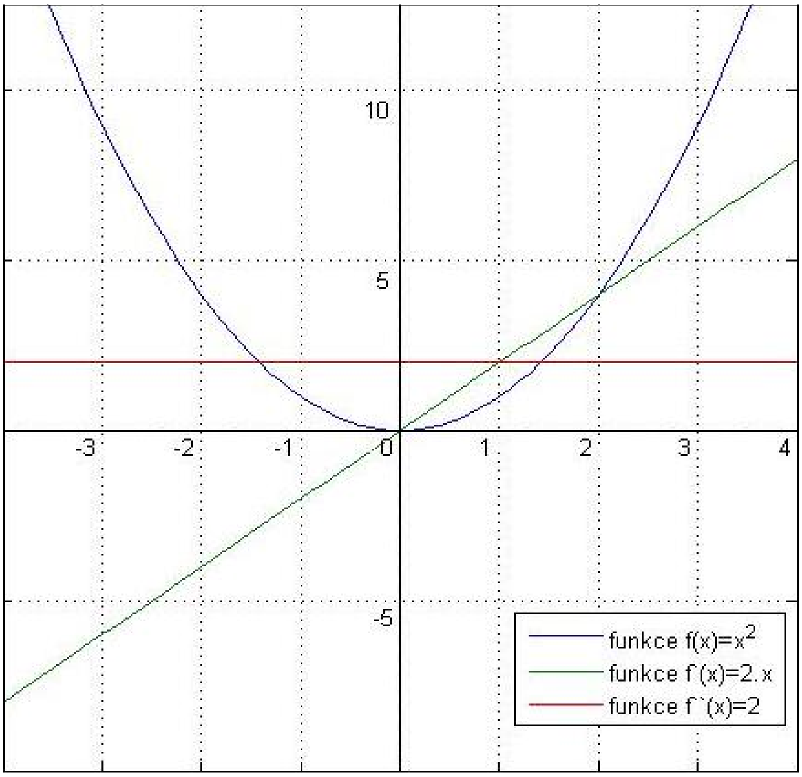
- $f(x) = c$ $\qquad f'(x) = 0$
- $f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$
- $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = n.x^{n-1}$
- $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = - \sin x$
- $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x$ $\qquad f'(x) = a^x . \ln a$
- $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

5.2. Derivace vyšších řádů

Jak jsme zmínili již výše, i derivace funkce f (tj. f') je funkcí s vlastním definičním oborem a dalšími vlastnostmi. A protože se jedná o funkci, můžeme se i u ní zajímat o její růst, pokles a sklon grafu funkce v nějakém konkrétním bodě. To znamená, že i u ní můžeme studovat derivaci. Ta je definována stejně, jako v předchozím případě, pouze dosazujeme místo funkce f funkci f'.

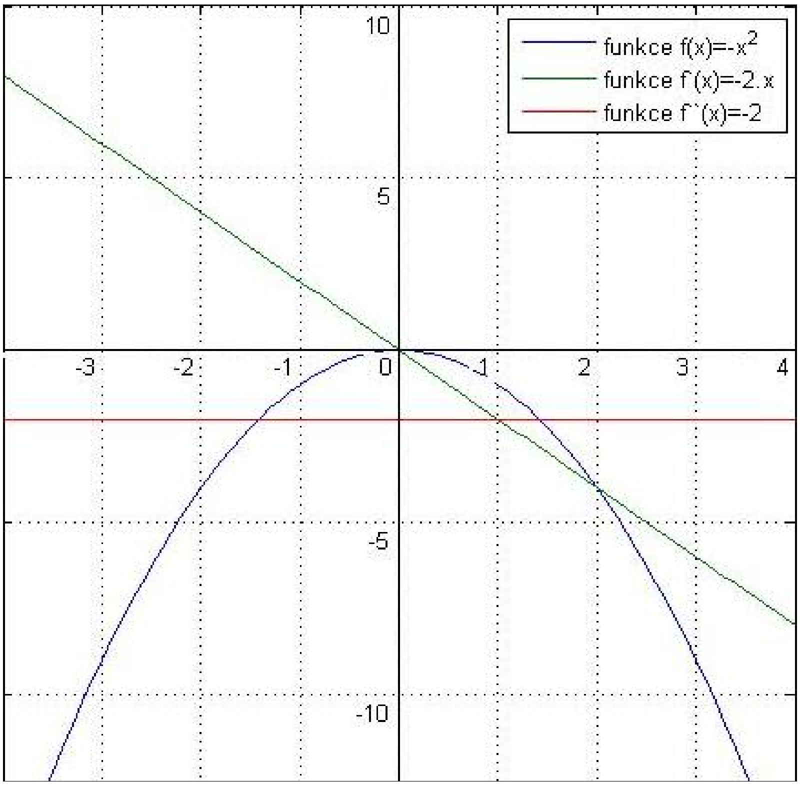
A opět platí, že pokud funkce f' roste, má kladný sklon a tedy její derivace má kladnou hodnotu. Pokud f' klesá, je derivace záporná. Mohli bychom se ovšem zajímat i o to, zda existuje nějaký vztah mezi derivací funkce f' a původní funkcí f (jejíž je f' derivací). Zjistíme, že takový vztah existuje a derivaci derivace funkce f nazýváme **druhou derivací** funkce f a značíme ji f''.

Zkusme si odvodit, co platí pro funkci f, jestliže $f'' > 0$. Druhá derivace je derivací (první) derivace funkce f, tj. funkce f'. Jestliže je druhá derivace funkce f kladná, pak podle výše uvedeného musí být funkce f' (jejíž je f'' první derivací) rostoucí. Vzhledem k tomu, že f' je první derivací původní funkce f, podívejme se na důsledek rostoucí derivace na původní funkci. Jestliže derivace roste, roste sklon funkce f. Tedy funkce f buď roste čím dál strměji, nebo klesá čím dál mírněji, případně klesá do určitého minima, odkud dále roste. Takové funkci f říkáme **konvexní**. Na následujícím obrázku je příklad takové funkce $f(x) = x^2$.



Obr.20: Konvexní funkce $f(x) = x^2$, její derivace a druhá derivace.(autor)

Analogicky odvodíme situaci, kdy je druhá derivace záporná. Pak platí, že první derivace je klesající funkce, to znamená, že původní funkce roste čím dál tím mírněji, případně klesá čím dál tím strměji. Nebo z čím dál tím pozvolnějšího růstu dosáhne svého maxima a poté začne klesat. Tento typ funkcí nazýváme **konkávní**. A stejně jako v předchozím případě i zde uvedeme ilustrativní obrázek. V tomto případě se bude jednat o funkci $f(x) = -x^2$.



Obr.21: Konkávní funkce $f(x) = -x^2$, její derivace a druhá derivace.(autor)

5.3. Aplikace derivací v matematice

Derivace funkcí mají v rámci matematiky velmi široké využití. V této podkapitole zmíníme nejznámější aplikace, které jsou užitečné i pro naše potřeby v ekonomii.

5.3.1. De l'Hospitalovo pravidlo

V prvé řadě nám derivace umožňují vypočítat i některé limity, které jsme dříve neuměli vyjádřit a museli jsme se spokojit s tím, že jsme je označili jako neurčité výrazy. K výpočtu limit ve tvaru $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ využijeme tzv. **De l'Hospitalovo pravidlo** [čteme „D Lopitalovo pravidlo"]. To říká, že jestliže máme počítat limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ , kde } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{ , nebo } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \text{ ,}$$

tak pokud existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak platí $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

To znamená, že pokud se při výpočtu limity dostaneme do situace, kdy limita vede na jeden z tvarů $\frac{0}{0}$, nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, můžeme zderivovat zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel a pokud výsledný výraz již bude v rámci limity řešitelný, je jeho výsledek roven výsledku původně počítané limity.

Př.5.1: Mějme $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Tato limita vede na tvar $\frac{0}{0}$, proto použijeme De l'Hospitalova pravidla. Derivace sin x je rovna cos x, derivace x je 1.

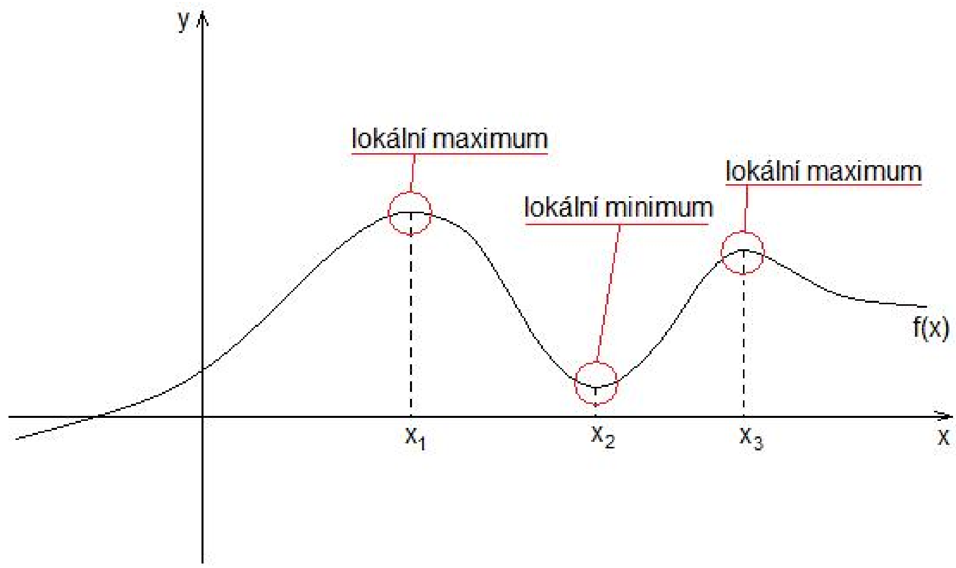
Tedy $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$, protože $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

5.3.2. Stacionární body

Další oblastí, kde je derivace významným nástrojem, je hledání význačných bodů pro popis průběhu funkce, tzv. stacionárních bodů.

Def.5.2: Bod, v němž je derivace funkce rovna nule (tj. bod x_0, pro nějž je $f'(x_0) = 0$), nazýváme **stacionární bod**.

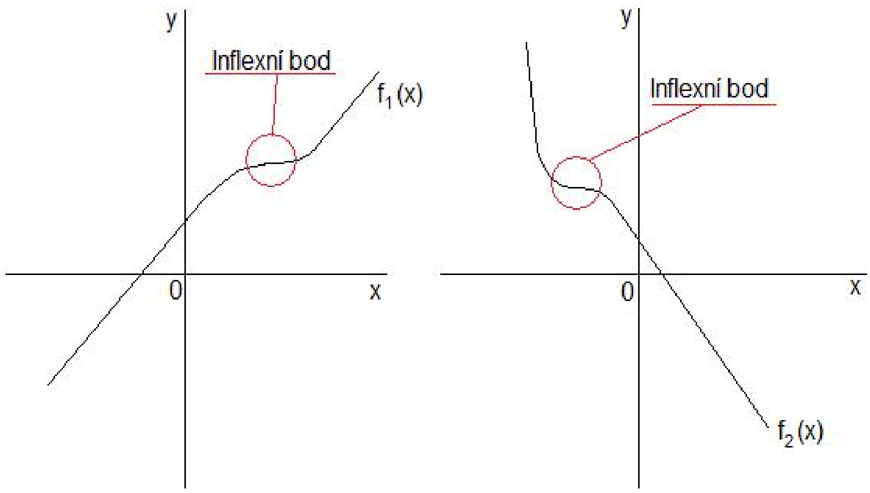
Proč jsou stacionární body významné? Jestliže se zamyslíme nad tím, jaký funkční tvar je v definici 5.2 popsán, dojdeme k závěru, že mezi stacionární body patří například body tzv. **lokálních extrémů**. To jsou **lokální minima** a **maxima** funkce, neboli body x_0, v nichž je hodnota funkce nižší než ve všech ostatních bodech nějakého okolí bodu x_0, nebo naopak vyšší, než v ostatních bodech na nějakém okolí x_0. Často se setkáváme s problémem, kdy musíme najít bod, v němž se nějaká funkce maximalizuje, nebo minimalizuje. Jako příklad stačí uvést hledání takového množství vyrobených statků, při němž se maximalizuje zisk, nebo naopak minimalizují průměrné náklady.



Obr. 22 : Lokální extrémy funkce.(autor)

Všimněme si, že v okolí lokálního maxima je funkce konkávní, zatímco v okolí lokálního minima je konvexní.

Dalším možným stacionárním bodem je tzv. **inflexní bod**, v němž je derivace nulová, ale funkce je na nějakém jeho okolí monotónní. To znamená, že funkce roste čím dál tím pozvolněji, až v inflexním bodě neroste vůbec, ovšem pak začíná znova růst, a to čím dál tím rychleji. Analogicky vypadá situace, pokud je funkce klesající. Klesá čím dál tím pozvolněji, hodnota derivace roste ze záporných hodnot až k nule, nastává inflexní bod a funkce zase začíná klesat, a to čím dál tím rychleji. Derivace od nuly opět klesá do záporných hodnot.



Obr.23: Inflexní body funkce.(autor)

Vidíme, že na nějakém okolí inflexního bodu x_0 platí, že pro všechna $x < x_0$ je funkce konkávní a pro všechna $x > x_0$ je konvexní, nebo naopak.

Z první derivace přímo nepoznáme, zda je stacionární bod lokálním extrémem, nebo inflexním bodem. To se pozná až z druhé derivace. Jak jsme již napověděli při popisu chování funkce na okolí stacionárního bodu z hlediska konvexnosti a konkávnosti, platí následující:

- **Pro lokální maximum platí** , že funkce roste čím dál tím méně, až začne klesat. Tomu odpovídá derivace, která klesá z kladných hodnot do záporých a v daném bodě prochází nulou. Derivace klesá, tedy **druhá derivace je záporná**.
- **Pro lokální minimum funkce** klesá čím dál tím pozvolněji, až začne růst. To odpovídá růstu derivace ze záporných hodnot do kladných. Derivace v daném bodě prochází nulou. Derivace roste, tzn., že **druhá derivace je kladná**.
- **Pro inflexní bod** platí, že funkce roste (klesá) čím dál tím méně, derivace klesá z kladných hodnot k nule (roste ze záporných hodnot k nule). Pak se růst (pokles) funkce opět vrátí a je čím dál tím strmější. Derivace se vrací do kladných

(záporných) hodnot. Pokles (růst) derivace a obrat ve stacionárním bodě směrem k růstu (poklesu) znamená, že druhá derivace roste ze záporných hodnot do kladných (klesá z kladných do záporných) a ve stacionárním bodě prochází nulou. V inflexním bodě **je druhá derivace nulová**.

5.4. Ekonomické aplikace derivací

Již v předchozí podkapitole jsme nastínili některé ekonomické aplikace derivací. Nyní naše úvahy o jejich možných využitích v ekonomii rozšíříme. V prvé řadě je potřeba zmínit, že všechny mezní veličiny jsou derivacemi celkových veličin. To znamená, že například funkce mezních nákladů je derivací funkce celkových nákladů, mezní příjmy jsou derivací celkového příjmu. Mezní užitek je derivací celkového užitku z nějakého statku.

Pokud do funkce vstupuje více proměnných (např. u produkční funkce výrobní faktory práce a kapitál), je situace trochu složitější a mluvíme o **funkci více proměnných**. Mezní produkt práce a mezní produkt kapitálu jsou derivacemi produkční funkce, ovšem zde se mluví o tzv. **parciálních derivacích** . Ty se vyznačují tím, že pokud **derivujeme podle jedné proměnné** (např. podle práce), považujeme práci za proměnnou a další výrobní faktor, kapitál, který je v původní funkci také proměnnou, bereme jako pouhý parametr. To znamená, že ve chvíli, kdy derivujeme, není brán jako proměnná.

Př.5.2: Mějme Cobb-Douglasovu produkční funkci $Y = K^{1/3}.L^{2/3}$. Funkce Y je tedy závislá jak na K, tak na L. Je to funkce dvou proměnných. Jestliže budeme zvětšovat množství zapojeného kapitálu, bude růst celková produkce. To stejné bude platit pro práci.

Derivaci podle práce značíme $\frac{\partial Y}{\partial L}=MPL$,

derivaci podle kapitálu $\frac{\partial Y}{\partial K}=MPK$.

Derivaci podle práce (tj. mezní produkt práce) vypočítáme tak, že derivujeme tak, jako by proměnnou bylo pouze *L*:

$$MPL=\frac{\partial Y}{\partial L}=\left(K^{1/3}\right).\frac{2}{3}.L^{2/3-1}=\left(K^{1/3}\right).\frac{2}{3}.L^{-1/3}=\frac{2}{3}.\frac{K^{1/3}}{L^{1/3}}=\frac{2}{3}.\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$$

Jak vidno, s K jsme vůbec nepracovali a brali jsme jej jako parametr, či konstantu. Výsledek je dán pouze derivací podle L, kde platí:

$$L^{2/3}=(2/3).L^{2/3-1}=(2/3).L^{-1/3}=\frac{2}{3}.\frac{1}{L^{1/3}}$$

Mezní produkt kapitálu vypočítáme analogicky, ovšem tentokrát budeme brát za proměnnou K a L bude pouze parametr.

$$MPK=\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{1}{3}.K^{1/3-1}.\left(L^{2/3}\right)=\frac{1}{3}.K^{-2/3}.\left(L^{2/3}\right)=\frac{1}{3}.\frac{L^{2/3}}{K^{2/3}}=\frac{1}{3}.\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3}$$

Opět jsme vůbec nepracovali s druhou proměnnou (tentokrát s L) a brali jsme ji jako parametr. Derivovali jsme tak, jako by bylo jedinou proměnnou *K*.

V pozadí uvedeného příkladu, tedy za funkcemi více proměnných a parciálními derivacemi, stojí poměrně rozsáhlá teorie, která ovšem překračuje potřeby a rozsah tohoto základního kurzu. Proto jsme se rozhodli problematiku rozpracovat pouze v rámci tohoto ilustrativního příkladu, na kterém jsme však základní aspekty parciálních derivací ukázali dostatečně na to, aby mohli studenti tento nástroj prakticky využívat.

Další aplikací derivací, kterou jsme již výše v textu zmínili, je hledání extrémů funkce. Omezíme se však pouze na hledání extrémů funkcí jedné proměnné, u funkcí více proměnných se jedná o složitější postup, který opět přesahuje rámec základního kurzu.

Jak jsme předeslali, hledání maxima, nebo minima funkce je významné například ve vztahu k ziskové funkci nebo k funkci průměrných nákladů.

Př.5.3: Z této kapitoly víme, že maximum (nebo minimum) funkce nastává v bodě, kde je derivace funkce rovna nule. Jestliže se zaměříme na zisk, pak ten je vyjádřen jako rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady. Když derivujeme funkci tvořenou rozdílem mezi dvěma funkcemi (zde rozdílem mezi celkovými příjmy a náklady), pak její derivace je rovna rozdílu derivací oněch dvou funkcí (zde příjmové a nákladové funkce). To víme z výše uvedeného. Derivací celkových příjmů jsou mezní příjmy, derivací celkových nákladů jsou mezní náklady. Jestliže jejich rozdíl má být roven nule (hledáme maximum a v něm je derivace vždy rovna nule, proto to musí platit), můžeme také říct, že se mezní příjmy musí rovnat mezním nákladům. To je ale přesně stejné pravidlo, které je vyučováno v rámci základního kurzu mikroekonomie jako bod, v němž je maximalizovám zisk. Vše zmíněné vyjádříme výpočtem:

$$maximalizovat\ Z \ \Rightarrow\ Z' = 0$$

$$\begin{aligned}
&Z = TR - TC \\
&derivace \\
&Z' = TR' - TC';\quad kde\quad TR' = MR\quad a\quad TC' = MC \\
&odtud \\
&Z' = MR - MC \\
&Z' = 0;\quad tzn. \\
&MR - MC = 0 \\
&odtud \\
&MR = MC
\end{aligned}$$

Př.5.4: V posledním příkladu této kapitoly se zaměříme na konkrétní jednoduchý příklad na maximalizaci. Naším úkolem bude určit maximum celkových příjmů, jestliže funkce celkových příjmů má tvar $TR = 400.Q - 2.Q^2$.[1]

Víme, že funkce dosahuje maxima, nebo minima v bodě, kdy je její derivace rovna nule. Proto nejprve spočítáme derivaci a poté ji položíme rovnu nule:

$MR = TR' = 400 - 4.Q$, protože derivace $(400.Q)' = 400$

a derivace $(2.Q^2)' = 2.2.Q^{2-1} = 4.Q$

V bodě extrému Q_0 je derivace rovna nule:

$MR\,(Q_0) = TR'\,(Q_0) = 0$ neboli $400 - 4.Q_0 = 0$

odtud

$400 = 4.Q_0$ a nakonec $Q_0 = 100$

Musíme ještě ověřit, jestli je tento bod maximem (mohl by být i minimem). Proto spočítáme druhou derivace $TR'' = MR' = -4$, což je < 0, jedná se tedy skutečně o maximum. (Jestliže by se i v druhé derivaci vyskytovala proměnná, dosadili bychom za ni hodnotu Q_0 a pak teprve zjišťovali, zda se jedná o maximum, nebo minimum.

Na závěr ještě spočítáme funkční hodnotu v maximu, tedy maximální celkové příjmy:

$TR\,(Q_0) = 400.Q_0 - 2.Q_0^2 = 400.100 - 2.100^2 = 20000.$

6. Posloupnosti a nekonečné řady

V kapitole týkající se posloupností a nekonečných řad navážeme na některé informace, které jsme uvedli v první kapitole, ale současně využijeme i látku z dalších kapitol. Posloupnosti a nekonečné řady jsou významnými konstrukty, které mají mnoho využití, a to nejen v samotné matematice, ale i v ekonomii a dalších vědách.

6.1. Posloupnosti

Jestliže se pokusíme pojem posloupnost krátce a jasně vysvětlit, použijeme nám již známého pojmu zobrazení. **Posloupnost** je zobrazením z množiny přirozených čísel na množinu reálných čísel. Případně by se dala definovat jako speciální případ reálné funkce, jejíž definiční obor je roven množině přirozených čísel.

Def.6.1: **Posloupnost** je zobrazení $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jehož hodnoty obvykle místo $a(n)$ značíme a_n (současně proměnnou označujeme n namísto x, protože se nejedná obecně o reálné číslo, ale o přirozené číslo). Hodnotu a_n pak nazýváme ***n*** **-tý člen posloupnosti** a celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jednodušeji $\{a_n\}$. [2]

Konkrétní posloupnost může být zadefinována dvěma různými způsoby. Zaprvé může být každý člen definován pomocí hodnoty svého indexu, tj. n -tý člen je možno vypočítat z čísla n. Zadruhé může být každý člen od nějakého n_0 definován pomocí předcházejících členů a členy s indexem nižším, než n_0 , jsou přímo dané (tzv. **rekurentně zadaná posloupnost**).

Př.6.1: V posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\frac{3.a+2}{5}$ je každý člen definován přímo pomocí čísla n. i -tý člen pak spočítáme přímo dosazením i za n do vzorce. Tak máme např.

$$a_1=\frac{3.1+2}{5}=\frac{5}{5}=1 \quad , \quad a_2=\frac{3.2+2}{5}=\frac{8}{5} \quad , \quad a_3=\frac{3.3+2}{5}=\frac{11}{5} \quad , \ldots$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována následujícím způsobem: b_1 = 2, b_2 = 1, $b_n=\frac{b_{n-2}+2.\,b_{n-1}}{2}$ $\forall\, n\geq 3$. všechny členy s indexem vyšším, než 2, jsou tak zadány pomocí předchozích členů, tzn. **rekurentně** .

Pro ilustraci spočítáme několik počátečních členů:

$$b_3=\frac{b_{3-2}+2.\,b_{3-1}}{2}=\frac{b_1+2.\,b_2}{2}=\frac{2+2.1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$b_4=\frac{b_{4-2}+2.\,b_{4-1}}{2}=\frac{b_2+2.\,b_3}{2}=\frac{1+2.2}{2}=\frac{5}{2}$$

$$b_5=\frac{b_{5-2}+2.\,b_{5-1}}{2}=\frac{b_3+2.\,b_4}{2}=\frac{2+2.\frac{5}{2}}{2}=\frac{7}{2}$$

Stejně jako klasické reálné funkce, i posloupnosti mohou být zdola či shora ohraničené, rostoucí, či klesající a podobně. V krátkosti připomeňme, že:

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, jestliže existuje takové $K\in\mathbb{R}$, pro které platí, že $K\leq a_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$.
- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora ohraničená, jestliže existuje takové $L\in\mathbb{R}$, pro které platí, že $L\geq a_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$.
- Posloupnost je ohraničená, jestliže je současně zdola i shora ohraničená.

- Posloupnost je rostoucí, jestliže $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost je klesající, jestliže $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost je nerostoucí, jestliže $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost je neklesající, jestliže $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

U posloupností, stejně jako u funkcí, můžeme počítat limitu. Zde ovšem počítáme pouze limitu posloupnosti pro n jdoucí k nekonečnu. Vzhledem k tomu, že posloupnost je definována pouze na přirozených číslech, v každém konkrétním přirozeném čísle musí nabývat konkrétní hodnoty, tedy nemá smysl počítat limitu pro n jdoucí k nějakému konkrétnímu přirozenému číslu.

Pro limity posloupností platí všechno, co jsme řekli o limitě funkce v nevlastním bodě +∞. Tedy například to, že limita je dána jednoznačně. Dále pro počítání limit posloupností platí stejná pravidla při sčítání a odečítání posloupností, jejich násobení a dělení, jako v případě funkcí.

V závislosti na tom, jaká je limita posloupnosti (tj. jestli je vlastní, nevlastní, nebo neexistuje), definujeme tři skupiny posloupností:

- Posloupnost, která má vlastní limitu $\lim_{n \to \infty} a_n = a; \quad a \in \mathbb{R}$, tj. $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$, nazýváme **konvergentní** .
- Posloupnost, která má nevlastní limitu $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$, tj. $\forall A > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > A$, či $\forall A < 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < A$,

  nazýváme **divergentní** .
- Posloupnost, jejíž limita neexistuje, nazýváme oscilující.

Z výše uvedeného poměrně snadno plyne, že pokud je posloupnost neklesající a shora ohraničená, pak konverguje a její limita je rovna její nejvyšší hodnotě. Stejně tak nerostoucí a zdola ohraničená posloupnost konverguje ke své nejnižší hodnotě.

Dále se budeme zabývat tzv. hromadnými body posloupnosti. Tento pojem vysvětluje následující definice.

Def.6.2: Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a a je reálné číslo (vlastní). Pak a nazveme hromadným bodem posloupnosti, jestliže

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ a \ \ \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ \ \textit{takové, že} \ \ |a_n - a| < \epsilon$$

Hromadným bodem je tedy takový bod, v jehož jakémkoli ε – okolí leží alespoň jeden prvek posloupnosti. Hodnota limity posloupnosti je hromadným bodem, ovšem opak obecně neplatí, protože může existovat více hromadných bodů dané posloupnosti. Pak by posloupnost limitu neměla. Platí, že každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

Př.6.2: Mějme posloupnost $\{a_n\} = (-1)^n$. Je ohraničená, protože žádná její hodnota neklesne pod -1 a nestoupne nad 1. Tato posloupnost má dva hromadné body (-1 a 1) a současně nemá limitu, protože se jedná o funkci oscilující.

Významnými typy posloupností jsou tzv. **aritmetická posloupnost** a **geometrická posloupnost**. U obou typů se jedná o třídy posloupností s jednotným tvarem zápisu, v němž se mění pouze nastavení parametrů. Přitom oba dva typy lze vyjádřit jak zápisem pomocí indexu n, tak rekurentně. Posloupnosti však nezačínají v $n = 1$, ale již v $n = 0$.

Aritmetická posloupnost se vyznačuje tím, že každý člen (mimo prvního členu) je větší (resp. menší) o určitou konstantu, než člen předcházející. Posloupnost pak můžeme zapsat následujícím způsobem:

$a_0 = a$; $a_n = a_{n-1} + c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Jestliže budeme chtít zápis přepsat do druhého možného tvaru, pak si stačí uvědomit následující vazbu mezi členy, kterou ilustrujeme na několika počátečních členech:

$$a_1 = a_0 + c$$
$$a_2 = a_1 + c = (a_0 + c) + c = a_0 + 2.c$$
$$a_3 = a_2 + c = (a_1 + c) + c = (a_0 + c) + c + c = a_0 + 3.c$$

Pro n -tý člen tak dostáváme $a_n = a_0 + n.c$.

V geometrické posloupnosti je každý člen (mimo prvního členu) násobkem předcházejícího členu. Posloupnost může být zapsána rekurentně takto:

$a_0 = a$; $a_n = a_{n-1} . q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Stejně, jako případě aritmetické posloupnosti, i geometrickou posloupnost lze zapsat do druhého možného zápisu. Opět na několika počátečních členech ukážeme vazbu mezi jednotlivými členy:

$$a_1 = a_0 . q$$
$$a_2 = a_1 . q = (a_0 . q) . q = a_0 . q^2$$
$$a_3 = a_2 . q = (a_1 . q) . q = (a_0 . q) . q^2 = a_0 . q^3$$

Pro n -tý člen pak dostáváme vztah $a_n = a_0 . q^n$.

6.2. Nekonečné řady

Nejen v praxi, ale i v matematické teorii se často vyskytuje potřeba s posloupnostmi dále pracovat. Významné je například dokázat sečít všechny členy dané posloupnosti, což není jednoduché, vzhledem k tomu, že posloupnost jich má nekonečno. Z toho důvodu byl vybudován teoretický přístup, který dokáže součet nejen vyjádřit poměrně jednoduchým zápisem, ale také určit, zda existuje konečný součet členů posloupnosti a alespoň u některých posloupností umožňuje součet přímo vyjádřit. Mluvíme zde o teorii tzv. **nekonečných řad** .

Def.6.3: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Součet všech členů této posloupnosti nazveme **nekonečná řada** a označíme ji $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Součet nekonečné řady se provádí za pomoci limity a pomocné **posloupnosti** tzv. **částečných součtů** . Tu značíme s_n a každý její člen je definován jako součet všech členů posloupnosti od počátku až po n.

$$\begin{array}{lcl} s_1=a_1 & & s_1=a_1 \\ s_2=a_1+a_2 & & s_2=s_1+a_2 \\ s_3=a_1+a_2+a_3 & \text{Odtud je zřejmé, že současně platí} & s_3=s_2+a_3 \\ \vdots & & \vdots \\ s_n=a_1+\ldots+a_n & & s_n=s_{n-1}+a_n \end{array}$$

Pokud budeme uvažovat limitu posloupnosti částečných součtů (pro n jdoucí k nekonečnu), měla by tato limita, pokud existuje, být rovna součtu původní nekonečné řady. Platí:

- Jestliže existuje vlastní (tj. konečná) limita posloupnosti částečných součtů, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a její součet je roven s.
- Jestliže je limita posloupnosti částečných součtů $\lim_{n\to\infty} s_n$ nevlastní, tj. ±∞, pak říkáme, že nekonečná řada určitě diverguje k ±∞.
- Pokud limita posloupnosti částečných součtů neexistuje, říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.
- Jestliže řada určitě diverguje, nebo osciluje, říkáme obecněji, že diverguje.

Př.6.3: Na příkladu **geometrické řady**, což je nekonečná řada vzniklá z geometrické posloupnosti, si vyzkoušíme sečíst řadu. Vzhledem k tomu, že geometrická posloupnost začíná již v $n = 0$, je potřeba to v geometrické řadě zohlednit. Proto je její tvar následující:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} \quad = a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + \dots$$

Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ pak nabývá tohoto tvaru pro n -tý člen:

$$\begin{aligned} s_n &= a + a.q + a.q^2 + \dots + a.q^{n-1} \\ &= a\left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Pro (n+1) -tý člen je to pak:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a + a.q + a.q^2 + \dots + a.q^{n-1} + a.q^n \\ &= a + q.\left(a + aq + \dots + aq^{n-1}\right) \\ &= a + q.s_n \end{aligned}$$

Současně pro všechny posloupnosti částečných součtů platí $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Pokud tyto dva výrazy porovnáme, získáme výraz pro n -tý částečný součet.

$$a.q^n + s_n = a + q.s_n \;\Rightarrow\; s_n = \frac{1-q^n}{1-q}.a$$

Z definice konvergence nekonečné řady pak plyne, že pro $|q|<1$ řada konverguje a všude jinde diverguje, přičemž pro $q\geq 1$ určitě diverguje a pro $q\leq -1$ osciluje.

Jestliže se na závěr příkladu zaměříme na součet celé konvergující řady, získáme následující výraz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,.q^{n-1}=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}.a=\frac{1}{1-q}.a$$

K nekonečným řadám se váže několik vět, které jsou významné pro určování, zda ta která řada konverguje:

- Zaprvé, dle tzv. Cauchy-Bolzanova kritéria konvergence, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když pro každé kladné číslo ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé číslo n větší nebo rovno n_0 platí, že absolutní hodnota součtu p po sobě jdoucích členů posloupnosti od indexu n je menší, než ε. To můžeme vyjádřit zápisem
$$\sum a_n\, konv. \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon>0\, \exists n_0\in\mathbb{N}:\; \forall n,p\in\mathbb{N},\; n\geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\epsilon$$
- Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Naopak to ovšem neplatí. To znamená, že posloupnost příslušná každé konvergující řadě má limitu rovnou nule, ovšem to, že je limita posloupnosti rovna nule, samo o sobě nestačí k tomu, aby nekonečná řada konvergovala.
- Charakter řady (tj. konvergence, určitá divergence, oscilace) nezávisí na konečných změnách. Pokud tedy v konvergující, resp. divergující řadě nahradíme konečný počet jejích členů zcela odlišným číslem, řada bude stále konvergovat, resp. divergovat.

Při posuzování, zda daná nekonečná řada konverguje, či nikoliv, se rozlišují dva pojmy. Tzv. **absolutní konvergence** a **relativní konvergence**. **Absolutně konvergentní** řada je taková, kde řada absolutních hodnot jejích členů konverguje. Neboli kde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Současně platí, že pokud konverguje tato řada absolutních hodnot, pak konverguje i původní řada. Relativně konvergentní řada je naproti tomu taková, která sama konverguje, ale řada absolutních hodnot jejích členů $\sum^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Pro řady, které se skládají z nezáporných členů, byla vyvinuta kritéria, podle nichž lze rozhodnout, zda konvergují, nebo ne. Díky nim lze posuzovat absolutní konvergenci všech řad. Vzhledem k tomu, že tento text představuje pouze základní exkurz, uvedeme zde pouze dvě z relativně početné množiny existujících kritérií.

- Tzv. 1. srovnávací kritérium používá pro zjištění konvergence nezáporné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jinou nezápornou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, přičemž platí vztah $a_n \le b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vzhledem k tomu, že jsou obě řady nezáporné, jsou identické s k nim příslušnými řadami absolutních hodnot jejich členů, a tedy můžeme mluvit o absolutní konvergenci.
- Podílové, neboli d'Alembertovo kritérium využívá podílů mezi členy řady. Jestliže existuje $q \in [0;1)$ takové, že pro všechna n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, pak řada konverguje.

6.3. Aplikace posloupností a nekonečných řad

Jak jsme zmínili již na začátku této kapitoly, posloupnosti a nekonečné řady mají mnohá využití jak v matematice, tak v dalších vědních disciplínách, ekonomii nevyjímaje. Přitom nemusí sloužit ve smyslu přímé aplikace a k výpočtům, ale mohou být součástí složitějších definic a hrát roli spíše nástroje zprostředkujícího další poznatky. Tím máme na mysli to, že posloupnosti jsou používány například v definicích některých významných konstant. Můžeme uvést příklad Eulerova čísla,

které je definováno jako $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Ukázkou využití posloupností v ekonomii by mohla být i analogie příkladu týkajícího se růstu HDP, který jsme zmiňovali ve třetí kapitole. A to pouze s tím rozdílem, že bychom čas neuvažovali jako spojitý, ale jako diskrétní. Tzn., že bychom měli opět model konstantního 3% růstu, pouze bychom velikost HDP udávali jen jednou za určité období (např. jednou ročně). V praxi mají na HDP vliv náhodné vlivy, ovšem pokud budeme daný růst brát jako předpoklad modelu, můžeme posloupnost využít.

Nekonečných řad se v ekonomii využívá i přímo. Jmenujme, stejně jako již v předchozích kapitolách, opět neoklasickou ekonomii, která je na Ekonomicko-správní fakultě MU vyučována v předmětu Neoklasická makroekonomie. Zde se do komlexního modelu, který je v rámci předmětu budován, zapojuje tzv. plánovací horizont spotřebitele. Jedná se období, které spotřebitel bere v potaz ve svých úvahách o rozdělení celkových příjmů a výdajů. A přitom je plánovací horizont považován za nekonečný. Vzhledem k tomu, že v daném období by se měly celkové příjmy a celkové výdaje rovnat, je potřeba součet veškeré spotřeby a veškerých příjmů nějak vyjádřit, a to je možné právě prostřednictvím nekonečné řady.

Současně jsou příjmy a spotřeby budoucích období **diskontovány** , proto mají nekonečné řady spotřeby a příjmů tvar tzv. mocninných řad. To je speciální typ nekonečných řad tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$. V případě diskontování je $x = 1 + R$, kde R je úroková míra.

Závěr

V předkládané práci, která je návrhem učebnice matematiky pro ekonomy, jsme stručně popsali a vysvětlili matematickou teorii potřebnou pro pochopení ekonomických konceptů vyučovaných v rámci základních kurzů na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity. Přitom jsme dbali na logickou návaznost jednotlivých kapitol tak, aby studenti mohli v obtížnějších partiích vycházet z dříve objasněných pojmů a zákonitostí, a přitom jsme se důsledně drželi již zavedených pojmů, abychom ukázali provázanost látky a užitečnost všech partií učebnice.

I když první dvě kapitoly týkající se teorie množin a reálných čísel obsahovaly místy opravdu základní a všeobecně známé informace a současně i záležitosti, které jsou v ekonomii zřídka přímo využitelné, považujeme je za nedílnou součást správné učebnice. Ta by měla, dle našeho názoru, obsahovat nejen přímo využitelné a nové informace, ale měla by srovnat úroveň znalostí studentů z různých středních škol a poskytovat i vysvětlení toho, proč některé matematické koncepty fungují a na základě čeho.

Třetí, čtvrtá a pátá kapitola tvoří, z hlediska samotných aplikací, nejdůležitější část učebnice. Pojednávají o reálných funkcích, které jsou v ekonomii široce využívány, a o jejich vlastnostech. Nejdůležitější součástí tohoto celku je teorie věnovaná derivacím, kde se snažíme o co nejzřetelnější vysvětlení celého konceptu i jeho použití. Poslední kapitola pak shrnuje nejdůležitější poznatky o posloupnostech a nekonečných řadách, které jsou sice mnohdy pouze nástrojem v rámci složitější matematické i ekonomické teorie, ale nalézají i přímé uplatnění.

Vzhledem k tomu, že si učebnice klade za cíl představit studentům ekonomie matematiku jako logický nástroj, který mohou využívat, nezacházeli jsme do příliš velkých podrobností a vynechali jsme některé, pro ekonoma nepodstatné, věty. Také jsme, snad až na výjimky, nedokazovali uváděná tvrzení. Naproti tomu jsme výklad doplňovali větším množstvím aplikačních příkladů, které tvořily vždy poslední část kapitoly a ukazovaly tak využití probrané látky. Zaměřovali jsme se především na základní ekonomickou teorii, vzhledem k tomu, že učebnice je určena nižším ročníkům, ale v některých případech jsme uváděli i složitější aplikace (např. z neoklasické ekonomie), abychom studentům ukázali šíři možných využití a učinili pro ně učebnici užitečnou jako pomůcku i ve vyšších ročnících.

Předepsaný rozsah práce nám samozřejmě neumožnil vysvětlit a probrat všechna témata matematické teorie, která jsou potřebná pro studium na Ekonomicko-správní fakultě. Učebnice obsahující vše by rozsah překročila několikanásobně. Proto jsme vybrali spíše témata základní, která jsou určitě využitelná již v prvních ročnících studia a představují dobrý základ, na němž se dá vystavět i další, složitější teorie.

Jestliže by předkládaný text skutečně sloužil jako učebnice matematiky pro studenty Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity, označili bychom jej jako první díl vícedílného souboru učebnic, který by mohl být dopracován ve stejném duchu, jako tento koncept.

Použitá literatura

[1] MACÁKOVÁ, Libuše a kol. *Mikroekonomie II: Cvičebnice*. 3. upravené vyd. Praha: Melandrium. 2003. ISBN 80-86175-28-6

[2] DOŠLÁ, Zuzana. - KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita. 2004.

[3] FUCHS, Kamil. - TULEJA, Pavel. *Základy ekonomie*. 1. vyd. Praha: EKOPRESS. 2003. ISBN 80-86119-74-2

[4] LOVELL, Michael C. *Economics with calculus*. Singapore: World scientific. 2004. ISBN 9812388257

[5] LUDERER, Bernd. - NOLLAU, Volker. - VETTERS, Klaus. *Mathematical formulas for economists*. 3. vyd. Berlin: Springer. 2007. ISBN 13 978-3-540-46901-8

[6] HARRISON, Michael. - WALDRON, Patrick. *Mathematical Economics and Finance*. 1998.

[7] ROSSER, Mike. *Basic mathematics for economists*. 2. vyd. New York: Routledge. 2003.

[8] BLUME, Lawrence. - SIMON, Carl P. *Mathematics for economists*. 1. vyd. New York: W. W. Norton & Company. 1994.

[9] *Algebra a teoretická aritmetika.* Edited by Pavel Horák. Brno : Rektorát Masarykovy univerzity Brno, 1991. 196 s. ISBN 80-210-0320-0.

[10] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. 3. dopl. vyd. Praha : Academia, 1976. 669 s.

[11] *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Edited by Zuzana Došlá - Ondřej Došlý. Vyd. 2. přeprac. Brno : Masarykova univerzita, 1999. iv, 143 s.

[12] NOVÁK, Vítězslav. *Diferenciální počet v R*. Brno : Masarykova univerzita Brno, 1997. 250 s. ISBN 80-210-1561-6

Přílohy

Příloha 1: Množinové operace a jejich kombinace

Uvedeme několik rovnic, ze kterých budou dobře patrné vztahy mezi množinami a jejich průniky, resp. sjednoceními, resp. rozdíly. Současně zde uvidíme, jakým způsobem se pracuje s těmito operátory a jejich kombinacemi. Význam závorek v uvedených rovnicích je přitom stejný, jaký v klasických rovnicích, tedy takový, že se operátor před, resp. za závorkou vztahuje na všechny členy v závorce a současně že je vztah mezi členy v závorce řešen v rámci výpočtu „přednostně“.

$$M \cup (N \cap M) = M$$
$$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$$
$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$
$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$
$$M \cap (N \cup M) = M$$
$$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$$

Tabulka 1 : Vztahy mezi množinovým sjednocením a průnikem.([5])

$$M \setminus (M \setminus N) = M \cap N$$
$$M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$$
$$M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$$
$$(M \cup N) \setminus P = (M \setminus P) \cup (N \setminus P)$$
$$(M \cap N) \setminus P = (M \setminus P) \cap (N \setminus P)$$
$$M \cap N = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad M \setminus N = M$$

Tabulka 2 : Vztahy mezi množinovým sjednocením, průnikem a rozdílem ([5])

Rovnice v tabulkách 1 a 2 je možné ověřit například graficky tak, že zakreslíme jednotlivé množiny jako navzájem se částečně překrývající kruhy a vyznačíme oblast, která je popsána pravou a levou stranou rovnice. Porovnáním těchto dvou oblastí zjistíme, že rovnice platí. Vlastní ověření rovnic ponecháme jako cvičení čtenářům. Ještě poznamenáme, že druhá a třetí rovnice v tabulce 2 jsou známy jako tzv. **De Morganova pravidla**.

Příloha 2: Vlastnosti sledované u relací na množině

Mějme kartézský součin $A \times A = A^2$ Podle toho, jakou relaci na množině A, coby podmnožinu uvedeného kartézského součinu, vybereme, mluvíme o různých vlastnostech této relace. Rozlišujeme tak tyto vlastnosti relace (označíme ji ρ):

- **Reflexivita**, jestliže $(x, x) \in \rho \; \forall x \in A$. Tzn. že dvojice, kde je stejný prvek na prvním i druhém místě je prvkem relace v případě všech prvků množiny A.
- **Irreflexivita**, jestliže naopak $(x, x) \notin \rho \; \forall x \in A$. Tzn. že žádná dvojice, kde by byl první i druhý člen stejný, není prvkem relace.
- **Symetrie**, pokud $(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$. Tedy pokud je nějaká dvojice (x,y) prvkem relace, tak pak i dvojice (y,x) (tj. opačné pořadí prvků) je prvkem relace.
- **Asymetrie**, pokud $(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \notin \rho$. Tedy naopak, pokud je nějaká dvojice (x,y) prvkem relace, pak opačná dvojice (y,x) tímto prvkem není.
- **Antisymetrie**, pokud platí $((x, y) \in \rho) \wedge ((y, x) \in \rho) \Rightarrow x = y$. To znamená, že pokud se stane, že jsou prvky relace dvojice (x,y) i (y,x), pak nutně platí, že $x = y$, tedy x a y jsou stejným prvkem A.
- **Tranzitivita**, jestliže $((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho$. Tedy jestliže x je v relaci s y a současně y je v relaci se z, pak platí, že x je v relaci i se z.