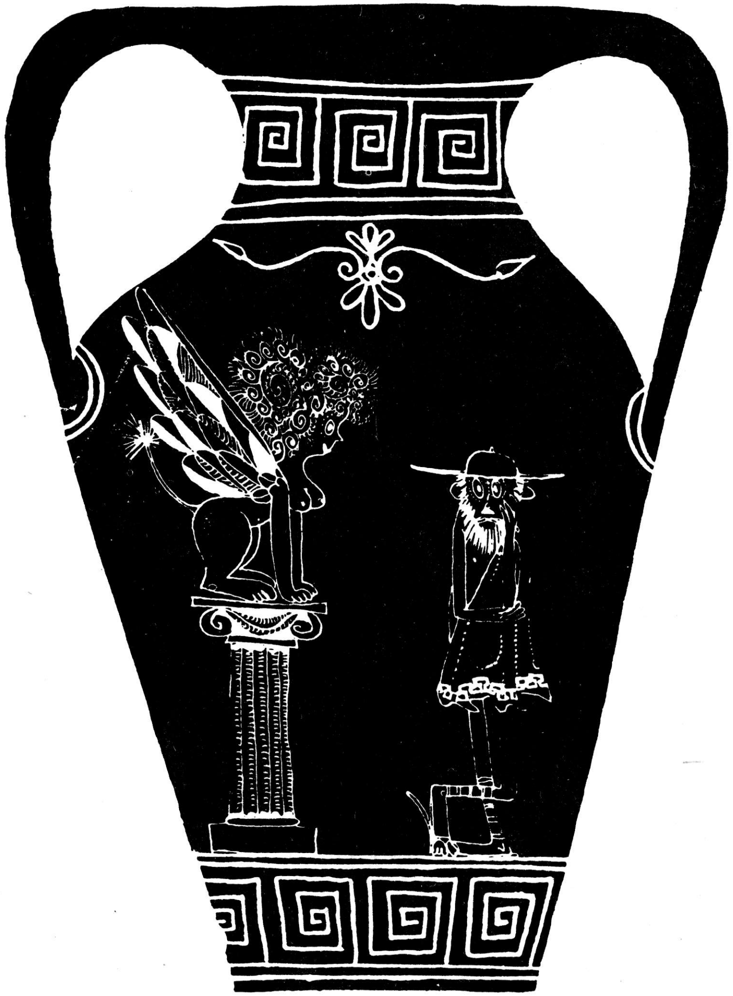


Matematika pro volné chvíle

(zábavou k vědě)

Druhé, upravené vydání

STANISLAW KOWAL
PŘELOŽIL RNDr. JIŘÍ JARNÍK, CSc.

POLYTECHNICKÁ
KNIŽNICE
I. ŘADA
VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ
SVAZEK 114

PRAHA 1985

Knížka vtipnou a zábavnou formou seznamuje čtenáře s mnoha význačnými objevy z historie matematiky a s řadou zajímavostí z elementární matematiky i z některých oblastí matematiky vyšší (analytické geometrie, topologie, variačního počtu, počtu pravděpodobnosti).

Obtížnější témata jsou oživena aforismy, hlavolamy a mnoha řešenými úlohami, na nichž může čtenář vyzkoušet schopnost logického myšlení i svůj důvtip.

Text je provázen bohatým ilustračním materiálem. Nepředpokládá hlubší znalosti matematiky.

Knížka je určena nejširšímu okruhu čtenářů, zvláště mládeži.

Stanislaw Kowal: Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne.
Wydanie 3. Warszawa, WNT 1971

Redakce teoretické literatury
Hlavní redaktorka RNDr. Blanka Kutinová, CSc.
Odpovědná redaktorka RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Obsah

Předmluva k českému vydání

Milý čtenáři,

knížka polského autora S. Kowala, jejíž překlad bereš do ruky, tě má pobavit i poučit. Dozvíš se z ní leccos o dějinách matematiky i o problémech, kterými se matematika zabývá dnes. Úlohy, které ti autor předloží k řešení, budou nejrůznějšího druhu: od logických „zeber" přes řešení rovnic a geometrické konstrukce až k různým „Kolumbovým vejcím" a hříčkám. Tematická šíře znemožňuje samozřejmě soustavný a podrobný výklad – autor vědomě a záměrně od takového způsobu upustil. Na různých místech jsme proto překlad opatřili – i když jen v nejnutnější míře – vysvětlujícími i doplňujícími poznámkami. Za mnohé z nich, zejména historického charakteru, patří dík lektorovi překladu. Doufáme, že pokud tě knížka na některém místě neuspokojí, nenecháš se tím odradit, ale budeš se naopak snažit najít hlubší porozumění v jiných knížkách. Proto jsme rozšířili seznam příbuzné literatury, zejména o knížky v českém a slovenském jazyce. A budeš-li mít, milý čtenáři, při řešení některé úlohy pocit, že tě autor „doběhl", rozřeš si závěrečný záhadný nápis a uvědom si, že autorovým cílem nebylo naučit tě matematice, ale užitečným způsobem tě pobavit a vyprovokovat k samostatnému myšlení.

Předmluva

Knížka, kterou autor odevzdává do rukou čtenářů, není systematickým kursem „zábavné matematiky“. Její cíl je jiný.

Má poskytnout čtenáři tvůrčí zábavu a odpočinek po práci, chce mu povědět o věcech zajímavých i užitečných. Články, které čtenář najde, jsou krátké a stručné, ale týkají se témat, která bezpochyby zajímají každého čtenáře toužícího po vědění. V knížce se střídají obtížnější témata s anekdotami, aforismy s hlavolamy i historickými informacemi nejen z matematiky, ale i z příbuzných věd. Aby čtenář nebyl nucen řešit ne vždy snadné úlohy, podává autor na konci každé kapitoly řešení úloh, kterých samozřejmě nemusí čtenář použít, chce-li vyzkoušet vlastní schopnosti. Látka shromážděná v knížce nepatří jen do elementární matematiky, ale týká se i některých oblastí vyšší matematiky (analytické geometrie, topologie, variačního počtu a počtu pravděpodobnosti), která vůbec není tak strašná, jak se o ní říká.

Hojnost ilustrací má zpestřit čtení knížky a učinit její výklad názornějším.

Vedle původních statí obsahuje knížka i materiál vybraný z odpovídající polské i cizí literatury.

Někteří čtenáři budou asi autorovi vyčítat nedostatek soustavného přístupu k látce shromážděné v této knížce. Autor to však učinil úmyslně, neboť se domnívá, že systematické zpracování může čtenáře nudit a přeměnit knížku v jakousi příručku. Zábava a odpočinek, jež byly autorovým cílem při práci na této knížce, nevyžadují pedantickou soustavnost.

Místo úvodu

1. Aristoteles

S rozkoší užíváme matematiky a děje se nám jako Lotofágům, neboť okusivše ji, nechceme se jí již vzdát a ovládá nás jako květ lotosu.

2. Euklides

V matematice neexistuje zvláštní cesta pro krále.

3. Roger Bacon

Kdo podceňuje výsledky matematiky, škodí celé vědě, neboť ten, kdo nezná matematiku, nemůže poznat ostatní exaktní vědy a nemůže pochopit svět.

4. Immanuel Kant

V každém poznání je tolik vědy, kolik je v něm matematiky.

5. Jan Śniadecki

Matematika je královnou všech věd. Jejím milencem je pravda a prostota a průzračnost jsou jejím oděvem ... Matematika, která tolik prospěla společnosti, vědám a uměním, stane se nakonec vůdcem lidského rozumu ve všem poznání.

Kapitola 1 Žijeme mezi čísly

Žijeme uprostřed čísel. Stále musíme platit nebo vystavovat nějaké účty. V konstrukčních kancelářích, v laboratořích, v obchodech, všude se počítá a měří. Plánování, statistika a účetnictví jsou důležitá oddělení podniku a hlavním obsahem jejich práce je počítání a měření. Počítají a měří nejen lidé, ale i stroje, které člověk povolal do svých služeb.

Současný stav naší civilizace vyžaduje, abychom dokázali pracovat stejně s velkými jako i s velmi malými čísly. Ale ani člověk před 5 000 lety se nemohl obejít bez počítání. Svědčí o tom zachované nápisy na pomnících, hliněné tabulky i papyry. Badatelé, kteří zkoumají, jak se lidstvo naučilo počítat, sahají nejen po těchto starých dokumentech, ale zkoumají i kulturu primitivních kmenů, žijících ještě v naší době, a také způsob, jakým se pojmu čísla postupně zmocňují malé děti.

Americký historik matematiky Florian Cajori ve svých „Dějinách elementární matematiky" („A History of Elementary Mathematics") vydaných v r. 1896 uvádí, že jeden z indiánských kmenů žijících v pralesích středního toku řeky Amazonky vyjadřuje číslo 3 slovem „poetarrarorinkoaroak". Cestovatel, který mu poskytl tuto informaci, pokládal uvedený výraz za slovo „tři", ale můžeme se domnívat, že to mohla být celá věta a ne jen jedno slovo. Ta věta mohla vyjadřovat nějaký „velmi velký" (větší než 2) soubor předmětů, pro který zmíněný kmen ještě nenalezl odpovídající číslovku.

Dnešní člověk používá čísel od raného dětství. Čísla jako 1, 2, 3, … , tj. přirozená čísla, potřebuje již v mateřské škole. Avšak přes velkou zběhlost v počítání s přirozenými čísly si jen málo uvědomuje jejich zajímavé vlastnosti. Existuje odvětví matematiky, které se zabývá zkoumáním přirozených čísel. Toto odvětví se nazývá *teorie čísel* (viz kap. 6). Zajímavým rysem teorie čísel je to, že její tvrzení se zdají nesmírně jednoduchá. Slovní vyjádření těchto tvrzení jsou srozumitelná i pro člověka se středním vzděláním, ale důkazy těchto jednoduchých tvrzení jsou často velmi obtížné a často přesahují možnosti i těch nejlepších matematických mozků.

Abychom mohli počítat, je třeba rozřešit dvě úlohy, totiž stanovit způsob počítání a vytvořit jména číslovek. Způsob počítání se vytvářel před tisíci let skoro u všech národů naší civilizace stejně. Základem počítání se stala převážně desítková soustava. Desítka obsahuje deset jednotek, stovka deset desítek, tisícovka deset stovek. Co se týče názvů číslic – číslovek, každý národ je vytvářel podle svých potřeb. V našem jazyce máme různé názvy pro čísla od nuly do devíti a pro tři mocniny deseti: 10^1 (deset), 10^2 (sto), 10^3 (tisíc). Staří Řekové měli název pro 10^4 – miriada a starověcí obyvatelé Indického poloostrova, kteří používali sanskrtského jazyka, znali číslovky označující další mocniny deseti až do 10^{10}. Dokud požadavky všedního dne ani vědy nebyly velké, stačily základní číslovky a číslovky od nich odvozené: deset tisíc, sto tisíc, tisíc tisíců. Ale postupným rozvojem věd a hospodářských vztahů vznikla již ke konci středověku potřeba používat čísel větších než tisíc tisíců a označovat je odpovídajícími jmény. Tak vznikly názvy milión, miliarda, bilión, trilión, kvadrilión, kvintilión atd. Je třeba upozornit, že těchto názvů se v různých zemích používá v různém významu. Tak např. v Polsku, Británii, v obou německých státech*) označuje milión 10^6, miliarda 10^9, bilión 10^{12}, trilión 10^{18}, kvadrilión 10^{24}, kvintilión 10^{30} atd.

Naproti tomu ve Francii, SSSR a USA milión označuje 10^6, bilión 10^9, trilión 10^{12}, kvadrilión 10^{15} atd.

Je snadné si domyslit, jak vznikly názvy milión, bilión, trilión, kvadrilión, kvintilión, … . Jsou složeny z trochu pozměněných latinských slov: bis (dvakrát), ter (třikrát), quater (čtyřikrát), … a koncovky „lión“. Jen číslovka „milión“ byla vzata z italštiny. Milione znamená italsky „velká tisícovka“.

Tímto způsobem se usnadnilo označování velkých čísel objevujících se v astronomii, fyzice, geografii, jako např. průměrná vzdálenost Země od Slunce – 150 000 000 km; plocha povrchu zeměkoule – 510 000 000 km^2; objem zeměkoule –
1 083 000 000 km^3;
hmotnost zeměkoule –
6 000 000 000 000 000 000 000 t.

Protože vypisování velkých čísel zabírá mnoho času i papíru, vědci se rozhodli psát tato čísla místo řadou nul ve tvaru 10^n. Číslo n udává, kolikrát je třeba napsat nulu**). Např. číslo

$$1\,083\,000\,000\,000$$

zapíšeme jako

$$1\,083 \,.\, 10^9,$$

číslo

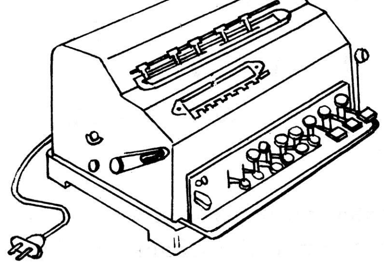
$$6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

zapíšeme jako

$$6 \,.\, 10^{21}.$$

Díky tomuto způsobu zapisování čísel můžeme vyjádřit malým počtem číslic i ta největší čísla získaná při astronomických měřeních. Astronomové tvrdí, že nejvzdálenější galaxie čili obří shluky hvězdných soustav skládající se z miliard hvězd se nacházejí od nás v takových vzdálenostech, že sluneční paprsek pohybující se rychlostí 300 000 km/s potřebuje miliardy let na jejich překonání. Odtud vyplývá, že tyto vzdálenosti činí asi 10^{22} km. Přesto i takové nepředstavitelné vzdálenosti, jaké dělí naši malou Zemi od vzdálených galaxií, můžeme vyjádřit velmi jednoduše v milimetrech ve tvaru zcela nenápadného čísla 10^{28} mm, neboť 10^{22} km $= 10^{22} \,.\, 10^6$ mm; 1 km $= 10^3$ m $= 10^3 \,.\, 10^3$ mm.

Člověk druhé poloviny dvacátého století počítá dobře. Možná, že ne tak rychle, jak to vyžaduje tempo současného pracovního rytmu i vědeckého pokroku, ale k čemu by byly počítací stroje? Nedokonalost zraku napravily brýle, mikroskopy a dalekohledy, nedokonalost sluchu mikrofony a zesilovače a nedokonalou početní zručnost elektronické počítací stroje, které počítají „rychlostí světla“.



Obr. 1

V následujících odstavcích pohovoříme o *číselných symbolech* čili *číslicích*, které jsou písmeny nádherné aritmetické abecedy, jejíž pomocí vyjadřujeme a zapisujeme *čísla*.

*) Také v Československu. (Pozn. překl.)

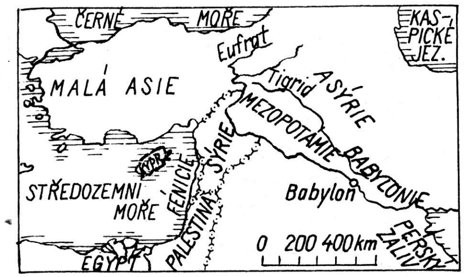
**) To platí ovšem jen tehdy, je-li základem číslo 10. (Pozn. překl.)

■ Číslice různých národů a věků

Mezopotámie

Uvažujeme-li o číslech, nemůžeme opomenout znaky, pomocí kterých je zapisujeme. Tyto znaky nazýváme číslicemi neboli ciframi.

Mezi nejstarší číselné znaky patří babylónské číslice. Podívejme se na mapu na obr. 2.

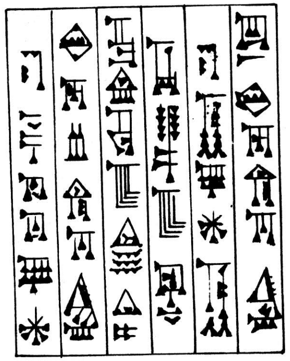


Obr. 2

Dvě silné černé vlnité čáry, to jsou řeky Tigrid a Eufrat. Staří Řekové nazývali tuto zemi Mezopotámií. Česky bychom jí říkali „Meziříčí“, protože zaujímá prostor mezi dvěma sesterskými řekami. Půldruhého tisíciletí před počátkem našeho letopočtu zaujímal část Mezopotámie mocný stát, jehož hlavním městem byl Babylón.

Již před pěti tisíci lety vzkvétala na území Mezopotámie věda a vznikaly knihovny. Je pravda, že neexistovaly tištěné knihy, ale zato se používalo k zápisům hliněných tabulek, na které také babylónští učenci psali svá díla. Teprve nedávno bylo toto bohatství odhaleno a mezi těmito tabulkami se nalezla také řada takových, z jejichž obsahu můžeme usuzovat na úroveň mezopotámských matematických znalostí. Písmo obyvatel Mezopotámie nazýváme klínovým, protože bylo tvořeno klínovými vrypy. Klínových znaků bylo velmi mnoho, ale k zaznamenání číslovek jich postačilo jen několik.

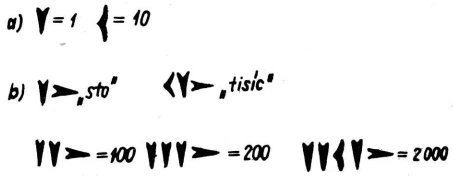
Obr. 3 ukazuje jednu z tabulek právního kodexu krále Chammurabiho.



Obr. 3

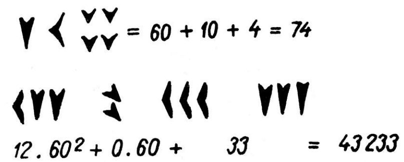
Na území Mezopotámie se užívalo tří číselných soustav: desítkově šedesátkové nepoziční soustavy, desítkové nepoziční a šedesátkové poziční soustavy. První dvě se používaly převážně v hospodářských a obchodních zápisech. Někdy se vyskytují i obě současně v jednom zápisu, ale postupně desítková soustava úplně vytlačila soustavu desítkově šedesátkovou. Šedesátkovou poziční soustavu bychom mohli nazvat soustavou „vědeckou". Vyskytuje se téměř výhradně v matematických textech.

K vyjádření číslovek stačilo několik znaků. Ve všech třech soustavách byly základem znaky pro čísla 1 a 10 (viz obr. 4a). Ve druhé soustavě byl i znak pro sto (obr. 4b), ale šlo o název řádu, kterému předcházel vždy znak pro počet jednotek tohoto řádu. Podobně tomu bylo i s tisícem (obr. 4b).



Obr. 4

Obr. 5



Obr. 6

Uvedenými znaky se zapisovala všechna čísla s využitím sčítání a násobení tak, že znak většího čísla předcházel znak menšího (obr. 5).

V šedesátkové soustavě se používalo jen znaků pro 1 a 10. Přitom znak jedničky mohl znamenat 1, 60, 60^2 atd. podle toho, na kterém místě stál.

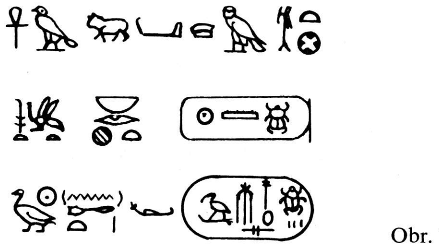
Mezopotámští vědci zavedli také symbol používaný ve významu nuly. Aby vyjádřili vynechané místo, psali dva nakloněné znaky jedničky.*) (Obr. 6.)

Matematici v Mezopotámii používali také obyčejných zlomků i šedesátinných zlomků (tj. takových, které mají ve jmenovateli 60, 60^2, 60^3 atd.), které psali tak, jako píšeme desetinné zlomky. Uměli provádět čtyři aritmetické operace s čísly přirozenými i racionálními (zlomky), počítat procenta, dělit čísla na poměrné částky. Z geometrie věděli jen tolik, kolik bylo potřebí pro zeměměřictví a stavitelství. Uměli vypočítat obsah obrazců omezených úsečkami, např. obsah trojúhelníků, čtyřúhelníků apod.**)

Egypt

Egyptské číslice jsou skoro stejně staré jako babylónské.

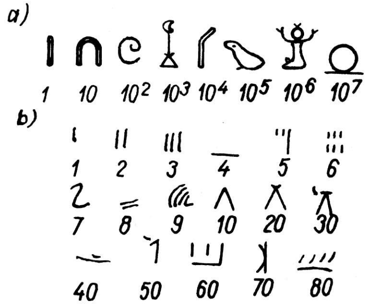
K zapisování myšlenek používali Egypťané znaků, které nazýváme hieroglyfy (obr. 7).



Obr. 7

Zjednodušené hieroglyfické písmo nazýváme hieratickým.

V obou druzích písem měli Egypťané zvláštní znaky pro číslice (obr. 8a, b).



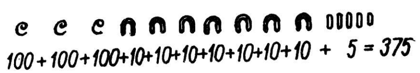
Obr. 8

Egypťané psali nejdříve číslice vyššího řádu a potom nižšího. Používali při tom aditivního (obr. 9) či multiplikativního principu. Egypťané používali

---

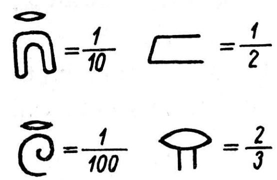
*) Je jasné, že při zápisu čísel uvedenými způsoby mohlo docházet k omylům při čtení číselných údajů. Dalším důvodem nejasností byla nedůslednost v psaní znaku pro nulu, který se dlouho vůbec neužíval a i později se psal jen uprostřed čísla, ale nikoli na konci. „Řádovou hodnotu" čísla bylo proto nutno vyčíst z kontextu. Podrobněji viz o tom např. A. A. Vajman: Šumero-vavilonskaja matěmatika, Moskva 1961. (Pozn. překl.)

**) Matematici ve staré Mezopotámii dosáhli některých překvapujících výsledků. Uměli řešit řadu rovnic vyšších stupňů speciálních typů, znali algebraické identity jako např. vzorec pro $(a + b)^2$ a uměli je i geometricky vyjádřit, dovedli vypočítat přibližné hodnoty některých neracionálních čísel apod. K usnadnění výpočtů, které byly v šedesátkové soustavě velmi náročné na paměť (např. součin 59 . 37 patří ještě do „malé násobilky"!), vypracovali řadu tabulek násobků, převrácených hodnot čísel aj. (Pozn. překl.)



Obr. 9

také zlomků. S výjimkou zlomku $\frac{2}{3}$ zapisovali jen zlomky s čitatelem 1 – říkáme jim tzv. kmenné zlomky. Jiné zlomky neuměli ani slovně vyjádřit. Kmenné zlomky psali číselným symbolem jmenovatele, nad nímž byl hieroglyf r (= díl) ⊂, případně v hieratickém písmu tečka. Pro $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ měli zvláštní znaky (obr. 10). K vyjádření poměru dvou přirozených čísel používali součtu kmenných zlomků. Například $\frac{23}{40}$ psali jako $\frac{1}{4}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{8}$, což znamenalo $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{23}{40}$.



Obr. 10

Egypťané se vyjadřovali např. takto: Jestliže 23 chlebů rozdělíme mezi 40 osob, pak každá dostane jednu čtvrtinu, jednu pětinu a jednu osminu jednoho chleba.

Hlavním zdrojem našich vědomostí o egyptské matematice jsou dva papyry z počátku 2. tisíciletí před naším letopočtem, z nichž jeden, nalezený až v roce 1853, byl psán faraónovým písařem Ahmesem (srov. str. 33).

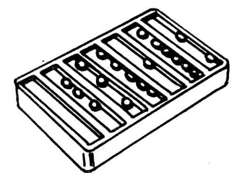
Řecko a Řím

Římské číslice jsou všeobecně známé a používají se ještě nyní, např. na hodinových číselnících, v nápisech na pamětních deskách, k číslování stran knih apod. Je známo, že L označuje padesát, C sto, D pět set, M tisíc. Symboly C a M jsou počáteční písmena slov „centum“ – sto a „mille“ – tisíc. Symboly L a D jsou pravděpodobně také počátečními písmeny jistých slov, ale tato slova se nezachovala. Je pravděpodobné, že to byla slova etruská nebo některého latinského nářečí. Pomocí číslic psali Římané čísla na základě sčítání nebo odčítání, např. LX = 60 (50 + 10), XL = 40 (50 – 10), CM = 900 (1 000 – – 100), MC = 1 100 (1 000 + 100) atd.

Římské číslice

$$I = 1, X = 10, C = 10^2, M = 10^3,$$
$$V = 5, L = 50, D = 500.$$

Římané používali zlomků se jmenovatelem 60 (babylónských) nebo se jmenovateli 12, 24 a 48 $\left(\frac{1}{24}\right.$ je polovina z $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{48}$ je $\frac{1}{4}$ z $\left.\frac{1}{12}\right)$. Římští školáci poznávali zlomky v souvislosti s počítáním peněz a s užíváním měr a vah. Římská mince as, zpočátku ražená z mědi, vážila 1 libru a dělila se na 12 uncí. Existoval zvláštní název deunx pro vyjádření $\frac{11}{12}$ (deunx = de uncia čili as bez jedné unce). Počítání zpaměti bylo ulehčováno abakem (abacus), tj. deskou rozdělenou na svislé sloupce, po kterých se posouvaly kamínky nebo k tomu účelu určené kostky (obr. 11).



Obr. 11

Řekové používali dvou způsobů zapisování čísel, iónského a atického. Atéňané užívali ke psaní čísel počátečních písmen příslušných číslovek.

Γ – značilo 5, neboť gènte znamená řecky pět;

Δ – označovalo 10, neboť dèka znamená řecky deset;

H – označovalo 100, neboť hekatòn znamená řecky sto;

X – označovalo 1 000, protože X (chí) je počáteční písmeno slova chilion – tisíc;

M – označovalo 10 000, protože miriàs znamená řecky deset tisíc.

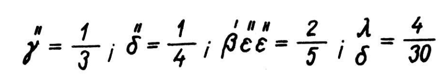
I, II, III, IIII označovalo 1, 2, 3, 4. Těmito číslicemi mohl Řek antické epochy vyjádřit každé potřebné číslo (obr. 12).

1	I	30	ΔΔΔ
2	II	40	ΔΔΔΔ
3	III	50	𐅄
4	IIII	60	𐅄Δ
5	Γ	70	𐅄ΔΔ
6	ΓI	80	𐅄ΔΔΔ
7	ΓII	90	𐅄ΔΔΔΔ
8	ΓIII	100	H
9	ΓIIII	200	HH
10	Δ	400	HHHH
11	ΔI	500	𐅅
15	ΔΓ	1000	X
20	ΔΔ	10000	M

Obr. 12

Iónský způsob, který vytlačil postupně starší zápis atický, vyjadřoval čísla písmeny řecké abecedy. Aby se napsané číslo odlišilo od slova, psala se nad ním čárka. Tímto způsobem psali obyvatelé Milétu, Alexandrie a řeckých oblastí, které byly pod vlivem těchto měst. Pravděpodobně používali iónských číslic Thales, Euklides, Archimédes, Apollónios, Héron i jiní učenci a filozofové činní v Alexandrii a Malé Asii.

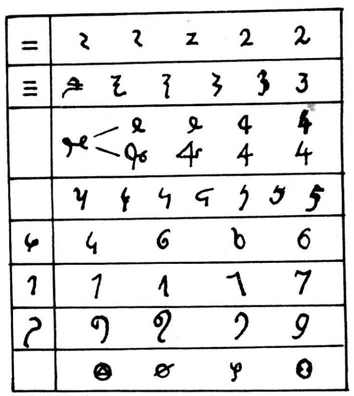
Zlomky psali Řekové různým způsobem. V iónském zápisu se např. $\frac{1}{3}$ (= triton) značila $\overset{ov}{\gamma}$, což se později zkrátilo na $\overset{\shortparallel}{\gamma}$. Kmenné zlomky se tedy zapisovaly pomocí jmenovatele (γ znamenalo 3) se dvěma čárkami nad ním. Jestliže v čitateli zlomku nebyla jednička, ale jiné číslo, psali Řekové jednou čitatel (s jednou čárkou) a dvakrát jmenovatel (se dvěma čárkami). Existoval i jiný způsob psaní zlomků. Jmenovatel se psal nad čitatelem, ale bez zlomkové čáry. Tak psal zlomky Diofantos, velký matematik 3. – 4. století našeho letopočtu. (Obr. 13.)



Obr. 13

Indické číslice

Číslice, kterých nyní všeobecně používáme, pocházejí od Indů. Evropské národy je poznaly díky Arabům (obr. 14). Slavný matematik Leonardo Fibonacci je jako první v Evropě uvedl ve svém velkém díle „Liber Abaci" („Kniha o abaku") vydaném v roce 1202. Polsko bylo jednou z prvních zemí, která zavedla indické číslice, a to ve 14. stol. Aritmetika založená na indických číslicích byla vyučována na krakovské univerzitě.*)



Obr. 14

■ Zábavné úlohy

Archimédes a číslo

Obyčejná sklenice o obsahu 250 cm^3 je naplněna čistým, co nejdrobnějším pískem. Kolik zrnek písku je ve sklenici?

Archimédes (287 – 212 př. n. l.)

Budeme-li předpokládat tak jako Archimédes, že jedno zrnko máku obsahuje 10 000 zrnek nejdrobnějšího „písku"**), a uvážíme-li, že průměr makového zrnka je asi $\frac{1}{2}$ mm čili že 1 mm^3 obsahuje 80 000 zrnek písku (částeček prachu), pak v 250 cm^3 bude 80 000 × × 1 000 × 250 čili 20 miliard částeček prachu.

Je to překvapující číslo. Archimédes chtěl dokázat, že neexistuje takové konečné množství, které by nebylo možné spočítat. Proto vypočetl, kolik zrnek písku obsahuje koule, jejíž poloměr se rovná vzdálenosti Země od sféry stálic. Pro svoje výpočty Archimédes zkonstruoval speciální početní systém, jehož jednotkou byla miriada čili 10 000. Abychom si udělali alespoň přibližnou představu o obrovitosti čísla, které Archimédes obdržel, vypočteme, kolik zrnek písku obsahuje koule přibližně stejně velká jako naše Země, která ve srovnání s Archimédovou koulí je pouhou tečkou.

Objem Země je asi 10^{27} cm^3. Abychom sklenkou o obsahu 250 cm^3 zaplnili pískem kouli velikosti Země, je třeba vysypat $10^{27} : 250 = 4 . 10^{24}$ sklenek písku. Předpokládáme-li, že pomocí nějakého automatického zařízení můžeme vysypat 1 000 sklenek za sekundu, potřebujeme na vysypání $4 . 10^{24}$ sklenek písku čas $4 . 10^{24} : 1\,000 = 4 . 10^{21}$ sekund. Rok má 31 536 000 sekund (přibližně 32 000 000 sekund). Práce automatu by tedy trvala $4 . 10^{21} : 32\,000\,000 \approx 1 . 10^{14}$ let (100 000 000 000 000 let) čili 100 biliónů let. Připomeňme si, že podle výpočtu geologů je stáří naší Země asi 5 až 8 miliard let čili asi 10 000krát méně, než by trvala práce automatu.

Dejte mi pevný bod a ...

Plutarchos z Heroneie (50 – 125), když popisuje život Archimédův (287 – 212 př. n. l.), tvrdí, že Archiméda vedla hluboká víra v sílu jeho strojů k výroku: „Dejte mi pevný bod a pohnu i Zemí". Je samozřejmé, že Archimédův pevný bod by musel být někde mimo naši Zemi, na nějaké jiné „Zemi". Vypočtěme, jak dlouhé by muselo být rameno páky, pomocí které by Archimédes mohl pohnout Zemí.

Hmotnost Země se rovná $6 . 10^{24}$ kg. Předpokládejme, že člověk může zvednout za jednu sekundu 60 kg do výše jednoho metru. Pak jedno rameno páky musí být tolikrát delší než druhé, kolikrát číslo $6 . 10^{24}$ je větší než číslo $6 . 10$, čili 10^{23}krát.

Nechť konec kratšího ramena se pozvedne (spolu se Zemí) jen o 1 cm. Pak konec delšího ramena klesne o $1 \text{ cm} . 10^{23} = 1 \text{ m} . 10^{21} = 10^{18}$ km. Je to vzdálenost více než šesttisícmiliónkrát větší než vzdálenost Země od Slunce.

Předpokládejme, že rychlost klesání je 1 m/s. Pak pohyb delšího ramena musí trvat 10^{12} let. Ale i kdyby delší rameno klesalo rychlostí světla (300 000 km/s), i pak by jeho pohyb trval asi 100 000 let.

Výsledek: Archimédův výrok byl jen básnickou nadsázkou.

*) Jeden z prvních našich dochovaných matematických traktátů, podle něhož se učilo koncem 14. století na Karlově univerzitě (založené 1348), „Algorismus prosaycus" magistra Křišťana z Prachatic, hned v úvodu učí psaní čísel arabským (tj. indickým) i římským způsobem. (Pozn. překl.)

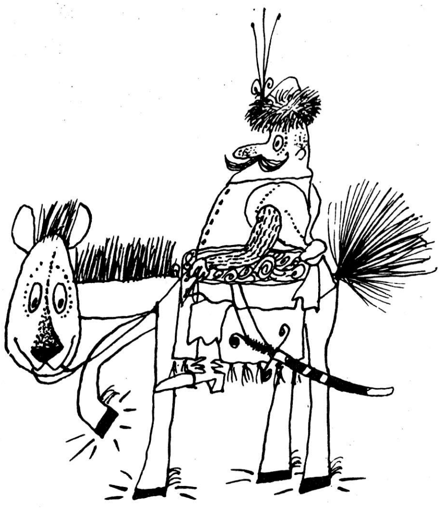
**) Archimédes měl ve skutečnosti na mysli částečky prachu.

Energie hlasu

Představme si, že současně mluví sto tisíc lidí. Kdybychom přeměnili energii zvukových vln, které se přitom vytvoří, na elektrickou energii, ukázalo by se, že je tak malá, že by sotva stačila k rozsvícení žárovky kapesní svítilny. Síla současného hovoru všech lidí na světě odpovídá více méně síle automobilového motoru. Není tedy nic divného, že pouhým mluvením lze dosáhnout tak málo ...

Historická anekdota

Jerzy Ossoliński, jeden z významných polských šlechticů sedmnáctého století, se vypravoval jako vyslanec



do Říma, a chtěje všechny oslnit přepychem, nařídil vyrobit pro svého koně stříbrné podkovy a přibít je zlatými podkováky. Když mistr kovář oznámil částku, kterou žádal za vykonání této práce, pan Ossoliński prohlásil, že cena je přehnaná a že tolik nezaplatí. Tu se mistr usmál a řekl: „V tom případě udělám panu vyslanci čtyři stříbrné podkovy zadarmo, ale prosím, abyste mi za 24 zlatých podkováků zaplatil tímto způsobem: za první podkovák 2 groše, za druhý 4 groše, za třetí 8 grošů a tak dál. Za každý následující zlatý podkovák dvakrát více než za předchozí.“

Netuše lest, pan Ossoliński přijal tuto podmínku, tím spíše, že si potichu vypočetl, kolik bude stát první podkova, a vyšla mu zcela skromná částka 126 grošů. Když kůň již byl okován a mistr kovář přinesl pergamen s účtem, pan Ossoliński se polekal a velmi zdvořile prosil mistra kováře, aby byl tak laskav a přijal tu cenu, kterou si sám původně určil. Mistr, uspokojený poučením, které udělil jasnému pánu, souhlasil s tím, aby mu bylo zaplaceno podle jeho původního přání. Jaká částka byla napsána na pergamenu? Kolik zlatých by musel pan Ossoliński zaplatit, kdyby mistr kovář neustoupil?

Vdoví groš

Z bible je známá pověst o vdovím groši. Kdyby vdova vložila svůj groš do současné spořitelny, pak instituce, pro kterou by vdova svůj groš vložila, by dostala např. r. 1968 ... Vypočtěme, kolik by instituce dostala po uplynutí 1 968 let. Nechť spořitelna vyplácí úrok 4 %. Po uplynutí jednoho roku vzroste

$$1 \text{ groš na } \left(1 + \frac{4}{100}\right) \text{ groše} = (1{,}04)^1$$

groše, po dvou letech na $(1{,}04)^2$ groše, po třech letech na $(1{,}04)^3$ groše atd. Po uplynutí 1 968 let vzroste 1 groš na $(1{,}04)^{1\,968}$ groše. Označme $N = (1{,}04)^{1\,968}$. Pak $\log N = 1\,968 \times \log 1{,}04 \approx 1\,968 \,.\, 0{,}017\,0 = 33{,}456\,0$. Odtud dostaneme N grošů $= 2\,858 \times 10^{30}$ grošů $= 2\,858 \,.\, 10^{28}$ zlatých.

Předpokládejme, že roční rozpočet Polské lidové republiky vzroste různými investicemi na 2 858 miliard zlatých a udrží se na této výši. Pak z vdovího groše by bylo možno vyrovnávat tento rozpočet po dobu
$(2\,858 \,.\, 10^{28}) : (2\,858 \,.\, 10^{9})$ let $= 10^{19}$ let.

Astronomové odhadují stáří sluneční soustavy na dobu přibližně 10 miliard let. Číslo N je asi miliardkrát větší.

Kolik dní?

1. Od první olympiády, která se konala r. 776 př. n. l., uplynul asi milión dní.

2. Od počátku našeho letopočtu uplynulo asi $\frac{3}{4}$ miliónu dní.

3. Nejdéle panoval v Polsku Vladislav Jagellonský: 17 532 dní.

4. Polský spisovatel Juliusz Słowacki žil asi 15 000 dní a Fryderyk Chopin ještě méně, 14 245 dní.

Tato čísla nutí k zamyšlení ...

■ Řešení úloh

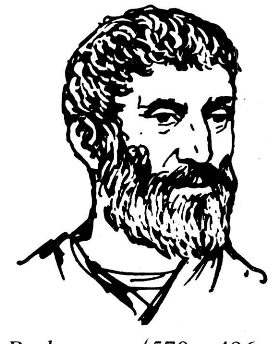
Historická anekdota

Podkováky do druhé podkovy by stály
$(128 + 256 + 512 + 1\,024 + 2\,048 + 4096)$ grošů $= 8\,064$ grošů;

do třetí podkovy by stály
$(8\,192 + 16\,384 + 32\,768 + 65\,536 + 131\,072 + 262\,144)$ grošů $= 516\,096$ grošů;

a konečně podkováky do čtvrté podkovy by stály
$(524\,288 + 1\,048\,576 + 2\,097\,152 + 4\,194\,304 + 8\,388\,608 + 16\,777\,216)$ grošů $= 33\,030\,144$ grošů.

Je to obrovská suma, kterou by málokterý polský šlechtic mohl zaplatit.

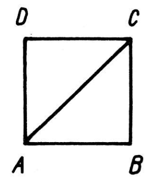


Pythagoras (570 – 496 př. n. l.)

Podle německého matematika Leopolda Kroneckera (1823 – 1891) „celá čísla stvořil dobrý Bůh a všechno ostatní lidé". Jedním z těch, kteří se zasloužili o objevení nových, do té doby neznámých čísel, byl řecký filozof Pythagoras. Tato čísla byla o mnoho staletí později nazvána *iracionálními*. Pythagoras pocházel z ostrova Samos, ale usadil se v řecké kolonii „Velké Řecko" v jižní Itálii v městech Kroton a Tarent, kde také vědecky působil. Iracionální čísla objevil Pythagoras v souvislosti s objevem poučky o vztahu mezi přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku, kterou dnes nazýváme jeho jménem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Podivná čísla, která nejsou ani čísly přirozenými, ani zlomky (jen taková čísla byla tehdy známa), Pythagoras nazval „alogoj" – nevyjadřitelná. Neočekávaný objev na něj podle pověsti nesmírně zapůsobil, neboť se ukázalo, že existují geometrické vztahy, např. poměr úhlopříčky čtverce k jeho straně $AC : AB$ (obr. 15), které nelze vyjádřit žádným do té doby známým číslem.

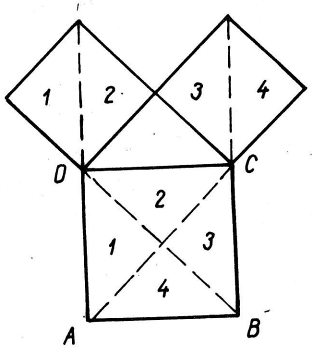


Obr. 15

To podkopávalo celý jeho filozofický světový názor, podle něhož čísla vládnou nejen mírám a váhám, ale řídí všechny jevy probíhající v přírodě a jsou podstatou harmonie panující ve vesmíru, jakousi duší kosmu. Se svým objevem se prý Pythagoras svěřil pod přísahou „tetraktis"*) svým žákům, kterým nejvíce důvěřoval. Pythagorův objev byl však tak senzační, že – jak tvrdí pověst – jeden ze žáků nevydržel a prozradil tajemství, které mu svěřil

*) Tetraktis – posvátné číslo 36 = (1 + 3 + 5 + 7) + (2 + 4 + 6 + 8), tj. součet prvních čtyř lichých a prvních čtyř sudých čísel.

jeho učitel. Pověst dále praví, že onen žák byl bohy příkladně potrestán: zahynul za bouře v mořském příboji.



Obr. 16

Jestliže délka strany čtverce $ABCD$ je rovna jedné, pak na základě Pythagorovy věty platí (obr. 16):

$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$,

odkud $AC = \sqrt{2}$. Znamená to, že zcela konkrétní úsečka, kterou můžeme snadno zkonstruovat, má délku vyjádřenou číslem $\sqrt{2}$. Toto číslo není přirozeným číslem, protože je větší než 1 [nerovnost $2 > 1$ znamená totéž co $(\sqrt{2})^2 > 1^2$ a odtud plyne $\sqrt{2} > 1$] a současně menší než 2 [nerovnost $2 < 4$ znamená totéž co $(\sqrt{2})^2 < 2^2$ a odtud plyne $\sqrt{2} < 2$]. Tedy $1 < \sqrt{2} < 2$.

Dokážeme, že mezi číslem 1 a číslem 2 neexistuje žádný zlomek, jehož čtverec se rovná $(\sqrt{2})^2$, čili 2.

D ů k a z. Předpokládejme, že takový zlomek existuje a že jeho nejjednodušší tvar (po zkrácení) je $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Platí tedy

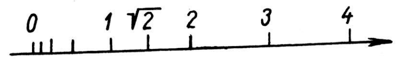
$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \text{ čili } \frac{m^2}{n^2} = 2 \text{ čili } m^2 = 2n^2.$$

Vidíme, že pravá strana poslední rovnosti je číslo dělitelné 2. Odtud plyne, že i levá strana musí být dělitelná 2 čili že m je dělitelné 2.*) Nechť $m = 2k$, kde k je nějaké přirozené číslo. Pak z předešlé rovnosti dostáváme

$(2k)^2 = 2n^2$ čili $4k^2 = 2n^2$ čili $2k^2 = n^2$.

Z toho opět plyne, že n musí být sudé, takže čísla m a n mají společný dělitel větší než 1. To je však ve sporu s předpokladem, že zlomek $\frac{m}{n}$ je nesoudělný.

Nesprávnost závěru je důsledkem nesprávného předpokladu, že existuje takový zlomek, který se rovná $\sqrt{2}$. Tedy $\sqrt{2}$ není ani číslem přirozeným, ani číslem racionálním (zlomkem).

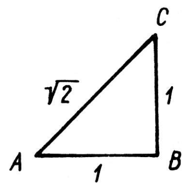


Obr. 17

Z našich dosavadních úvah vyplývá, že $\sqrt{2}$ se nachází mezi čísly 1 a 2. Je známo, že bodům číselné osy (obr. 17) odpovídají reálná čísla. Každému bodu odpovídá jedno a jen jedno reálné číslo.

---
*) To plyne z vlastností rozkladu přirozeného čísla na prvočinitele a z toho, že číslo 2 je prvočíslo. (Pozn. překl.)

Mezi bodem 1 a bodem 2 se musí nacházet bod odpovídající $\sqrt{2}$. Můžeme jej nalézt, jestliže sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, jehož obě odvěsny mají délku 1 čili rovnou jednotce délky (obr. 18).



Obr. 18

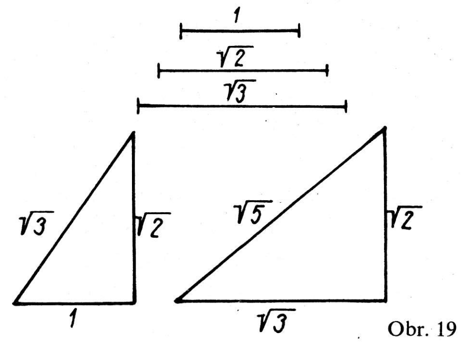
Naneseme-li z bodu O číselné osy úsečku AC, nalezneme mezi body 1 a 2 bod, který odpovídá $\sqrt{2}$.

Tento bod lze zjistit také výpočtem, a to tak, že vypočítáváme přibližnou hodnotu $\sqrt{2}$ se stále větší přesností:

Přesnost	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	...
{A} dolní odhad	1	1,4	1,41	1,414	1,414 2	...
{B} horní odhad	2	1,5	1,42	1,415	1,414 3	...

Z uvedené tabulky vidíme, že rozdíl mezi členy posloupností {B} a {A} se stále zmenšuje. Obě tyto řady „se sbíhají" v bodě, kterému odpovídá číslo $\sqrt{2}$.

Iracionálních čísel je nekonečně mnoho: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$. Patří do množiny reálných čísel a každému z nich odpovídá právě jeden bod na číselné ose (obr. 19).*)



Obr. 19

---
*) Zdaleka ne všechna iracionální čísla se dají vyjádřit jako odmocniny (druhé či vyšší) přirozených čísel. (Pozn. překl.)

Dvě významná iracionální čísla

Iracionálních čísel je nekonečně mnoho, ale mezi nimi mají velký význam dvě, která náleží mezi tzv. *transcendentní čísla*: Archimédovo číslo, které dnes známe spíše jako číslo Ludolfovo*) a označujeme je symbolem π (pí), a číslo Napierovo, které se označuje písmenem e. Oba symboly pocházejí od švýcarského matematika a fyzika Leonarda Eulera (1707–1783). Číslo π je čtenáři dobře známé. Pohovoříme o něm v kap. 5. Zde poznamenejme, že je hledal již Pythagorův žák Hippokrates, pocházející z ostrova Chios (2. pol. 5. stol. př. n. l.); tvrdil, že obsah kruhu P je přímo úměrný obsahu čtverce o straně r (tj. úměrný číslu r^2). Dnes označujeme koeficient této úměrnosti písmenem π: $P/r^2 = \pi$ nebo $P = \pi r^2$.

Problémem, který Hippokrates nerozřešil, se později zabýval Archimédes (asi 287–212 př. n. l.). Snažil se nalézt stranu čtverce, jehož obsah se rovná obsahu kruhu. V kap. 5 se zmíníme o nejdůležitějších pokusech řešení této úlohy, a tedy nalezení čísla π.

V druhé polovině minulého století (kdy ještě neexistovaly počítací stroje) vypočetl anglický matematik W. Shanks (čti Šenks) číslo π s přesností na 707 desetinných míst. Protože praktický význam má zpravidla jen několik prvních desetinných míst, uvádíme zde (pro zajímavost) číslo π s přesností jen na 30 desetinných míst:

$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\ldots$

Číslo e lze vyjádřit nekonečným desetinným zlomkem, jehož přibližná hodnota (s přesností na 0,000 01) je e = 2,718 28. Je základem *logaritmů*, které nazýváme *přirozenými* (označení ln) na rozdíl od logaritmů desetinných, jejichž základem je 10 (označení log).**) Hodnotu e vypočítal v roce 1728 D. Bernoulli na základě vzorce

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.\text{***)}$$

Důležitost čísla e pochopíme, když prozkoumáme dva způsoby vzrůstání nějaké veličiny. Aby naše úvahy nebyly zbytečně složité, předpokládejme, že zkoumaná částka je 100 haléřů = 1 Kčs.

1. Prosté úrokování. Spořitelna platí prostý úrok, např. 4 %. Po uplynutí jednoho roku připočte k vložené koruně $\frac{4}{100}$ Kčs $= \frac{1}{25}$ Kčs. Po 25 letech vzroste 1 Kčs na $\left(1 + \frac{1}{25}\cdot 25\right)$ Kčs $=$ $= 2$ Kčs, zdvojnásobí se.

2. Složené úrokování. Spořitelna platí tzv. složený úrok, např. 4 %. Po roce vzroste 1 Kčs na $\left(1 + \frac{4}{100}\right)$ Kčs čili na $(1{,}04)^1$ Kčs, za dva roky na $(1{,}04)^2$ Kčs, za tři roky na $(1{,}04)^3$ Kčs, takže po 25 letech vzroste 1 Kčs na $(1{,}04)^{25}$ Kčs $\approx 2{,}66$ Kčs. Kdyby se úrok přičítal každé pololetí, tj. 50krát za 25 let, pak po 50 pololetích vzroste 1 Kčs na $\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{50}$ Kčs čili na $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}$ Kčs $\approx 2{,}691\,2$ Kčs. Bude-li úrok přičítán ještě častěji, např. čtvrtletně (100krát za 25 let), vzroste 1 Kčs za 100 čtvrtletí na $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$ Kčs.

Z toho může někdo vyvodit tento závěr: Kdyby spořitelna přičítala úroky ne čtyřikrát ročně, ale ještě častěji, např. každou hodinu, vzrostla by 1 Kčs za 25 let na velmi vysokou částku. To však není správné. Obecný vzorec pro růst koruny má tvar

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Číslo n zde označuje, kolikrát za 25 let se přičítá úrok. Když n roste nade všechny meze ($n \to \infty$), pak posloupnost čísel a_n se blíží (konverguje) k číslu 2,718 281 ...*). Je to jen asi o 0,028 Kčs, tj. asi o 3 haléře víc, než když se úrok přičítá dvakrát ročně. Limita posloupnosti čísel a_n je číslo e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(n – přirozené číslo). V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty čísla a_n (tj. přibližné hodnoty čísla e) při rostoucím n.

n	1	2	3	4	5	...	10	...	100
e	2	2,250 00	2,370 37	2,441 46	2,488 32	...	2,599 30	...	2,691 00

*) Podle Ludolfa van Ceulena (1540–1610), který je vypočítal na 35 desetinných míst. (Pozn. překl.)

**) Logaritmem rozumíme mocnitel, na který je třeba povýšit základ logaritmu, abychom dostali logaritmované číslo. Např. $\log_2 32 = 5$, protože $2^5 = 32$. V tomto případě je základ logaritmu 2 a logaritmované číslo 32.

***) Tento vzorec zhruba znamená, že pro velká přirozená čísla n se výraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ přibližně rovná číslu e. (Pozn. překl.)

*) Říkáme, že posloupnost čísel a_n se blíží (konverguje) k číslu (limitě) h, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo (index) N, že všechny členy posloupnosti a_n s indexem větším než N, tj. $n > N$, splňují nerovnost $h - \varepsilon < a_n < h + \varepsilon$.

Bez ohledu na výši úroku, který spořitelna vyplácí, dosáhne 1 Kčs hodnoty e Kčs při složeném úrokování prováděném spojitě v každém okamžiku po dobu celého časového období, za které se 1 Kčs při prostém úrokování zdvojnásobí.

Tento způsob růstu veličiny je jediný, při němž v každém okamžiku je růst úměrný stavu rostoucí veličiny. Takovým způsobem narůstá sněhová koule valící se s vrcholku zasněženého kopce. Nazýváme jej často organickým růstem, neboť může být ilustrován řadou organických procesů. Jedním z příkladů je růst populace naší planety.

■ Zábavné úlohy

Matematické hry a zábavy

Matematické hry a zábavy byly velmi rozšířeny již ve starověku.

Zábavné úlohy nacházíme v Ahmesově papyru. Jedna z úloh se nazývá „číselný žebřík". Hovoří se v ní o číslech 7, 49, 343, 2 401, 16 807. Vedle těchto mocnin čísla 7 jsou umístěny hieroglyfy, znamenající slova člověk, kočka, myš, ječmen a míra. Papyrus neuvádí žádný návod k řešení tohoto hlavolamu, ale podle názoru německého historika matematiky M. Cantora (1829 – 1920) lze takový návod najít v úloze předložené o více než 3 000 let později v díle Itala Leonarda Pisánského, zvaného Fibonacci, vydaného r. 1202 pod názvem „Liber Abaci" („Kniha o abaku"). Zde je znění Fibonacciho úlohy:

„7 žen jde do Říma. Každá žena vede 7 mul. Každá mula nese 7 pytlů. V každém pytli je 7 chlebů. V každém chlebu je 7 nožů. Každý nůž je v 7 pochvách. Kolik je všech věcí?"

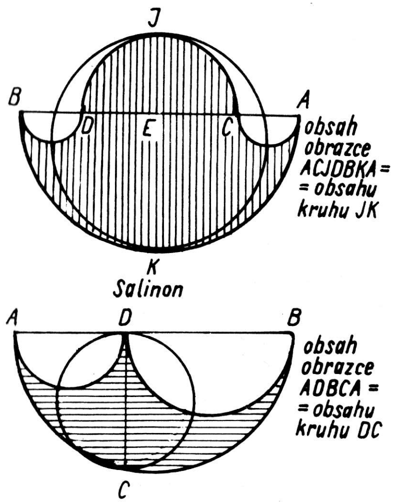
Na základě této úlohy se můžeme domnívat, že Ahmesova úloha zněla takto:

„7 osob má po 7 kočkách. Každá kočka snědla 7 myší. Každá myš snědla 7 klasů ječmene. Z každého klasu může vyrůst 7 měr zrní. Jaká je posloupnost čísel, vyplývající z této úlohy, a kolik činí jejich součet?"

Zábavné úlohy byly rozšířeny ve starověkém Řecku a Římě a později, ve středověku, v západní Evropě. Ve starověku se takovými úlohami zabýval dokonce i velký Archimédes: svědčí o tom výpočty týkající se salinonu (slánky) a arbelonu (řeznického nože) (viz obr. 20).*)

Známá je sbírka úloh vydaná v 8. století mnichem Alcuinem (735 až 804). Některé Alcuinovy úlohy, např. „O vlku, koze a zelí" nebo „O psu a zajíci" ještě dnes baví školáky.

*) Pokuste se dokázat tvrzení o obsahu „salinonu" a „arbelonu" napsaná u obrázků! Není to tak těžké, vyjádříme-li poloměry všech narýsovaných oblouků kružnic pomocí průměru „základní kružnice" (je roven délce úsečky AB) a ještě jedné menší kružnice (v obou případech můžeme zvolit např. délku úsečky BD). Archimédes došel i k jiným, obtížnějším výsledkům, týkajícím se obou obrazců. (Pozn. překl.)



Obr. 20

Z Ahmesova papyru

Asi 2 000 let před naším letopočtem byl na dvoře faraóna Amenemhata III. jako královský písař a matematik zaměstnán Ahmes. Podrobnosti z jeho života nám dějiny nezachovaly, ale zůstal po něm papyrus, objevený r. 1853 Angličanem Rhindem v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách.

Papyrus má tvar pásu dlouhého přes pět metrů a širokého 33 cm a je jedním z mála pramenů našich znalostí o tom, co tehdejší Egypťané znali z oblasti aritmetiky a geometrie.

Mezi jinými obsahuje i následující úlohu:

„Sto měr zrní je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. Kromě toho první dva dělníci dohromady mají dostat sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři.

Kolik měr zrní dostal každý dělník?"

Úloha, kterou jsme zde uvedli, je stará skoro 4 000 let. Její rozřešení jistě čtenáře potěší.

Diofantova úloha

Poslední velký řecký matematik Diofantos, žijící v 3. století našeho letopočtu v Alexandrii, podal a rozřešil tuto úlohu:

„Máme najít taková tři (přirozená – pozn. překl.) čísla, aby jejich součet, stejně jako součet kterýchkoli dvou z nich, tvořil čtverec (druhou mocninu) nějakého čísla."

Diofantos nalezl jednu takovou trojici čísel. Jsou to 80, 320 a 41. Skutečně,

$$80 + 320 + 41 = 441 = 21^2.$$

Součet každé dvojice těchto čísel je také čtverec:

$$80 + 41 = 121 = 11^2,$$

$$320 + 41 = 361 = 19^2,$$

$$80 + 320 = 400 = 20^2.$$

Jakým způsobem nalezl Diofantos tato čísla?

Při použití dnešní symboliky (a velmi zkráceně) byl jeho myšlenkový pochod asi takový: Označme hledaná čísla písmeny a, b, c. Diofantos pracoval jen s jednou neznámou x. Předpokládal, že

I. $a + b + c = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$,

II. $a + b = x^2$,

III. $b + c = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Z těchto rovností vypočetl $a = 4x$ a $c = 2x + 1$, odkud $a + c = 6x + 1$. Nyní uvážil, že $a + c$ má být čtverec jiného čísla, a vyvodil z toho, že x je rovno číslu 20.*)

Použijte popsané metody k nalezení tří čísel a, b, c takových, že $a + b + c$, $a + b$ a také $b + c$ jsou čtverce jiných čísel. (Pozor: $a + c$ není čtverec.)

Hlavolam Josefa Flavia

Existují legendy a pověsti, které se udržují od nepaměti, a stejně jsou i takové matematické úlohy, které přecházejí z pokolení na pokolení. Nezanikají a stále okouzlují ty, kdož se s nimi setkají. Takový je i jeden hlavolam z 1. století, který má dokonce několik verzí. Jedna z nich je spjata se jménem židovského historika Josefa Flavia.

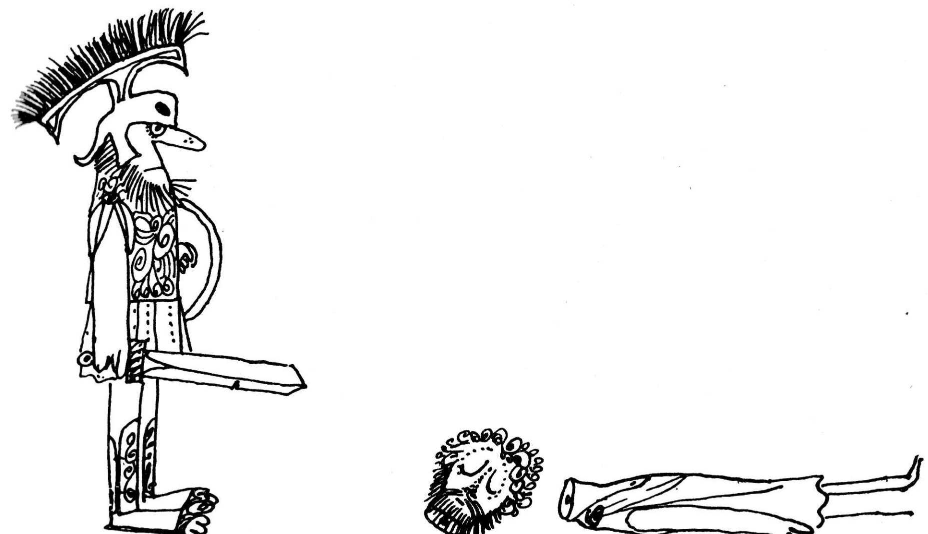
Josef Flavius pocházel z rodiny kněze. Narodil se v Jeruzalémě r. 37. Žil v Římě za panování císaře Vespasiána, později se vrátil do Judeje a zúčastnil se židovského povstání proti římské nadvládě. Byl zajat, ale po dvou letech dostal od císaře Vespasiána milost a s ní i římské občanství a příjmení Flavius. Od té doby se Josef Flavius cele věnoval spisovatelství, které považoval za službu svému národu. Napsal několik děl s židovskou tematikou, mezi nimiž

*) To ovšem není jediné řešení. Je nekonečně mnoho přirozených čísel, která splňují všechny podmínky kladené na x. Čtenář jistě některá z nich sám objeví. Každé nalezené hodnotě x odpovídá pak trojice čísel a, b, c, která je řešením Diofantovy úlohy. Existují však také taková řešení, která nelze vypočítat uvedeným způsobem (tj. zavedením pomocné neznámé x, splňující předpoklady I až III). Takovým řešením je např. trojice 249, 480, 1 120, jak si čtenář snadno ověří. (Pozn. překl.)

nejvýznamnější je „Židovská válka" (v řeckém originále zní její titul „Perí tu Iudaikú pólemu"). Flavius napsal svoji knihu řecky, neboť řečtina byla ve starověku mezinárodní řečí, jazykem učenců. Řecký překladatel Hegesippos přeložil „Židovskou válku" do latiny (ve 4. stol.) a překlad doplnil životopisem Josefa Flavia, v němž uvádí tuto pověst:

Po porážce židovského povstání a po zboření Jeruzaléma římské vojsko pronásledovalo a bralo do zajetí povstalce. Flavius se skupinou povstalců (dohromady 41 osob) unikl a ukryl se v jeskyni. Nevida jiné východisko, navrhl Flavius na smrt znaveným bojovníkům, aby se vzdali Římanům. Ale Židé se rozhořčili. Než se vydat do rukou nepřátel, rozhodli se raději navzájem se usmrtit. Žádné přemlouvání nepomáhalo. Židovští bojovníci pohrozili Flaviovi, že vzájemné zabíjení začnou právě od něho. Ale moudrý Flavius vymyslel lest, do níž zasvětil jen svého jediného přítele. Rozhodujícího dne postavil Flavius všechny bojovníky do řady (včetně sebe a svého přítele) a prohlásil, že postupně bude zabit každý třetí bojovník. Začne se počítat od prvního vlevo, po prvním počítání se bude počítat po druhé, pak po třetí, až nezbude nikdo živý.

Na které místo v řadě se postavil Flavius a na které postavil svého přítele, jestliže zůstali oba naživu, když už všech ostatních 39 bojovníků bylo usmrceno?

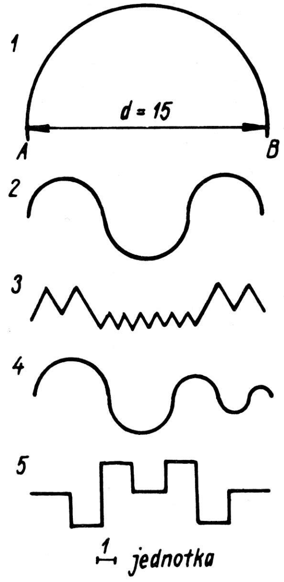


Neověřená legenda

Jedním z vynikajících arabských matematiků byl Muhammad ibn Musa al-Chvárizmí (Mohamed syn Musy z Chorezmu). Žil v 9. století, narodil se v Chorezmu (nyní v Uzbecké SSR).

Muhammad ibn Musa je v historii matematiky uváděn v souvislosti s deseti indickými číslicemi a s rozvojem algebry v Evropě. Tvůrčí období svého života strávil Muhammad ibn Musa v Bagdádu za panování mocného kalifa Al-Ma'múna. Z rodného kraje musel ibn Musa odejít, protože upadl v nemilost tamějšího chána. O tom se vypráví tato pověst:

Chán navrhl uvězněnému matematikovi, že mu dá volnost a odměnu, rozřeší-li správně úlohu, kterou mu předloží. Jestliže však ibn Musa nenajde správné řešení, bude mu uťata pravá ruka. Matematik přijal chánovu podmínku, úlohu rozřešil a dostal svobodu i odměnu, ale pak prozíravě opustil svoji otčinu a odešel do Bagdádu.



Obr. 21

Úloha, kterou chán předložil ibn Musovi, je znázorněna na obr. 21. A zde je znění úlohy:

„Zde máš pět křivek vyrobených ze zlatého drátu. Aniž budeš cokoli měřit, udej na základě pouhého pozorování, která z čar je nejdelší, která nejkratší, a dokaž to výpočtem!"

Archimédův náhrobek

Archimédes si nejvíce cenil svého pojednání „O kouli a válci". O tom svědčí i pověst, podle níž dal na svůj náhrobek vytesat kouli s opsaným válcem (obr. 22).

Tato dvě tělesa měla potomstvu připomínat nejdůležitější Archimédovo dílo. Archimédes totiž dokázal, že

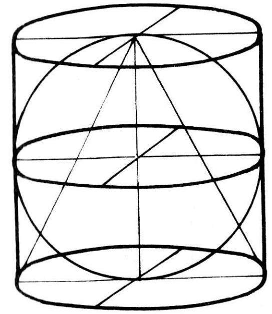
$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2 : 3,$

kde

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ – objem koule o poloměru r,

$V_3 = 2\pi r^3$ – objem válce opsaného této kouli,

$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$ – objem kužele vepsaného do tohoto válce.



Obr. 22

■ Řešení úloh

Z Ahmesova papyru

Podle podmínek úlohy tvoří počty měr zrní, které obdrželi jednotliví dělníci, aritmetickou posloupnost. Označme první člen této posloupnosti písmenem a a její diferenci d. Obecný vzorec pro součet n členů aritmetické posloupnosti

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

dává

$$\frac{5}{2}(2a + 4d) = 100,$$

$$7(a + a + d) = \frac{3}{2}(a + 2d + a + 4d)$$

čili

$$a + 2d = 20,$$

$$14a + 7d = 3a + 9d.$$

Z těchto rovnic vypočteme a a d.

Odpověď: Dělníci dostali po řadě $\frac{5}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ měr zrní.

Diofantova úloha

Odpověď: $a = 20, b = 5, c = 11$. Odpovídající součty jsou 36, 25, 16. Součet $a + c = 31$ není čtverec přirozeného čísla.*)

Hlavolam Josefa Flavia

Odpověď: Umístění Flavia a jeho přítele je vyznačeno tučným tiskem:

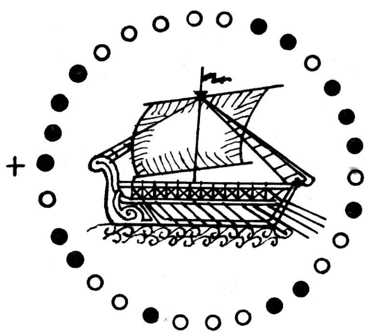
*) K úloze předložené v poznámce překladatele: Abychom dostali jinou hodnotu x než 20, vezmeme jakékoli přirozené číslo y, které se liší od některého násobku šesti o jedničku (tj. zbytek při dělení $y : 6$ je 1 nebo 5), a položíme $y^2 = a + c = 6x + 1$. Odtud vypočteme x. (Hodnota $x = 20$ vyjde pro $y = 11$; pro $y = 13$ dostaneme $x = 28$ atd.) (Pozn. překl.)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ***16***, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, ***31***, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Ověřme si správnost řešení. Usmrceni byli po řadě bojovníci na těchto místech:

při prvním počítání: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39;
při druhém počítání: 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41;
při třetím: 7, 13, 20, 26, 34, 40;
při čtvrtém: 8, 17, 29, 38;
při pátém: 11, 25;
při šestém: 2, 22;
při sedmém: 4, 35.

Zůstali jen bojovníci na 16. a 31. místě, kteří se přirozeně nehodlali navzájem usmrtit.



Obr. 23

Poznámka: Existuje jiná verze této úlohy – o patnácti Turcích a patnácti křesťanech. V této verzi jsou křesťané a Turci postaveni do kruhu a každý devátý (počítáno od určené osoby) je hozen přes palubu. Úloha spočívá v tom, postavit Turky a křesťany v takovém pořadí, aby byli hozeni přes palubu jen Turci.

Řešení této úlohy je znázorněno na obr. 23, kde křesťané jsou označeni tmavými kroužky a Turci světlými. Počítání je třeba začít u kroužku označeného křížkem.

Obecné řešení této úlohy není známo.

Neověřená legenda

Odpověď: 1. Délky čar označených čísly 1, 2 a 4 jsou stejné. Délka každé z nich je rovna $\frac{1}{2}\pi d$.

2. Nejdelší je čára označená číslem 5, nejkratší kterákoli z čar 1, 2, 4.

3. Při zvolené jednotce délky je délka jednotlivých čar: čára 5 - 31, čáry 1, 2, 4 - $\frac{1}{2}\pi \cdot 15 \approx 23\frac{4}{7}$, čára 3 - 30.

Dějiny záporných čísel jsou jednou z nejzajímavějších kapitol dějin matematického myšlení. Ilustrují postup rozvoje matematických pojmů, svědčí o vzájemné závislosti, která existuje mezi rozvojem společenských výrobních sil a rozvojem matematiky, a konečně potvrzují to základní tvrzení, že konečným kritériem hodnoty teorie je praxe: lidstvo se bránilo uznat záporná čísla tak dlouho, dokud se neobjevily konkrétní aplikace těchto čísel, které byly odůvodněny potřebami společenské praxe.

■ Řecká matematika

Matematici antického světa se nezajímali o relativní čísla, tj. o čísla se znaménkem. Řekové považovali za čísla jen čísla přirozená. Znali sice ve skutečnosti také zlomky, avšak ty nebyly řeckými matematiky považovány za čísla, ale spíše za jednotky nižšího řádu, tak jako máme menší jednotky délky, váhy nebo jednotky peněžní. Teprve Diofantos z Alexandrie (2. pol. 3. a poč. 4. stol. n. l.) jako první z řeckých matematiků začal považovat zlomky za čísla.

Diofantos rozlišoval také čísla „přičítaná“ a „odčítaná“, užíval k označení „odčítaných“ čísel znamení odčítání „ψ“ (obrácené řecké písmeno psí) a znal také pravidla násobení čísel „přičítaných“ a „odčítaných“. Diofantos se omezoval na ty případy, v nichž menšenec je větší než menšitel a – což je důležitější – na zkoumané rovnice kladl takové podmínky, aby při jejich splnění byly kořeny rovnice kladné. Záporné kořeny, jestliže se objevily, považoval Diofantos za nepřípustné a prostě je zavrhoval.

■ Indická matematika

Indická matematika se v oblasti aritmetiky relativních čísel dostala o něco dále. Brahmagupta (narozen 598 n. l.) užíval ve výpočtech čísel odpovídajících dnešním záporným číslům, která označoval tečkou psanou nad číslem. Indičtí matematici užívali také odlišných názvů k označení čísel kladných a záporných. Tyto názvy odpovídají našim slovům „majetek“ a „dluh“. Indičtí matematici znali dobře záporné kořeny rovnic, ale nejčastěji je vynechávali, odůvodňujíce to tím, že „lidé neuznávají záporná čísla“.

▪ Období před objevem záporných čísel

Uplynula řada století. Teprve v 13. století a zvláště na konci století 15. se matematici znovu začali zabývat relativními čísly, nacházejíce pro ně mnohá použití. A tak teprve po devíti stoletích začala záporná čísla pronikat do matematiky.

▪ Arabská matematika

Jen málo víme o řecké matematice v období od 3. do 6. století. Byla to doba, v níž otrokářský řád, sžíraný vnitřními protiklady, začínal upadat.

V Byzanci, východní části římského císařství, vydával císař Justinián I. (527–565) stále ostřejší výnosy proti vyznavačům různých kacířství a v roce 529 vydal zákaz vyučovat v Aténách jakékoli filozofii. V právním kodexu, který Justinián uveřejnil, čteme odstavec „De maleficiis, mathematicis et caeteris similibus" (O zločincích, matematicích a jiných jim podobných) a v něm se nachází tento bod: „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino" (Zavrženíhodné umění matematické jest zakázáno především). V té době byly v úpadku všechny světské nauky a s nimi i matematika.

Národem, který zachoval dílo starověkých učenců, byli Arabové.

Arabové projevovali výjimečnou kulturní přizpůsobivost a snadno přijímali kulturní výsledky podmaněných národů. Za panování Hárúna Ar-Rašída i jeho syna al-Ma'múna byla skoro všechna vědecká díla starověkých klasiků přeložena do arabského jazyka.

Na základech řecké a indické matematiky se rozvinula arabská algebra. Mezi arabskými algebraiky zaujímá význačné místo matematik, astronom a geograf Muhammad ibn Musa al-Chvárizmí (Mohamed, syn Musy z Chorezmu, pozdější Chívy). Žil na počátku 9. století v Bagdádu a byl autorem první učebnice algebry „Hisab aldžebr val-muqabala". Poprvé zde byla matematika podána z hlediska jejího praktického početního použití, které bylo ilustrováno mnoha příklady řešení rovnic.

Džebr znamená totéž co „doplnění", a tedy v obecném pojetí přenesení záporných výrazů rovnice na její druhou stranu. Muqabala znamená naproti tomu „vyrovnání" nebo „protiklad", a tedy obecně zastoupení podobných výrazů na obou stranách rovnice jediným výrazem. Například v rovnici $10x = 8x + 8$ máme na pravé straně „nadbytek" $8x$, který vyrovnáme, a dostáváme $2x = 8$. Titul Al-Chvárizmího učebnice, která se dostala do Evropy v latinské verzi „Algebra et Almucabala", dal vzniknout názvu *algebra*.

Al-Chvárizmí vybíral úlohy tak, aby se v řešených rovnicích neobjevily záporné kořeny. V těch nepočetných případech, v kterých nebylo možno se záporným řešením vyhnout, Al-Chvárizmí o nich prostě nehovoří.

Tak Arabové vlastně založili algebru jako moderní výpočtový prostředek matematiky, ale v oblasti záporných čísel znamenali spíše krok zpět ve srovnání s výsledky indických matematiků.

▪ Evropská matematika v období feudalismu

Do 11. století trvá v zemích západní Evropy období vytváření feudálního společenského řádu.

V 11. století vstupuje feudalismus do období svého vrcholného rozkvětu. Toto období trvá do 15. století. Roste společenská produktivita práce, řemesla se oddělují od zemědělství, jsou zakládána města, jejichž význam stále vzrůstá, a vznikají vnitřní trhy.

Vlivem růstu výrobních sil, vývoje společenské produktivity práce a rozvoje směny dochází v 11. století také k zásadní změně v oblasti zahraničního obchodu: podstatnou úlohu v zahraničním obchodu začínají hrát obchodníci evropští, kteří vytlačují Araby a byzantské kupce.

V souvislosti s vývojem zahraničního obchodu roste mezi Evropany zájem o Orient. Začíná se cestovat na Východ, přičemž základní příčinou těchto cest jsou pohnutky ekonomické, obchodní.

Koncem 11. století začínají také křížové výpravy. Křížové výpravy, které trvaly až do roku 1270, měly obrovský vliv na vývoj Evropy. Křižáci poznávají výsledky východní techniky i kultury a to působí na rozvoj požadavků a potřeb vládnoucích společenských tříd a stává se pobídkou k dalšímu rozvoji průmyslu i obchodu. Křížové výpravy způsobují také oživení a rozvoj zahraničního obchodu s Orientem, rozšíření zbožně peněžních vztahů. Koncem středověku vznikají odvětví průmyslu, která mají velký vliv na další hospodářský rozvoj, objevují se hutnické pece a slévárny železné rudy, zdokonaluje se technika plavby, zejména zásluhou poznání významu kompasu vynalezeného v Orientě. Evropa poznává, díky svým stykům s Dálným východem, také papír a střelný prach. Jsou vynalezeny mechanické hodiny.

Rychle se rozvíjí peněžní hospodářství, vytlačující odevšad vztahy věcné směny.

Objev Ameriky (v roce 1492) a námořní cesty do Indie (1498) mají ohromný vliv na rozvoj výroby.

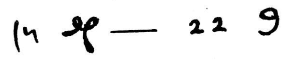
V období upevňování feudalismu, které trvá do 11. století, nenacházíme žádné stopy tvůrčí matematické činnosti v Evropě. Toto období charakterizuje výstižně skutečnost, že Gerbert z Overnie, pozdější papež Silvestr II. (905–1003), který strávil část života ve Španělsku a vzdělával se tam v arabských školách, přičemž studoval také matematiku, byl obžalován z čarodějnictví právě pro své matematické znalosti. Avšak v období vrcholného rozvoje feudalismu přece jen v Evropě začíná oživovat matematická činnost.

Ve 12. století proniká nový společenský řád do Itálie, především do severní. V prvním desetiletí 13. století vypracovává Leonard z Pisy, jinak nazývaný Fibonacci, což znamená filius Bonaccii*) (1180–1250), na svou dobu znamenité dílo „Liber Abaci“, ve kterém shromažďuje nejdůležitější počtářské poznatky.

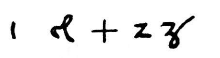
Fibonacci neuznával záporná řešení rovnic. Přesto v traktátu „Flos“, vydaném okolo roku 1225, uvádí úlohu, kterou mu dal rozřešit na matematickém turnaji konaném na dvoře císaře Bedřicha II. Hohenstaufena jeho soupeř, notář a dvorní matematik Jan z Palerma. Byla to úloha týkající se účtů obchodní společnosti, která vedla na kubickou rovnici; jeden z kořenů této rovnice byl záporný. Leonard z Pisy pokládal tuto úlohu za neřešitelnou, ale dodal, že úloha by měla smysl, kdyby jeden ze společníků měl místo kapitálu dluh.**)

Koncem 15. století pronikají do matematiky z kupecké praxe znaky „+“ a „−“, a to dost všeobecně, neboť se s nimi setkáváme téměř současně v mnoha tehdejších rukopisech. Tak např. znak „−“ se objevuje v německé algebře pocházející asi z roku 1486 (obr. 24); v dnešní symbolice znamená tento zápis $15 - 22x$.

Znak „+“ se objevuje také v latinské algebře, která pochází rovněž asi z roku 1486 (obr. 25; znamená to $x^3 + 2x^2$).



Obr. 24



Obr. 25

V tisku byly znaky „+“ a „−“ použity poprvé v německé početní příručce z roku 1489 od Johannese Widmanna. Autor dokonce vysvětluje, že „−“ znamená méně, „+“ znamená více. Z obsahu příručky plyne, že tyto znaky pronikly do matematiky z kupecké praxe a měly označovat nadbytečnou nebo nedostatečnou váhu. Widmann používá znaků „+“ a „−“ běžně a pokládá je již nejen za označení operací, ale také za znaménka kladená před čísla a výrazy.

Ital Luca Paciolli ve svém pojednání „Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá“, vydaném v roce 1494, podává pravidla aritmetických úkonů s čísly kladnými i zápornými, ale neužívá ještě znaků „+“ a „−“. Pravidla počítání jsou pojata čistě formálně; např. pro násobení uvádí toto pravidlo:

plus krát plus dává vždycky plus,
minus krát minus dává vždycky plus,
plus krát minus dává vždycky minus,
minus krát plus dává také minus.

Je zajímavé, že v díle vydaném skoro současně, totiž v roce 1474, „Le triparty en la science des nombres“, jehož autorem je Francouz Nicolas Chuquet, jsou záporná řešení kladena na roveň s kladnými, přičemž autor dost rozhodně dodává: „ať by třeba jiní autoři měli tato řešení za nemožná“.

Avšak podobně jako se v rozkládajícím feudálním společenském řádu střetávaly pokrokové síly se silami reakce, tak i v matematice nové myšlenky často narážely na odpor. To je možno pozorovat velmi výrazně na příkladu vývoje záporných čísel. Názvy připisované těmto číslům – čísla „falešná“, „absurdní“, „fiktivní“ – svědčí o tom, že i v oblasti matematiky se starý pořádek věcí bránil novým myšlenkám.

▪ Matematika na počátku kapitalismu

V 16. století nastává úpadek feudalismu a začíná rozvoj kapitalistických vztahů. Toto období zahrnuje století 16. až 18. a je, počínajíc 17. stoletím, obdobím bouřlivého rozvoje matematiky způsobeného horečným rozvojem výrobních sil.

Prvním matematikem, který dal trochu do pořádku aritmetiku relativních čísel, byl mnich řádu sv. Augustina Michael Stifel (1486–1567). Stifel sice neuznával záporná řešení rovnic a nazýval záporná čísla absurdními (na rozdíl od čísel skutečných, tzn. kladných), ale zasloužil se o jasné a neskrývané zobecnění pojmu čísla zavedením takových čísel, která „jsou menší než nic“ („numeri minores nihilo, ut sunt 0 – 3, 0 – 8 etc“).

„Nic“ – píše Stifel – „leží mezi čísly skutečnými a absurdními.“ („Id est nihil, quod mediat inter numeros veros et absurdos.“)

Stifel byl toho názoru, že s absurdními čísly se všechno děje naopak, absurdně („absurdo, sive inverso“): „Přičítání způsobuje zmenšení a odčítání zvětšení.“

Současníkem Stifelovým byl Ital Geronimo Cardano (1501–1576), autor velkého díla „Ars magna sive de regulis algebraicis“ („Velké umění čili o pravidlech algebry“), který sice nazývá záporná čísla zdánlivými (fiktivními – numeri ficti) na rozdíl od čísel skutečných (numeri veri), ale jako první v dějinách matematiky neodmítá záporná řešení rovnic druhého a třetího stupně.

Toto hledisko však ještě nebylo v matematice všeobecně přijímáno. Koncem 16. století velký francouzský algebraik François Viète (1540–1603)

*) Bonacciův syn.

**) Podle knihy A. P. Juškeviče: Istorija matěmatiki v srednije věka, Moskva 1961, se úloha, kterou Fibonaccimu předložil Jan z Palerma, týkala kubické rovnice a Fibonacci učinil při jejím řešení první kroky ve zkoumání řešení kubických rovnic odmocninami. Avšak i Juškevič uvádí, že Fibonacci v témže pojednání „Flos“ („Kvítek“) při řešení jisté soustavy rovnic došel k zápornému výsledku, který nazval „dluhem“ („debitorium“). (Pozn. překl.)

zavrhoval záporné kořeny rovnic a Angličan Thomas Harriot (1560–1621) se dokonce domníval, že je možno dokázat, že rovnice nemohou mít záporná řešení. Rozhodný zlom ve vztahu k relativním číslům nastal v matematice teprve v 17. století.

Němec Peter Rothe (autor díla „Arithmetica philosophica", vydaného v roce 1608) a Vlám Albert Girard (1590–1633) v souvislosti s tvrzením týkajícím se počtu kořenů rovnice jasně uznávají také záporné kořeny. Girard také jako první používá výrazů tvaru 7 – – 2, čili, jak bychom to napsali dnes, 7 – (–2). Girard také interpretuje kladná a záporná řešení nějaké úlohy jako úsečky opačného směru.

Girardovy myšlenky byly později využity René Descartem (zvaným též Cartesius, 1596–1650), objevitelem analytické metody v geometrii. Descartes nazývá záporná čísla klamnými a písmena mají v jeho výpočtech jen hodnotu kladnou, stejně jako u Vièta. Záporné veličiny označoval Descartes znakem „–" před písmenem, zatímco tehdy, když písmeno mělo označovat veličinu jak kladnou, tak i zápornou, psal Descartes před písmenem tečku místo určitého znaku. Teprve Holanďan Johann Hedde (1628–1704) zbavil počítání s obecnými znaky těchto omezení.

Třetí část své „Geometrie" věnoval Cartesius výhradně řešení rovnic. Uznával záporná řešení rovnic, ale nazýval je klamnými (falešnými).

Tato otázka byla vyjasněna až v 18. století. Roku 1707 se objevuje dílo Isaaca Newtona „Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber" („Všeobecná aritmetika čili kniha o aritmetické analýze a syntéze"). Newton říká v tomto díle jasně: „Veličiny jsou buď kladné (affirmativae) čili větší než nic, nebo záporné (negativae), menší než nic." Je zajímavé, že i Newton považoval nulu za „nic".

Isaac Newton (1642–1727)

S historií záporných čísel jsou spjata i jiná jména slavných matematiků 18. století: G. W. Leibniz (1646–1716), C. Maclaurin (1698–1746), J. L. d'Alembert (1717–1783).

Moderní pojetí aritmetiky relativních čísel však přineslo teprve 19. století.

■ Zábavné úlohy

Jak je podělil?

Čtyři chlapci – Kuba, Blažej, Matěj a Vojta – se vraceli z města do vsi.

„Kdybych našel plnou peněženku," povídá Kuba, „rozdělil bych se s vámi. Sám bych si vzal jen třetinu nalezených peněz a zbytek i s peněženkou bych vám dal."

Na to povídá Blažej:

„Kdybych já nalezl peněženku, rozdělil bych peníze rovným dílem mezi všechny."

„To já," povídá Matěj, „bych se spokojil s pětinou a zbytek bych vám dal."

„A mně by stačila šestina," povídá Vojta.

Tak si cestou povídali, když najednou spatřili v prachu ležet peněženku. Když ji zvedli a spočítali její obsah, ukázalo se, že peněženka obsahuje 10 mincí. Z nich byla jedna mince dvoukorunová a ostatní měly hodnotu jedna, pět nebo deset korun.*) Protože Kuba první zahlédl peněženku, Blažej ji zvedl a Matěj už po ní také natáhl ruku, shodli se všichni na tom, že Kuba dostane třetinu nálezu, Blažej čtvrtinu, Matěj pětinu a Vojta šestinu – každý tedy právě tolik, kolik sám chtěl. Když však začali peníze dělit, stále se jim to nedařilo, protože neměli drobné.

Jak tak dumali nad tím, jak peníze rozdělit, jel okolo cyklista. Chlapci se rozhodli požádat ho, aby jim rozměnil jednu korunu, protože jinak by peníze nerozdělili.

„Ani já nemám drobné," povídá cyklista, „ale jestli chcete, podělím vás."

„Jestli se ti to podaří, dostaneš za to peněženku."

Tu cyklista vytáhl z kapsy jednu korunu a vhodil ji do peněženky. Pak řekl:

„Kubo, ty jsi chtěl dostat třetinu toho, co je v peněžence – tady máš."

*) Čtenář nám odpustí, že v úloze vystupuje desetikorunová mince, která u nás není běžně v oběhu. (Pozn. překl.)

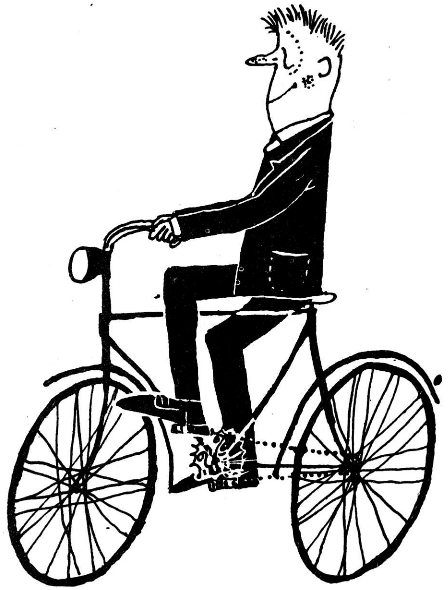
„Blažeji, ty máš dostat čtvrtinu – vezmi si tedy čtvrtinu.“

„Ty, Matěji, dostaneš podle svého přání pětinu, a ty, Vojto, šestinu.“

„Dostal každý z vás to, co chtěl?“

„Ano,“ odpověděli chlapci.

„Tak na shledanou, a pěkně vám děkuji,“ rozloučil se rázný cyklista a rychle odjel.



Když cyklista zmizel chlapcům z očí, Kuba se obrátil na své přátele:

„Poslyšte, chlapci, za co nám vlastně děkoval?“

„Zřejmě tu něco není v pořádku,“ řekl Blažej. „Spočtěme, kolik mincí nám cyklista rozdal!“

„Já jsem dostal dvě mince,“ řekl Kuba.

„Já taky dvě,“ řekli Blažej a Vojta.

„A já tři,“ dodal Matěj.

„Dohromady jsme tedy dostali devět mincí.“

„A kde je desátá? Chlapci, kdo dostal dvoukorunu?“

Ukázalo se, že minci v hodnotě dvou korun nedostal nikdo.

„To byl pěkný podvodník,“ bručeli chlapci. „Sebral nám dvě koruny a ujel. Ošidil nás.“

„Počkejte přece!“ ozval se na to Kuba, který se trochu vyznal v aritmetice, a začal něco počítat. Za chvíli prohlásil, že cyklista ho nejen neošidil, ale dal mu dokonce víc, než mu patřilo. Pak spočetl Blažejův díl, pak Matějův a nakonec Vojtův. Ukázalo se, že cyklista dal každému z chlapců víc, než mu patřilo.

„Já jsem dostal o 25 haléřů víc,“ prohlásil Blažej.

„Já skoro o 20 haléřů,“ řekl Matěj.

„Já taky skoro o 20 haléřů,“ dodal Vojta.

„Co je to za kouzla?“ volali chlapci. „Každý z nás dostal víc než měl a ten cyklista sebral nejen svoji korunu, ale i naši dvoukorunu!“

Kolik peněz bylo v peněžence? Ošidil cyklista chlapce? Jaké mince dostal každý z nich?

Jak rozdělit dědictví?

Jeden Říman napsal závěť ve prospěch své ženy a dosud nenarozeného dítěte. Pokud by přišel na svět chlapec, měl dostat 2/3 dědictví a matka 1/3. Kdyby to bylo děvče, měla matka dostat 2/3 dědictví a dcerka 1/3. Po Římanově smrti se narodila dvojčata – chlapec a děvče.

Jak se má rozdělit dědictví?

Dokážeš odpovědět?

Málo se zamýšlíme nad věcmi, které nás obklopují, které vidíme každodenně. Není jisté, zda každý z nás dokáže odpovědět na následující velmi jednoduché otázky.

1. V muzeu stojí glóbus o průměru 1 m. Jak vysoká má být na tomto glóbu Sněžka, jejíž skutečná výška je 1 603 m n. m.?

2. Na náměstí stojí urna ve tvaru krychle, jejíž hrana měří 1 m. V městě je milión voličů, kteří volí vhozením kuličky o průměru 1 cm. Mohou všichni vhodit své hlasy do urny?

3. Jak velké by muselo být čtvercové náměstí, na něž by se vešlo všechno obyvatelstvo Československa (15 mil.)?

Poznámka: Předpokládáme, že na ploše 1 m^2 mohou stát čtyři lidé.

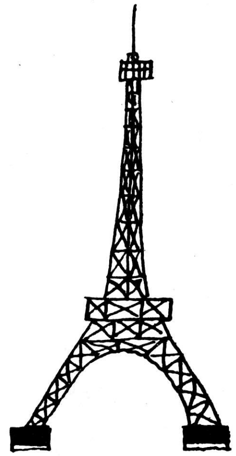
4. Pokoj, ve kterém pracuješ, má rozměry 4 m × 4 m × 3,5 m. Kolik váží vzduch, který je v něm uzavřen? Je těžší než ty? A je těžší než korková koule o průměru 1 m?

Poznámka: Jeden litr vzduchu váží 1,293 g; 1 cm^3 korku váží 0,24 g.

5. Koupil jsi košili s límečkem, který je ti těsný, příliš přiléhá ke krku. Potřebuješ zvětšit číslo límečku tak, aby mezi krkem a límcem byla mezera 3 mm. O kolik čísel větší límeček potřebuješ, jestliže límec o číslo větší je o 1 cm delší?

6. Vedle sebe stojí dva čtvercové stoly, větší a menší. Obvod desky většího stolu je 8 m, obvod menšího 4 m. Okolo obou stolů jsou lavice. Délka lavice okolo většího stolu je 10 m, délka lavice okolo menšího stolu je 6 m. U kterého stolu se sedí pohodlněji? (To znamená, u kterého stolu je mezera mezi stolem a lavicí větší?)

7. Francouzský inženýr Gustave Eiffel vybudoval v roce 1889 v Paříži věž vysokou 300 m. Železo, z něhož je věž sestavena, váží asi 8 000 000 kg. Kolik bude vážit model věže vyrobený z téhož materiálu, geometricky podobný a vysoký 30 cm?



8. Kousek mýdla, který máš v koupelně, má tvar kvádru. Užíváš ho rovnoměrně každý den. Za 7 dní jsi spotřeboval tolik mýdla, že se všechny jeho rozměry zmenšily na polovinu. Na kolik dní ti ještě mýdlo vystačí, budeš-li je používat stejně jako dosud?

9. Bavíš se vypouštěním mýdlových bublin. Okouzleně je pozoruješ a rozhodneš se zvětšit jejich poloměr na dvojnásobek. Co se stane s blankou tvořící bublinu, jestliže zdvojnásobíš její poloměr? Změní se její barvy? Proč?

10. Lahvička o obsahu 100 cm^3 je naplněna pilulkami ve tvaru kuliček o poloměru 1 mm. Nemocný užívá pět pilulek denně. Na kolik dní mu vystačí obsah lahvičky?

11. Korkový záchranný pás váží 2 kg. Kolik váží voda, kterou vytlačí?

12. List papíru je nalinkován tak, že 20 vodorovných linek protíná 16 rovnoběžných linek pod úhlem 60°. Kolik rovnoběžníků napočítáš na papíře?

■ Řešení úloh

Jak je podělil?

1. V peněžence bylo 59 Kčs, neboť přidáním 1 Kčs vzniklo číslo dělitelné 3, 4, 5, 6 – tj. 60.*)

2. Kuba dostal 60 Kčs : 3 = 20 Kčs (10 Kčs + 10 Kčs);
Blažej dostal 60 Kčs : 4 = 15 Kčs (10 Kčs + 5 Kčs);
Matěj dostal 60 Kčs : 5 = 12 Kčs (10 Kčs + 1 Kčs + 1 Kčs);
Vojta dostal 60 Kčs : 6 = 10 Kčs (5 Kčs + 5 Kčs).

3. V peněžence tedy byly 4 desetikoruny, 3 pětikoruny, 2 koruny a 1 dvoukoruna, tj. celkem 10 mincí.

4. Kuba, Blažej, Matěj a Vojta dostali dohromady 20 Kčs + 15 Kčs + + 12 Kčs + 10 Kčs = 57 Kčs.

5. Cyklista si vzal peněženku a v ní 3 Kčs (2 Kčs + 1 Kčs).

6. Kdyby se chlapci podělili sami o nalezených 59 Kčs, dostal by každý méně než od cyklisty, neboť
59 Kčs : 3 je méně než 20 Kčs,
59 Kčs : 4 je méně než 15 Kčs,
59 Kčs : 5 je méně než 12 Kčs,
59 Kčs : 6 je méně než 10 Kčs.**)

*) 60 je nejmenší takové číslo; že v peněžence nebylo víc, plyne z toho, že v ní bylo jen 10 mincí. (Pozn. překl.)

**) Zdánlivá záhada spočívá ovšem v tom, že třetina, čtvrtina, pětina a šestina nedávají dohromady celek. (Pozn. překl.)

Jak rozdělit dědictví?

Římský právník Salvianus rozřešil tuto úlohu následujícím způsobem: Dědictví je třeba rozdělit na sedm stejných částí. 4/7 dědictví dostane syn, 2/7 matka a 1/7 dcera. Toto rozdělení vystihuje záměr zemřelého Římana: Syn obdrží dvojnásobek toho, co matka, a dcera polovinu matčina podílu.

Dokážeš odpovědět?

1. Průměr zeměkoule je přibližně 12 500 km = 12 500 000 m. Označíme-li hledanou výšku Sněžky na glóbu písmenem x m, musí platit $x : 1\,603 = 1 : 12\,500\,000$, odkud

$$x = \frac{1\,603}{12\,500\,000}.$$

Výška Sněžky na glóbu bude přibližně 0,13 mm.

2. Ano, neboť

$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$.*)

3. Jestliže stranu čtvercového náměstí označíme x m, je jeho obsah x^2 m^2 a vejde se na ně $4x^2$ lidí. Tedy $4x^2 = 15\,000\,000$, odkud dostaneme, že strana náměstí je asi 1 940 m dlouhá.

4. Objem pokoje je $(4 \,.\, 4 \,.\, 3{,}5) \text{ m}^3 = 56 \text{ m}^3 = 56 \,.\, 1\,000 \text{ dm}^3$, obsahuje tedy 56 000 litrů vzduchu, jehož váha je

$1{,}293 \text{ g} \,.\, 56\,000 = 72\,408 \text{ g} = 72{,}4 \text{ kg}.$

Korková koule o průměru 1 m váží

$$0{,}24 \text{ g} \,.\, \frac{1}{6}\pi \,.\, 100^3 \approx$$

$$\approx \frac{1}{6} \,.\, 3{,}14 \,.\, 1\,000\,000 \,.\, 0{,}24 \text{ g} =$$

$$= 125{,}6 \text{ kg}.$$

Váha koule je téměř dvojnásobek váhy ovzduší, obsaženého v pokoji o rozměrech 4 m × 4 m × 3,5 m.

5. Délka (obvod) límce je $2\pi r$, kde r je jeho poloměr. Přidáním x se jeho délka zvětší na $2\pi r + x$. Poloměr prodlouženého límečku bude tedy

$$\frac{2\pi r + x}{2\pi}.$$

Odtud

$$\frac{2\pi r + x}{2\pi} - r = \frac{x}{2\pi} = 3 \text{ (mm)},$$

$$x = 3 \text{ mm} \,.\, 2\pi \approx 3 \text{ mm} \,.\, 6{,}28 = 18{,}84 \text{ mm} \approx 20 \text{ mm} = 2 \text{ cm}.$$

Číslo límečku musíme tedy zvětšit o 2.

6. Označuje-li a, b délku strany desky většího a menšího stolu v metrech, je $4a = 8$, $4b = 4$. Obvod lavice okolo většího stolu je

$$(a + 2x) \,.\, 4 = 4a + 8x = 10,$$

odtud

$$8x = 10 - 4a = 10 - 8 = 2$$

čili

$$x = \frac{1}{4}$$

*) Milión kuliček o průměru 1 cm má dokonce podstatně menší objem (kolik?) než 1 m^3. Musíme však brát v úvahu, že mezi jednotlivými kuličkami zůstane volný prostor. (Pozn. překl.)

(to je mezera mezi lavicí a stolem). Obvod lavice okolo menšího stolu je

$$(b + 2y) \,.\, 4 = 4b + 8y = 6,$$

odtud

$$8y = 6 - 4b = 6 - 4 = 2,$$

čili $y = \frac{1}{4}$

(mezera mezi lavicí a menším stolem). Mezery jsou stejné: $x = y$.

7. Model váží x kg. Tedy

$$x : 80\,000\,000 = 30^3 : 30\,000^3,$$

odkud

$$x = \frac{80\,000\,000 \,.\, 30^3}{30\,000^3} = 0{,}08.$$

8. Původní objem mýdla nechť je xyz. Po sedmi dnech je jeho objem

$\frac{1}{2}x \,.\, \frac{1}{2}y \,.\, \frac{1}{2}z = \frac{1}{8}xyz$. Rozdíl je $xyz - \frac{1}{8}xyz = \frac{7}{8}xyz$ – tolik mýdla bylo spotřebováno za 7 dní. Mýdlo tedy vystačí již jen na jeden den, neboť zůstala pouze osmina původního objemu.

9. Původní povrch bubliny má plochu $4\pi r^2$. Po dvojnásobném zvětšení poloměru její povrch bude mít plochu $4\pi(2r)^2 = 16\pi r^2$. Tloušťka blanky na povrchu bubliny se čtyřnásobně zmenší.*) Proto bude lámat jiné paprsky a její barva se změní.

10. Objem pilulky je

$$\frac{4}{3}\pi \,.\, 1 \text{ mm}^3 \approx 4{,}2 \text{ mm}^3.$$

Objem lahvičky je

$$100 \text{ cm}^3 = 100 \,.\, 1\,000 \text{ mm}^3.$$

Do lahvičky se tedy vejde

$100\,000 : 4{,}2 \approx 23\,809$ pilulek.**)

Tento počet pilulek stačí na 23 809 : 5 dní čili asi na 13 let a 17 dní.

11. Objem korku o váze 2 kg budiž V, takže

$$V = \frac{2 \text{ kg}}{0{,}24 \text{ kg/dm}^3} \approx 8{,}3 \text{ dm}^3.$$

Je-li pás úplně ponořen do vody, vytlačí vodu o hmotnosti 8,3 kg. Plave-li pás volně na hladině, vytlačená voda má hmotnost 2 kg.

*) Vycházíme ze skutečnosti, že množství (tj. objem) mýdlové hmoty se při zvětšení bubliny nezmění. Protože mýdlová blanka je velmi tenká, můžeme pro její objem použít přibližného vzorce $4\pi r^2 d$, kde d je tloušťka blanky. (Přesný vzorec je $\frac{4}{3}\pi[(r + d)^3 - r^3]$.) Po zvětšení bude pro tloušťku blanky d_0 platit $4\pi r^2 d = 16\pi r^2 d_0$ a odtud dostaneme $d_0 = \frac{1}{4}d$. (Pozn. překl.)

) Ve skutečnosti se do lahvičky vejde podstatně méně pilulek. Musíme brát v úvahu, že kulaté pilulky nelze do lahvičky umístit tak, aby mezi nimi nebyl prázdný prostor; záleží ovšem také na tvaru lahvičky. Srovnej též úlohu **2. (Pozn. překl.)

12. Jestliže n vodorovných linek protíná k rovnoběžných linek pod úhlem $\alpha \neq 0$, vznikne celkem

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{k(k-1)}{1\,.\,2} \text{ rovnoběžníků.}$$

V našem případě se toto číslo rovná

$$\frac{20\,.\,19}{2} \cdot \frac{16\,.\,15}{2} = 190\,.\,120 = 22\,800\,.$$

Komplexními čísly nazýváme čísla tvaru $a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla (např. 2, -5, 3, ...), zatímco i je imaginární jednotka ($i^2 = -1$).

Druhá odmocnina z čísla -1, tj. $\sqrt{-1}$, byla nazvána *imaginární jednotkou*. Jejím symbolem je písmeno i; tedy $\sqrt{-1} = i$*).

Imaginární jednotka byla poprvé zavedena v 16. století, kdy již byla známa jak čísla iracionální, objevená Pythagorem, tak i čísla záporná. Imaginární jednotka, jakož i na jejím základě zavedená komplexní čísla, jsou dalším rozšířením pojmu čísla. Název a symbol i pro imaginární jednotku použil již L. Euler (r. 1748). K všeobecnému rozšíření dnešní symboliky komplexních čísel přispěly zejména práce Cauchyovy (1789–1857) a Gaussovy (1777–1855).

Jedním z prvních, kdo počítali s komplexními čísly, byl G. Cardano (1501–1576), ačkoli tato čísla neuznával za skutečná a nazýval je „sofistickými". Cardano rozřešil následující úlohu: „Číslo 10 rozlož na takové dva sčítance, aby jejich součin byl 40." Tedy $x(10 - x) = 40$, odkud

$$x^2 - 10x + 40 = 0\,.$$

Cardano obdržel tento výsledek:

první sčítanec $= 5 - \sqrt{-15}$,
druhý sčítanec $= 5 + \sqrt{-15}$.

Skutečně,

$$(5 - \sqrt{-15}) + (5 + \sqrt{-15}) = 10\,,$$

zatímco součin

$$(5 - \sqrt{-15})\,(5 + \sqrt{-15})$$

vypočtený podle vzorce

$$(a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2$$

je roven

$$5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40\,.$$

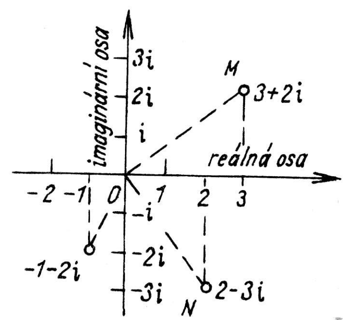
V roce 1629 rozřešil A. Girard rovnici $x^4 - 4x + 3 = 0$, přičemž podal čtyři řešení:

$$x_1 = 1;$$
$$x_2 = 1;$$
$$x_3 = -1 + \sqrt{-2};$$
$$x_4 = -1 - \sqrt{-2}\,.$$

*) Tento vztah nemůžeme považovat za definici symbolu i, neboť symbol $\sqrt{-1}$ nemá pro nás smysl, pokud pracujeme v oboru reálných čísel. Autor zde vychází z historického vývoje, kdy matematici skutečně formálně počítali s výrazy jako $\sqrt{-7}$ apod., aniž se starali o oprávněnost takových výpočtů [srov. dále Cardanovo řešení rovnice $x(10 - x) = 40$]. V moderní matematice obvykle definujeme komplexní čísla jako uspořádané dvojice reálných čísel (píšeme je zpravidla ve tvaru $a + bi$), pro něž definujeme základní početní operace (sčítání a násobení – srov. dále na str. 66) takovým způsobem, aby mimo jiné platilo $i^2 = -1$. (Pozn. překl.)

Připojil k tomu poznámku, že komplexní řešení jsou užitečná pro zobecnění pojmu řešení rovnice.

Po dlouhou dobu neuměli matematici dát imaginární jednotce geometrickou interpretaci. O tomto problému uvažoval již r. 1673 J. Wallis, ale rozřešen byl až na přelomu 18. a 19. století, hlavně zásluhou Nora G. Wessela (1745–1818), C. F. Gausse (který své výsledky uveřejnil až r. 1831) a J. R. Arganda, který r. 1806 uveřejnil práci „Pokus o geometrické znázornění komplexních čísel". Od té doby znázorňujeme imaginární čísla na ose kolmé k ose reálných čísel, přičemž za jednotku bereme $a = \sqrt{-1}$.



Obr. 26

Na obr. 26 jsou graficky znázorněna čísla $3 + 2i; 2 - 3i; -1 - 2i$.

Operace s komplexními čísly provádíme podle pravidel užívaných pro čísla reálná s použitím vztahů $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ atd. Pro sčítání např. platí

$$(a + bi) + (c + di) = \\ = (a + c) + (b + d)\,i;$$

pro násobení

$$(a + bi)(c + di) = \\ = (ac - bd) + (ad + bc)\,i,$$

pro dělení

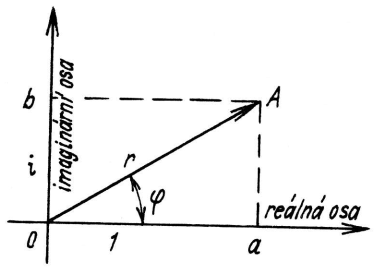
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \\ = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Každému bodu komplexní roviny odpovídá právě jedno komplexní číslo. Například bodu M (obr. 26) odpovídá číslo $3 + 2i$, bodu N číslo $2 - 3i$. Vzdálenost bodu M od bodu O (průsečíku osy reálných čísel s osou imaginárních čísel) čili délka úsečky OM je

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};$$

toto číslo je absolutní hodnota čísla $3 + 2i$. Obecně: Absolutní hodnotou komplexního čísla $a + bi$ je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Absolutní hodnota komplexního čísla se nazývá také jeho modul.

Protože z bodu O lze poloměrem $OM = r$ opsat kružnici, mají všechna komplexní čísla odpovídající bodům ležícím na této kružnici tentýž modul (v daném případě $\sqrt{13}$).



Obr. 27

Komplexní čísla neuspořádáváme na větší a menší jako čísla reálná.

Komplexní číslo je možno zapsat v tzv. trigonometrickém (goniometrickém) tvaru. Úhel φ, který svírá vektor $\overrightarrow{OA}$ s reálnou osou (obr. 27), se nazývá argument (amplituda) komplexního čísla: φ = argument čísla $a + bi$. Platí $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$; odtud $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Je-li např. dáno komplexní číslo $1 - \sqrt{3}\,i$, je $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4} = 2$, $\frac{a}{r} = \frac{1}{2} = \cos 60°$, $\frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$, a tedy $1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos 60° + i \sin 60°)$.

Zábavné úlohy

Kolikrát?

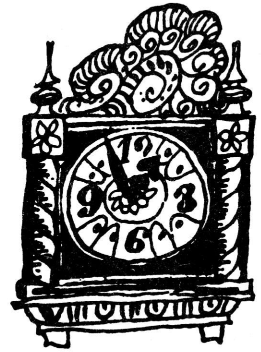
a) Kolikrát za den utvoří hodinové ručičky (minutová a hodinová) pravý úhel (90°)?

b) Hodiny ukazují čtyři hodiny. Kolikrát za den se jejich ručičky octnou v takové poloze, že úhel mezi nimi je stejný jako ve čtyři hodiny (120°)? Ručičky začneme sledovat přesně o půlnoci.

c) Kolikrát za den se ručičky hodin překrývají?

Pokažené bicí hodiny

Hodiny jdou dobře, ale špatně bijí: nebijí nikdy dvanáct úderů, nýbrž po odbití jedenácti bijí hned jednu hodinu. Proto se z jejich odbíjení jen málokdy můžeme dovědět, kolik je skutečně hodin. Ale občas se stane, že hodiny bijí správně. Bylo to např. v pondělí v deset hodin dopoledne – hodiny odbily deset.



Kdy odbijí hodiny opět skutečný čas?

Zde je odpověď: 1. v pondělí v jedenáct hodin dopoledne, 2. v sobotu v jednu hodinu odpoledne.

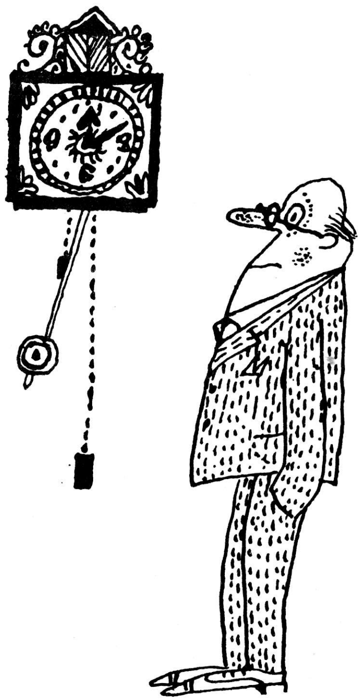
Prosíme čtenáře, aby si podrobně rozvážil postup řešení úlohy.

Magdiny hodinky

Magdiny hodinky se zpožďují za hodinu o dvě minuty. V jistém okamžiku ohlásí rozhlas přesný čas – dvanáct hodin. Kdy ukáží dvanáct hodin Magdiny hodinky, jestliže právě před pěti hodinami byly přesně nařízeny?

Kant a hodiny

Jeden z největších německých filozofů, Immanuel Kant (1724–1804), profesor univerzity v tehdejším Královci, byl samotář a starý mládenec. Jeho život probíhal tak pravidelně, že obyvatelé Královce si řídili podle něho hodinky, jakmile ho viděli vycházet z domu a spěchat na přednášku na univerzitu. Jednoho večera zpozoroval Kant s údivem, že jeho nástěnné hodiny stojí – nenatažené. Sluha, kterého Kant přijal teprve předešlého dne, zřejmě nevěděl, že má hodiny natáhnout.



Veliký filozof hodiny natáhl, ale nemohl je správně nařídit, protože svoje kapesní hodinky odevzdal právě hodináři do opravy. Pohlédnuv na hodiny, odešel Kant ke svému příteli Schmidtovi, který bydlel asi kilometr od něho. Po příchodu do Schmidtova bytu pohlédl Kant letmo na hodiny, které visely v předsíni. U svého přítele se Kant nějaký čas zdržel a při loučení opět vrhl krátký pohled na hodiny v předsíni. Domů se Kant vracel svým obvyklým klidným krokem stejnou cestou, kterou šel k Schmidtovi. Po návratu domů Kant ihned správně nařídil ručičky svých hodin.

Odkud Kant věděl, kolik je skutečně hodin?

Rozkaz k odletu

Polská letecká jednotka dostala za války rozkaz k bojovému letu na německé pozice. Podrobný bojový rozkaz byl v zalepené obálce, kterou měl velitel jednotky otevřít mezi jednou a druhou hodinou přesně v okamžiku, kdy minutová ručička pokryje hodinovou. Vypočtěte přesně tento okamžik.

Co je víc?

1. Co je víc: 3^{2^3} nebo 8! (osm faktoriál)?

2. Co je víc: $\sqrt{3}$ nebo $\sqrt[3]{4}$?

3. Co je víc: 10^9 nebo 9^{10}?

4. Co je víc: $0{,}1^{10}$ nebo $0{,}3^{20}$?

5. Co je víc: $\sqrt{10}$ nebo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

Poznámka: Nepoužívejte přibližných výpočtů.

Kolik bylo přítomných v posluchárně?

V posluchárně se shromáždili studenti a studentky. Dohromady jich bylo víc než 70, ale méně než 90. Počet všech lavic, v nichž se mládež usadila, převyšoval o jednu počet studentů sedících v každé z lavic. Studentky seděly po jedné v každé lavici.

Počet všech lavic a všech studentů sečtený dohromady dal počet všech přítomných.

Kolik bylo všech přítomných v posluchárně a v kolika lavicích seděli?*)

Zajímavosti, problémy, hlavolamy

Jejich účelem je prospěšná zábava. Jejich řešením je možno cvičit schopnost logického myšlení právě tak dobře, jako sestavováním a řešením rovnic.

1. Uprostřed bazénu je vodotrysk. Voda z něho vytéká 16 trubicemi o stejném průměru $\frac{1}{2}$ cm. Bazén se vyprazdňuje otvorem o průměru 2 cm. Dozorce otevřel přívod vody do vodotrysku, ale zapomněl zavřít odtokový otvor. Za jak dlouho se bazén naplní vodou?

2. Mysli si libovolné dvouciferné číslo. První jeho číslici násob dvěma. K výsledku přidej 1. Výsledek násob pěti a přičti druhou číslici. Řekni mi výsledek a já ti řeknu, jaké číslo jsi měl na mysli.

Jak je zjistím? Od čísla, které mi oznámíš, odečtu 5. Vysvětli tento hlavolam!

3. Mysli si libovolné čtyřciferné číslo. Napiš číslo, které dostaneš, když vynecháš poslední cifru; pak vynech dvě poslední cifry a konečně tři poslední. Tato tři čísla sečti. Součet násob 9 a k součinu přičti součet číslic původního čísla. Výsledek je číslo, které jsi měl původně na mysli. Vysvětli tento hlavolam!

*) Při řešení uvažte, zda k němu potřebujete všechny uvedené údaje či zda je některý z nich zbytečný. (Pozn. překl.)

4. Jeden dělník může vykopat studnu hlubokou 2 m a o průměru 1 m za čtyři hodiny. Za jak dlouho takovou studnu vykope 8 dělníků?

5. Třída pochodovala v dvojstupech. Jeden z žáků se podíval před sebe a napočetl 9 párů, pak se ohlédl za sebe a napočetl 5 párů. Kolik žáků pochodovalo v útvaru?

■ Řešení úloh

Kolikrát?

Úvodní úvaha. Pohyb hodinových ručiček se děje ve dvou cyklech. Malý cyklus trvá o něco déle než jednu hodinu a zahrnuje období od jednoho překrytí ručiček k následujícímu. Velký cyklus trvá 12 hodin: od počátku až do překrytí ručiček v počáteční poloze (na dvanáctce).

a) Zkoumejme vzájemnou polohu ručiček v malém cyklu.

1. Za jednu minutu předběhne minutová ručička hodinovou o

$$6^\circ - \frac{1^\circ}{2} = \left(5\frac{1}{2}\right)^\circ.$$

2. Minutová ručička předběhne hodinovou o 90° za čas

$$90^\circ : \left(5\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{90 \,.\, 2}{11} = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$$

minut. Za tuto dobu se minutová ručička posune o úhel

$$16\frac{4}{11} \,.\, 6^\circ = \left(98\frac{2}{11}\right)^\circ,$$

zatímco hodinová ručička se posune o úhel

$$16\frac{4}{11} \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(8\frac{2}{11}\right)^\circ.$$

Úhel mezi ručičkami bude

$$\left(98\frac{2}{11}\right)^\circ - \left(8\frac{2}{11}\right)^\circ = 90^\circ.$$

3. Protože ručičky se pohybují stejnoměrně, posune se za

$$32\frac{8}{11}\text{ min}\ \left(\text{tj. } 16\frac{4}{11} \,.\, 2\right)$$

velká ručička o úhel $\left(196\frac{4}{11}\right)^\circ$, zatímco malá se posune o úhel $\left(16\frac{4}{11}\right)^\circ$.

Úhel mezi nimi bude

$$\left(196\frac{4}{11}\right)^\circ - \left(16\frac{4}{11}\right)^\circ = 180^\circ.$$

4. Po uplynutí $16\frac{4}{11} \,.\, 3$ min se velká ručička posune o úhel

$$\left(98\frac{2}{11}\right)^\circ . 3 = \left(294\frac{6}{11}\right)^\circ$$

a malá o úhel

$$\left(24\frac{6}{11}\right)^\circ = \left(8\frac{2}{11}\right)^\circ . 3.$$

Úhel mezi nimi bude 270°.

5. Po uplynutí

$$16\frac{4}{11} \,.\, 4\text{ min} = 65\frac{5}{11}\text{ min}$$

předběhne velká ručička malou o 360°. Nastane konec prvního malého cyklu; ručičky se po prvé od startu překryjí.

Hodiny ukazují 1 hodinu a $5\frac{5}{11}$ minuty.

Cyklus trval 1 h $5\frac{5}{11}$ min. Od toho okamžiku začíná druhý malý cyklus. Počátek třetího malého cyklu nastane, když hodiny ukazují $10\frac{10}{11}$ minuty po další celé hodině atd.

6. Do okamžiku, kdy se obě ručičky octnou opět v počáteční poloze (tj. na dvanáctce), tedy po uplynutí dvanácti hodin, proběhne 11 malých cyklů, neboť jeden malý cyklus trvá

$$1\text{ h } 5\frac{5}{11}\text{ min} = 65\frac{5}{11}\text{ min},$$

$$12\text{ h} = 720\text{ min},\quad 720 : 65\frac{5}{11} = 11.$$

V každém malém cyklu máme čtyři fáze:

první – úhel mezi ručičkami je 90° – vyhovuje úloze;

druhý – úhel mezi ručičkami je 180° – nevyhovuje;

třetí – úhel mezi ručičkami je 270° – vyhovuje;

čtvrtý – úhel mezi ručičkami je 360° – nevyhovuje.

Během každého malého cyklu se ručičky dostanou dvakrát do polohy, v níž svírají pravý úhel. V jedenácti cyklech tato situace nastane 22krát, a tedy za jeden den zaujmou ručičky požadovanou polohu 44krát.

b) Úhel mezi ručičkami je 120°.

1. Minutová ručička předběhne hodinovou o 120° za čas

$$120^\circ : \left(5\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$$

minut.

2. Za tuto dobu se posune velká ručička o úhel

$$6^\circ \,.\, \frac{240}{11} = \left(130\frac{10}{11}\right)^\circ$$

a malá o úhel

$$\frac{1^\circ}{2} \,.\, \frac{240}{11} = \left(10\frac{10}{11}\right)^\circ.$$

Úhel mezi ručičkami bude

$$\left(130\frac{10}{11}\right)^\circ - \left(10\frac{10}{11}\right)^\circ = 120^\circ.$$

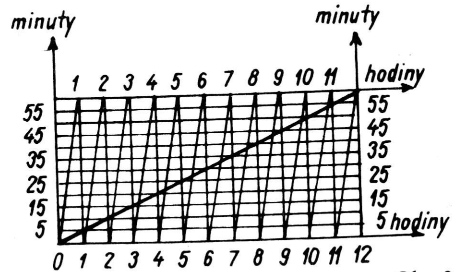
3. Druhé předběhnutí o dalších 120° nastane po $\frac{480}{11}$ min. Hodiny budou ukazovat 12 hodin $43\frac{7}{11}$ minuty.

4. K třetímu předběhnutí o 120° . 3, tj. o 360°, dojde po $\frac{720}{11}$ min čili po 1 h $5\frac{5}{11}$ min. Nastane konec malého cyklu; hodiny ukazují $5\frac{5}{11}$ minuty po jedné hodině.

5. Během dvanácti hodin proběhne jedenáct malých cyklů pohybu ručiček: $720 : 65\frac{5}{11} = 11$. Za těchto 11 cyklů

utvoří ručičky 22krát úhel 120° a 11krát úhel 0° (překryjí se) a vrátí se do místa startu. Během jednoho dne utvoří ručičky 44krát úhel 120°.

Všimněte si: V obou případech (úhel 90° i 120°) trvá malý cyklus $65\frac{5}{11}$ min. Lze tedy očekávat, že malý cyklus pohybu ručiček trvá bez ohledu na zvolený úhel vždy $65\frac{5}{11}$ min.



Obr. 28

c) Viz obr. 28.

Na obrázku je vodorovná osa, odpovídající hodinám, rozdělena na 12 částí a svislá osa, odpovídající minutám, na 60 částí. Tlustá šikmá čára představuje pohyb hodinové ručičky, zatímco tenčí (a strmější) šikmé čáry představují pohyb minutové ručičky. Průsečíky odpovídají okamžikům, kdy se ručičky překryjí. Čas překrytí lze zjistit na osách.*)

Pokažené bicí hodiny

Dvakrát za den předběhne bití o jednu hodinu čas, který hodiny ukazují na číselníku. Aby bití bylo ve shodě s ukazovaným časem, musí se předběhnout o 12 hodin.

V pondělí v 10 hodin ráno bily hodiny desetkrát, a proto bily správně – jedenáctkrát – také o hodinu později; ale bily správně již od jedné hodiny v noci. Každých jedenáct hodin předběhne bití ukázaný čas o jednu hodinu. O dvanáct hodin se bití předběhne za 132 hodiny (11.12), tj. za pět a půl dne. V pondělí tedy hodiny odbijí správně ještě jedenáct hodin, a pak budou opět správně odbíjet čas až v sobotu od 13 do 23 hodin.

*) Některý čtenář bude možná při řešení celé úlohy uvažovat spíše takto: Začněme od kteréhokoli okamžiku během dne, kdy se obě ručičky překrývají. Jak jsme zjistili, do příštího překrytí ručiček uplyne 1 h $5\frac{5}{11}$ min (tj. malý cyklus). Protože velká (minutová) ručička se pohybuje rychleji než malá (hodinová), bude se úhel mezi nimi (měřený od hodinové ručičky k minutové) zvětšovat od 0° (v počátečním okamžiku překrývání) až na 360° (po uplynutí jednoho malého cyklu). Každou hodnotu $\alpha°$ $(0° < \alpha° < 360°)$ nabude tedy právě jednou. Protože však v naší úloze nezáleží na tom, zda úhel měříme od malé či velké ručičky, mají pro nás úhly $\alpha°$, $(360 - \alpha)°$ stejný význam. Jakýkoli zvolený úhel $\alpha°$ $(0° < \alpha° < 360°)$ budou tedy ručičky svírat dvakrát za jeden malý cyklus, a protože za den proběhne 22 malých cyklů, budou ručičky v žádané poloze celkem 44krát. To tedy platí i pro naše úlohy, kdy $\alpha = 90$ nebo $\alpha = 120$. Čtenář nechť sám uváží, proč pro $\alpha = 0$ (překrytí ručiček) dostáváme jiný výsledek. (Pozn. překl.)

Magdiny hodinky

Když rozhlas oznámil 12 hodin, ukazovaly Magdiny hodinky o 10 minut méně čili 11 h 50 min. Zbývá tedy ještě 10 minut, avšak během těchto deseti minut se Magdiny hodinky zpozdí o 20 sekund.

Odpověď: Magdiny hodinky ukáží 12 hodin za 10 min 20 s.

Kant a hodiny

Kant vypočetl správný čas takto:

1. Při odchodu z domu se podíval na hodiny, stejně jako po návratu domů od Schmidta. Mohl tedy vypočítat, jak dlouho se zdržel mimo dům (a h).

2. Při příchodu ke Schmidtovi i při odchodu od něho se podíval na hodiny, takže věděl, jak dlouho byl u Schmidta (b h).

3. Rozdíl $(a - b)$ h dělený dvěma udává čas potřebný k návratu domů od Schmidta. Kant však věděl, kdy od Schmidta odcházel, a mohl tedy nařídit svoje hodiny na správný čas.

Rozkaz k odletu

Velká (minutová) ručička oběhne 60 dílků hodinového číselníku za tentýž čas, za který malá (hodinová) ručička oběhne pět těchto dílků. Malá ručička se tedy pohybuje dvanáctkrát pomaleji (60 : 5) než velká. Posune-li se velká ručička o jeden dílek, posune se malá o $\frac{1}{12}$ stejného dílku. Odtud plyne, že za každou minutu předběhne velká ručička malou o $\frac{11}{12}$ dílku $\left(1 - \frac{1}{12}\right)$. Když malá ručička ukazovala jednu hodinu, velká byla na dvanáctce. Vzdálenost mezi nimi byla 5 dílků. Velká ručička dohání malou za každou minutu o $\frac{11}{12}$ dílku, takže ji dohoní a překryje za $\left(5 : \frac{11}{12}\right)$ min, tj. za $\frac{60}{11}$ min. To bude právě 1 h 5 min $27\frac{3}{11}$ s.

Co je víc?

1. $8! > 3^{2^3}$,

neboť

$8! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 = 40\,320$,

zatímco $3^{(2^3)} = 3^8 = 6\,561$.

2. $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$, neboť $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{16}$, zatímco $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$; samozřejmě $\sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{16}$.

3. $9^{10} > 10^9$,

neboť

$\log 10^9 = 9 \log 10 = 9$

a $\log 9^{10} = 10 \log 9 \approx 10 . 0{,}954\,2 = 9{,}542 > 9$.

4. $0{,}3^{20} = (0{,}3^2)^{10} = 0{,}09^{10}$; $0{,}1^{10} > 0{,}09^{10}$.

5. $(\sqrt{10})^2 = 10 = 5 + 5$;

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + \sqrt{24}$;

$5 + 5 = 5 + \sqrt{25} > 5 + \sqrt{24}$.

Kolik bylo přítomných v posluchárně?

Označme počet lavic z. V každé lavici sedělo x studentů a jedna studentka. Je $z = x + 1$; všech přítomných bylo $z(x + 1) = z^2$; protože $8^2 < 70 < z^2 < 90 < 10^2$, je zřejmě $z = 9$, $x = 8$.

V posluchárně bylo přítomno 81 studentů a studentek. Seděli v devíti lavicích.*)

Zajímavosti, problémy, hlavolamy

1. Bazén se nikdy nenaplní vodou, protože 16 trubic o průměru $\frac{1}{2}$ cm má dohromady průřez $16 \,.\, \pi \,.\, \left(\frac{1}{4}\,\text{cm}\right)^2 = \pi\,\text{cm}^2$, tj. stejný jako odtokový otvor o průměru 2 cm: $\pi \,.\, 1\,\text{cm}^2 = \pi\,\text{cm}^2$.

2. Dvouciferné číslo budiž $10a + b$. Pak $(2a + 1) \,.\, 5 = 10a + 5$; $10a + 5 + b - 5 = 10a + b$.

3. Čtyřciferné číslo budiž

$1\,000a + 100b + 10c + d$;

pak

$$(100a + 10b + c) + (10a + b) + a = 111a + 11b + c;$$
$$(111a + 11b + c) \,.\, 9 + (a + b + c + d) = 1\,000a + 100b + 10c + d.$$

4. Úloha nemá smysl: osm dělníků nemůže kopat studnu o průměru 1 m.

5. 5 párů + 9 párů + 1 pár = 15 párů; $2 \,.\, 15 = 30$. V útvaru šlo 30 žáků.

*) Poslední údaj v úloze před otázkou je již zbytečný, neboť dává $z + zx$ = počet všech přítomných; tuto rovnost jsme však již dostali z předešlých údajů. (Pozn. překl.)

■ 1. Kvadratura kruhu

Kvadratura kruhu čili sestrojení takové úsečky x, aby obsah čtverce o straně x byl roven obsahu kruhu o daném poloměru r, tj. $x^2 = \pi r^2$, má bohatou a poučnou minulost a souvisí těsně s číslem π.

Dva tisíce let před naším letopočtem napsal písař (který byl jistě také matematikem) faraóna Amenemhata III., že obsah kruhu o průměru $2r$ je roven obsahu čtverce o straně rovné $\frac{8}{9}$ průměru kruhu: $\frac{8}{9} \,.\, 2r$. Chybnost tohoto tvrzení lze ukázat jednoduchým výpočtem: Skutečně, kdyby platilo

$$\left(\frac{8}{9} \,.\, 2r\right)^2 = \pi r^2 \quad \text{čili} \quad \frac{256}{81}\, r^2 = \pi r^2,$$

bylo by $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}160\,4\ldots$ Chyba se objevuje již na druhém místě za desetinnou čárkou ($\pi = 3{,}141\,59\ldots$).

Řekové, kteří se geometrii učili od Egypťanů, převzali od nich také problém kvadratury kruhu, který byl jednou ze tří nerozřešených úloh antického světa (ostatní dva byly zdvojení krychle a trisekce úhlu). Kvadraturou kruhu se zabývali filozofové, sofisté i matematici: v 5. století před naším letopočtem Anaxagoras z Milétu a Hippias z Elidy, ve 4. století př. n. l. Hippokrates z Chiu a sofisté Antifon a Brizon [objevitelé exhaustivní metody*)] a konečně největší ze všech starověkých matematiků Archimédes (287 – 212 př. n. l.).

Archimédes napsal pojednání „O měření kruhu“. Vypočetl obsah kruhu tak, že do kruhu vepsal šestiúhelník a pak zdvojnásoboval počet jeho stran až na 96. Obsah tohoto mnohoúhelníka pak vypočetl. Hodnota čísla π, kterou Archimédes obdržel, tj. $3\frac{1}{7}$ nebo $3\frac{10}{71}$, je jednou z nejlepších aproximací tohoto čísla.

Ani v pozdějších dobách neustaly pokusy o kvadraturu kruhu. Výčet těch, kteří se tímto problémem ve stře-

*) Exhaustivní metodou se rozumí postup vypracovaný v antické matematice, jímž bylo možno vypočítat obsahy obrazců (či objemy těles) omezených křivkami (plochami). Název této metody se vžil až v 17. století zásluhou pražského jezuity Gregoria St. Vincentia (1584 – 1667). Exhaustivní metoda se stala základem myšlenkového postupu diferenciálního a integrálního počtu. Za jejího objevitele bývá pokládán Eudoxos (406? – 355? př. n. l.), který sledoval hlavní myšlenku Anaxagorovu (v malém neexistuje nejmenší, ale vždy ještě menší). (Pozn. překl.)

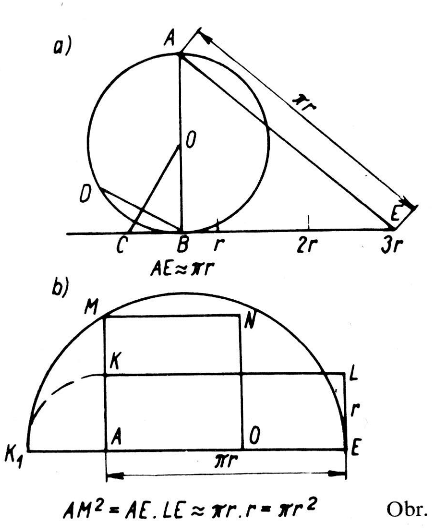
dověku zabývali, začíná Leonardem z Pisy Fibonaccim (13. století). Jsou mezi nimi velcí matematici jako F. Viète (16. století), C. W. Leibniz a J. Wallis (17. století), L. Euler (18. století). Jsou mezi nimi také fyzici jako Ch. Huygens (17. století). Vypočtené hodnoty čísla π byly stále přesnější, zvláště po objevení diferenciálního a integrálního počtu.

Kvadraturou kruhu se zabývali nejen Evropané, ale i jiné národy světa. Indický matematik Aryabhatta (5. století) udává $\pi = \sqrt{10}$; jiný Ind Bhaskara (12. století) udává $\pi = \frac{754}{240}$. Číňan Ču-Pej-Suan (3. století) vypočetl $\pi = 3$ a jeho krajan Li-Hung (6. století) došel k hodnotě $\pi = \frac{157}{50}$.*)

Mezi těmi, kdož se zabývali kvadraturou kruhu, nelze opomenout Poláka Adama A. Kochańského (1631–1700), knihovníka a dvorního matematika krále Jana Sobieského. Vypracoval nejkrásnější a nejjednodušší ze známých kvadratur kruhu**). Kochński provedl kvadraturu, aniž změnil rozevření kružítka, jímž je narýsována kružnice. Popíšeme jeho postup.

Na obr. 29a je $OB = r$; $CE \perp AB$; tětiva $BD = r$; $OC \perp DB$; $CE = 3r$.

Ukážeme, že platí $AE \approx \pi r$.



Obr. 29

Je $AB = 2r$, $OB = r$, $BD = r$, $CE = 3r$.

Z trojúhelníka COB najdeme

$$CB = OB \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{3} r \sqrt{3};$$

$$BE = CE - CB = 3r - \frac{1}{3} r \sqrt{3} =$$

$$= r\left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right).$$

---

*) Podle novějších poznatků byla hodnota $\pi \approx \sqrt{10}$ známa již Číňanu Čžan-Chenovi (78–139). Aryabhatta I. počítal s hodnotou $\pi \approx \frac{62\,832}{20\,000}$. Lin Hui (3. stol.) dostal rozšířením Archimédovy metody při výpočtu třitisícesedmdesátdvouúhelníka přiblížení $\pi \approx 3{,}141\,59$ a jeho krajan Cu Čchung (430 až 501) odvodil odhad $3{,}141\,592\,6 < \pi < 3{,}141\,592\,7$. (Pozn. překl.)

**) Samozřejmě přibližných. Kochański působil od r. 1671 v Praze a zemřel v Teplicích 19. května 1700. (Pozn. překl.)

Z trojúhelníka ABE dostáváme

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 =$$

$$= (2r)^2 + r^2\left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= 4r^2 + r^2\left(9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(40 - 6\sqrt{3})\,r^2.$$

Odtud

$$AE = \sqrt{\frac{1}{3}(40 - 6\sqrt{3})}\,r$$

čili

$$AE \approx 3{,}141\,59r.$$

Víme však, že délka půlkružnice je $\pi r \approx 3{,}141\,59r$.

Vidíme, že polský učenec vypočetl π s přesností na 0,000 01. Dále uvažoval Kochański takto:*)

Čtverec kolmice spuštěné na průměr kruhu z libovolného bodu na kružnici je roven součinu úseků, na něž kolmice dělí průměr (obr. 29b):

$AM^2 = AK_1 \,.\, AE$; $EL = AK_1 = r$.

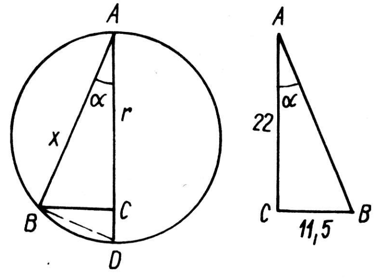
Obsah čtverce $AMNO$ je roven obsahu obdélníka $AELK$, který je roven obsahu kruhu o poloměru r čili πr^2.

Jiným prakticky použitelným řešením kvadratury kruhu je kvadratura inženýra Binga.

Protože strana x hledaného čtverce je menší než průměr kruhu, existuje tětiva AB tak, že $AB = x$ (viz obr. 30) čili $AB^2 = \pi r^2$. Z trojúhelníka ADB dostáváme $AB = 2r \cos \alpha$, odkud

$$(2r \cos \alpha)^2 = \pi r^2;\quad 4r^2 \cos^2 \alpha = \pi r^2;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}\pi.$$



Obr. 30

Tedy

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0{,}886;\quad \alpha = 27°36'.$$

Poměr CB/AC je roven tangentě úhlu α; přitom $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 27°36' \approx 0{,}523$ nebo přibližně $\frac{23}{44} = \frac{11{,}5}{22}$. Poslední výsledek umožňuje snadné sestrojení Bingova trojúhelníka, ukázaného na obrázku. Přiložíme-li tento trojúhelník na průměr kruhu, ihned najdeme stranu čtverce x. Bingovy kvadratury lze použít, jestliže jde o technické výpočty nevyžadující velkou přesnost.

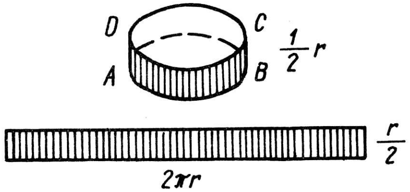
Matematici nezanechávali hledání kvadratury kruhu. „Řešení“ zasílaná pařížské Akademii věd byla tak počet-

---

*) V pravoúhlém trojúhelníku je čtverec výšky spuštěné na přeponu roven součinu úseků, na něž výška dělí přeponu.

ná, že v roce 1775 pařížská Akademie odmítla zkoumat řešení kvadratury kruhu, která jí budou zaslána. Teprve v druhé polovině 19. století dokázali dva matematici, Francouz C. Hermite (1822–1901) a Němec F. Lindemann (1852–1939), že pomocí pravítka a kružítka nelze provést přesnou kvadraturu kruhu.

Jaký je důvod neřešitelnosti kvadratury kruhu pomocí kružítka a pravítka? Jestliže x je stranou hledaného čtverce, pak $x^2 = \pi r^2$ čili $x = r\sqrt{\pi}$. Znamená to, že je-li dána úsečka r (poloměr daného kruhu), je třeba sestrojit jinou úsečku, jejíž délka je $\sqrt{\pi}$-násobkem délky r. Víme, že číslo π ukazuje, kolikrát je obvod kruhu delší než jeho průměr ($\pi = 3{,}141\,5\ldots$). Ve starověku se domnívali, že toto číslo je racionální (zlomek) a usilovně je hledali. Skutečně: je-li dána úsečka r, je možno pomocí kružítka a pravítka sestrojit nejen úsečky délky $2r, \frac{1}{2}r$, ale i $r\sqrt{3}, r\sqrt{2}, r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ (strany trojúhelníka, čtverce a pětiúhelníka vepsaných do kruhu). Není však možno sestrojit úsečku délky $r\sqrt{\pi}$, protože π není číslo racionální, ale transcendentní (tj. takové, které není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty). To dokázal v roce 1882 F. Lindemann; předtím v roce 1873 dokázal C. Hermite, že číslo e je transcendentní. Od té doby se již nikdo tímto problémem nezabývá, neboť byl definitivně rozřešen negativně. Pomocí kružítka a pravítka (tzn. sestrojováním kružnic a přímek) jej nelze přesně rozřešit. Existují však prakticky použitelné kvadratury kruhu, založené na jiných metodách.



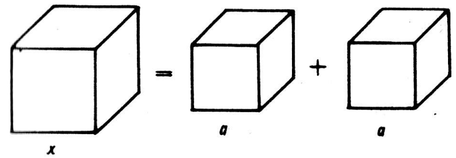
Obr. 31

Italský vědec a velký umělec Leonardo da Vinci (15. století) zpozoroval, že plocha pláště válce o poloměru r a výšce $\frac{1}{2}r$ (obr. 31) se přesně rovná obsahu jeho podstavy. Stačí tedy tento válec obalit páskem papíru širokého $\frac{1}{2}r$, abychom dostali obdélník o rozměrech $2\pi r$ a $\frac{1}{2}r$, který pak snadno změníme na čtverec, jehož obsah se přesně rovná obsahu kruhu o poloměru r. Platí totiž $2\pi r \cdot \frac{1}{2}r = \pi r^2$.

2. Zdvojení krychle (délská úloha)

Hle, co praví stará řecká pověst. Na ostrově Délos řádila „černá smrt" – mor. Vyděšení obyvatelé se vydali do svatyně ochránce ostrova boha Apollóna a prostřednictvím kněží se ptali, jak obměkčit boha, aby zachránil obyvatelstvo od nákazy a smrti. Apollón žádal, aby jeho obětní oltář ve svatyni byl zdvojnásoben.

Onen oltář měl tvar krychle. Obyvatelé ostrova ihned postavili na oltář ještě jednu krychli stejné velikosti. Přesto však černá smrt dále kosila lidské životy. Ukázalo se, že bůh Apollón je velmi náročným geometrem: žádal zdvojení oltáře, aniž se změní jeho tvar.



Obr. 32

Vyjádříme-li tento požadavek pomocí algebraických znaků, dostaneme (obr. 32)

$x^3 = 2a^3$ čili $x = a\sqrt[3]{2}$,

kde a je hrana dané krychle a x hrana krychle, jejíž objem je dvojnásobkem objemu původní krychle. Na obr. 33 je ukázán mechanismus – nazvěme jej „křižák", který byl prý použit Platónem při řešení úlohy zdvojení krychle. „Křižák" je třeba umístit tak, aby jedno jeho rameno procházelo vrcholem C neúplného obdélníka $ABCD$, zatímco druhé rameno prochází vrcholem B*).

Potom úsečka $OB = x$ je hranou krychle, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle.

D ů k a z. Z pravoúhlých trojúhelníků EBC a BCF (viz obr. 33) dostáváme

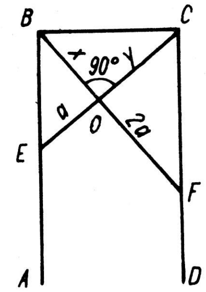
(1) $x^2 = ay$

a

(2) $y^2 = 2ax$.

Z rovnice (1) dostaneme $y = \frac{x^2}{a}$. Dosadíme-li tuto hodnotu y do rovnice (2), nalezneme

$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$ čili $x^3 = 2a^3$.



Obr. 33

Tímto způsobem umožňuje Platónův „křižák" nalézt dvě úsečky x a y, které jsou střední geometrické úměrné a, y a x, $2a$, neboť rovnosti (1) a (2) je možno zapsat ve tvaru úměr

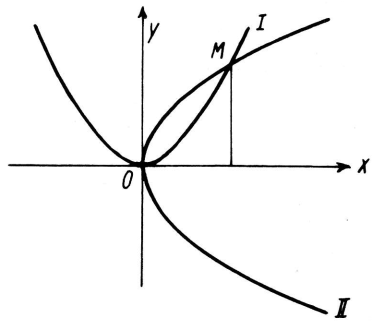
$a : x = x : y, \quad x : y = y : 2a$

*) Body B, C nejsou dány předem, ale dostaneme je tak, že body E, F na „křižáku" vedeme rovnoběžky, které současně otáčíme, až jejich průsečíky se zbývajícími rameny „křižáku" (body B, C) určují přímku kolmou k oběma rovnoběžkám BE, CF. (Pozn. překl.)

čili

$a : x = x : y = y : 2a.$

To se shodovalo s tvrzením Hippokrata z Chiu, že hranu krychle o objemu dvakrát větším než původní dostaneme dvojím sestrojením střední geometrické úměrné.

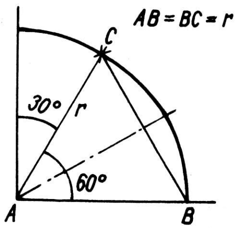


Obr. 34

Athénský matematik Menechmos (4. století před naším letopočtem), který se také snažil rozřešit délský problém, užil k tomu dvou parabol (obr. 34). V současné symbolice lze jeho řešení zapsat takto: rovnice paraboly I je $x^2 = ay$, rovnice paraboly II je $y^2 = 2ax$. Abychom nalezli souřadnice průsečíku parabol (bodu M), musíme rozřešit soustavu těchto dvou rovnic. Výsledkem je $x^3 = 2a^3$, odkud dostáváme, že úsečka (souřadnice x) bodu M je hledanou délkou hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobek původní krychle.

3. Trisekce úhlu

Třetí úlohou, kterou staročecí matematici odkázali potomstvu nerozřešenou, je úloha požadující rozdělit libovolný úhel na tři stejné části pomocí kružítka a pravítka. Zdánlivě je tato úloha velmi prostá. Je jasné, že některé úhly, např. pravý úhel (90°), je možné rozdělit na tři stejné části velmi jednoduše (obr. 35).

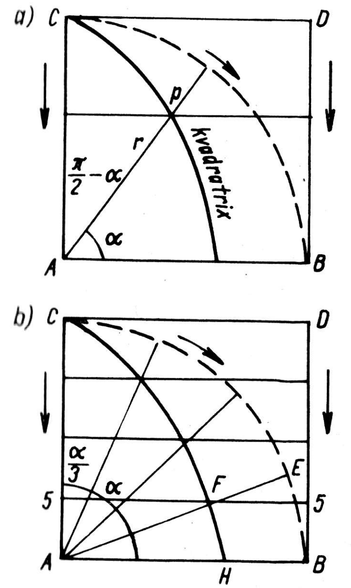


Obr. 35

Pythagorovci, kteří se zabývali pravidelnými mnohoúhelníky, pokoušeli se také rozdělit na tři stejné části úhel 120°, neboť to by jim umožnilo sestrojit pravidelný devítiúhelník. Často však se spokojili s přibližným řešením.

K přibližnému rozdělení libovolného úhlu na tři stejné části bylo vymyšleno několik přístrojů. Jeden z nich se zakládá na křivce, která byla později nazvána *kvadratrix* a kterou objevil Hippias z Elidy (5. stol. př. n. l.), jiný na křivce, která se nazývá *Nikomédova konchoida.*

Obr. 36 ukazující kvadratrix dává rovněž představu o způsobu jejího sestrojení. Dostaneme ji jako výsledek dvou rovnoměrných pohybů: strana CD čtverce $ABCD$ se posunuje rovnoměrným pohybem směrem ke straně AB, přičemž zachovává polohu rovnoběžnou vzhledem k původní; současně se strana (polopřímka) AC otáčí kolem bodu A (viz šipky). V okamžiku, kdy strana CD splyne se stranou AB, otočí se polopřímka AC o úhel 90° a rovněž splyne se stranou AB. Geometrické místo průsečíků strany CD a polopřímky AC se nazývá kvadratrix.



Obr. 36

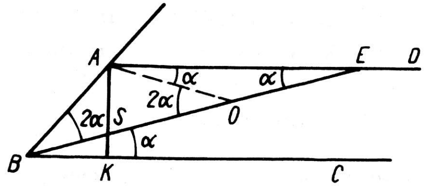
Kvadratrix můžeme narýsovat na základě její rovnice $r = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}$, kde $r = AP$ je vzdálenost bodů křivky od pólu A; $a = CD$ je délka strany daného čtverce; α je úhel, nabývající hodnot od 0 do $\frac{1}{2}\pi$.

Měníme-li hodnotu úhlu α od 0 do $\frac{1}{2}\pi$, dostáváme odpovídající délky polohového vektoru r, načež spojením koncových bodů P úseček AP dostaneme křivku – kvadratrix. Přitom je třeba vědět, že $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \to 1$ při $\alpha \to 0$.

Předpokládejme, že chceme daný úhel α rozdělit na tři stejné části. K tomu cíli umístíme jedno rameno úhlu α tak, aby splynulo se stranou čtverce AC, a bodem F, v kterém druhé rameno AE úhlu α protíná kvadratrix, vedeme rovnoběžku s AB (5 – 5 na obr. 36b). Úsečku $D - 5$ rozdělíme na tři stejné části a body dělení vedeme rovnoběžky se stranou AB (obr. 36b).

Body, v nichž tyto rovnoběžky protnou kvadratrix, spojíme přímkami s pólem A (narýsujeme úsečky AP). Tyto úsečky rozdělí úhel na tři stejné části.

Nebudeme se již déle zabývat objasněním použití výše uvedených křivek k rozdělení libovolného úhlu na tři stejné části. Zato uvedeme ještě jednu možnost přibližného řešení, které se na první pohled zdá být přesným řešením uvažované úlohy. Bylo známo již ve starověku a provádí se pomocí křivky, kterou Nikomédes nazval konchoida.



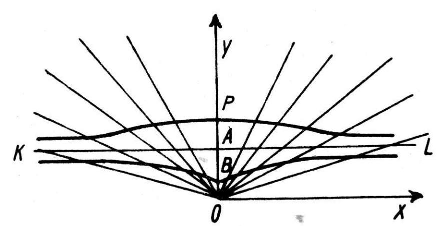
Obr. 37

Předpokládejme, že máme rozdělit úhel ABC (viz obr. 37) na tři stejné části. K tomu cíli vedeme z bodu A, který libovolně zvolíme na rameni BA, dvě přímky, rovnoběžku AD s přímkou BC a kolmici k ní AK. Nato vedeme bodem B přímku BE tak, aby délka úsečky SE byla rovna $2AB$.

Pak $\sphericalangle\, EBC = \frac{1}{3} \sphericalangle\, ABC$.

Skutečně: $\sphericalangle\, BEA = \sphericalangle\, OAE = \sphericalangle\, EBC = \alpha$.*) Dále je $\sphericalangle\, AOB = \sphericalangle\, ABO = 2\alpha$ ($OA = OE$; $\sphericalangle\, AOS$ je vnějším úhlem trojúhelníka AOE).

Slabým místem tohoto řešení je sestrojení úsečky BE tak, aby $SE = 2AB$. To lze udělat jen zkusmo.



Obr. 38

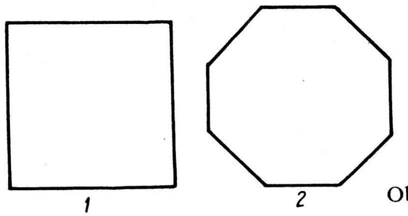
Nikomédes to udělal (nalezl bod S) pomocí konchoidy (obr. 38). Zvolil přitom AK za osu konchoidy, B za její pól a úsečku délky $2AB$ za parametr. Na obr. 38 je bod O pól, KL osa, $BA = AP$ parametr křivky.

*) Bod O je střed úsečky SE. (Pozn. překl.)
**) Původní šestiúhelníky je dovoleno dělit na části. (Pozn. překl.)

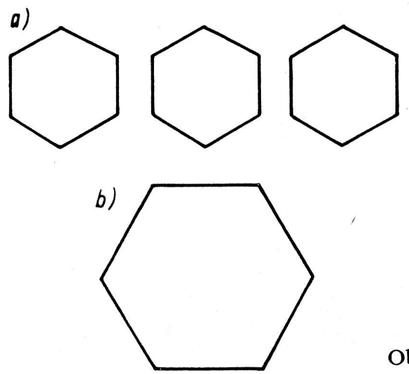
■ Zábavné úlohy

Geometrické drobnosti

1. Čtverec (*1*) rozlož na pět částí a slož z něho pravidelný osmiúhelník (*2*) – viz obr. 39.



Obr. 39



Obr. 40

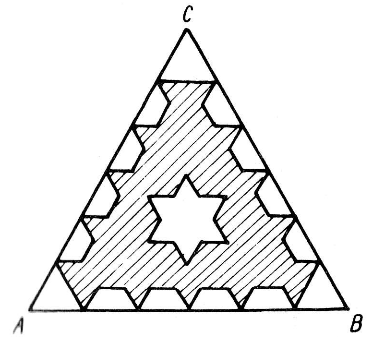
2. Ze tří pravidelných šestiúhelníků (*a*) utvoř pravidelný šestiúhelník (*b*) – viz obr. 40.**)

Konstruktivní úloha

Body A a B jsou sousední vrcholy čtverce. Najděte zbývající vrcholy čtverce C, D jen pomocí kružítka. Po provedení konstrukce dokažte, že C a D jsou skutečně vrcholy čtverce $ABCD$.

Vypočti obsah

Trojúhelník ABC na obr. 41 je rovnostranný a jeho strana je 6 cm. Vypočti obsah vyšrafované části trojúhelníka.

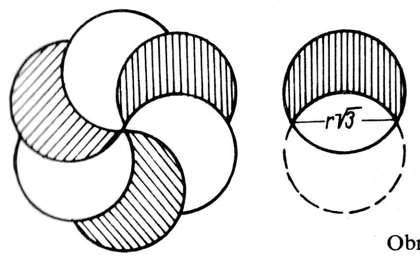


Obr. 41

Obsah růžice

Na obr. 42 je narýsována růžice, jejíž „lístky“ mají poloměr r. Při podrobnější prohlídce vidíme, že se skládá ze šesti shodných půlměsíců. Narýsuj takovou růžici a vypočti její obsah.

Všimni si pomocného obrázku.



Obr. 42

Na výletě

Přátelé Jan a Lukáš se vydali na výlet. Vyjeli současně z jistého místa toutéž cestou. Jan jel na kole průměrnou rychlostí 20 km/h, Lukáš na motocyklu průměrnou rychlostí 60 km/h. Lukáš se s přítelem dohodl, že dojede na paseku vzdálenou 70 km (měl tam dozor nad prací dřevorubců) a hned se vrátí naproti Janovi. Až se potkají, odpočinou si, snědí přesnídávku a vrátí se společně domů.

Za jak dlouho od okamžiku výjezdu se oba přátelé opět setkali?

Nedokončená výprava

Dva členové turistického oddílu, A a B, se vydali na výpravu toutéž cestou do jisté obce, vzdálené 672 km. B se na túru vydal na kole a ujel denně 40 km, zatímco A jel na mopédu a ujel denně 56 km. Jednoho dne poslal oddíl oběma členům telegram s výzvou, aby se okamžitě vrátili. Oba tento rozkaz splnili.

Ukázalo se, že od zamýšleného cíle byl B vzdálen třikrát tolik, co A.

Kolik dní byli oba turisté na cestě a kolik kilometrů chybělo každému z nich k cíli, do něhož měli dojet?

Pokuste se úlohu rozřešit bez sestavování rovnic.

Mladí turisté

Skupina mladých turistů se vydala z města k jezeru. U jezera si mládež odpočinula a pak se stejnou cestou vrátila do města. Tato cesta vedla nejdřív do kopce, pak s kopce a nakonec po rovině. Turisté šli do kopce rychlostí 3 km/h, s kopce rychlostí 5 km/h a po rovině – 4 km/h. Celou cestu tam i zpět vykonali za $6\frac{4}{15}$ h, přičemž jedna cesta měřila 12 km.

Kolik kilometrů vedla cesta po rovině?

Matematika v táborové kuchyni

Jednoho dne se mezi službou v kuchyni a vedoucím rozvinul následující dialog:

„Jaká bude dnes polévka?"

„Výborná."

„A bude jí dost?"

„Nejvíc v ní bude čisté pramenité vody. Na váhu bude vody právě tolik, jako krup, brambor, tuku a cibule dohromady."

„To mi mnoho neříká!"

„Tak ti ještě povím, že krup jsme vzali tolik, kolik je brambor, cibule a tuku dohromady."

„A brambor?"

„Stejně jako tuku a cibule dohromady."

„A tuku?"

„Dvakrát méně než cibule."

„Tak teď postav tu polévku na váhu!"

„Provedu, soudruhu vedoucí!"

„... Sedm kilogramů..."

„... Dohromady s kotlíkem, který vymytý a suchý váží právě jeden kilogram."

„Děkuji."

Zajímá nás, kolik dali kuchaři do polévky vody, krup, brambor, cibule a tuku (na váhu). Pokuste se to vypočítat.

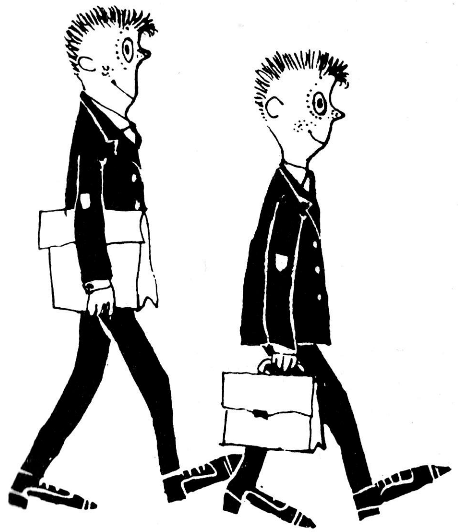
Kdo dřív?

Dva chlapci, Standa a Jenda, žijí na vsi a studují na zemědělské škole, která je od jejich vsi vzdálena 6 km. Jednoho dne se porouchal autobus, kterým obvykle dojížděli, a proto se rozhodli dojít do školy pěšky. Standa šel první polovinu cesty rychlostí 4 km/h a druhou rychlostí 2 km/h. Naproti tomu Jenda šel rychlostí 4 km/h první polovinu času, který spotřeboval na celou cestu do školy, a rychlostí 2 km/h druhou polovinu času.

Který z nich přišel do školy dříve a o kolik minut?

Dva cestující

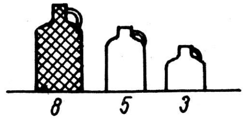
Z vlaku vystoupili dva cestující a vydali se stejnou cestou do hotelu, vzdáleného a km od nádraží. První šel polovinu času, který potřeboval na cestu do hotelu, rychlostí v_1 km/h a zbytek času rychlostí v_2 km/h. Druhý cestující šel polovinu cesty rychlostí v_1 km/h a zbytek cesty rychlostí v_2 km/h. Kdo z nich byl v hotelu dřív?



Poissonova úloha

Na výletě koupil jeden z účastníků džbán vína o obsahu osm mázů. Bylo však třeba rozdělit koupené víno na poloviny.

Jak provedli toto dělení, když společnost měla jen dvě další nádoby, jednu o obsahu pět mázů a druhou o obsahu tři mázy (viz obr. 43)?



Obr. 43

Kolikrát bylo třeba víno přelévat z jedné nádoby do druhé?

Jak si pomohla?

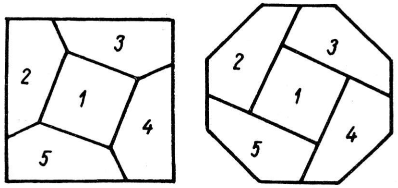
Hospodyně potřebuje odměřit do hrnce čtyři litry vody. Má však jen dvě nádoby: jednu přesně na pět litrů, druhou na tři litry. Jak si hospodyně pomohla?

■ Řešení úloh

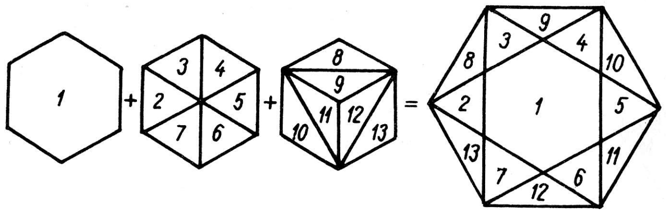
1. Na obr. 44 je ukázáno, jak se ze čtverce (*1*) složí osmiúhelník (*2*).

2. Z obr. 45 vidíme, jak ze tří menších šestiúhelníků (*a*) složíme jeden větší (*b*).*)

*) Řešení úlohy o šestiúhelnících je z obrázku jasné. Pro ty, které neuspokojil obr. 44, uveďme aspoň náznak postupu řešení první úlohy: Označíme-li stranu čtverce (*1*) na obr. 39 písmenem x, můžeme vypočítat stranu menšího čtverce y, která, jak je vidět z obr. 44, je současně stranou sestrojeného osmiúhelníka. Obsah čtverce musí být totiž roven obsahu osmiúhelníka. Porovnáním obou obrazců na obr. 44 zjistíme dále, že všechny šikmé úsečky ve čtverci (*1*), tvořící společné strany pětiúhelníků 2, 3, 4, 5, mají délku $\frac{1}{2}y$ a že všechny úhly těchto pětiúhelníků při vrcholech menšího čtverce jsou rovny 135° (úhly pravidelného osmiúhelníka). Odtud již můžeme vypočítat zbývající úhly a konečně i to, v jakém poměru musíme rozdělit strany původního čtverce (*1*). (Pozn. překl.)



Obr. 44



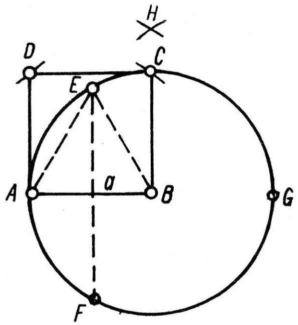
Obr. 45

Konstruktivní úloha – postup řešení

1. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABE o straně AB.

2. Najdeme bod F souměrný k bodu E podle přímky AB.

3. Z bodu B opíšeme poloměrem AB kružnici a na ní najdeme bod G souměrný k A podle středu B.



Obr. 46

4. Poloměrem EF (dvojnásobek výšky rovnostranného trojúhelníka ABE) narýsujeme z bodů A a G oblouky (viz obr. 46). Jejich průsečík H je vrchol rovnoramenného trojúhelníka AGH, jehož výška HB je rovna úhlopříčce hledaného čtverce.

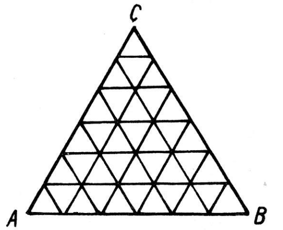
5. Známe-li délku strany čtverce a jeho úhlopříčky, snadno najdeme vrcholy C a D.

Důkaz.

$AB = a$; $EF = GH = a\sqrt{3}$;
$HB = a\sqrt{2}$.*)

Vypočti obsah

Trojúhelník ABC se skládá (viz obr. 47) ze 36 elementárních trojúhelníků (jako je např. ten, který leží



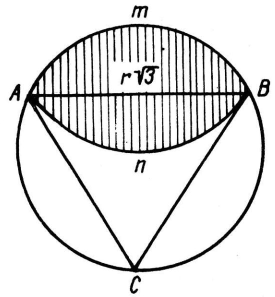
Obr. 47

*) Rozmyslete si podrobně, že opravdu celý postup lze provést bez pravítka, pouhým kružítkem. Např. bod G dostaneme tak, že z bodu A naneseme po kružnici postupně třikrát její poloměr (G je protější vrchol vepsaného pravidelného šestiúhelníka). (Pozn. překl.)

při vrcholu C). Hledaný obsah našeho obrazce dostaneme, jestliže od obsahu trojúhelníka ABC odečteme obsah tří elementárních trojúhelníků, dvanácti rovnoramenných lichoběžníků a šesti kosočtverců, tvořících šesticípou hvězdu. Obsah elementárního trojúhelníka je $\frac{1}{36}$ trojúhelníka ABC; dvanáct lichoběžníků má obsah rovný $\frac{3}{4}$ elementárního trojúhelníka, tedy dohromady $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ elementárních trojúhelníků, šest kosočtverců o obsahu $\frac{1}{2}$ elementárního trojúhelníka dává dohromady $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ elementární trojúhelníky. Obsah vyšrafovaného obrazce je tedy roven obsahu $36 - 15 = 21$ elementárních trojúhelníků čili $\frac{21}{36}$ obsahu trojúhelníka ABC. Označíme-li $AB = a$, je $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, takže hledaný obsah vyšrafovaného obrazce je $\frac{7a^2\sqrt{3}}{48}$.

Obsah růžice

Obsah trojúhelníka ABC (viz obr. 48) je $\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$; obsah obrazce $AmBn$ je $\frac{1}{3}\left(\pi r^2 - \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}\right) . 2 =$



Obr. 48

$= \frac{1}{6}(4\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3})$.

Obsah jednoho „lístku“ růžice je tedy

$\pi r^2 - \frac{1}{6}(4\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3}) =$

$= \frac{1}{6}(2\pi r^2 + 3r^2\sqrt{3})$.

Obsah celé růžice je tedy

$r^2(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 11{,}47r^2$.*)

*) Hloubavější čtenář se jistě zamyslel také nad tím, proč je délka společné tětivy dvou sousedních kružnic rovna $r\sqrt{3}$. Zde je stručné zdůvodnění: Tyto tětivy jsou spojnice středu růžice s průsečíky kružnic na jejím obvodu. Ze souměrnosti plyne, že dvě sousední tětivy jsou stejně dlouhé a svírají úhel $\frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$. Spojíme-li ještě průsečíky na obvodu růžice, dostaneme rovnostranné trojúhelníky, vepsané do kružnic o poloměru r. Snadno zjistíme, že jejich strany budou rovny $r\sqrt{3}$. (Pozn. překl.)

Na výletě

1. 70 km projel Lukáš za 1 h 10 min.
2. Do okamžiku, kdy Lukáš obrátil, projel Jan $20 \cdot 1\frac{1}{6}$ km, tj. $\frac{140}{6}$ km.
3. V tom okamžiku byla vzdálenost mezi nimi $70\ \text{km} - \frac{140}{6}\ \text{km} = 46\frac{2}{3}\ \text{km}$.
4. Od toho okamžiku se Lukáš a Jan blížili k sobě rychlostí $(60 + 20)$ km/h, tj. 80 km/h.
5. Setkali se tedy za

$$46\frac{2}{3}\ \text{km} : 80\ \text{km/h} = \frac{7}{12}\ \text{h} = 35\ \text{min}.$$

6. Od okamžiku, kdy vyjeli na výlet, uplynula 1 h 10 min + 35 min = = 1 h 45 min.

Nedokončená výprava

A hodlal ujet 672 km během $672 : 56 = 12$ dní. *B* by za tutéž dobu ujel $40\ \text{km} \cdot 12 = 480$ km čili o $(672 - 480)$ km = 192 km méně. Kdyby si *A* nevšímal telegramu a pokračoval v cestě nezměněnou rychlostí, zatímco *B* by také pokračoval v cestě, ale zvětšil by svoji rychlost tak, aby dojel do cíle současně s *A*, musel by ve zbývajícím čase ujet navíc 192 km. Protože turistovi *B* chybělo do cíle třikrát tolik, co turistovi *A*, musel by *B* denně ujet $56\ \text{km} \cdot 3 = 168$ km. Odečteme-li od této vzdálenosti 40 km, pak rozdíl $(168 - 40)$ km = 128 km denně navíc proti původnímu plánu by turistovi *B* umožnilo dohonit chybějících 192 km. Při zvětšené rychlosti by tedy *B* potřeboval na zbytek cesty $192 : 128 = 1\frac{1}{2}$ dne. Protože jsme předpokládali, že při této rychlosti by *A* i *B* přijeli do cíle současně, plyne odtud, že v okamžiku, kdy došel telegram, byli oba na cestě $12 - 1\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$ dne. Za $10\frac{1}{2}$ dne ujel *A* $56\ \text{km} \cdot 10\frac{1}{2} = 588$ km, a chybělo mu tedy do cíle 672 km − − 588 km = 84 km. *B* za tuto dobu projel $40\ \text{km} \cdot 10\frac{1}{2} = 420$ km a chybělo mu 252 km, což je skutečně třikrát tolik, kolik chybělo turistovi *A*.

Mladí turisté

Označme délku cesty do kopce x km, délku cesty s kopce y km, délku po rovině $12 - (x + y)$ km. Pak platí

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}[12 - (x + y)] + \frac{1}{4}[12 - (x + y)] + \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}x = 6\frac{4}{15}$$

čili

$$\frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{5}(x + y) + \frac{1}{2}[12 - (x + y)] = \frac{94}{15}.$$

Označíme-li $x + y = a$, dostáváme

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{2}(12 - a) = \frac{94}{15}$$

čili $10a + 6a + 180 - 15a = 188$,

odkud $a = 8$.

Cesta vedla tedy po rovině $12 - a = 12 - 8 = 4$ km.

Matematika v táborové kuchyni

Bylo-li v polévce v kg vody, k kg krup, b kg brambor, t kg tuku a c kg cibule, dohromady 7 kg − 1 kg, platí:

1. $v + k + b + t + c = 7 - 1 = 6$,
2. $v = k + b + t + c$,
3. $k = b + t + c$,
4. $b = t + c$,
5. $t = \frac{1}{2}c$, čili $c = 2t$.

Odtud $2v = 6$, $v = 3$; $v = 2k$, $2k = 3$, $k = 1\frac{1}{2}$; $k = 2b$, $2b = 1\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$; $b = 3t$, $3t = \frac{3}{4}$, $t = \frac{1}{4}$; $c = 2t$, $c = \frac{1}{2}$.

Úlohu lze řešit bez sestavování rovnic, a dokonce i zpaměti, postupujeme-li od bodu 5 vzhůru k bodu 1.

Kdo dřív?

Standa šel do školy $\frac{3}{4}\ \text{h} + \frac{3}{2}\ \text{h} = 2\frac{1}{4}\ \text{h}$.

Jenda ušel 6 km za čas t h. Ze zadání plyne $4\ \text{km} \cdot \frac{1}{2}t + 2\ \text{km} \cdot \frac{1}{2}t = 6\ \text{km}$.

Odtud $t = 2$.

Jenda přišel tedy do školy o čtvrt hodiny dříve než Standa.

Dva cestující

První cestující šel do hotelu t_1 h a druhý t_2 h. Platí

$$v_1 \cdot \frac{1}{2}t_1 + v_2 \cdot \frac{1}{2}t_1 = a,$$

a tedy $t_1 = \dfrac{2a}{v_1 + v_2}$;

$$t_2 = \frac{1}{2}\frac{a}{v_1} + \frac{1}{2}\frac{a}{v_2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right),$$

a tedy

$$t_2 = a\,\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2}.$$

Protože je

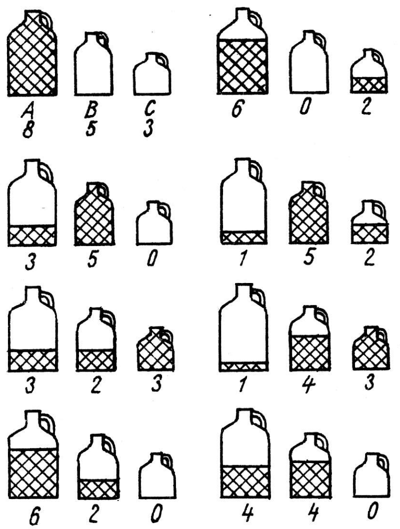
$$t_2 - t_1 = a\,\frac{(v_1 - v_2)^2}{2v_1v_2(v_1 + v_2)} > 0,$$

je $t_2 > t_1$.

První cestující přišel do hotelu dříve než druhý.

Poissonova úloha

Aby rozdělili víno napolovic, museli je sedmkrát přelít (viz obr. 49).



Obr. 49

Jak si pomohla?

Hospodyně naplní pětilitrovou nádobu. Odlije z ní 3 l do třílitrové nádoby a odtud do výlevky, zbylé 2 l v pětilitrové nádobě přelije do třílitrové. Znovu naplní pětilitrovou nádobu a 1 l přelije do třílitrové. V pětilitrové nádobě zůstaly 4 l vody.*)

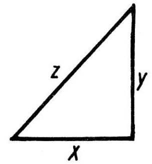
*) Jiné řešení: Hospodyně naplní dvakrát za sebou třílitrovou nádobu a vždy přelije do pětilitrové; tu pak vylije do výlevky, takže jí zbude 1 l v třílitrové nádobě. Přelije ho do pětilitrové, znovu naplní třílitrovou a nalije do pětilitrové, v níž jsou pak 4 l vody. Zjistěte, při kterém řešení spotřebuje hospodyně méně vody. (Pozn. překl.)

Pierre Fermat (1601 – 1665)

Teorie čísel studuje vlastnosti přirozených čísel čili čísel celých kladných. Výsledky teorie jsou zdánlivě jednoduché, ale jejich důkazy jsou často velmi obtížné. Některá tvrzení z teorie čísel nebyla až dosud dokázána, jako např. tvrzení významného francouzského matematika Pierre Fermata (1601 až 1665); toto tvrzení se týká zobecnění Pythagorovy věty.

Označíme-li odvěsny pravoúhlého trojúhelníka x a y a přeponu z (viz obr. 50), pak Pythagorova věta zní

(A) $x^2 + y^2 = z^2$.



Obr. 50

To je neurčitá rovnice o třech neznámých. Jedno její řešení zná každý školák, totiž $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Toto řešení dává tzv. *egyptský* čili *dokonalý trojúhelník*. Avšak jak nalézt ostatní řešení?

Obecné řešení rovnice (A) má tvar

$x = 2ab, \; y = b^2 - a^2, \; z = b^2 + a^2,$

neboť

$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (b^2 + a^2)^2 ;$

čísla a a b jsou libovolná přirozená čísla, $a < b$.*) Například:

$a = 1$

b	x	y	z
2	4	3	5
4	8	15	17
6	12	35	37
8	16	63	65

$a = 2$

b	x	y	z
3	12	5	13
5	20	21	29
7	28	45	53
9	36	77	85

$a = 3$

b	x	y	z
4	24	7	25
8	48	55	73
10	60	91	109
14	84	187	205

*) Pythagorova věta platí ovšem i pro trojúhelníky, jejichž strany mají délky rovné necelým číslům. Autor se však zde zabývá jen řešeními v přirozených číslech, a proto předpokládá, že a a b jsou celá čísla. (Pozn. překl.)

To, že uvedená čísla vyhovují rovnici (A), plyne z rovnosti

$$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 .$$

Zkoumáme-li rovnici $x^2 + y^2 = z^2$, nabízí se otázka, zda analogické rovnice

$$\text{(B)} \quad x^3 + y^3 = z^3,\ x^4 + y^4 = z^4,$$
$$x^5 + y^5 = z^5, \dots ,\ x^n + y^n = z^n$$

mají řešení.

Matematici 16. a 17. století se marně pokoušeli řešit tyto rovnice v přirozených číslech. Pierre Fermat došel k závěru, že neexistují přirozená čísla x, y, z pro $n \geqq 3$, která by splňovala rovnici (B). Obecný důkaz nebyl dosud nalezen, nicméně bylo Fermatovo tvrzení dokázáno pro některé hodnoty n větší než 2.

L. Euler (1707 – 1783) dokázal, že v oboru přirozených čísel jsou neřešitelné rovnice $x^3 + y^3 = z^3$ a $x^4 + y^4 = z^4$.

A. Legendre (1752 – 1833) a P. Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859) dokázali, že také rovnice $x^5 + y^5 = z^5$ je neřešitelná v přirozených číslech.

G. Lammé (1795 – 1870) dokázal, že rovnice (B) nemá řešení v přirozených číslech pro $n = 7$.

V polovině minulého století se podařilo E. Kummerovi (1810 – 1893) dokázat pravdivost Fermatovy věty pro všechny hodnoty n menší než 100 a pro některé jiné speciální hodnoty čísla n, ale ani on nepodal obecný důkaz Fermatovy věty.

Protože Fermatovo tvrzení mělo velký ohlas v matematické literatuře a stalo se i podnětem k nalezení nových metod řešení různých úloh, bylo nazváno *Velkou Fermatovou větou.**)

■ Zábavné úlohy

Kolik?

Nádražím projely tři vojenské vlaky. V prvním bylo 462 vojáků, v druhém 546 a v třetím 630 vojáků.

Je možno vypočítat, kolik vagónů měl každý vlak, jestliže víme, že ve všech vagónech jel stejný počet vojáků a že tento počet byl největší ze všech možných?

Kolik bylo žáků?

Pro nemoc učitelů odpadlo ve dvou třídách vyučování. Proto požádal ředitel učitele tělocviku, aby šel s žáky těchto tříd na výlet. Tělocvikář shromáždil žáky a chtěl je seřadit do dvojstupu, ale jeden žák zůstal sám. Totéž se stalo, když je seřadil do trojstupu nebo do čtyřstupu. Vždy zbyl jeden žák samotný. Až když učitel seřadil žáky do pětistupu, nezůstal žádný mimo pětice. Kolik žáků bylo dohromady v obou třídách?

Rozvrh služeb požárníků

K požární stráži bylo přijato pět mladých mužů: A (Antonín), B (Bohdan), C (Cyril), D (Daniel) a E (Eduard). Všichni přišli poprvé do služby v pondělí, první den v měsíci. A měl celodenní službu každý třetí den, B každý čtvrtý, C pátý, D šestý a E sedmý.

a) Existuje den v týdnu, kdy se všichni společně setkají na celodenní službě?

b) Existují dny, kdy žádný z nich nemá službu?

c) Je známo, že rozvrh hodin ve škole zahrnuje jeden týden. Kolik týdnů zahrnuje rozvrh služeb pěti novopečených požárníků?

Napiš

1. Napiš největší možné číslo pomocí tří číslic.

2. Napiš číslo 1 000 pomocí:
a) pěti nebo devíti devítek;
b) šesti trojek;
c) třinácti pětek;
d) všech deseti číslic.

3. Napiš číslo 1 pomocí:
a) číslic 1, 2, 3;
b) všech deseti číslic.

4. Napiš číslo 65 536 pomocí čtyř dvojek.

5. Napiš číslo 100 pomocí:
a) pěti jedniček;
b) pěti trojek;
c) pěti pětek (dvěma způsoby).

Které početní operace?

Mezi číslice vlož taková znamení početních operací, aby byly splněny následující rovnosti:

a) 1 234 = 2; b) 12 345 = 2;
c) 123 456 = 2; d) 1 234 567 = 2;
e) 12 345 678 = 2.

*) Darmstadtský matematik P. Wolfskehl (1856 – 1906) odkázal řešiteli tohoto problému 100 000 marek a uložil je u Göttingenské matematické společnosti, která z výnosu tohoto kapitálu mohla financovat svoji činnost. Jednou se v žertu vyjádřil David Hilbert (1862 – 1943): „Naštěstí se zdá, že kromě mne není u nás matematika, který by byl schopen vyřešit tento problém; já však nikdy nepodříznu slepici, která nám snáší tak zlatá vejce.“ (Pozn. překl.)

Operace se mají provádět v tom pořadí, jak po sobě následují jejich znamení. Je dovoleno spojit dvě či tři následující číslice v jedno číslo. [Např. v a) 12, 23 nebo 34.]

Najdi číslo

Najdi dvouciferné číslo, jehož podíl při dělení součtem jeho číslic je třetina součtu jeho číslic.

Ve spořitelně

Karel se podíval do své vkladní knížky, zamračil se a řekl: „Hm, méně než 50 korun. Zruším ji a od prvního si založím novou, třeba budu mít větší štěstí."

Co řekl, to udělal. Šel hned do spořitelny a vybral celý vklad. Když mu pokladník vyplatil peníze, Karel se na ně ani nepodíval a strčil je všechny do prázdné kapsy. Když vyšel ze spořitelny, koupil si za 50 haléřů noviny. Pak si přepočítal zbytek peněz. Zjistil s údivem, že ještě teď, po zaplacení novin, má dvakrát tolik, co bylo napsáno na knížce.

„Pokladník se zmýlil. Byl zřejmě velmi roztržitý. Musím mu vrátit to, co mi dal navíc." A Karel se vrátil do spořitelny.

Pokladník poctivému chlapci poděkoval a vysvětlil mu, že omylem vyplatil tolik korun, kolik bylo na knížce haléřů, a tolik haléřů, kolik tam bylo korun.

Kolik korun a kolik haléřů měl Karel na knížce?

Najdi číslo

Na posledním místě trojciferného čísla je číslice 2. Jestliže ji přemístíme na začátek čísla, zvětší se původní číslo o třetinu své hodnoty. Jaké je to číslo?

Čtyřciferný hlavolam

Zjisti, které číslo má tyto vlastnosti: 1. je čtyřciferné; 2. první číslice je dvojnásobek druhé; 3. součet první a druhé číslice je roven třetí; 4. součet všech čtyř číslic má první číslici rovnu rozdílu mezi čtvrtou a třetí číslicí hledaného čísla a její součin s druhou číslicí hledaného čísla se rovná jeho první číslici.

Charitky a Múzy (starořecká úloha)

Tři Charitky, Aglaia, Eufrosyna a Thaleia, bohyně krásy a radosti, nesly v košíčcích všechny stejný počet krásných jablek. Tu potkaly devět Múz, ochránkyň umění a vědy. Každá Charitka dala každé Múze stejný počet jablek, takže nakonec měly všechny Charitky i Múzy stejně.

Kolik jablek nesly Charitky ve svých košíčcích?

Jak se vyrovnali?

Zákazník nakoupil v obchodním domě zboží za 37 Kčs. Měl však jen pětikorunové mince, zatímco prodavač měl jen dvoukoruny. Jak se vyrovnali?

Najdi číslo

1. Úvahou bez označování neznámé a sestavení rovnice najdi přirozené číslo takové, že odmocnina z jeho třetiny přičtená k jeho dvěma třetinám dá o 20 méně než hledané číslo.

2. Čísel začínajících jedničkou je ovšem mnoho, ale mezi nimi jsou taková, která se zdvojnásobí, jestliže jejich poslední číslici přesuneme na začátek. Najděte jedno takové číslo a popište postup řešení úlohy.

Kolik jsem měl peněz?

Když jsem vyšel z domova, měl jsem v kapse korunové a pětikorunové mince. Dohromady to byla částka větší než 140 Kčs a menší než 150 Kčs. Utratil jsem třetinu svých peněz a zůstalo mi tolik korunových mincí, kolik jsem měl původně pětikorun, a tolik pětikorun, kolik jsem měl původně korun.

Kolik mincí každého druhu jsem měl, když jsem vycházel z domova?

Rozměňte bankovku

Skupina žáků a žákyň dostala za odevzdaný sběr padesátikorunovou bankovku. Žáci pracovali víc než žákyně, a proto každý z nich měl dostat o 1 Kčs víc než každá žákyně. Učitel rozměnil bankovku na dvoukorunové a pětikorunové mince tak, aby mohl peníze rozdělit.

1. Kolik je různých možností rozměnění padesátikorunové bankovky na mince po 2 a 5 korunách?

2. Víte-li, že chlapců bylo víc než děvčat a že dohromady měla skupina aspoň deset členů, vypočtěte, kolik bylo chlapců, kolik děvčat a kolik každý dostal. Jak rozměnil učitel bankovku?

■ Řešení úloh

Kolik?

Ano. Hledané číslo je největší společný dělitel čísel 462, 546 a 630, tj. 42.

V každém vagónu bylo 42 vojáků. První vlak měl 11 vagónů (462 : 42), druhý 13 (546 : 42) a třetí 15 (630 : 42).

Kolik bylo žáků?

Bylo jich 85. K výsledku dojdeme touto úvahou:

Počet žáků musí být číslo dělitelné pěti, které při dělení dvěma, třemi a čtyřmi dává vždy zbytek 1. Nejmenší takový násobek, jak se snadno přesvědčíme, je 25; každý další se musí od 25 lišit o číslo dělitelné 2, 3, 4 a 5, tj. o násobek 60. Budou to tedy čísla 85, 145 atd. Protože šlo o dvě třídy, bylo žáků zřejmě 85.

Rozvrh služeb požárníků

a) Takový den nenastane.*)

b) Takové dny jsou v prvním týdnu úterý a středa, ve druhém týdnu pátek a neděle, ve třetím týdnu čtvrtek a sobota, ve čtvrtém týdnu úterý, středa a sobota, v pátém týdnu úterý, čtvrtek a neděle, v šestém týdnu středa, čtvrtek a neděle.

c) Všechny možné kombinace služeb se vyskytnou v 60 týdnech čili ve 420 dnech; 420 je nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 5, 6, 7.

*) Přesněji, nastane až v pondělí po uplynutí celého „cyklu" služeb – srovnej odpověď na otázku c). (Pozn. překl.)

Napiš

1. 9^{9^9}; k zapsání tohoto čísla je zapotřebí téměř 369 700 000 číslic a pás papíru, na který bychom je napsali, by musel být víc než 2 000 km dlouhý.

2. a) $999\frac{9}{9}$ nebo $999\frac{999}{999}$;

b) $333 \,.\, 3 + \frac{3}{3}$;

c) $5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 + 5 \,.\, 5 \,.\, 5 + 5 \,.\, 5 \,.\, 5 + 5 \,.\, 5 \,.\, 5$;

d) $90 \,.\, 5 \,.\, 4 : 2 + 87 + 16 - 3$

nebo

$90 \,.\, 4 \,.\, 3 - 8 \,.\, 6 - 7 \,.\, 5 + 2 + 1$;

3. a) $\frac{1+2}{3}$; $\frac{3-1}{2}$; $2 - 1^3$;

b) $(123\,456\,789)^0$

nebo

$$\frac{1\,234\,567\,890}{1\,234\,567\,890}.$$

4. $2^{2^{2^2}} = 65\,536$.*)

5. $111 - 11 = 33 \,.\, 3 + \frac{3}{3} =$
$= 5 \,.\, 5 \,.\, 5 - 5 \,.\, 5 =$
$= (5 + 5 + 5 + 5) \,.\, 5$.

Které početní operace?

a) $1 \,.\, 2 \,.\, 3 - 4 = 2$;

b) $(1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 4) : 5 = 2$;

c) $(1 + 2) \,.\, 3 + 4 - 5 - 6 = 2$;

d) $1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 4 + 5 - 6 - 7 = 2$;

e) $(1 + 23) : 4 + 5 + 6 - 7 - 8 = 2$.

Najdi číslo

Jestliže číslice hledaného čísla označíme písmeny x a y, má hledané číslo tvar $10x + y$. Ze zadání úlohy plyne, že

$$(10x + y) : (x + y) = \frac{1}{3}(x + y).$$

Násobíme-li obě strany rovnice číslem $3(x + y)$, dostaneme $3(10x + y) = (x + y)^2$. Čtenář se může zarazit nad tím, že máme jen jednu rovnici pro dvě neznámé, ale všimněme si toho, že pravá strana naší rovnice je druhou mocninou přirozeného čísla. Odtud plyne, že i levá strana $3(10x + y)$ je čtvercem přirozeného čísla a je dělitelná třemi. Taková dvouciferná čísla jsou jen dvě: 36 a 81. Ověřme každé z těchto čísel:

1. $3(10x + y) = 36$; $10x + y = 12$ čili $x = 1$, $y = 2$; potom však $\frac{12}{1+2} = 4$, $4 \neq \frac{1}{3}(1 + 2)$. Číslo 36 nedává řešení naší úlohy.

2. $3(10x + y) = 81$; $10x + y = 27$ čili $x = 2$, $y = 7$; potom $\frac{27}{2+7} = 3$, $3 = \frac{1}{3}(2 + 7)$. Tato čísla vyhovují, dostáváme tedy řešení 27.

Ale pozor: $(x + y)^2$ může být také trojciferné číslo. Z trojciferných čísel vyhovuje 144. Zkouška dává $10x + y = 48$ čili $x = 4$, $y = 8$; potom $\frac{1}{3}(4 + 8) = 4$.**)

Ve spořitelně

Karel měl na knížce x Kčs + y haléřů čili $(100x + y)$ haléřů. Pokladník vyplatil Karlovi y Kčs + x haléřů čili $(100y + x)$ haléřů. Má tedy platit

$$(100y + x - 50) = (100x + y) \,.\, 2.$$

*) Pozor: $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$. (Pozn. překl.)

**) Protože $10x + y < 100$, je $3(10x + y) = (x + y)^2 < 300$; přicházejí tedy v úvahu čísla 144, 225; čtenář si snadno ověří, že 225 nevyhovuje. (Pozn. překl.)

Po úpravě dostaneme

$98y - 199x = 50$

a dále

$$y = \frac{199x + 50}{98} = 2x + \frac{3x + 50}{98} =$$

$$= 2x + t,$$

$$t = \frac{3x + 50}{98};$$

$$y = 2x + t,\ t = \frac{3x + 50}{98},$$

odtud

$$x = 32t - 16 + 2 \cdot \frac{t - 1}{3} =$$

$$= 32t - 16 + 2t_1,\ t_1 = \frac{t - 1}{3};$$

$$t = 3t_1 + 1,\ x = 32t - 16 + 2t_1.$$

Odtud vyjádříme x i y pomocí t_1; dostaneme

$x = 16 + 98t_1;\ y = 33 + 199t_1$.*)

V těchto vzorcích může být t_1 rovno nule nebo libovolnému přirozenému číslu. Při volbě $t_1 = 0$ dostaneme

$x = 16,\ y = 33.$

Při jiné volbě dostaneme hodnoty, které naší úloze nevyhovují, neboť Karel měl na knížce méně než 50 korun.

Karel měl tedy na knížce 16 Kčs 33 haléřů. Pokladník mu vyplatil 33 Kčs 16 haléřů.

Najdi číslo

$100x + 10y + 2;$

$2 . 100 + 10x + y =$

$= \frac{4}{3}(100x + 10y + 2).$

Odtud

$370x + 37y = 592$

čili

$10x + y = 16,$

a tedy

$y = 16 - 10x;\ y = 6,\ x = 1.$

Řešení: 162;

zkouška: $216 = \frac{4}{3} . 162 = 54 . 4 = 216.$

Čtyřciferný hlavolam

Nechť číslice hledaného čísla jsou po řadě a, b, c, d. Platí tedy $a = 2b$, $c = a + b = 3b$. Protože každá číslice je menší nebo rovna 9, je číslice b rovna 1, 2 nebo 3.

*) Účelem tohoto postupu je vyjádřit obě neznámé x, y pomocí jediné celočíselné neznámé. Obecné vysvětlení by zabralo příliš mnoho místa, a proto čtenáře odkazujeme na literaturu (např. A. O. Gel'fond: Neurčité rovnice. Praha, SNTL 1954, nebo A. Apfelbeck: Kongruence. Škola mladých matematiků. Praha, MF 1968). Řešení lze najít zkusmo, je to ovšem – při velkých koeficientech rovnice – zdlouhavé a obtížné. Srovnej s jednodušší úlohou téhož typu na str. 87: Jak se vyrovnali? (Pozn. překl.)

Nechť první číslicí součtu $a + b + c + d$ je a_1. Pak $a_1 b = a$ čili $a_1 b = 2b$, odkud $a_1 = 2$.

Dále je $a_1 = d - c = d - 3b$. Dosazením 2 za a_1 a po řadě 1, 2, 3 za b nalezneme pro d tři hodnoty $d = 5$, $d = 8$ a $d = 11$ (poslední hodnota nevyhovuje, protože d musí být číslice).

Protože součet $a + b + c + d$ musí mít první číslici rovnou 2, dostáváme jediné řešení $a = 4, b = 2, c = 6, d = 8$. Hledané číslo je 4 268.

Charitky a Múzy

Každá Charitka měla v košíčku x jablek a dala každé Múze y jablek. Tedy $x - 9y = 3y$, čili $x = 12y$. Řešení není jednoznačné. Avšak vezmeme-li v úvahu, že Charitky měly košíčky a ne koše, může být y rovno 1, 2 nebo 3. Pro x pak dostáváme po řadě 12, 24 a 36.

Jak se vyrovnali?

Předpokládejme, že zákazník dal prodavači x pětikorun, zatímco prodavač mu dal nazpět y dvoukorun. Pak $5x - 2y = 37$.

To je tzv. diofantovská rovnice. Podobnými rovnicemi se totiž zabýval a v jejich řešení vynikal, jak jsme již o tom hovořili, Diofantos.*) Z naší rovnice vypočteme

$$y = \frac{5x - 37}{2} = \frac{4x + x - 36 - 1}{2} =$$

$$= 2x - 18 + \frac{x - 1}{2} =$$

$$= 2x - 18 + t,$$

kde $t = \frac{1}{2}(x - 1)$ je nějaké celé číslo.

Tedy $x = 2t + 1$ a $y = 2x - 18 + t = 2(2t + 1) - 18 + t = -16 + 5t$; z toho plyne $x = 1 + 2t$, $y = -16 + 5t$. Protože x a y jsou přirozená čísla, musí být $1 + 2t > 0$, odkud $t > \frac{1}{2}$, a současně $-16 + 5t > 0$, odkud $t > \frac{16}{5}$, čili $t > 3\frac{1}{5}$. Odtud dostáváme $t = 4, 5, 6, \ldots$ a odpovídající hodnoty x a y jsou po řadě $x = 9, 11, 13, \ldots$, $y = 4, 9, 14, \ldots$. Proveďte zkoušku.

Najdi číslo

1. Vlastnosti hledaného čísla:

a) Je dělitelné třemi.

b) Odmocnina z jeho jedné třetiny je přirozené číslo.

*) Než se jim věnujeme na chvíli i my, řekněme si, jak by asi uvažoval zákazník ve skutečném životě: Musím zaplatit takovou částku, aby rozdíl mezi ní a částkou 37 Kčs byl sudý (jen pak mi prodavač bude moci dát nazpět ve dvoukorunách). K tomu stačí, abych zaplatil lichý počet korun, neboť rozdíl dvou lichých čísel je vždy sudý. A navíc mohu platit jen násobek pěti; nejblíže vyšší lichý násobek pěti je $45 = 9 . 5$. (Pozn. překl.)

c) Je větší než 20.

Tyto vlastnosti mají čísla 27, 48, 75, 108, … . Ze zadání úlohy snadno zjistíme, že vyhovuje právě číslo 75, protože čísla 27 a 48 jsou příliš malá, zatímco 108 a další jsou příliš velká.

2. Vlastnosti hledaného čísla:

a) Číslo musí začínat číslicemi 1, 0, … a na konci musí být … 42 (proč?).

b) Přemístíme-li dvojku na první místo, bude hledané číslo vypadat takto: 210 … 4.

c) Číslice, stojící na místě teček, najdeme tak, že budeme násobit číslice 4 atd. dvěma tak dlouho, až dostaneme součin 10: 4 . 2 = 8, píšeme 8; 8 . 2 = 16, píšeme 6 a přenos je 1; 6 . 2 + 1 = 13, píšeme 3 a přenos je 1; 3 . 2 + 1 = 7, píšeme 7; 7 . 2 = 14, píšeme 4 a přenos je 1 atd., až dojdeme k součinu 10.

Hledané číslo je

105 263 157 894 736 842.

Jestliže dvojku přeneseme z posledního místa na první, dostaneme číslo

210 526 315 789 473 684,

které je dvakrát větší.

Kolik jsem měl peněz?

Když jsem vycházel z domova, měl jsem x pětikorun a y korun. Podle zadání úlohy máme

$$\frac{2}{3}(5x + y) = x + 5y.$$

Úpravou dostaneme

$$7x = 13y, \quad y = \frac{7}{13}x.$$

Protože y je číslo celé, musí být i pravá strana rovnice číslo celé, a tedy x je dělitelné 13. Je tedy $\frac{x}{13} = 1, 2, 3, \ldots$ a odtud $x = 13, 26, 39, \ldots$ a $y = 7, 14, 21, \ldots$. Protože při odchodu z domova jsem měl více než 140 Kčs a méně než 150 Kčs, vyhovuje úloze jediná dvojice $x = 26, y = 14$.

Když jsem odcházel z domova, měl jsem 26 pětikorun a 14 korun, tj. celkem 144 Kčs.

Rozměňte bankovku

Padesátikorunovou bankovku lze rozměnit na dvoukoruny a pětikoruny čtyřmi způsoby: a) 20 . 2 Kčs a 2 . 5 Kčs, b) 15 . 2 Kčs a 4 . 5 Kčs, c) 10 . 2 Kčs a 6 . 5 Kčs, d) 5 . 2 Kčs a 8 . 5 Kčs.

Žádné z dětí nemohlo dostat méně než 4 Kčs (buď chlapci, nebo děvčata by pak dostali lichý počet korun menší než 5; ale to není možné, když měli po ruce jen dvoukoruny a pětikoruny). Ale žádné z dětí nemohlo také dostat víc než 5 Kčs, neboť jinak by dostali dohromady víc než 50 Kčs. (Bylo jich víc než deset.) Tedy chlapci dostali po 5 Kčs a děvčata po 4 Kčs. To je možné při prvním a třetím způsobu rozměnění bankovky. V prvním případě by však ve skupině byli dva chlapci a deset dívek, což neodpovídá požadavkům

úlohy. Bylo tedy ve skupině šest chlapců a pět děvčat.

Učitel rozměnil bankovku na šest pětikorun a deset dvoukorun.

Průměrem (*střední hodnotou*) několika čísel se nazývá takové číslo, které není větší než největší z těchto čísel ani menší než nejmenší z nich. V elementární matematice se seznamujeme se třemi středními hodnotami: s aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem. Uvažujeme-li jen dvě čísla a, b (např. 4 a 9), potom *aritmetickým průměrem* těchto čísel je

$\frac{1}{2}(a + b)$ $\left[\text{např. } \frac{1}{2}(4 + 9) = 6{,}5\right]$;

jejich *geometrickým průměrem* je $\sqrt{ab}$ (např. $\sqrt{4 . 9} = 6$) a jejich *harmonickým průměrem* je $\frac{2ab}{a + b}$

$$\left(\text{např. } \frac{2 . 4 . 9}{4 + 9} = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}\right).$$

Jak vidíme, je nejmenší z těchto tří hodnot harmonický průměr

$$\frac{2ab}{a + b}\left(5\frac{7}{13}\right)$$

a největší aritmetický průměr

$$\frac{1}{2}(a + b)\left(6\frac{1}{2}\right).$$

Geometrický průměr leží mezi oběma předchozími a vytváří s nimi úměru. Platí totiž

$$\text{(A)} \quad \frac{2ab}{a + b} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{a + b}{2}$$

$$\left(\text{např. } 5\frac{7}{13} : 6 = 6 : 6\frac{1}{2}\right).$$

Správnost vztahu (A) můžeme snadno ověřit, neboť součin krajních výrazů úměry se má rovnat součinu vnitřních členů, což skutečně platí:

$$\frac{2ab}{a + b} . \frac{a + b}{2} = ab$$

a také $\sqrt{ab} . \sqrt{ab} = ab$

$$\left(5\frac{7}{13} . 6\frac{1}{2} = 6 . 6 = 36\right).$$

Ze tří uvedených průměrů je nejméně známý průměr harmonický. Proto se mu chvilku věnujeme.

Ze tří čísel a, b, c je číslo c harmonickým průměrem čísla a, b, jestliže převrácená hodnota čísla c je aritmetickým průměrem převrácených hodnot čísel a, b, tj. když

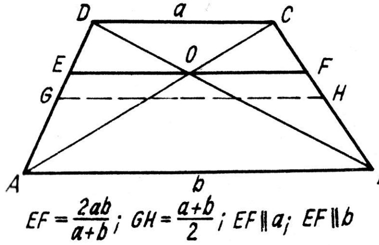
$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Upravíme-li tuto rovnost, dostaneme

$$c = \frac{2ab}{a + b}.$$

Jestliže čísla a a b znázorníme úsečkami a sestrojíme lichoběžník, jehož základny jsou rovny úsečkám délky a, b, pak úsečka EF (viz obr. 51), procházející

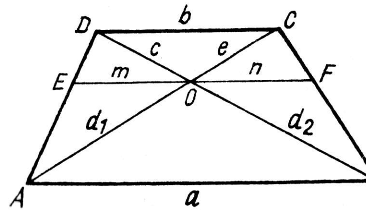
průsečíkem úhlopříček AC a BD rovnoběžně se základnou AB, je harmonickým průměrem úseček a, b. Důkaz tohoto tvrzení plyne z podobnosti trojúhelníků.



Obr. 51

Důkaz. Ukážeme, že $EF = \frac{2ab}{a + b}$.

Označme (obr. 52) $AC = d_1$, $DB = d_2$, $DO = c$, $OC = e$. Z obrázku vidíme, že $\triangle ABD$ je podobný $\triangle EOD$, $\triangle ABC$ je podobný $\triangle OFC$ a $\triangle AOB$ je podobný $\triangle COD$, protože odpovídající si úhly těchto trojúhelníků jsou stejné.



Obr. 52

Platí tedy ($m = EO$, $n = OF$):

1. $\frac{a}{m} = \frac{d_2}{c}$ z podobnosti trojúhelníků ABD a EOD,
2. $\frac{a}{b} = \frac{d_2 - c}{c}$ z podobnosti trojúhelníků AOB a COD.

Z rovnosti 2 dostáváme

3. $\frac{a + b}{b} = \frac{d_2}{c} = \frac{a}{m}$

a odtud plyne $m = \frac{ab}{a + b}$.

Podobně

4. $\frac{a}{n} = \frac{d_1}{e}$ z podobnosti trojúhelníků ABC a OFC,
5. $\frac{a}{b} = \frac{d_1 - e}{e}$ z podobnosti trojúhelníků AOB a COD.

Z rovnosti 5 dostáváme

6. $\frac{a + b}{b} = \frac{d_1}{e} = \frac{a}{n}$

a odtud plyne $n = \frac{ab}{a + b}$.

Tedy

$$EF = m + n = \frac{ab}{a + b} + \frac{ab}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Spojíme-li středy ramen lichoběžníka G a H (viz obr. 51), dostaneme aritmetický průměr úseček a, b.

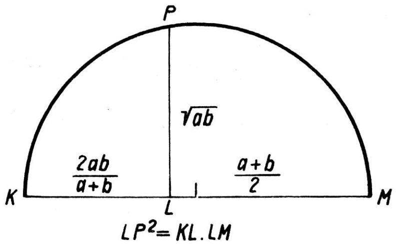
Všechny tři uvedené průměry čísel a, b můžeme znázornit na jediném obrázku. K tomu cíli nanesme na libovolné přímce z bodu K (viz obr. 53) úsečku

$$KL = EF = \frac{2ab}{a+b},$$

pak stejným směrem úsečku

$$LM = GH = \frac{1}{2}(a+b)$$

a narýsujme půlkružnici, jejímž průměrem je součet úseček KL a LM.



Obr. 53

V bodě L vztyčme kolmici k přímce KM; kolmá úsečka LP je geometrickým průměrem úseček KL a LM, neboť $LP^2 = KL \,.\, LM$.*)

Harmonický průměr má různá použití. Zde je praktická úloha, jejímž řešením je harmonický průměr zadaných čísel:

Automobilista jel v noci z Prahy do Plzně průměrnou rychlostí $v_1 = 90$ km/h a druhý den zpátky z Plzně do Prahy průměrnou rychlostí $v_2 = 60$ km/h.

Vypočtěte průměrnou rychlost automobilisty na trati Praha – Plzeň – Praha.

Na první pohled se zdá, že průměrná rychlost je aritmetickým průměrem obou daných rychlostí:

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

čili

$$v = \frac{1}{2}(90 + 60)\ \text{km/h, tj. } 75\ \text{km/h}.$$

Tak tomu však není, jak ukazuje následující výpočet.

Nechť vzdálenost Praha – Plzeň je a. Pak doba jízdy z Prahy do Plzně je

$t_1 = \dfrac{a}{v_1}$ a doba jízdy z Plzně do Prahy

je $t_2 = \dfrac{a}{v_2}$. Doba jízdy tam a zpět je

$t = t_1 + t_2 = \dfrac{a}{v_1} + \dfrac{a}{v_2}$, takže průměrná rychlost jízdy tam i zpět je

$$v = \frac{2a}{t} = \frac{2a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Odtud najdeme

$$\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2},$$

a tedy

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Jak vidíme, není průměrná rychlost jízdy aritmetickým průměrem, ale harmonickým průměrem obou daných

*) Čtenář nechť si připomene Euklidovu větu o výšce pravoúhlého trojúhelníka. (Pozn. překl.)

rychlostí. Dosadíme-li $v_1 = 90$ km/h, $v_2 = 60$ km/h, nalezneme $v = 72$ km/h a nikoli 75 km/h.

Podobně je tomu v případě tří rychlostí, např. v této úloze: Tři města A, B, C tvoří rovnostranný trojúhelník, tj. jejich vzdálenosti jsou stejné. Auto jede z A do B rychlostí v_1, z B do C rychlostí v_2, z C do A rychlostí v_3 (např. $v_1 = 60$ km/h, $v_2 = 45$ km/h, $v_3 = 36$ km/h). Jaká je průměrná rychlost automobilu?

Průměrná rychlost v není aritmetickým průměrem

$$\frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3),$$

tj. $\dfrac{1}{3}(60 + 45 + 36)$ km/h $= 47$ km/h,

ale harmonickým průměrem:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right).$$

K tomuto výsledku dojdeme, uvažujeme-li stejně jako v předešlé úloze:

$AB = BC = CA = a$;

$$t_1 = \frac{a}{v_1},\ t_2 = \frac{a}{v_2},\ t_3 = \frac{a}{v_3};$$

$t = t_1 + t_2 + t_3$;

průměrná rychlost na celé trati je

$$v = \frac{3a}{t} = \frac{3a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2} + \frac{a}{v_3}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}.$$

Odtud dostáváme průměrnou rychlost

$$v = \frac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3}.$$

Podrobný důkaz přenecháváme čtenáři.

■ Zábavné úlohy

Přesnost především

Internát jisté hornické školy je od ní značně vzdálen a žáci musí být přiváženi do školy autobusem na osmou hodinu ranní. Jestliže autobus se žáky pojede rychlostí 30 km/h, přijede do školy příliš brzo – o 30 minut dříve. Jestliže pojede rychlostí 20 km/h, přijede naopak příliš pozdě – také o 30 minut.

Jak je vzdálen internát od školy a jak rychle má jet autobus, aby přijel ke škole přesně v 8 hodin ráno?*)

Rozvážný účetní

Státní statek (SS), zemědělské družstvo (JZD) a strojní a traktorová stanice (STS) sousedí spolu a leží v jisté vzdálenosti od silnice. Aby se zlepšilo jejich spojení s blízkým městečkem, rozhodly se tyto tři podniky postavit

*) Předpokládáme, že okamžik odjezdu autobusu od internátu je pevně stanoven. (Pozn. překl.)

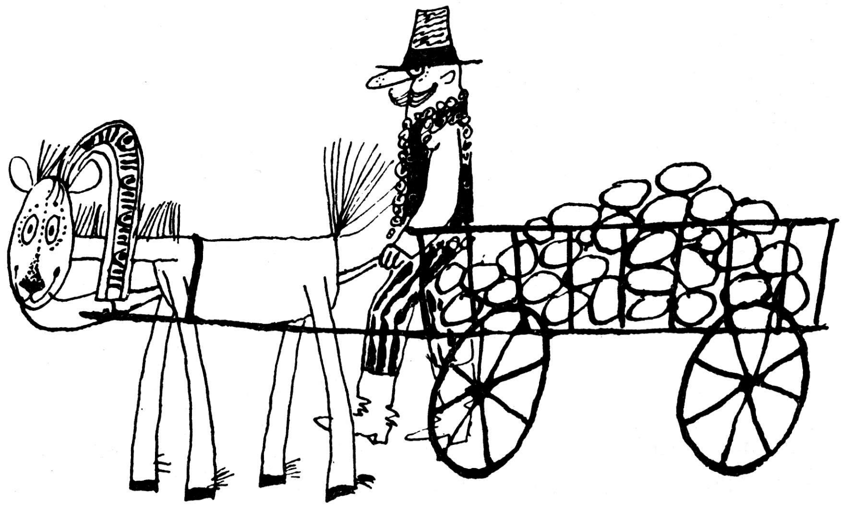
společně svépomocí novou cestu k silnici. SS dodal na stavbu 20 vozů kamení, STS 25 vozů kamení a JZD poskytlo částku 4 500 Kčs, která tvořila jeho podíl na budování cesty. Jak se má tato hotovost rozdělit mezi SS a STS?

SS navrhl rozdělit 4 500 Kčs na polovinu, ale STS nesouhlasila a navrhla rozdělení peněz v poměru dodávek materiálu: SS za 20 vozů 2 000 Kčs, STS za 25 vozů 2 500 Kčs.

Účetní JZD, který byl jednání přítomen, se usmál a řekl:

„Ne, vážení, dělení na polovic je stejně nesprávné jako dělení podle počtu vozů. Rozdělím 4 500 Kčs tak, že neukřivdíme nikomu."

Jaký způsob dělení navrhl účetní?



Vinař a jeho pomocník

Jeden obchodník měl pomocníka, jehož povinností bylo přinášet víno ze sklepa do obchodu. Ale, jak se říká, pomocník si rád přihnul. A tak každý den vypil potichoučku z dvacetilitrového sudu vína čtyři sklenky, tj. jeden litr vína, a doléval do něho stejné množství vody, aby obchodník nic nepoznal.

To udělal pomocník čtyřikrát. Pátého dne byl sud s vínem prodán hostinskému. Zakrátko se však hostinský vrátil do obchodu a rozhořčeně žádal vrácení peněz, že prý platil dvacet pět korun za litr vína a ne vody.

„Přineste laskavě ten sud nazpátek, vrátím vám všechno, co vám patří. Vodu neprodávám, ale za víno musíte zaplatit."

„Ale jak zjistíme, kolik vody se dostalo do vína?"

„Hned zavoláme viníka."

Zavolali pomocníka, který se upřímně přiznal, že dolil do vína čtyři litry čisté vody.

„Takže platím jen za šestnáct litrů," zvolal hostinský. „Vraťte mi tedy sto korun."

„Ne, pane! To není tak lehké a snadné. Hned spočítám, kolik vám patří." Vinař vzal tužku a začal počítat.

Nečekejme na jeho výsledek, spočítejme to sami!

V družstevním obchodě

Hospodář přišel do družstevního obchodu a požádal o 2,25 kg cukru. Prodavačka zvážila zboží na pravé misce a na levou pokládala závaží. Ale když si hospodář vzal cukr, zapochyboval o správnosti váhy a požádal o převážení, přičemž položil zboží na levou misku a závaží na pravou. Ukázalo se, že cukru je jen 1,44 kg. V obchodě vypukl zmatek a hádka.

Agronom, stojící poblíž, vytáhl notes a začal rychle počítat. Za chvilku se otočil k hospodáři a přerušil hádku:

„Hospodáři, zaplaťte za 1,8 kg cukru. Tolik ho máte v sáčku."

Obě strany přijaly uvážlivé agronomovo rozhodnutí.

Vypočítal agronom množství cukru správně?

Prodej drobného zvířectva

Majitel obchodu koupil jistý počet zajíců a jistý počet párů králíků. Počet párů králíků byl roven polovině počtu zajíců. Za každého zajíce zaplatil obchodník 2 dolary, za každého králíka 1 dolar. Maloobchodní cena, za kterou prodával, byla za každé zvíře vyšší o 10 % (tj. 2,2 a 1,1 dolaru). Když byla prodána všechna zvířata až na posledních sedm, majitel obchodu zjistil, že peníze vynaložené na nákup se mu právě vrátily. Prodejní hodnota zbývajících sedmi zvířat tvoří tedy jeho čistý zisk.

Jaký je čistý zisk majitele obchodu?

Kdo prodává levněji?

Jistý americký výrobce konzerv dal na trh olejovky v krabičkách tvaru kvádru o stranách podstavy a, b a výšce h. Jeho konkurent dal na trh olejovky stejné kvality také v krabičkách ve tvaru kvádru o téže výšce h, ale zvětšil délku podstavy o 20%, zatímco šířku o 20% zmenšil. Cena krabičky olejovek byla táž.

Který výrobce prodával levněji?

Inventura

Během inventury v jednom obchodě byl nalezen účet, na kterém bylo mnoho nečitelných číslic. Jestliže na místa nečitelných číslic napíšeme křížky, bude účet vypadat takto:

```
      23†7††
  ×     †††5
  ----------
     †††††2†
     †347††
    ††9570
   704†††
  ----------
   7††††††††
```

Přesto dokázali revizoři tento účet rekonstruovat. Jak?

Chovatelé ovcí

Dva farmáři, John a Bill, prodali stádo ovcí, přičemž za každou ovci dostali tolik dolarů, kolik ovcí bylo ve stádě. Když pak chtěli rozdělit obdrženou částku napolovic, brali z ní oba střídavě po 10 dolarech. John měl nakonec o 10 dolarů víc. Aby se vyrovnali, dal John Billovi zbytek (který byl menší než 10 dolarů) a peněženku.

Jakou cenu měla peněženka?

■ Řešení úloh

Přesnost především

1. Rozdíl mezi pozdním a předčasným příjezdem je 30 min + 30 min = = 60 min.

2. Při rychlosti 30 km/h jsou na ujetí 1 km třeba 2 min, zatímco při rychlosti 20 km/h jsou potřebí 3 min; na jednom kilometru se tedy ztratí jedna minuta.

3. Protože rozdíl mezi pozdním a předčasným příjezdem činí 60 min, je vzdálenost internátu od školy 60 km.

4. Na projetí celé cesty musí autobus spotřebovat

$$\left(\frac{60}{30} + \frac{1}{2}\right)\text{h} = \left(\frac{60}{20} - \frac{1}{2}\right)\text{h} = 2\frac{1}{2}\,\text{h},$$

a musí tedy jet rychlostí

$$60\ \text{km} : 2\frac{1}{2}\,\text{h} = 24\ \text{km/h}.$$

Všimněte si, že rychlost 24 km/h není aritmetickým průměrem rychlostí 30 km/h a 20 km/h, ale jejich harmonickým průměrem:

$$\frac{2 \,.\, 30 \,.\, 20}{30 + 20} = \frac{1200}{50} = 24.$$

Rozvážný účetní

SS a STS dodaly dohromady 45 vozů kamene. Odtud plyne, že každý z účastníků stavby měl dodat 15 vozů kamene. Cena 15 vozů kamene je 4 500 Kčs.*) Cena jednoho vozu kamene je tedy 4 500 Kčs : 15 = 300 Kčs. SS dodal 20 vozů, tedy má dostat za 5 vozů 300 Kčs . 5 = 1 500 Kčs; STS dodalo 25 vozů, a tedy má dostat za 10 vozů 300 Kčs. 10 = 3 000 Kčs.

Vinař a jeho pomocník

První den vypil pomocník 1 l čistého vína, takže v sudu zůstalo 19 l vína a 1 l vody.

Druhý den vypil $\frac{19}{20}$ l čistého vína.

V sudu zůstalo $19 - \frac{19}{20} = \frac{19^2}{20}$ l čistého vína.

Třetí den vypil $\frac{19^2}{20^2}$ l čistého vína, v sudu zůstalo $\frac{19^2}{20} - \frac{19^2}{20^2} = \frac{19^3}{20^2}$ l čistého vína.

Čtvrtý den vypil $\frac{19^3}{20^3}$ l čistého vína.

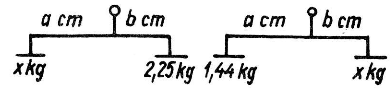
Dohromady tedy vypil

$$\left(1 + \frac{19}{20} + \frac{19^2}{20^2} + \frac{19^3}{20^3}\right)\text{l} \doteq 3{,}709\,8\ \text{l}.$$

Vinař musel vrátit hostinskému 25 Kčs . 3,709 8 ≐ 92,75 Kčs.

V družstevním obchodě

Předpokládejme, že cukr váží x kg a že ramena vah jsou a a b cm dlouhá (viz obr. 54). Podle podmínek rovnováhy na páce máme při prvním vážení $xa = 2{,}25b$ a při druhém vážení $xb = 1{,}44a$.



Obr. 54

Vynásobíme-li levé a pravé strany těchto rovnic, dostaneme

$$x^2ab = 2{,}25 \,.\, 1{,}44ab,$$

odkud

$$x^2 = 2{,}25 \,.\, 1{,}44$$

čili

$$x = \sqrt{2{,}25 \,.\, 1{,}44} = 1{,}8.$$

Cukr vážil 1,8 kg.

Důsledek: Skutečná hmotnost předmětu, váženého na váze s nestejně dlouhými rameny, je rovna geometrickému průměru obou vážení m a n, tj. $x = \sqrt{mn}$.

*) Tolik totiž zaplatilo JZD namísto svého podílu 15 vozů kamene. (Pozn. překl.)

Prodej drobného zvířectva

Nechť x je počet zakoupených zajíců, y počet neprodaných zajíců; počet zakoupených králíků je rovněž x, počet neprodaných králíků $7 - y$. Prodaných zajíců je $x - y$, prodaných králíků $x - (7 - y)$.

Za prodané zajíce obchodník dostal $2{,}2(x - y)$ dolarů a za prodané králíky $1{,}1[x - (7 - y)]$ dolarů, celkem dostal $2{,}2(x - y) + 1{,}1(x - 7 + y)$ dolarů.

Tato částka se rovná částce, kterou obchodník zaplatil za všechny zajíce ($2x$ dolarů) a všechny králíky (x dolarů). Celkem obchodník zaplatil $3x$ dolarů. Tedy

$$2{,}2(x - y) + 1{,}1(x - 7 + y) = 3x.$$

Po úpravách dostaneme

$$x = \frac{11y + 77}{3} = 3y + 25 + \frac{2y + 2}{3}.$$

Vidíme, že za y je třeba zvolit takové číslo menší než 7 (7 bylo všech neprodaných zvířat), aby čitatel zlomku na pravé straně byl dělitelný třemi. To je buď 2, nebo 5. Pro $y = 2$ je $x = 33$. Tato hodnota nevyhovuje, neboť 33 je liché (obchodník kupoval králíky na páry). Hodnota $y = 5$ vyhovuje, neboť pak $x = 44$.

Obchodník koupil 44 zajíců a 22 párů králíků a zaplatil za ně celkem 132 dolarů. Prodal 39 zajíců a 21 párů králíků a dostal 132 dolarů. Čistý zisk obchodníkův se rovná ceně 5 zajíců a 2 králíků čili 13,2 dolaru.

Kdo prodává levněji?

Levněji prodává ten, kdo za stejnou cenu prodává krabičku o větším objemu. První výrobce bere jistou částku za krabičku olejovek o objemu abh. Druhý za stejnou částku prodává krabičku o objemu

$$\left(a + \frac{1}{5}a\right)\left(b - \frac{1}{5}b\right)h =$$

$$= \frac{6}{5}a \cdot \frac{4}{5}bh = \frac{24}{25}abh$$

čili o 4 % menší než první.

Inventura

V druhém částečném součinu jsou číslice 3 a 7 stejné jako odpovídající číslice násobence. Proto musí být počet tisícovek násobence roven 4, počet stotisíců v druhém částečném součinu je 2 a počet desítek násobitele je 1. Z třetího částečného součinu usoudíme, že násobenec je 234 785 a násobitel †215. Čtvrtý částečný součin 704††† umožňuje nalézt počet tisícovek násobitele: je to 3.

Tak jsme zjistili, že násobenec je 234 785, násobitel 3 215, takže součin je 754 833 775.

Chovatelé ovcí

Nechť stádo ovcí má $10a + b$ kusů (b označuje číslici, a může být i víceciferné číslo). Částka, kterou dostali farmáři za ovce, činí

$$(10a + b)^2 = (100a^2 + 20ab + b^2)$$

dolarů. Sumu $(100a^2 + 20ab)$ dolarů farmáři rozdělili napolovic, berouce střídavě po deseti dolarech. Zbytek, tj. b^2 ($b < 10$), se musí skládat z lichého násobku deseti a zbytku, menšího než 10. Může tedy b^2 být buď 16, nebo 36. V obou případech je zbytek 6, takže cena peněženky je $(10 - 6)$ dolarů $= 4$ dolary.

Od nepaměti počítáme v *desítkové soustavě*. Počítání „po deseti" s použitím poziční hodnoty každé číslice se nám zdá být nejjednodušším ze všech způsobů počítání. Jsme ochotni tvrdit, že všechny národy ve všech dobách počítali tímto způsobem.

V Babylónii, jak jsme už o tom hovořili (viz kap. 3), se počítalo pravděpodobně na tucty, přičemž základní jednotkou bylo pět tuctů čili 60. Avšak vedle dobře vypracované šedesátkové soustavy, kterou pravděpodobně používali učenci, existovala také soustava desítková (ne však poziční). Důkazem toho je skutečnost, že hlavními znaky číslic u Babylóňanů byly první čtyři mocniny deseti: 10^0 čili 1, 10^1 čili 10, 10^2 čili sto a 10^3 čili tisíc (viz obr. na str. 23).

Můžeme se tedy domýšlet, že v Babylónii existovaly dva způsoby počítání: populární (desítkový) a vědecký (šedesátkový poziční).

V nejdávnějších časech počítaly latinské národy pravděpodobně po pěti, neboť tolik je prstů na jedné ruce. Výmluvně o tom svědčí římské znaky pro číslice, např. I (jeden prst), II (dva prsty), III a IIII (tři a čtyři prsty). Znak V mohl vzniknout schematickým znázorněním dlaně a znak X pak vyjadřuje dvě dlaně.

Desítková soustava má řadu předností jak při písemném, tak i ústním výpočtu. Avšak teoreticky má dvanáctková soustava více výhod. Deset je dělitelné 2 a 5, zatímco 12 je dělitelné 2, 3, 4 a 6.

Můžeme používat desítku, polovinu desítky nebo pětinu desítky; při počítání na tucty můžeme však používat tucet, polovinu tuctu, třetinu, čtvrtinu nebo šestinu tuctu. Nevýhodou počítání na tucty by byla potřeba ještě dvou číslic: pro čísla 10 a 11. Také tabulka násobení by byla složitější.

Tyto poslední nevýhody nemá způsob počítání po dvou (*dvojková soustava*). Pohovoříme si teď o něm podrobněji.

Ve dvojkové soustavě je základem počítání číslo 2, tak jako v desítkové soustavě číslo 10.

Dvojková soustava je poziční jako soustava desítková, ale její řády nejsou 1, 10, 100, 1 000, … , 10^n, nýbrž 1, 2, 4, 8, … , 2^n.

Ve dvojkové soustavě užíváme jen dvou číslic: 0 a 1. Tabulka sčítání je v této soustavě nesmírně jednoduchá. Zde je:

$0 + 0 = 0,\ 1 + 0 = 1,\ 0 + 1 = 1,$
$1 + 1 = 10$ (tj. dvě).

Početní úkony ve dvojkové soustavě nevyžadují hlubších znalostí aritmetiky. A takhle vypadají čísla od 1 do 10 napsaná ve dvojkové soustavě:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Jak vidíme z této tabulky, má dvojková soustava i své nevýhody. Čísla, která jsou v desítkové soustavě jednociferná, jsou ve dvojkové soustavě dvou-, tří- i čtyřciferná (např. 8, 9). Letopočet 1969 napíšeme ve dvojkové soustavě následujícím způsobem:

$1969 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 +$
$+ 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 +$
$+ 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 =$
$= 11110110001.$

Čtyři jednotky vedle sebe

1111 (8 + 4 + 2 + 1)

vyjadřují číslo 15, neboť (počítáme-li zprava doleva) první jednotka znamená $1 = 2^0$, druhá $2 = 2^1$, třetí $4 = 2^2$ a čtvrtá $8 = 2^3$.

Jednoduchost provádění početních operací ve dvojkové soustavě je obdivuhodná.

Sčítání. Sečteme např. 101011 + + 11010 (čili 43 + 26). Napíšeme daná čísla pod sebe:

$$\begin{array}{r} 11\ 1 \\ 101011 \\ 11010 \\ \hline 1000101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43 \\ 26 \\ \hline 69 \end{array}$$

Poznámka: $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2$, tj. 1 jednotka vyššího řádu. Je-li ve sloupci jedna jednotka (druhá číslice je 0), píšeme ji pod čáru. Jsou-li ve sloupci dvě jednotky (jako v druhém zprava), píšeme pod ně 0 a nahoru nad následující sloupec vyššího řádu píšeme 1. Dále postupujeme stejně, přičemž musíme brát zřetel na jednotky připsané nahoře.

Uvedeme ještě jeden složitější příklad na sčítání, jehož objasnění ponecháváme čtenáři:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11111 \\ 1111111 \\ \hline 101011 \\ 11010 \\ 101110 \\ 1001101 \\ \hline 11000000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ 43 \\ 26 \\ 46 \\ 77 \\ \hline 192 \end{array}$$

$1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 +$
$+ 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$= 192.$

Odčítání. Desítkovým doplňkem daného čísla nazýváme rozdíl mezi oním číslem a jednotkou nejblíže vyššího řádu. Například 264 je desítkovým doplňkem čísla 9 736

(10 000 − 9 736 = 264).

Chceme-li např. odečíst 783 od 5 732, najdeme desítkový doplněk čísla 783

(1 000 − 783) čili 217 a vypočteme

$$\begin{array}{lr@{\qquad}r} & 5\,732 & 5\,949 \\ (A) & \underline{217} & \underline{-1\,000} \\ & 5\,949 & 4\,949 \end{array}$$

Tedy 5 732 − 783 = 4 949 (ověřte).

Podobně postupujeme ve dvojkové soustavě s tím rozdílem, že vypočteme a přičteme dvojkový doplněk menšitele.

Dvojkový doplněk nalezneme velmi snadno. Chceme-li napsat např. dvojkový doplněk čísla

(1) 11010111000,

ponecháme beze změny první jedničku od konce čísla (zprava) a všechny nuly, stojící za ní (jsou-li nějaké). Všecky ostatní jedničky změníme na nuly a všechny nuly na jedničky. Dostaneme-li na začátku čísla nějaké nuly, vynecháme je až k první jedničce. K číslu (1) dostaneme tedy dvojkový doplněk

00101001000 čili 101001000.

Nyní odečteme podle pravidla (A) 1110001 − 11011. Vypočteme doplněk menšitele. Najdeme 00101 = 101. Místo odčítání přičítáme:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1110001 \\ \underline{101} \\ 1110110, \end{array}$$

1110110 − 100000 = 1010110.

V desítkové soustavě je provedení tohoto odčítání jednodušší:

113 − 27 = 86.

Násobení. Tabulka násobení ve dvojkové soustavě je 0 . 0 = 0, 0 . 1 = 0, 1 . 0 = 0, 1 . 1 = 1.

Jednotlivé kroky výpočtu zapisujeme jako obvykle, necháváme si jen místo na zápis přenosu jednotek.

$$\begin{array}{r@{\qquad}r} 111001101 & \\ \times\quad \underline{1101101} & \\ & \\ 11 & 461 \\ 111111111 & \times\quad \underline{109} \\ \underline{1111111111111} & 4149 \\ 111001101 & \underline{4610} \\ 111001101 & 50249 \\ 111001101 & \\ 111001101 & \\ \underline{111001101} & \\ 110001000100100 1 & \end{array}$$

Dělení naráží na největší obtíže. Jde o to, že odčítání násobku dělitele od příslušného výrazu dělence musíme při každém kroku nahrazovat přičítáním doplňku. Zde je příklad:

$$\begin{array}{l@{\qquad}l} 1\ 11 & \\ 11011101 : 10111 \mid \underline{1001} & \\ \underline{+01001} & \\ 100100 & 221 : 23 \mid \underline{9} \\ \underline{-100000} & \underline{-207} \\ 100101 & 14 \\ \underline{+\ 01001} & \\ 101110 & \\ \underline{-100000} & \\ 1110 & \end{array}$$

Na zvláštnosti a nezvyklou jednoduchost dvojkové soustavy upozornil poprvé význačný matematik a filozof G. W. Leibniz.

Dvojková početní soustava má řadu aplikací v různých oborech matematiky. Mimo jiné je používána v elektronických počítacích strojích.

■ Zábavné úlohy

Početní kouzlo (společenská zábava)

Popíšeme jedno početní „kouzlo", založené na vlastnostech dvojkové soustavy. Vyzveme partnera, aby si myslel nějaké číslo od 1 do 31. Nato mu podáme následující tabulku s čísly a vyzveme ho, aby — aniž nám tabulku ukáže — řekl, v kterých řádcích se nachází číslo, které si myslí. Jakmile nám řekne pořadová čísla řádků, v nichž se číslo vyskytuje, hned je uhádneme.

Nechť si partner myslí např. číslo 29. To se nachází v řádcích 1, 3, 4 a 5. Napíšeme v dvojkové soustavě číslo, které má jedničky na prvním, třetím, čtvrtém a pátém místě (zprava) a nulu na místě druhém. Dostáváme

$11101_{(2)} = 1 + 4 + 8 + 16 = 29.$

Jestliže si partner myslel číslo 18, oznámí nám řádky 2 a 5. Píšeme tedy jedničku na druhém a pátém místě zprava a nuly na prvním, třetím a čtvrtém, tj.

$10010_{(2)} = 2 + 16 = 18.$

Myšlené číslo budiž 5. Nachází se v řádku 1 a 3. Má tedy ve dvojkové soustavě tvar

$101_{(2)} = 1 + 4 = 5.$

O různých soustavách

Tolik jsme přivykli počítání v desítkové soustavě, že nám ani nepřijde na mysl uvažovat o možnostech počítání

Poř. č.	Čísla															
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
3	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
4	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
5	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

v soustavě jiné. Zvykli jsme si na desítkovou soustavu od nejútlejšího mládí, učili jsme se ji tak, jako jsme se učili mateřskému jazyku. Všechno civilizované lidstvo na zeměkouli počítá v desítkové soustavě. Jistě je tomu tak proto, že příroda nám dala deset prstů na rukou i na nohou. Kdybychom měli místo po deseti po dvanácti prstech na horních i dolních končetinách, jistě bychom místo na desítky počítali na tucty. Kromě této „přírodní“ přednosti nemá desítková soustava žádné jiné.

Je namístě upozornit, že čísla si zachovávají svoje vlastnosti bez ohledu na to, v jaké číselné soustavě jsou zapsána: prvočísla zůstávají prvočísly (např. číslo sedmnáct je prvočíslem bez ohledu na to, zda je napíšeme jako 17, jako $10001_{(2)}$, jako $122_{(3)}$ nebo jako $32_{(5)}$), složená zůstávají složenými, dělitelná třemi jsou vždy dělitelná třemi atd.

Jen slovní vyjádření znaků dělitelnosti bude v každé soustavě jiné: např. čísla, která v pětkové soustavě zapisujeme jako 3 $(3 . 5^0)$, 11 $(1 . 5^1 + 1 . 5^0)$, 14 $(1 . 5^1 + 4 . 5^0)$, 22 $(2 . 5^1 + 2 . 5^0)$ jsou všechna dělitelná 3, zatímco čísla 4, 13, 22, 31 (opět v pětkové soustavě) jsou dělitelná 4.

A nyní, navazujíce na předchozí úvahy, rozřešme čtyři úlohy:

1. Rovnice $11x^{10} - 1010x + 11 = 0$ je napsána ve dvojkové soustavě. Rozřeš ji a napiš výsledek ve dvojkové soustavě.

2. Jak zní znak dělitelnosti dvěma ve dvojkové soustavě?

3. Co se stane s číslem napsaným ve dvojkové soustavě, jestliže za poslední číslici připíšeme nulu nebo dvě nuly?

4. Jaký tvar má zlomek $\frac{1}{7}$ ve dvojkové soustavě a) jako obyčejný zlomek, b) jako „desetinný“ zlomek?

Z pamětí milovníka matematiky

... Matematikou se vášnivě zabývám již od 120. roku svého života, to jest od doby, kdy jsem ještě navštěvoval střední školu.

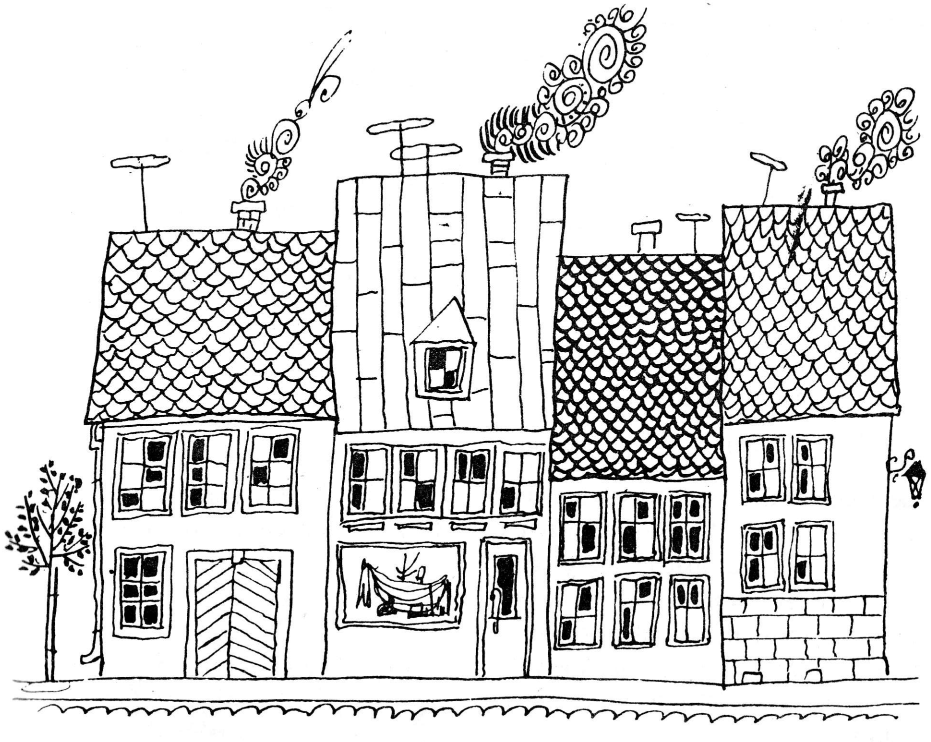
Kdy jsem se narodil a jak jsem stár? Pečlivě jsem slavil každé své narozeniny, ale přesto při vstupu na univerzitu, když mi bylo již 19 let, oslavil jsem tento den jen čtyřikrát. Jistě si již domyslíte, v jaký den jsem se narodil.

Kolik je mi let? K tomu se nerad přiznávám, a proto vám tento údaj sdělím v zašifrované formě. Zamyslete se nad zlomkem $\frac{26}{33}$; v něm je odpověď na otázku.

Od roku 2 200 011 žiji v ulici, která nese jméno anglického milovníka matematiky. Název ulice je zašifrován ve zlomku $\frac{r}{\pi}$ (co objevil tento muž?).

Číslo mého domu je dvojciferné. Jestliže mezi jeho číslice položíte desetinnou čárku, dostanete aritmetický průměr obou jeho číslic.

Můj pokoj má tvar obdélníka, jehož strany jsou přirozená čísla. Číslo vyjadřující obvod pokoje je totožné s číslem vyjadřujícím plošný obsah podlahy.



Čísla jako koníček

Můj pokojík mne vede k úvahám o číslech, zvláště o těch, která vyjadřují roky sedmého desetiletí našeho století, tj. od r. 1960 do 1970. Přemýšlení o číslech je totiž můj koníček.

Velmi zajímavou vlastnost jsem objevil u čísla 1 962: je součtem tří trojciferných čísel překvapivého tvaru. Udejte tato tři čísla.

Neméně zajímavý je rok 1960. Bez narušení pořadí jeho číslic můžeme z něho dostat číslo rovnající se jedné.

Z číslic roku 1961 připsáním jediného znaku aritmetické operace a provedením dvou operací je možno dostat číslo stomilionkrát větší, než je počet atomů tvořících naši planetu Zemi; toto číslo uvádí Fritz Kahn ve své knížce „Design of the Universe“ („Obraz vesmíru“).

Číslo 1 963 dostaneme vynásobením čísla 151 nešťastnou třináctkou

$$(1\,963 = 13 \,.\, 151),$$

ale z jeho číslic 1, 9, 6, 3 lze sestavit dokonce dvě prvočísla. Která? Zjistěte to.

Číslo 1 964 je složené, ale přečteno zprava doleva: 4 691 – je prvočíslem. Tuto vlastnost nemá rok 1965, neboť 5 691 je složené číslo. Zdalipak je vůbec možné sestavit z číslic 1, 9, 6, 5 prvočíslo?

Také moje telefonní číslo 547 48 je neobvyklé. Skládá se z pěti číslic; jestliže sečteme páté mocniny těchto pěti čísel: $5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$, dostaneme znovu přesně 54 748. Jednou jsem si pomyslel, že asi existuje trojciferné číslo s podobnou vlastností, tj. takové, že součet třetích mocnin jeho tří číslic je mu roven. Nalezl jsem dvě taková čísla. Označíme-li číslice prvního čísla a, b, c, pak číslice druhého jsou c, d, a, takže

$$a^3 + b^3 + c^3 = 100a + 10b + c,$$
$$c^3 + d^3 + a^3 = 100c + 10d + a.$$

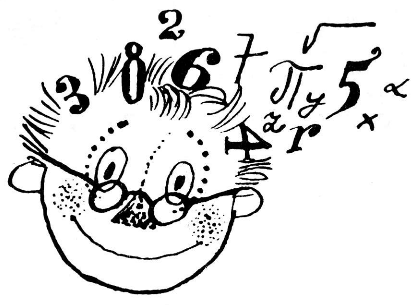
Podaří se vám objevit ta čísla?

Zjistil jsem, že číslo roku 1973 je prvočíslo, že do konce druhého tisíciletí bude takových let pět (která?) a že v celém našem tisíciletí bylo jen 140 let, jejichž letopočty byly prvočísla (která léta to byla?).

Ale nechme již letopočtů. Naučím vás jednoduchou početní hru, která vám vyplní několik večerů. Zde je:

Početní hra

1. Z devíti číslic 1, 2, 3, … , 9 složte taková čísla, aby jejich součet byl 100. Číslice v každém takovém součtu musí následovat za sebou v přirozeném pořadí od 1 do 9, a to každá jen jednou. Mezi čísla můžete položit znamení plus (+) nebo minus (–). Před prvním číslem nesmí být minus.



a) Kolik takových součtů je možno utvořit?

b) Jaký je nejmenší (a největší) počet znamení + a – mezi čísly?

Na ukázku uveďme jeden takový součet:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

(7 znaků, z toho 6 plus a 1 minus).

2. Táž úloha, ale s podmínkou, že číslice musí následovat za sebou v opačném pořadí, tj. od 9 do 1. Na ukázku uveďme jednu možnost řešení úlohy:

$$9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 100$$

(7 znaků, z toho 6 plus a 1 minus).

K usnadnění řešení vám ještě povíme, že Ernest Dudeney vyjádřil v dopise časopisu „Scientific American“ názor, že první úloha má 11 řešení, zatímco druhá 15.

■ Řešení úloh

O různých soustavách

1. Rovnice $11x^{10} - 1010x + 11 = 0$ má v desítkové soustavě tvar

$$3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Odtud

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = 3.$$

Výsledek ve dvojkové soustavě je

$$x_1 = \frac{1}{11_{(2)}}, \; x_2 = 11_{(2)}.$$

2. Dvěma jsou dělitelná čísla končící nulou.

3. Připsáním jedné nuly se toto číslo zdvojnásobí, např.

$$11010_{(2)} = 26, \; 110100_{(2)} = 52;$$

připsáním dvou nul dostaneme čtyřnásobek původního čísla:

$$1101000_{(2)} = 104.$$

4. $\frac{1}{7} = \frac{1}{111_{(2)}}$;

$$1 : 111_{(2)} = 0{,}001\,001\,001 \ldots_{(2)}$$

je periodický zlomek.*) (Viz str. 108.)

Rozšifrování pamětí milovníka matematiky

1. Autor pamětí se zabývá matematikou od 120. roku svého života; tehdy byl ještě žákem střední školy. Odtud plyne, že číslo 120 je napsáno v trojkové soustavě:

$$120_{(3)} = 1 \,.\, 3^2 + 2 \,.\, 3^1 + 0 = 15.$$

2. V 19 letech teprve čtyřikrát oslavil svoje narozeniny. Narodil se tedy 29. února.

3. Svůj věk podal v zašifrované formě, ve tvaru zlomku $\frac{26}{33}$. Po převedení

zlomku na desetinný dostaneme

0,787 878 … .

Opakující se perioda 78 udává věk milovníka matematiky.

4. V ulici, jejíž jméno máme rozluštit, žije od roku 2 200 011. Protože autor pamětí píše čísla v trojkové soustavě, máme

$2\,200\,011_{(3)} = 2 \,.\, 3^6 + 2 \,.\, 3^5 + 0 \,.\, 3^4 + 0 \,.\, 3^3 + 0 \,.\, 3^2 + 1 \,.\, 3^1 + 1 = 1\,948$.

5. Bydlí v ulici pojmenované po matematikovi, jehož jméno je zašifrováno v rébusu $\frac{r}{\pi}$: „na – pi – er“, tj. v ulici, pojmenované po objeviteli logaritmů Napierovi.

6. Označíme-li x, y číslice čísla domu, dostáváme

$$(x + y) : 2 = (10x + y) : 10,$$

čili

$$4y = 5x.$$

Odtud $x = 4$, $y = 5$. Číslo domu je 45.

7. Označíme-li rozměry pokoje u, v, je $2(u + v) = uv$ čili

$$v = \frac{2u}{u - 2} = 2 + \frac{4}{u - 2}.$$

Protože u i v jsou přirozená čísla, musí být $4/(u - 2)$ přirozené číslo. To je možné jen pro u rovné 3, 4 nebo 6. Pokoj má tedy rozměry 3 m × 6 m nebo 4 m × 4 m.

Čísla jako koníček

1. Rok 1962 je součtem tří čísel: $987 + 654 + 321 = 1\,962$. Číslice těchto čísel následují za sebou v pořadí 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

2. Z 1 960 lze dostat jedničku beze změny pořadí číslic, napíšeme-li 196^0, neboť nultá mocnina libovolného čísla různého od nuly je jedna ($a^0 = 1$ pro $a \neq 0$).

3. Z číslic roku 1961 je možno použitím jediného znaku operace a vykonáním dvou operací dostat číslo $10^{61} = (1 + 9)^{61}$. Toto číslo je větší než počet atomů tvořících zeměkouli. Podle amerického vědce F. Kahna se Země skládá z 10^{52} atomů.

4. Pomocí číslic 1, 9, 6, 3 můžeme napsat dvě prvočísla: 3 169 a 3 691.

5. Pomocí číslic 1, 9, 6, 5 nelze napsat prvočíslo, neboť $1 + 9 + 6 + 5 = 21$; toto číslo je dělitelné třemi.

6. Dvě trojciferná čísla, která mají tuto vlastnost, jsou 153 a 371:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3,$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3.$$

7. Do konce druhého tisíciletí našeho letopočtu bude ještě pět roků, jejichž letopočty jsou prvočísla; jsou to léta 1979, 1987, 1993, 1997, 1999.

Početní hra

1.

$100 = 123 - 45 - 67 + 89$,
$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$,
$100 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$,
$100 = 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9$,
$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$,
$100 = 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9$,
$100 = 1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9$,
$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$,
$100 = 1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9$,
$100 = 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9$.

Nejmenší počet znaků je 3, největší 7.

2.

$100 = 98 - 76 + 54 + 3 + 21$,
$100 = 9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1$,
$100 = 98 - 7 - 6 - 5 - 4 + 3 + 21$,
$100 = 9 - 8 + 7 + 65 - 4 + 32 - 1$,
$100 = 9 - 8 + 76 - 5 + 4 + 3 + 21$,
$100 = 98 - 7 + 6 + 5 + 4 - 3 - 2 - 1$,
$100 = 98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1$,
$100 = 98 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + 2 - 1$,
$100 = 98 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$,
$100 = 98 - 7 + 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$,
$100 = 98 - 7 + 6 - 5 + 4 + 3 + 2 - 1$,
$100 = 98 + 7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1$,
$100 = 98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$,
$100 = 9 + 8 + 76 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1$,
$100 = 9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1$.

Nejmenší počet znaků je 4, největší 7.

*) Můžete se o tom přesvědčit bez dělení ve dvojkové soustavě, znáte-li vzorec pro součet geometrické řady (viz dále kap. 11):

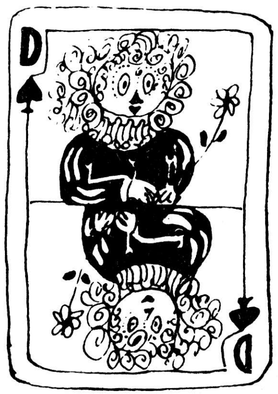
$$0{,}001\,001\ldots_{(2)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

Výpočet můžeme provést také přímo ve dvojkové soustavě [index (2) vynecháváme]:

$$0{,}001\,001\ldots = \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \ldots = \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{1\,000 - 1} = \frac{1}{111}.$$

(Pozn. překl.)

„Hádej, hadači“ se nazývá známá společenská hra. Hraje se následujícím způsobem: Jeden z účastníků hry, hadač, vychází z pokoje. Ostatní vyberou a ukryjí nějaký předmět. Pak pozvou hadače zpět do pokoje. Hadač má uhodnout, jaký předmět byl ukryt. Má právo klást otázky, aby získal informace o hledaném předmětu. Jeho otázky však musí být formulovány tak, aby na každou z nich bylo možno odpovědět jen „ano“ nebo „ne“. Smysl hry spočívá v tom, aby hadač uhodl ukrytý předmět po položení co nejmenšího počtu jednoduchých otázek. Zde je příklad:



Na stole leží balíček 32 karet. Když hadač vejde, ostatní hráči mu oznámí, že ukryli jednu z 32 karet ležících na stole. Hadač se ptá:

„Je to karta červené barvy?“

„Ano.“

Hadač dostal první informaci: karta je červená. Je to tedy srdce nebo káro.

„Je to káro?“ ptá se dále hadač.

„Ne.“

Hadač dostal druhou informaci: karta není káro, je to tedy srdce.

„Je to figura?“

„Ne.“ (Třetí informace.)

„Má ukrytá karta sudý počet znaků?“

„Ano.“ (Čtvrtá informace.)

„Je to desítka?“

„Ne.“ (Pátá informace.)

V balíčku 32 karet jsou jen dvě karty se sudým počtem znaků: osmička a desítka. Na základě pěti informací uhádl hadač, jaká karta byla ukryta: byla to srdcová osma.

Postup získávání informací je možno symbolicky zapsat ve tvaru čísla 10010. V tomto zápise 1 (jedna) označuje „ano“, 0 (nula) označuje „ne“. Podobným způsobem je možno chápat každé číslo skládající se jen z jedniček a nul čili každé číslo napsané ve dvojkové soustavě. Například zápis 10001 znamená ano – ne – ne – ne – ano. Připomínáme čtenáři, že ve dvojkové soustavě užíváme jen dvou číslic: 0 a 1. Číslo 10010 je zkráceným zápisem dvojkového rozvoje $1 . 2^4 + 0 . 2^3 + 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 0 . 2^0$ a v desítkové soustavě se rovná 18.

Vidíme, že informace je možno zapisovat pomocí matematických symbolů. Právě tím se zabývá obor matematiky, který se nazývá *teorie informace* a jehož vývoj souvisí se vznikem a rozvojem *kybernetiky.*

Norbert Wiener (1894 – 1964)

Zde jsme čtenáři dlužni ještě několik slov vysvětlení. Slovo kybernetika je řeckého původu. Kybernetiké znamená umění kormidlování (řízení). Za otce kybernetiky je pokládán nedávno zemřelý americký matematik Norbert Wiener, autor díla „Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine“ (česky „Kybernetika čili řízení a spojení v živočichu a ve stroji“). Výraz „řízení“ znamená v kybernetice ovlivňování daného jevu v požadovaném směru. Řízením je např. řízení silničního provozu nebo regulace tlaku páry v kotli, řízení automobilu nebo organizace školního vyučování, ale i řízení fyziologických procesů v živém organismu nebo i výrobních procesů v továrně či způsob organizace společnosti atd. Vzhledem k tomuto obecnému charakteru kybernetických úloh bylo možno spojit kybernetiku s logikou a matematikou.

V běžné mluvě má pojem informace charakter kvalitativní. Jinou důležitost má informace o tom, že došlo k železničnímu neštěstí, než ta, z které se dovídáme, že se panu X utrhl knoflík u košile.

V teorii informace považujeme informaci za veličinu, kterou lze kvantitativně měřit. Jestliže např. v jistém jevu může dojít k několika různým stavům a nevíme, který z těchto stavů skutečně nastane, dochází k určité nejistotě co do vzniku jednotlivých stavů. Například neznalost skupenství vody je nejistotou týkající se tří možných stavů, protože voda se může vyskytovat ve stavu pevném, kapalném a plynném. Informace, že daný stav je stav kapalný, odstraňuje nejistotu vzhledem k ostatním možným stavům vody; je tedy rovnocenná třem současným informacím. Podle této zásady bychom tedy mohli oceňovat hodnotu informace.

Výhodnějším se však ukázal způsob ocenění hodnoty informace pomocí exponentu, na který je třeba umocnit číslo 2, abychom dostali množství stavů, které mohou nastat v uvažovaném jevu. Jestliže tedy jistý jev může mít jen dva stavy, buď stav X, nebo stav Y (např. vyhodíme-li minci do výšky, může padnout buď orel, nebo panna), stačí jedna informace. Tato závislost mezi počtem stavů a počtem informací může být vyjádřena číslem 2^1 (dva stavy a jedna informace). V případě hádání ukryté karty jsme měli 32 stavy (32 karty); k uhádnutí správné karty bylo třeba pěti různých informací ($32 = 2^5$).

Jednotkou míry jednoduché informace je tzv. *bit*. Je to termín složený ze dvou anglických slov „binary digit", což znamená prostě číslici dvojkové soustavy. K uhodnutí karty (srdcové osmy) bylo tedy třeba 5 bitů informace. Oceňování množství informace pomocí exponentu čísla 2 čili pomocí zápisu ve dvojkové soustavě se stalo základem k použití elektronických počítacích strojů, které, jak známo, používají převážně dvojkovou soustavu (vyjádřenou signály „ano", „ne"), jež vyžaduje jen dvě číslice 0 a 1.

S rozvojem kybernetiky vyvstala otázka, do jaké míry se může elektronický stroj vyrovnat lidskému mozku a zda jej může překonat. Ačkoliv stroj počítá desetkrát, stokrát i tisíckrát rychleji a přesněji než člověk (během několika hodin řeší úlohy, na které by mnohačlenná skupina matematiků potřebovala několik měsíců), můžeme s úplnou jistotou říci, že ani ten nejpřesnější, nejzázračnější stroj se nevyrovná lidskému mozku, neboť počet prvků (neuronů) umožňujících člověku spojování informací je okolo deseti miliard, zatímco počet obdobných elektronických prvků – neuronů – stroje (toho nejdokonalejšího) nepřevyšuje několik set tisíc.

■ Řízení (psí křivka)

Vzorem a zatím nedostiženým ideálem elektronického mozku (elektronického počítacího stroje) je lidský mozek, ve kterém probíhají všechny pochody související s rozhodováním. Tyto pochody jsou adaptivní procesy řízení. Heslo „v situaci, ve které jsi, jednej co možná nejlépe" nám dovoluje poradit si v různých neočekávaných situacích. Tomuto heslu lze dát formu matematického algoritmu nebo je přeměnit na soubor pravidel, potřebných k přesnému formulování procesu řízení.

Během biologického vývoje vzniklo řídicí ústrojí nejen u člověka, ale i u zvířat; jejich řídicí orgán se nazývá instinkt. Vyšší zvířata mají to, co nazýváme inteligencí. Inteligenci je možno definovat jako schopnost řešení úloh na základě zkušenosti (adaptivní, přizpůsobivé řízení).

Od roku 1945, kdy byl v Americe sestrojen první elektronický počítací stroj, pokřtěný jménem ENIAC (zkratka názvu Electronic Numerical Integrator and Computer), neustává ani na okamžik usilovná práce na jeho zdokonalování a počet podobných strojů sloužících člověku roste každý rok.

Mezi státy vyrábějící elektronické matematické stroje patří i Polsko. Rozmanitost problémů, které předkládá současná civilizace, donutila vědce i inženýry, aby se zabývali teorií řízení a aby vypracovali různé systémy řízení. Vypracování těchto systémů by bylo nemožné bez současného zdokonalení počítacích strojů.

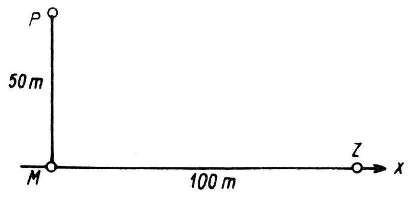
Existují stroje, jež řídí procesy tak, že vybírají z řízeného systému potřebné hodnoty parametrů procesu, analyzují je a vydávají doporučení, kterých využívá operátor – člověk. Existují i takové stroje, které svoje rozhodnutí vysílají bezprostředně do řídicího zařízení, aby mohlo automaticky provést potřebné opravy.

V článku „Control Theory" uveřejněném v září 1964 v časopise „Scientific American" píše Richard Bellman:

„Počítací stroj je nezbytný, jestliže je třeba v krátkém čase se mnohokrát rozhodovat, například při startu kosmické rakety. V tom případě se jedná o nutnost mnohonásobného rozhodování, které nastupuje po řadě v závislosti na informacích získaných a dodávaných do řídicího zařízení tak, jak probíhá proces. Počítací stroj na palubě rakety nebo na zemi je nezbytný, aby bylo možno provést velmi rychle řadu rozhodnutí. Říkáme, že takový stroj pracuje v „reálném" čase, protože drží krok s vývojem problému, který řeší."

Matematik, jenž řídí nějaký proces vyžadující řadu rozhodnutí v závislosti na informacích, které dostává v průběhu daného procesu, musí provést výběr z jistého počtu proměnných, které popisují stav procesu v následující etapě. Tento úkol lze převést na řešení soustavy několika rovnic. Řešení těchto rovnic však často představuje velké obtíže.

Příkladem nutnosti velkého počtu rozhodnutí v průběhu procesu je následující problém.



Obr. 55

Pes je v bodě P (viz obr. 55) ve vzdálenosti 50 m od lovce, který je v bodě M. Pes uviděl zajíce v bodě Z, vzdáleném 100 m od bodu M. Začal ho pronásledovat a zajíc utíkal vpravo po přímce MZ. Po celou dobu pes vidí zajíce a řídí směr svého běhu přímo na něj. Po jaké dráze běží pes, jestliže zajíc utíká rychlostí 5 m/s a pes rychlostí 10 m/s?

Tento problém je možno řešit početně. Dostaneme dost složitou rovnici, jejíž řešení je čtenáři nedostupné a málo přitažlivé.*) Jak se chová pes,

*) Rovnice psí křivky je

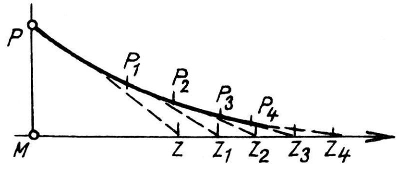
$$y = -\frac{a^{v/w}}{2\left(1 - \frac{v}{w}\right)}(a - x)^{1 - v/w} + \frac{(a - x)^{1 + v/w}}{2a^{v/w}\left(1 + \frac{v}{w}\right)} + \frac{a^{v/w}}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)},$$

kde a je počáteční vzdálenost bodu Z od počátku (bodu M), w je rychlost psa a v rychlost zajíce.

který přece nic neví o rovnicích, a přesto bez váhání řeší tento úkol?

Objasníme čtenáři tuto záležitost graficky.

V bodě Z je zajíc, v bodě P pes. Pes běží přímo na zajíce po přímce PZ (obr. 56).



Obr. 56

Za první sekundu uběhne zajíc vzdálenost ZZ_1 a pes vzdálenost PP_1. Za druhou sekundu uběhne zajíc vzdálenost Z_1Z_2 a pes, běžící přímo k němu, vzdálenost P_1P_2. Ve třetí sekundě uběhne zajíc vzdálenost Z_2Z_3 a pes P_2P_3 atd.: zajíc Z_3Z_4, pes P_3P_4 ... . Z obrázku je vidět, že v prvním přiblížení představuje dráha pronásledování lomenou čáru $P_1P_2P_3P_4$... . Avšak rozhodnutí psa týkající se směru pronásledování se mění v časových intervalech kratších než jedna sekunda. Může to být 0,1 nebo 0,01 nebo 0,001 nebo ještě menší zlomky sekundy, neboť průběh pronásledování je spojitý. Kdybychom na obrázku mohli znázornit dráhu pronásledování vypočítávanou každou desetinu sekundy, byla by to lomená čára složená z desetinásobně většího počtu desetinásobně kratších úseček; pro jednu setinu sekundy bychom dostali ještě lepší aproximaci dráhy pronásledování, která je hladkou křivkou.

Matematici ji nazvali *„psí křivkou“*. Se složitějšími případy této úlohy se můžeme setkat při výpočtu nejvhodnější dráhy kosmické rakety: úloha pak spočívá v určení míst, na něž je třeba zamířit raketu, aby se dostala na plánovanou oběžnou dráhu. Do stejné kategorie patří úloha přesného nalezení místa, v němž se nachází dříve vyslaná umělá družice.

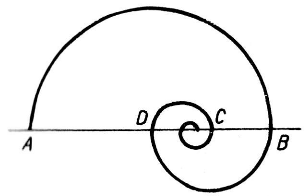
■ Zábavné úlohy

Omyly při odhadu velikosti a tvaru

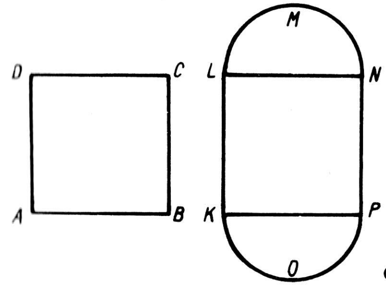
A. Zahradník má dva pomocníky. Jednomu z nich nařídil odnést na poštu vzdálenou od zahrady 3 km desetikilogramový balík, druhému odnosit do stodoly koše s jablky. Každý koš váží 10 kg. Koše stojí pod jabloněmi, které rostou v přímce ve vzdálenosti 10 m jedna od druhé. Jabloní je 25 a stodola je od první jabloně vzdálená 10 m.

Který úkol bys volil? Proč?

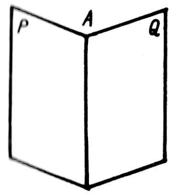
B. Utvořme spirálovou křivku tak, jak je ukázáno na obr. 57: Narýsujeme půlkružnici o průměru $AB = 2r$, k této půlkružnici přidáme půlkružnici o průměru DB dvakrát menším než AB; dále přidáme půlkružnici o průměru DC rovném polovině DB atd. Jaká je délka této spirály s nekonečným počtem závitů? Je nekonečně velká? Vypočítej délku spirály.



Obr. 57



Obr. 58



Obr. 59

C. Na obr. 58 vidíme čtverec $ABCD$ a obrazec $KLMNPO$. Odhadni od oka, zda střední část obrazce $KLMNPO$ (tj. $KLNP$) je obdélník či čtverec a jaký je jeho poměr ke čtverci $ABCD$.

D. Na obr. 59 je přeložený list papíru. Je hrana AB vysunutá dopředu nebo dozadu?

E. Pod vánočním stromkem leží čokoládová koule o poloměru 5 cm. Koule je dutá; čokoládová skořápka má tloušťku 1 cm. Vedle koule leží sáček s 400 čokoládovými kuličkami. Kuličky jsou plné a mají průměr 1 cm. Jsou vyrobeny ze stejné čokolády jako velká koule.

Co si vybereš: velkou kouli nebo sáček s 400 kuličkami?

Tucet drobností

1. Jak dostaneme 50, odebereme-li 10 od 40?

2. Jak se dá dokázat, že polovina třinácti je osm?

3. Která přirozená čísla se zvětší, odstraníme-li číslice stojící na levé straně?

4. Který zlomek, jehož čitatel je menší než jmenovatel, se nezmění, jestliže jeho zápis otočíme o 180° (vzhůru nohama)?

5. Jak zmenšíme číslo 989 o 303, aniž cokoli odečteme?

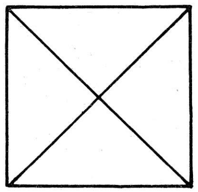
6. Mladá hospodyně málo osolila polévku, takže ji bylo třeba přisolit. Vzala si z toho poučení a příště nasypala do stejného množství polévky třikrát tolik, co poprvé. Ale přesto bylo znovu třeba polévku přisolit, i když tentokrát k tomu bylo zapotřebí třikrát méně soli než předešle.

Jakou část potřebného množství soli nasypala hospodyně do polévky poprvé?

7. V rodině je pět bratří. Každý z nich má jednu sestru. Kolik je v rodině celkem dětí?

8. Kovový prut je 1 m dlouhý. Jeho přeříznutí napolovic stojí 50 haléřů. Kolik stojí rozřezání prutu na deset stejných částí?

9. Francouzský matematik François Lucas (1847–1891), specialista v oboru teorie čísel, se snažil jednoduše vysvětlit tvar číslic a uváděl k tomu pověst o prstenu krále Šalamouna. Ve drahém kamenu, který zdobil prsten, byl prý vyryt tajemný ornament, čtverec s oběma úhlopříčkami (obr. 60), z něhož je podle Lucase možné odvodit znaky všech desíti číslic. Pokuste se o to.



Obr. 60

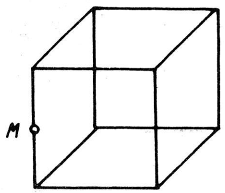
10. Jednou se zeptali pana Kovalského, koho představuje podobizna visící na stěně. Kovalský odpověděl:

„Otec portrétované osoby je jediným synem toho, kdo právě hovoří."

Či to byl portrét?

11. Včelín se skládá ze 16 úlů postavených ve čtyřech řadách po čtyřech. Vzdálenost sousedních úlů je 5 m. Může včelař obejít všechny úly tak, aby se trasa jeho obchůzky skládala ze šesti úseček? Jak je dlouhá nejkratší možná obchůzka? Narýsujte ji!

12. Ve výloze cukrárny je vystavena velká čokoládová krychle. Na jedné její hraně sedí moucha (obr. 61).



Obr. 61

Může moucha obejít všechny hrany čokoládové krychle tak, aby po každé hraně (nebo její části) šla jen jednou?

Řešení úloh

Omyly při odhadu velikosti a tvaru

A. Pomocník, který odnesl balík na poštu, šel 3 000 m se zatížením 10 kg, nazpátek šel 3 000 m bez zatížení.

Druhý pomocník, který odnášel ovoce do stodoly, ušel s nákladem 10 kg celkem

$$\frac{(10 + 250)\ \text{m} \cdot 25}{2} = 130\ \text{m} \cdot 25 =$$
$$= 3\,250\ \text{m}.^{*)}$$

Kromě toho ušel stejnou vzdálenost bez nákladu.

Pomocník, který odnesl balík na poštu, vykonal menší práci. Tento výsledek se dal těžko předpovědět „selským rozumem".

B. Délky půlkružnic tvoří geometrickou posloupnost, jejíž první člen je $a = \pi r$ a kvocient $q = 0{,}5$. Tato posloupnost je konvergentní.**) Podle vzorce pro součet členů geometrické posloupnosti $S = \dfrac{a}{1 - q}$ máme

$$S = \pi r + \frac{1}{2}\pi r + \frac{1}{4}\pi r + \ldots =$$
$$= \frac{\pi r}{1 - 0{,}5} = 2\pi r.$$

Délka spirály je $2\pi r$ čili tatáž jako délka kružnice o poloměru r.

C. Je to čtverec. Čtverce $KLNP$ a $ABCD$ jsou shodné.

D. Dopředu, ale právě tak můžeme odpovědět „dozadu".

E. Objem čokoládové hmoty duté koule je

$$\frac{4}{3}\pi(5^3 - 4^3)\ \text{cm}^3 \doteq$$
$$\doteq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14(125 - 64)\ \text{cm}^3 \doteq$$
$$\doteq 255{,}4\ \text{cm}^3,$$

zatímco objem čokoládové hmoty 400 kuliček je

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 400\ \text{cm}^3 \doteq 210\ \text{cm}^3.$$

Objem čokoládové hmoty duté koule je tedy o 45,4 cm^3 větší než objem čokoládové hmoty 400 čokoládových kuliček. Bylo by možno z ní vyrobit ještě asi 86 čokoládových kuliček o průměru 1 cm.

Tucet drobností

1. XL = 40; ubereme-li (odstraníme-li) X od XL, dostaneme L čili 50.

2. Jestliže římskými číslicemi napsané číslo XIII přetneme vodorovnou úsečkou na poloviny, dostaneme VIII čili 8.

3. Čísla napsaná římskými číslicemi, např. IV, IX, CD, … ; po odstranění číslic stojících vlevo dostaneme V, X, D, … .

4. Zlomek $\frac{6}{9}$; po obrácení dostaneme zase $\frac{6}{9}$.

5. Je třeba otočit 989 o 180°; dostaneme 686: 989 − 686 = 303.

*) Výpočet je podle vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti, jehož podstatou je sloučení prvního a posledního členu, druhého a předposledního atd. Jaký je součet každé takové dvojice? (Pozn. překl.)

**) Srov. kap. 11. (Pozn. překl.)

6. Do polévky bylo třeba nasypat a gramů soli. Hospodyně nasypala x gramů, chybělo $a - x$ gramů soli.

Při druhém vaření nasypala hospodyně $3x$ gramů soli, chybělo $a - 3x$ gramů. Odtud

$$a - 3x = \frac{1}{3}(a - x),$$

$$3(a - 3x) = a - x,$$

$$3a - 9x = a - x$$

čili $x = \frac{1}{4}a$.

Když hospodyně vařila poprvé polévku, nasypala do ní jen čtvrtinu potřebného množství soli.

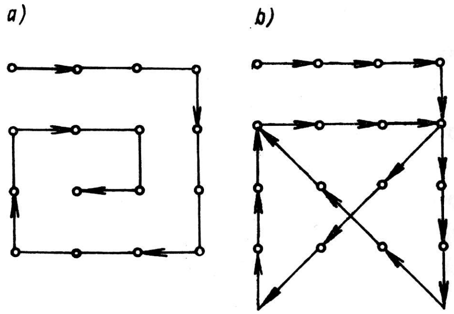
7. Šest.

8. Kčs 4,50.

9. Znaky číslic, které dostaneme ze čtverce s úhlopříčkami, jsou na obr. 62.

Obr. 62

10. Byla to podobizna vnuka pana Kovalského.



Obr. 63

11. Ne. 75 m (obr. 63a).*)

12. Ne. Moucha by šla po trase, která má osm uzlů a není tzv. unikursální čarou, tzn. nelze ji nakreslit jedním tahem, aniž zvedneme tužku z papíru. Vyzkoušejte to.**)

*) Je to možné, jestliže včelař smí vyjít ze včelína. Jedno řešení je na obr. 63b. (Pozn. překl.)

**) Příčina je v tom, že v každém vrcholu krychle se sbíhají tři hrany. Projde-li moucha některým vrcholem jen jednou, jedna hrana ještě zbude. Přijde-li do téhož vrcholu po druhé, nemá již kudy odejít. Srov. dále kap. 23. (Pozn. překl.)

Magickým čtvercem nazýváme čtverec složený z n^2 jednotkových čtverečků, v nichž je napsáno n^2 přirozených čísel tak, že součty čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na každé úhlopříčce se rovnají témuž číslu. Toto číslo označujeme S_n a nazýváme je konstantou magického čtverce, zatímco n je jeho řád. Jestliže se rovnají jen součty čísel v řádcích a sloupcích, ale součty na úhlopříčkách jsou jiné, budeme takový čtverec nazývat *polomagickým*. Má-li čtverec ještě nějaké jiné vlastnosti kromě těch, které jsme uvedli, nazýváme jej *supermagickým*.

Před tisíci lety bylo sestavování magických čtverců buď jen zábavou, nebo magickým problémem. Již po staletí se magickými čtverci zabývají matematici, zaujati podivuhodnou krásou a vnitřní harmonií rozložení čísel. Magické čtverce roztřídili, pojmenovali je a objevili způsoby jejich sestavení i jejich vlastnosti. Magickým čtvercům jsou věnovány celé knihy, my se však omezíme jen na několik elementárních informací:

a) Magické čtverce dělíme na sudé (4, 16, 36, 64, ... jednotkových čtverečků) a liché (9,25, 49, ... čtverečků).

b) Konstantu S_n magického čtverce vypočteme podle vzorce

$$S_n = \frac{1}{2}n(n^2 + 1),$$

kde n je počet jednotkových čtverečků v každém řádku (i sloupci). Například ve čtverci třetího řádu

2	9	4
7	5	3
6	1	8

je konstanta S_n rovna

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3(3^2 + 1) = 15.*)$$

c) Liché magické čtverce mají středové číslo. V uvedeném čtverci třetího řádu je středovým číslem 5; vypočteme je podle vzorce $\frac{1}{n} S_n$; ve čtverci pátého řádu

11	9	2	18	25
5	23	16	7	14
22	20	13	4	6
8	1	24	15	17
19	12	10	21	3

je středové číslo $\frac{1}{5} S_5 = 13$ ($S_5 = 65$).

*) Uvedený vzorec platí pro magické čtverce sestavené z přirozených čísel 1, 2, 3, ..., n^2. Tyto magické čtverce byly zkoumány nejčastěji. (Pozn. překl.)

A nyní uveďme několik příkladů zajímavějších magických čtverců. První z nich mimo jiné ukazuje, že pro liché $n > 3$ může být středové číslo i jiné, než udává vzorec v odstavci c).

Supermagický čtverec pátého řádu

2	9	11	18	25	2	9	11	18	25
16	23	5	7	14	16	23	5	7	14
10	12	19	21	3	10	12	19	21	3
24	1	8	15	17	24	1	8	15	17
13	20	22	4	6	13	20	22	4	6

dává stejné součty i na „posunutých úhlopříčkách“, dopíšeme-li k němu ještě jednou tentýž čtverec.

Polomagický čtverec osmého řádu

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

se součtem $S_8 = 260$ v řádcích i sloupcích (součty na úhlopříčkách jsou jiné) je sestrojen tahy šachové figury – jezdce. Jednotlivé tahy jezdce jsou označeny po řadě přirozenými čísly (počínaje jedničkou).

A konečně čtverec

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

je sestaven z „oboustranných“ čísel, tj. takových, která dávají smysl, i když je obrátíme „vzhůru nohama“ (otočíme o 180°). Otočíme-li tento čtverec o 180°, vznikne opět magický čtverec.

■ Zábavné úlohy

Křížovka 3 × 3

(Ořech k rozlousknutí)

Čtvercová křížovka má devět polí. Napište do každého pole jedno písmeno (některá písmena se mohou opakovat) tak, aby vzniklo co nejvíce slov o třech písmenech (v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách; oběma směry). Podaří-li se čtenáři rozmístit písmena tak, aby vzniklo 16 slov, bude to důkaz neobyčejného ostrovtipu*). Jako ukázku uvádíme jedno neúplné (a nikoli nejlepší) řešení:

K	A	T
O	L	A
S	E	M

*) Překladateli není známo, je-li v češtině možno toho dosáhnout. (Pozn. překl.)

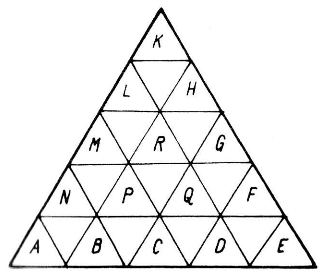
Při tomto rozmístění písmen lze přečíst 10 slov: kat, tak, Ola, sem, kos, sok, ale, Ela, tam, mat. V úhlopříčkách nedávají tata písmena slova v žádném směru.

Najdi trojciferné číslo

Najdi takové trojciferné číslo, které po přesunutí první číslice napravo za číslici označující jednotky dá opět trojciferné číslo rovné třem čtvrtinám čísla původního. Je-li takových čísel více než jedno, nalezni je všechna.

Magický trojúhelník

Na obr. 64 je obrazec ve tvaru trojúhelníku, obsahující patnáct malých trojúhelníčků s vepsanými písmeny $A, B, C, \ldots$.



Obr. 64

Napište místo písmen čísla tak, aby platily následující rovnosti:

1. $A + B + C + D + E =$
$= E + F + G + H + K =$
$= K + L + M + N + A;$

2. $N + P + Q + F =$
$= D + Q + R + L =$
$= H + R + P + B;$

3. $A + E + K = C + G + M =$
$= P + Q + R;$

4. $D + F = H + L = N + B.$

Poznámka: Každé písmeno musí být nahrazeno jiným číslem od 1 do 15.

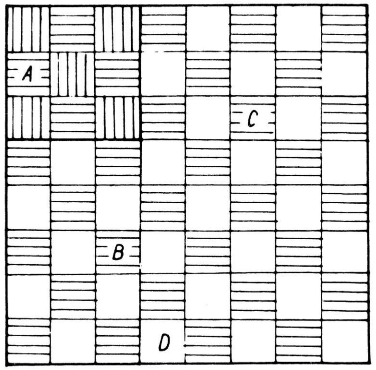
Předložená úloha má 300 (!) různých řešení.

Šachovnice

Šachovnice vystupuje v nesmírném množství různých úloh. Především je známa legenda o „skromném“ přání jejího vynálezce, který požádal šacha, aby mu na první pole šachovnice položil zrnko pšenice a na každé další pole dvakrát tolik co na předešlé. Ukázalo se, že tento zdánlivě skromný požadavek vede ke kosmickým, nepředstavitelně velkým číslům, neboť na poslední, 64. pole je třeba položit 2^{63} zrn, tj. asi $918 \cdot 10^{16}$ zrn, a součet zrn ležících na všech polích je skoro dvojnásobný. Oblíbeny jsou také četné úlohy související s tahy jednotlivých šachových figur. Uveďme zde několik snadných úloh založených na tazích dámy a jezdce.

Jak známo, dáma je nejsilnější šachovou figurou. Může táhnout libovolným směrem napravo, nalevo, nahoru, dolů i po úhlopříčkách polí do libovolné vzdálenosti.

1. Postav dámu na pole A (obr. 65) a čtyřmi tahy projdi všechna svisle vyšrafovaná pole.



Obr. 65

2. Postav dámu na pole označené písmenem D (výchozí místo bílé dámy) a nalezni její nejdelší „výpravu“ o pěti tazích. Dáma přitom nesmí jít dvakrát přes totéž pole a nesmí ani protnout svoji dráhu, která prochází středy polí.

3. Postav dámu na pole B. V patnácti tazích projdi každé pole šachovnice právě jednou. Cestu ukonči na poli C.

4. Postav dámu na rohové pole. Čtrnácti tahy projdi všechna pole šachovnice a vrať se na výchozí pole. Některá pole smíš projít více než jednou. Řešení této úlohy bylo poprvé předvedeno r. 1867 americkým šachistou S. Loydem. Poznamenejme, že úlohu nelze řešit menším počtem tahů než 14.

5. Jezdcem projdi všechna pole šachovnice skládající se z 5 × 5 polí; na žádném poli nesmíš být dvakrát.

Vyhýbavá odpověď

Dělník kopal jámu. Na otázku kolemjdoucího chodce, jak hluboká bude jáma, odpověděl:

„Moje výška je 1 m 80 cm. Až vykopu jámu, bude moje hlava tak hluboko pod povrchem země, o kolik je teď, když mám vykopanou polovinu jámy, nad povrchem.“

Jak hluboká bude jáma?

Druhá odmocnina z „republiky“

Nechť každému z devíti písmen slova *„republika“* je přiřazena jedna číslice (s výjimkou nuly). Tím ze slova *„republika“* dostaneme devíticiferné číslo. Nyní předpokládejme, že *eeuui* je druhá odmocnina čísla zašifrovaného

ve slově *„republika“*, tj.

$$\sqrt{republika} = eeuui.$$

Nalezněte obě čísla.

Kirkmannova úloha (z r. 1847)

Učitelka v mateřské škole měla na starosti 15 dětí. Každý den z nich utvořila pět skupin po třech dětech.

Sestavte týdenní rozvrh skupin dětí tak, aby každé dítě bylo každý den ve skupině se dvěma jinými dětmi. (Uvažujte sedmidenní týden.)

Hra s čísly

Máme šachovnici složenou z devíti polí, na níž jsou napsána tři trojciferná čísla:

1	7	6
2	8	3
4	5	9

Tato čísla mají tyto vlastnosti:
1. není mezi nimi nula;
2. číslo 459 je součtem ostatních dvou: 459 = 176 + 283;
3. každá číslice od 1 do 9 je napsána na šachovnici právě jednou.

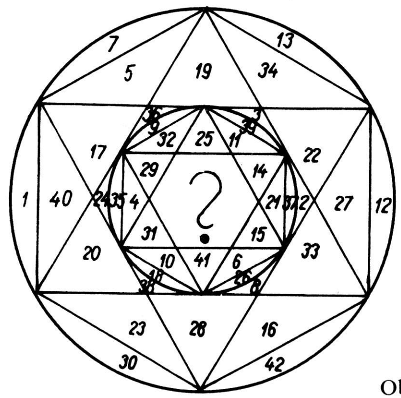
Kolik trojic trojciferných čísel s podobnými vlastnostmi lze sestavit z devíti číslic?

Labyrint o 42 místnostech (orientační schopnost)

Jsi schopen se rychle orientovat? Ověř si na hodinkách, za jak dlouho dokážeš projít všech 42 místností, z nichž se skládá labyrint na obr. 66, v pořadí přirozených čísel

(1, 2, 3, … , 41, 42).

Změř si čas poprvé, po pěti minutách odpočinku měření opakuj a po dalších pěti minutách to zkus potřetí.



Obr. 66

Kolik času jsi na projití labyrintu potřeboval poprvé, podruhé a potřetí? Projdi labyrint opačným směrem. Jak dlouho ti to trvalo?

■ Řešení úloh

Najdi trojciferné číslo

Nechť hledané číslo má tvar

$100a + 10b + c$.

Potom

$$\frac{3}{4}(100a + 10b + c) = 100b + 10c + a$$

čili

$$300a + 30b + 3c = 400b + 40c + 4a;$$

odtud

$$296a = 370b + 37c, \; 8a = 10b + c$$

a konečně
$c = 8a - 10b$.

Písmena a, b, c znamenají číslice; každá z nich je menší nebo rovna 9.

Zde je tabulka některých hodnot písmen:

a	b	c
2	1	6
3	2	4
4	3	2

Hledaná čísla jsou 216, 324, 432, 540, 648, 756, 864, 972. Přesunutím první číslice dostaneme 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729.*)

Magický trojúhelník

Zde jsou čtyři řešení:

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	P	Q	R
1	15	3	13	1	8	6	11	5	10	2	9	4	7	12	14
2	12	2	11	1	14	6	9	4	7	3	13	5	8	10	15
3	10	2	11	3	14	4	7	6	9	1	15	5	8	12	13
4	13	1	15	3	8	4	11	5	12	2	7	6	9	10	14

*) Z rovnice $c = 8a - 10b$ vidíme, že c je sudé; označíme-li $d = \frac{1}{2}c$, je d celé číslo nejvýše rovné 4. Rovnici $d = 4a - 5b$ pro jednotlivé hodnoty $d = 0, 1, 2, 3, 4$ lze celkem snadno řešit zkusmo (a a b jsou jednociferná čísla a zřejmě $a > b$). Tím dostaneme všechna řešení. Číslo 108 nevyhovuje, neboť po přemístění číslice 1 napravo dá 081, což není trojciferné číslo. (Pozn. překl.)

A ještě jiná čtyři řešení:

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	P	Q	R
1	14	6	13	2	5	8	7	9	11	1	10	4	3	15	12
2	11	7	14	5	3	8	4	12	13	1	9	6	2	15	10
3	13	12	3	2	10	11	9	6	4	7	15	1	5	14	8
4	15	10	3	5	7	11	8	12	2	4	13	6	1	14	9

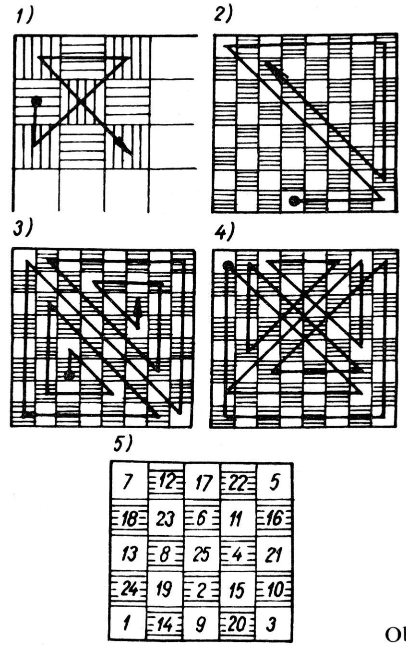
Čtenář nechť se pokusí najít další řešení.

Vyhýbavá odpověď

Nechť x cm označuje konečnou hloubku jámy, y cm výšku dělníkovy hlavy nad zemí v okamžiku, kdy má jámu vykopanou do poloviny. Platí tedy $\frac{1}{2}x + y = 180$, $x - y = 180$. Sečteme-li levé a pravé strany těchto dvou rovnic, dostaneme $\frac{3}{2}x = 360$, $x = \frac{1}{3} \cdot 360 \cdot 2$.
Jáma bude hluboká 2 m 40 cm.

Šachovnice

Tahy dámy i jezdce jsou ukázány na obr. 67. Z posledního obrázku vidíme, že jezdec skáče z černého pole na bílé a z bílého pole na černé. Všechna pole s lichými čísly jsou bílá a všechna pole se sudými čísly jsou černá.



Obr. 67

Druhá odmocnina z „republiky“

Ze zadání úlohy plyne $(eeuui)^2 = republika$. Písmeno e nemůže znamenat číslici 1, neboť pěticiferné číslo začínající dvojčíslím 11 umocněno na druhou dá číslo začínající číslicí 1, což by znamenalo $e = r$; to však úloha nepřipouští. Na druhé straně nemůže e být číslice větší než 2, neboť její čtverec by byl deseticiferné číslo. Odtud plyne $e = 2$.

Poslední číslice druhé odmocniny, označená písmenem i, nemůže být 1, 5 ani 6, neboť její čtverec by končil opět na 1, 5 nebo 6; to by však znamenalo $i = a$. Tak docházíme k závěru, že existuje 30 kombinací číslic, kterými lze rozšifrovat číslo *eeuui*: 22 334, 22 337, … .

Vezmeme-li v úvahu, že $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, může číslo *republika* začínat číslicí 4 nebo 5; protože však druhá číslice je $e = 2$, začíná buď dvojčíslím 42, nebo 52. První případ však nemůže nastat (připomeňme si znovu, že $22^2 = 484$). Hledané číslo začíná tedy dvojčíslím 52. Protože $22\,779^2$ začíná dvojčíslím 51, musí být $u > 7$, tedy $u = 8$ nebo $u = 9$.

Protože ciferný součet čísla *republika* je 45, je toto číslo dělitelné devíti, a tedy jeho odmocnina je dělitelná třemi. Pro $u = 8$ přichází tedy v úvahu $i = 4$ nebo $i = 7$, pro $u = 9$ jen $i = 8$ (možnost $i = 1, 5, 6$ jsme vyloučili na začátku řešení). Vyzkoušíme-li tyto tři možnosti, vyjde nám, že jediným řešením úlohy je $eeuui = 22\,887$, odkud $republika = 523\,814\,769$. Toto číslo obsahuje všechny číslice kromě nuly.

Kirkmannova úloha

Řešení je v následující tabulce. Děti jsou očíslovány čísly od 1 do 15.*)

	I	II	III	IV	V
P	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15
Ú	1, 4, 7	2, 5, 8	3, 12, 15	10, 14, 9	13, 11, 6
S	1, 10, 13	2, 11, 14	3, 6, 9	4, 8, 15	7, 5, 12
Č	1, 9, 15	2, 4, 10	3, 5, 11	7, 14, 6	13, 8, 12
P	1, 6, 12	2, 7, 13	3, 8, 14	4, 9, 11	10, 5, 15
S	1, 8, 11	6, 2, 15	3, 7, 10	4, 12, 14	13, 5, 9
N	1, 5, 14	2, 9, 12	3, 4, 13	7, 11, 15	10, 8, 6

*) Jiná řešení dostaneme permutováním čísel od 1 do 15. To znamená: Napíšeme čísla od 1 do 15 v nějakém libovolně zvoleném pořadí, např. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 a pak místo čísla 1 v naší tabulce píšeme první číslo v pořadí, tj. 3, místo čísla 2 druhé, tj. 5 atd. Tímto způsobem dostaneme všechna řešení. (Pozn. překl.)

Hra s čísly

Návod k řešení:

1. Všech tříciferných čísel, která lze vyjádřit pomocí devíti číslic $(1, 2, \ldots, 9)$ je 729:

a) od 111 do 199 je 81 čísel neobsahujících nulu;

b) od 211 do 299 je také 81 čísel neobsahujících nulu;

c) od 311 do 399 je opět 81 čísel neobsahujících nulu; atd.;

d) od 911 do 999 je 81 čísel neobsahujících nulu.
Dohromady $81 . 9 = 729$.

2. Tříciferných čísel, v nichž každá číslice vystupuje jen jednou, je 504 ($A_9^3 = 9 . 8 . 7 = 504$; srov. kap. 27).

3. Ukážeme, že číslo, které je součtem ostatních dvou (v případě uvedeném v zadání úlohy je to 459), musí být dělitelné devíti. Označíme-li číslice od 1 do 9 písmeny ze začátku abecedy, má podle zadání úlohy platit

$$100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 100g + 10h + j$$

(každé písmeno znamená jednu z číslic od 1 do 9). Jednoduchou úpravou odtud dostaneme, že

$$a + b + c + d + e + f - (g + h + j)$$

je násobkem devíti. Současně však

$$a + b + c + d + e + f + g + h + j = 45,$$

neboť je to součet čísel od 1 do 9. Odtud snadno odvodíme, že $g + h + j$ je násobek devíti. Číslo, které je součtem ostatních dvou (tj. $100g + 10h + j$), má tedy ciferný součet rovný 9, 18 či 27. Snadno zjistíme, že ciferným součtům 9 a 27 neodpovídá žádné řešení. [Ciferný součet 27 má jen trojciferné číslo 999, nevyhovující úloze; z čísel s ciferným součtem 9 by přicházela v úvahu čísla 126, 135, 234 a všechna, která z nich dostaneme změnou pořadí číslic (např. 216, 612 atd.). Žádné z nich však nelze rozložit na součet dvou čísel podle podmínek úlohy, jak se čtenář snadno přesvědčí.]

Z čísel s ciferným součtem 18 přichází v úvahu celkem 42 čísel. Jsou to čísla 981, 972, 963, 954, 873, 864, 765 a opět všechna, která z nich vzniknou změnou pořadí číslic.

4. Z těchto 42 čísel jen 31 může být součtem dvou jiných trojciferných čísel podle podmínek úlohy. Jsou to: 459, 468, 486, 495, 549, 567, 576, 594, 639, 648, 657, 675, 693, 729, 738, 783, 792, 819, 837, 846, 864, 873, 891, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981.

Čtenář sám najde rozklad těchto čísel na součet dvou čísel podle podmínek úlohy.

Číselnou řadou nazýváme algebraický součet nekonečného počtu sčítanců

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$
$$\dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots,$$

který obvykle zapisujeme symbolicky ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Sčítance $u_1, u_2, u_3, \dots$ se nazývají *členy řady*. Čísla

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

nazýváme *částečnými součty řady*.

Jestliže posloupnost částečných součtů se blíží k jistému číslu S, *limitě* posloupnosti, což znamená, že se s rostoucím počtem sčítanců k číslu S přibližuje libovolně blízko, říkáme, že řada *konverguje* (je konvergentní), a píšeme

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) \to S$$

nebo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Číslo S pak nazýváme *součtem* řady.

Například řada

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

konverguje a její součet je $S = \frac{3}{2}$,

neboť

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Každý nekonečný desetinný zlomek je součtem nějaké řady: např. zlomek 0,222... můžeme napsat ve tvaru řady

$$\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1\,000} + \dots .$$

Tato řada má součet, a to číslo $\frac{2}{9}$, které můžeme vypočítat jako součet členů nekonečné klesající geometrické posloupnosti podle vzorce $S = \frac{a}{1-q}$, kde a znamená první člen řady a q kvocient řady, rovný poměru dvou následujících členů řady. Je tedy

$$S = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1\,000} + \dots =$$
$$= \frac{2/10}{1 - 1/10} = \frac{2}{9}.$$

Jestliže posloupnost částečných součtů $S_1, S_2, S_3, \dots$ se nepřibližuje žádné limitě, říkáme, že řada je *divergentní* (nebo že nemá součet); např. řady

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

jsou divergentní. Ve vyšší matematice se dokazuje, že řada

$$\text{(I)}\quad \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

konverguje a její součet je roven číslu π.

Existují také řady, pomocí kterých lze vypočítat přibližně hodnoty trigonometrických funkcí sinus a kosinus:

$$\text{(II)}\quad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots,$$

$$\text{(III)}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

[x v těchto vzorcích znamená velikost úhlu vyjádřenou v radiánech*)].

Poslední tři příklady řad umožňují vypočítat přibližně hodnoty trigonometrických funkcí sinus a kosinus a čísla π. Vypočteme je, jestliže ve vzorcích (I), (II), (III) vezmeme jen jistý konečný počet členů (např. tři); čím více členů bereme v úvahu, tím přesnější bude vypočtená hodnota funkce či čísla π.

Systematická teorie řad patří do matematické analýzy, ale nejjednodušší řady zkoumáme již v aritmetice (periodické zlomky) a v algebře (geometrická posloupnost).

Dodržujeme-li jisté podmínky, mů-

---

*) Velikost úhlu můžeme měřit buď na úhlové stupně – jednotkou je pak 1/90 pravého úhlu, tj. 1° – nebo v obloukové míře. Jednotkou obloukové míry je radián (rad), což je takový úhel, kterému na kružnici se středem ve vrcholu úhlu odpovídá oblouk délky poloměru r. Protože délka oblouku příslušejícího k plnému úhlu, tj. 360°, je $2\pi r$, je 1 rad $= \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'44''$. Vzorec převádějící stupňovou míru úhlu α na obloukovou míru a je $a = \frac{2\pi\alpha}{360°}$. Pro $\alpha = 30°, 45°, 60°, 90°, 180°$ dostáváme po řadě $a = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$ rad.

žeme při provádění aritmetických operací s řadami používat týchž prostých pravidel, která platí pro počítání s mnohočleny. To značně zjednodušuje řešení mnoha úloh z fyziky i techniky, neboť dané i hledané veličiny můžeme vyšetřovat jako součty řad, jejichž členy jsou funkce co nejjednoduššího tvaru (např. mocninné nebo trigonometrické řady).

Již v egyptských papyrech se setkáváme se součty konečných aritmetických a geometrických řad. Řekové postoupili v použití řad dále, neboť zkoumali nekonečnou geometrickou řadu. Archimédes použil součet nekonečné geometrické řady k výpočtu obsahu obrazce omezeného částí paraboly.

Ve středověku se znalosti vlastností nekonečných řad nijak neprohloubily. Zásadní pokrok učinil v 17. století Isaac Newton, který v letech 1665–1666 nalezl a r. 1711 uveřejnil rozvoje funkcí $\ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ v řady. Také G. W. Leibniz, skotský matematik J. Gregory (1638–1675) a jiní se v téže době zabývali nekonečnými řadami.

V 18. století nalezl anglický matematik B. Taylor (1685–1731) obecný vzorec rozvoje funkce v mocninnou řadu.

V 19. století byly vypracovány základy teorie řad.

■ Zábavné úlohy

Unavená housenka

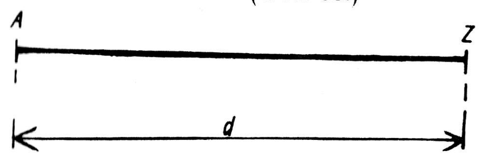
Po kmeni stromu leze přímo vzhůru k nejbližší větvi housenka. Housenka je zřejmě velmi unavená nebo má poškozené pohybové ústrojí, protože leze jen s obtížemi: za první minutu urazí 5 dm, za druhou $2\frac{1}{2}$ dm, za třetí $1\frac{1}{4}$ dm, za čtvrtou $\frac{5}{8}$ dm atd. Vzdálenost k první větvi, na které je listí – potrava housenky – je o zlomek centimetru větší než jeden metr.

Za kolik minut doleze housenka k této větvi? Podaří se jí to před západem slunce (20 h), jestliže začala svoje „cestování“ za svítání (4 h)?

Achilles a želva

Záhada Achillova závodu s želvou zajímá nejen filozofy. Předložil ji (asi r. 450 př. n. l.) Zenon z Elea, řeckého města na jihu Itálie. Řada Zenonových tvrzení má paradoxní charakter. Z jeho dialektických úvah je nejznámější důkaz tvrzení, že rychlonohý Achilles nedohoní želvu a že střela, vypuštěná z napjatého luku, je v každém okamžiku nehybná, a tedy je neustále v klidu.

Rozeberme záhadu Achilla a želvy z matematického hlediska. Nechť na počátku našich úvah je Achilles v bodě A a želva v bodě Z. (Obr. 68.)



Obr. 68

Vzdálenost mezi těmito body nechť je d. Předpokládejme, že želva se pohybuje rychlostí v a Achilles rychlostí w. Pak

d/w je čas, za který Achilles proběhne dráhu AZ;

vd/w je vzdálenost, kterou za tentýž čas urazí želva;

$(vd/w)/w = vd/w^2$ je čas, za který Achilles uběhne vzdálenost, kterou předtím urazila želva;

$v \,.\, vd/w^2 = v^2d/w^2$ je vzdálenost, kterou urazí želva za čas vypočtený v předešlém bodě atd.

Tak počítáme postupně časy, které potřebuje Achilles, a odpovídající vzdálenosti, které za tyto časy urazí želva.

Předpokládejme, že T je součet časů, po které trvá Achillův závod se želvou. Potom platí:

$$T = \frac{d}{w} + \frac{vd}{w^2} + \frac{v^2d}{w^3} + \ldots =$$

$$= \frac{d}{w}\left(1 + \frac{v}{w} + \frac{v^2}{w^2} + \ldots\right) =$$

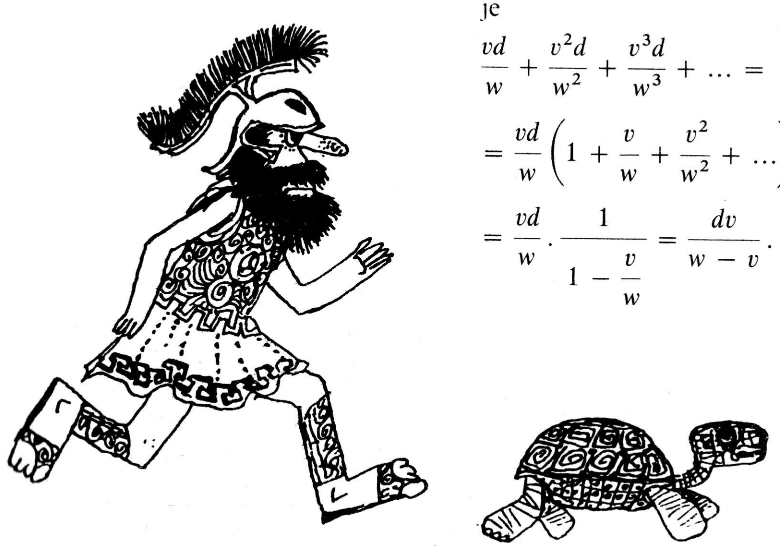
$$= \frac{d}{w}\,\frac{1}{1 - \frac{v}{w}} = \frac{d}{w - v}\ ^{*)}.$$

Součet vzdáleností, které urazila želva, je

$$\frac{vd}{w} + \frac{v^2d}{w^2} + \frac{v^3d}{w^3} + \ldots =$$

$$= \frac{vd}{w}\left(1 + \frac{v}{w} + \frac{v^2}{w^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{vd}{w} \,.\, \frac{1}{1 - \frac{v}{w}} = \frac{dv}{w - v}.$$



*) Tento vzorec (i další) můžeme pro řešení naší úlohy použít jen tehdy, je-li $w > v$; ale to je v našem případě samozřejmý předpoklad. (Pozn. překl.)

Protože počáteční vzdálenost AZ je d, je celková dráha, kterou uběhne Achilles, rovna

$$d + \frac{dv}{w - v} = \frac{dw}{w - v}.$$

Po uběhnutí této vzdálenosti dohoní Achilles želvu. Je-li např. počáteční vzdálenost $d = AZ = 100$ m, Achillova rychlost 10 m/s, rychlost želvy 0,1 cm/s, dostaneme

$$\frac{dw}{w - v} = \frac{10\,000 \,.\, 1\,000}{1\,000 - 0{,}1}\,\text{cm} =$$

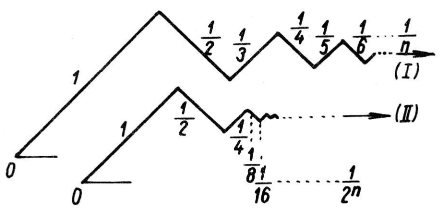
$$= 10\,001\ \text{cm} = 100{,}01\ \text{m},$$

takže Achilles dohoní želvu asi za 10 sekund po začátku závodu (přesněji 10,001 sekundy).

O lomených čarách

Na obr. 69 jsou narýsovány dvě lomené čáry. Čára I nemá konečnou délku, neboť je možno dokázat, že

$$a + b + c + d + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$



Obr. 69

roste nade všechny meze (do nekonečna). Délka čáry II, skládající se z úseček, tj.

$$k + m + n + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

je součet členů nekonečné geometrické posloupnosti a rovná se $1/(1 - 0{,}5) = 2$.

Řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

nazýváme *harmonickou řadou.* Tento název vznikl proto, že každý člen řady (počínaje druhým) je harmonickým průměrem (srov. str. 90) sousedních členů, tj. $b = 2ac/(a + c)$ (a, b, c jsou tři po sobě jdoucí členy). Například

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$\left(a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{3};\ c = \frac{1}{4}\right).$$

Řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

nazýváme *geometrickou řadou.* Je konvergentní a její součet je 2. Každý člen této řady (počínaje druhým) je geometrickým průměrem sousedních členů, tj. $b = \sqrt{ac}$. Například

$$\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}.$$

Z jedoucího vlaku

Cestující v rychlíku, jehož rychlost je 60 km/h, pozoruje z okna svého vozu míjející osobní vlak (rychlost osobního vlaku je 40 km/h).

Jak dlouhý je osobní vlak, jestliže se oba vlaky minuly za šest sekund?

Druhá odmocnina

Jaká je druhá odmocnina z čísla 12 345 678 987 654 321? Odpověz bez počítání! Správnou odpověď objevíš, umocníš-li na druhou čísla 11, 111, 1 111, ...

Železniční dozorce

Železniční dozorce, provádějící inspekci kolejí předměstské dráhy, změřil, že vlaky přijíždějící zezadu jej míjejí každých 15 minut, zatímco vlaky přijíždějící zepředu se objeví každých 5 minut.

Zjisti, v jakých intervalech vyjíždějí vlaky z konečných stanic a jaký je poměr rychlosti vlaků a dozorce. (Předpokládáme, že jak vlaky, tak i dozorce se pohybují stejnoměrně.)

Cestování pana Smithe

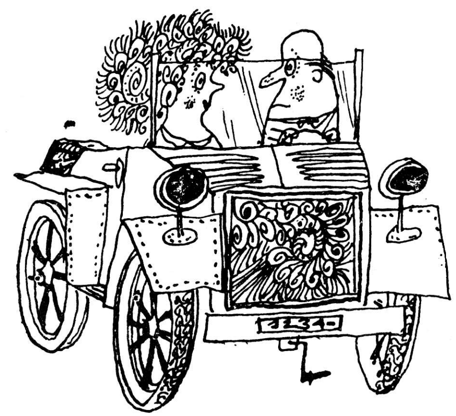
V deset hodin ráno vyjel pan Smith se ženou ze svého domu v Connecticut, aby navštívil rodiče své ženy v Pensylvánii. Cestou plánovali manželé jedinou zastávku na oběd v restauraci ve Westchesteru.

Perspektiva návštěvy u tchýně a nepříjemného rozhovoru s tchánem o finančních otázkách způsobila, že nálada pana Smithe byla na bodu mrazu. Ve voze panovalo ticho. Konečně, okolo jedenácté hodiny, se paní Smithová odvážila zeptat:

„Jak daleko jsme už od domova?"

Pan Smith pohlédl na tachometr a odpověděl:

„Polovinu vzdálenosti, která nám ještě zbývá do restaurace ve Westchesteru."



Do restaurace dorazili manželé Smithovi v pravé poledne. Beze spěchu poobědvali a pak jeli dále. Bylo pět hodin odpoledne, když byli vzdáleni 200 km od místa, kde paní Smithová položila první otázku. Nyní se opět obrátila na svého muže s otázkou:

„Pojedeme ještě daleko?"

„Polovinu vzdálenosti, kterou jsme ujeli od restaurace ve Westchesteru až sem."

K rodičům paní Smithové přijeli manželé v sedm večer. A ačkoli pan Smith řídil vůz s ohledem na provozní podmínky různou rychlostí, je možno zcela přesně vypočítat vzdálenost od jejich domu v Connecticut k domu rodičů v Pensylvánii. Vypočtěte ji!

■ Řešení úloh

Unavená housenka

Housenka se posune o

$$\left(5 + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \ldots + \frac{5}{2^n}\right) \text{dm}.$$

Tento součet se s rostoucím n blíží hodnotě $\dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10$ (součet nekonečné geometrické řady), ale pro žádné přirozené n této hodnoty nedosáhne.

Odpověď: Housenka nikdy nedoleze k první větvi.

Z jedoucího vlaku

Rychlík ujede za jednu sekundu dráhu rovnou $\dfrac{60}{60 \,.\, 60}$ km $= \dfrac{1}{60}$ km.

Osobní vlak ujede za jednu sekundu

$$\frac{40}{60 \,.\, 60} \text{ km} = \frac{1}{90} \text{ km}.$$

Za 6 sekund ujede rychlík

$$\frac{1 \,.\, 6}{60} \text{ km} = \frac{1}{10} \text{ km}$$

a osobní vlak

$$\frac{1 \,.\, 6}{90} \text{ km} = \frac{1}{15} \text{ km}.$$

Cestujícímu v rychlíku se osobní vlak zdá být kratší než ve skutečnosti o vzdálenost, kterou on sám ujede během míjení obou vlaků. Je tedy třeba sečíst vzdálenosti, které za dobu míjení ujedou oba vlaky:

$$\frac{1}{10} \text{ km} + \frac{1}{15} \text{ km} = \frac{5}{30} \text{ km} = \frac{1}{6} \text{ km} \doteq 166{,}7 \text{ m}.$$

Délka osobního vlaku je tedy 166,7 metru.*)

*) Můžeme uvažovat také takto: Vzhledem k pozorovateli, jímž je cestující rychlíku, má osobní vlak rychlost (60 + 40) km/h čili 100 km/h. Při této rychlosti ujede za sekundu $\frac{1}{36}$ km, za 6 sekund $\frac{1}{6}$ km, tj. 166,7 m. (Pozn. překl.)

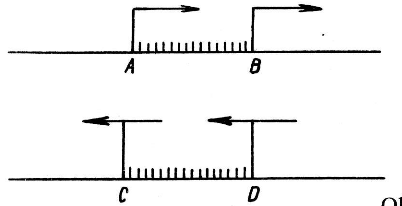
Druhá odmocnina

$$11^2 = 121,$$
$$111^2 = 12\,321,$$
$$1\,111^2 = 1\,234\,321,$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321 \text{ atd.}$$

$$\sqrt{12\,345\,678\,987\,654\,321} = 111\,111\,111\,.$$

Železniční dozorce

Nechť vlaky vyjíždějí z konečných stanic každých x minut. Poměr rychlosti vlaku a rychlosti dozorce vypočteme nejprve pro vlaky přijíždějící zezadu.



Obr. 70

První setkání nastalo v bodě A (obr. 70). Po 15 minutách míjí dozorce druhý vlak. V tom okamžiku se dozorce nachází v bodě B. Vzdálenost AB ujde dozorce za 15 minut, zatímco vlak ji ujede za $(15 - x)$ minut*). Rychlost dozorce a rychlost vlaku jsou tedy v poměru $(15 - x)/15$.

Nyní vypočteme poměr rychlostí pro vlaky přijíždějící zpředu. Nechť první setkání nastane v bodě C, další v bodě D. Úsek tratě CD projede vlak za $(x - 5)$ minut.**) Poměr rychlostí je tedy $(x - 5)/5$.

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$\frac{15 - x}{15} = \frac{x - 5}{5},$$

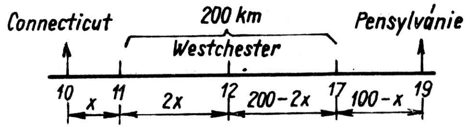
odkud $x = 7\frac{1}{2}$ minuty.

Vlaky vyjíždějí z konečných stanic každých $7\frac{1}{2}$ minuty; jejich rychlost je dvakrát větší než rychlost dozorce.

Cestování pana Smithe

Vzdálenost Connecticut – Pensylvánie je rovna (viz obr. 71)

$$(x + 200 + 100 - x) \text{ km} = 300 \text{ km}.$$

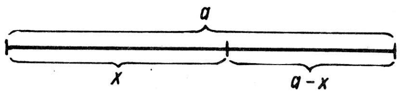


Obr. 71

*) Druhý vlak je v bodě A o x minut později než první, tedy také o x minut později než dozorce; zbývá mu proto do setkání s dozorcem (tj. do bodu B) skutečně $(15 - x)$ minut. (Pozn. překl.)

**) Úvaha je stejná jako při míjení vlaků zezadu; protože však dozorce jde vlaku naproti, je doba, za kterou potká další vlak, jistě kratší než intervaly dvou následujících vlaků. Proto je $5 - x$ záporné. (Pozn. překl.)

Vedle všeobecně známého čísla π existuje méně známé číslo φ (fí), které vyjadřuje neméně důležitý poměr a objevuje se náhle tam, kde je nejméně očekáváme. Vysvětlíme si na příkladu, co znamená číslo φ.



Obr. 72

Úsečku délky a (obr. 72) máme rozdělit na dvě různé části tak, aby poměr délky celé úsečky a k délce její větší části x byl roven poměru délky x k délce menší části $(a - x)$, tj. aby platilo

(I) $a : x = x : (a - x)$

čili

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Délku úsečky x najdeme, rozřešíme-li rovnici (I). Dostaneme

$$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1).$$

Odtud nalezneme $(a - x)$ a také poměr

$$a : x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5});$$

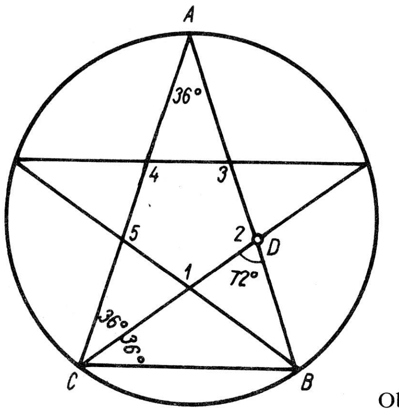
stejný je poměr $x : (a - x)$. Tento poměr označil americký matematik Mark Barr písmenem φ; popsané dělení úsečky nazýváme *zlatým řezem*. Vidíme tedy, že φ vyjadřuje poměr délek dvou částí úsečky, rozdělené zlatým řezem.

Zlatý poměr φ je roven

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1{,}618\,033\,98\ldots .$$

Je zajímavé, že převrácená hodnota čísla φ je rovna $\frac{1}{\varphi} = 0{,}618\,033\,98\ldots$. Vidíme, že číslo $\frac{1}{\varphi}$ dostaneme z φ, odečteme-li od něho 1 (číslice za desetinnou čárkou jsou tytéž). Je to jediné kladné číslo, které má tuto vlastnost.

Staří Řekové znali zlatý řez a vědomě ho užívali v umění a v architektuře, např. architekti Itkinos a Kalikrates při stavbě chrámu Parthenón na Akropoli. Také nejslavnější starověký sochař Feidias používal ve svých



Obr. 73

dílech zlatý řez. Můžeme se domýšlet, že pythagorovci si vybrali za znak svého tajného bratrstva pěticípou hvězdu právě proto, že v tomto obrazci (obr. 73) je každá úsečka vzhledem k sousední menší rozdělena v poměru zlatého řezu:

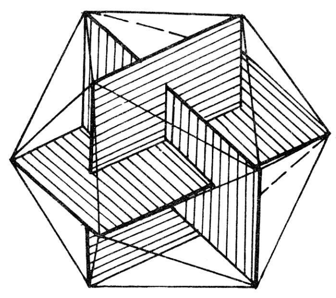
(II) $AB/AD = AD/(AB - AD)$.

Úhel CDB je 72°; $\triangle\ ACB$ je podobný $\triangle\ CDB$, takže $AB/CB = CB/DB$. Avšak $CB = CD = AD$ a $DB = AB - AD$. Po dosazení dostaneme vztah (II).

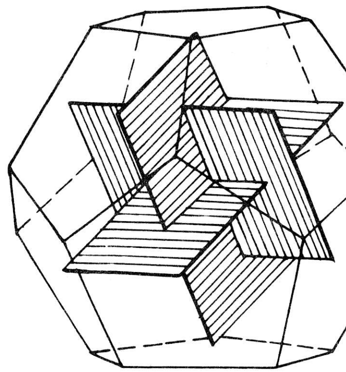
Názvů „zlatý řez" a „zlatý poměr" se začalo užívat až v 19. století. Ve středověku a v období renesance byli matematici tak okouzleni tímto poměrem, že byl nazýván „božským poměrem" (divina proportio). Jeden z renesančních matematiků, Luca Paciolli, vydal r. 1509 pojednání nazvané „O božském poměru" s ilustracemi Leonarda da Vinci. Toto pojednání bylo vydáno v krásné úpravě znovu r. 1956. Obsahuje nesmírně zajímavý soubor příkladů výskytu poměru φ v rovinných obrazcích i tělesech (např. v desetiúhelníku vepsaném do kružnice).

Zlatý trojúhelník a zlatý obdélník

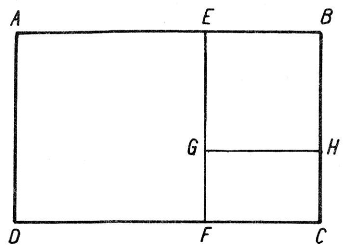
Nazvěme obdélník, jehož strany jsou v poměru φ, *zlatým obdélníkem*. Jestliže tři navzájem kolmé zlaté obdélníky vepíšeme do dvacetistěnu (obr. 74), budou jejich vrcholy ležet ve dvanácti vrcholech dvacetistěnu. Vepíšeme-li tři zlaté obdélníky (navzájem kolmé) do pravidelného dvanáctistěnu, budou jejich vrcholy ležet ve středech stran dvanáctistěnu (obr. 75).



Obr. 74

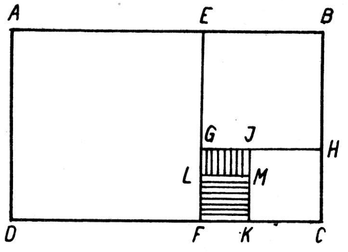


Obr. 75



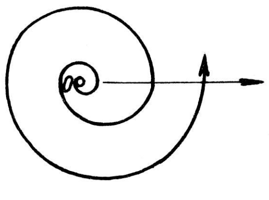
Obr. 76

Zlaté obdélníky mají řadu zajímavých vlastností. Oddělíme-li od zlatého obdélníku $ABCD$ čtverec $AEFD$, bude zbývající část opět zlatým obdélníkem (obr. 76). Jestliže od obdélníku $EBCF$ oddělíme čtverec $EBHG$, bude zbytek $GHCF$ opět zlatým obdélníkem atd. Vidíme, že poloha následujících zlatých obdélníků se mění, obdélníky se jakoby „otáčejí“ (obr. 77).

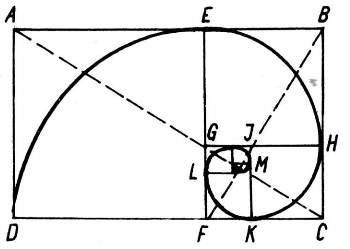


Zlaté obdélníky: ABCD, EBCF, GHCF, GJKF, GJML

Obr. 77



Obr. 78



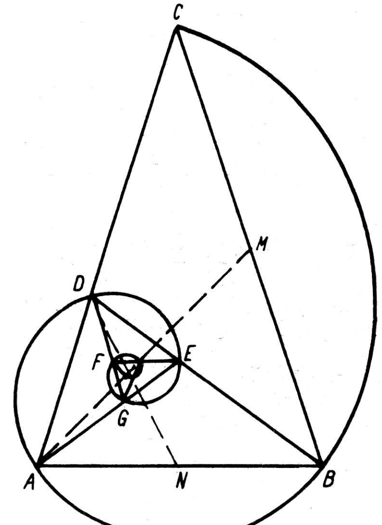
Zlaté obdélníky: ABCD, EBCF, GHCF, GJKF, GJML

Obr. 79

Archimédova spirála (obr. 78) je známá rovinná křivka s nekonečným počtem závitů. Méně známá je spirála nazývaná *logaritmická* [logaritmická proto, že její rovnice je $r = ae^{k\varphi}$ *)]. Její graf (obr. 79) souvisí s otáčejícím se zlatým obdélníkem a také s otáčejícím se zlatým trojúhelníkem (tj. rovnoramenným trojúhelníkem, v němž poměr délek základny a ramene je roven φ; v takovém trojúhelníku jsou úhly při základně rovny 72° a úhel při vrcholu 36°).

Z obrázku je vidět, že body, vyznačující postupně zlaté řezy, leží na spirále. Povšimněme si, že zlaté obdélníky se otáčejí nejen ve směru zmenšování, ale i ve směru růstu: z obdélníku $GJML$ můžeme dostat obdélník $ABCD$ a z toho opět další, stále větší zlaté obdélníky. Pólem logaritmické spirály je průsečík úhlopříček AC a BF. Narýsujeme-li spirálu na základě otáčejících se zlatých trojúhelníků, leží na spirále všechny vrcholy těchto trojúhelníků a její pól leží v průsečíku těžnic AM a DN stran BC a AB (obr. 80). Opět si všimněme, že závity spirály se mohou neomezeně zvětšovat. Ať ji zvětšíme na rozměry naší galaxie nebo zmenšíme na mikroskopické rozměry, tvar logaritmické spirály se nezmění. Tvar logaritmické spirály nacházíme u mnoha výtvorů přírody. Například ulita, v níž žije hlemýžď, se zvětšuje s růstem jeho těla, ale zachovává svůj tvar, takže vnitřek hlemýžďova obydlí vypadá stále stejně.

*) Rovnice Archimédovy spirály je $r = c\varphi$. Písmena r, φ zde označují tzv. polární souřadnice, tj. r je vzdálenost bodu od počátku (průsečíku os souřadnic) a φ je úhel, který svírá průvodič bodu s kladnou poloosou x; a, k, c jsou konstanty. (Pozn. překl.)



Obr. 80

■ Fibonacciova posloupnost

Poměr φ je v těsném vztahu k Fibonacciově posloupnosti:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … .

Fibonacciova posloupnost je posloupnost aditivní. To znamená, že každý její člen, až na první dva, vznikne sečtením předešlých dvou členů:

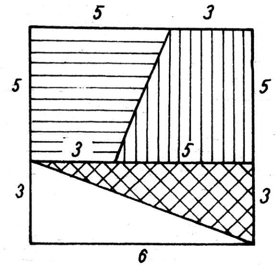
$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Poměr dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciovy posloupnosti se s rostoucím n stále více blíží hodnotě φ, např.

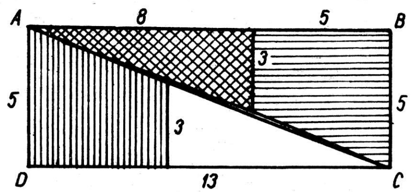
$$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots\,; \quad \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots\,;$$

$$\frac{89}{55} = 1{,}618\ldots\,.$$

Fibonacciova posloupnost se často objevuje v přírodních jevech, např. v biologii a botanice; stejně často se tedy objevuje číslo φ.



Obr. 81

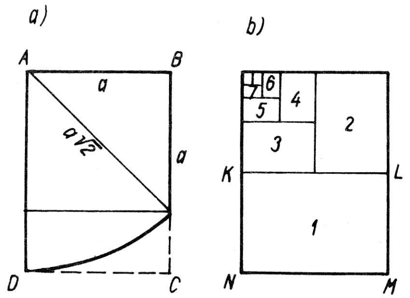


Obr. 82

Jako zajímavý příklad, v němž se odrážejí vlastnosti Fibonacciovy posloupnosti, si ukažme známý g e o m e t r i c k ý p a r a d o x. Na obr. 81 vidíme čtverec, jehož obsah je roven 64 plošným jednotkám. Čtverec rozdělíme na čtyři části a složíme z nich obdélník, jehož plocha je rovna 65 jednotkám plochy (obr. 82). Čtenář nechť si povšimne, že úsečky omezující části čtverce i obdélníku mají délky 3, 5, 8, 13. Jsou to členy Fibonacciovy posloupnosti.

Tento paradox vysvětlíme tím, že čára AC není úsečka a že podél AC vznikne obrazec, jehož obsah je právě jedna plošná jednotka.*) Paradox souvisí se skutečností, že aditivní posloupnost lze utvořit z libovolně zvolených prvních dvou čísel, např. 2, 7, 9, 16, 25, … . Přesto se bude poměr dvou po sobě jdoucích dostatečně „vzdálených" členů blížit číslu φ. V našem případě posloupnost 3, 5, 8, 13 nedává možnost rozdělit čtverec na části, z nichž by bylo možno složit obdélník o poměru stran φ.

polovina $KLMN$ je opět normalizovaným obdélníkem s tímtéž poměrem stran $(KL : KN = \sqrt{2})$. Obdélníky 1, 2, 3, … jsou všechny normalizované a navzájem podobné. Takových obdélníků je možno vytvořit z daného obdélníku nekonečně mnoho.

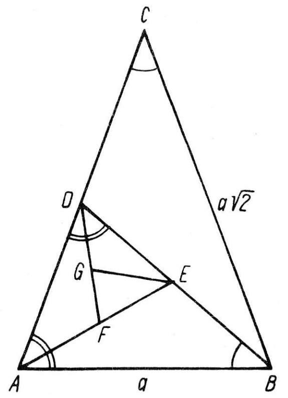


Obr. 83

■ Normalizovaný obdélník a normalizovaný trojúhelník

Vedle zlatého obdélníku můžeme zkoumat obdélník, který nazveme skromně *normalizovaným.* Tvar normalizovaného obdélníku má nám dobře známý obyčejný arch papíru. Vznikl ze čtverce. Menší stranou normalizovaného obdélníku je strana zvoleného čtverce, větší stranou je jeho úhlopříčka (obr. 83a).

Poměr délek stran normalizovaného obdélníku $AD : AB = \sqrt{2} \approx 1{,}414\,2$. Zajímavou a užitečnou vlastností normalizovaného obdélníku je, že jeho



Obr. 84

Trojúhelník ABC, jehož základna je $AB = a$ a ramena $AC = CB = a\sqrt{2}$, nazveme *normalizovaným trojúhelníkem* (obr. 84). V takovém trojúhelníku je

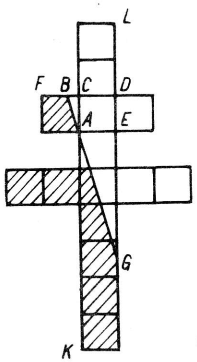
*) Kdyby AC byla úsečka, platilo by pro úhel $\alpha = \sphericalangle\, BAC$ současně $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$ a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13}$, což není možné. (Pozn. překl.)

poměr $AC : AB$ roven $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,2$. Opíšeme-li z bodu B oblouk poloměrem a, dostaneme bod D. Trojúhelník DAB je podobný trojúhelníku ABC a je rovněž normalivaný $(AB : AD = \sqrt{2})$. Podobně dostaneme trojúhelník $ADE\,(AE = AD)$, v němž $AE : DE = \sqrt{2}$. Totéž se dá říci o trojúhelnících DEF a EFG. Všechny tyto trojúhelníky jsou normalizované; poměr délky ramene a základny v těchto trojúhelnících je $\sqrt{2}$. Takových trojúhelníků můžeme sestrojit libovolný počet.

■ Zábavné úlohy

Lotrinský kříž

Na obr. 85 je nakreslen lotrinský kříž, skládající se z patnácti jednotkových čtverců. Bodem A je vedena přímka BG, dělící kříž na dvě části o stejném obsahu (jedna z těchto částí je vyšrafována). V jakém poměru dělí bod B úsečku FC?



Obr. 85

Karavana na sněhu

Kůň táhne „vlak" ze sáněk. Dva kamarádi, Petr a Pavel, jdou vedle a hádají se, jak je řada sáněk dlouhá.

Pavel říká:

„Místo hádání bychom měli řadu sáněk změřit."

„Ale jak? Nemáme čím," namítá Petr.

„Já znám jeden způsob," odpovídá mu Pavel.

A prošel rovnoměrným krokem podél řady sáněk nejprve ve směru jejich jízdy a pak obráceně.

Jak dlouhá byla řada sáněk, jestliže Pavel napočítal 120 kroků od posledních sáněk k prvním a 40 kroků, když šel opačným směrem? Každý Pavlův krok měřil 1 metr.

Kolikrát ...

Kolikrát je třeba sečíst číslo a (např. 3), abychom dostali a^n (např. 3^6)? (n je přirozené číslo.)

Krychlový metr

Krychlový metr rozřežeme na krychlové milimetry a výsledné krychličky sestavíme za sebou, takže dostaneme dlouhý „prut" o průřezu 1 mm^2. Jak dlouho pojedeme podél tohoto prutu na mopédu rychlostí 50 km/h?

U samovaru

Na stole stojí samovar, v němž bez ustání vře voda. Pět lidí vypije obsah samovaru za půldruhé hodiny, osm lidí za hodinu. Za kolik hodin vyprázdní samovar jedenáct lidí? (Předpokládáme, že porce čaje vypité jedním hostem za určitý čas – např. jednu hodinu – jsou ve všech případech stejné a že voda se vyváří stejnoměrně.)

Hlavolam

Honzík má mladší sestru Evu a staršího bratra Vaška. Když bylo Honzíkovi šest let, bylo Evě a Vaškovi dohromady dvakrát tolik. Když se Vaškův věk zdvojnásobil, zemřel dětem otec.

Vypočti, kolik let bylo tehdy Evě a kolik otci, byl-li v roce své smrti tak stár jako všechny tři děti dohromady.

Poznámka: Věk otce i všech tří dětí je vyjádřen přirozenými čísly.*)

Kolik stránek?

K očíslování stránek jednosvazkového Příručního slovníku naučného bylo třeba 3 389 číslic. Kolik stran má tato důležitá kniha?

*) Řešení úlohy není jednoznačné. (Pozn. překl.)

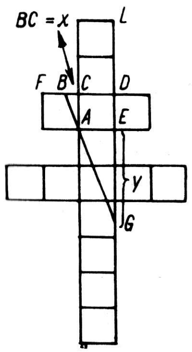
Ptáci a ryba

V zátoce jezera jsou zatlučeny do dna dva kůly. Jeden kůl vyčnívá dva metry nad hladinu, druhý jeden metr. Vzdálenost mezi kůly je 10 m. Na každém kůlu sedí pták číhající na rybu. Pták sedící na vyšším kůlu létá dvojnásobnou rychlostí než pták sedící na nižším kůlu. Na čáře spojující oba kůly se mrskla ryba. Oba ptáci ji spatřili v témže okamžiku a současně se po ní vrhli. V kterém místě se ryba objevila, jestliže oba ptáci ji chytili současně?

■ Řešení úloh

Lotrinský kříž

1. Protože přímka BG dělí kříž na dvě části o stejném obsahu $7\frac{1}{2}$ jednotkového čtverce, je obsah trojúhelníku BDG roven $2\frac{1}{2}$ čtverce, odkud (viz obr. 86)



Obr. 86

$$\frac{BD \cdot DG}{2} = \frac{(x+1)(y+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(xy + x + y + 1) = \frac{5}{2},$$

$$xy + x + y + 1 = 5.$$

2. Součet obsahů trojúhelníků ABC a AEG je $1\frac{1}{2}$ čtverce, takže

$$\frac{x \cdot 1}{2} + \frac{y \cdot 1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$x + y = 3.$$

3. Řešíme-li soustavu rovnic

$$xy + x + y + 1 = 5,$$

$$x + y = 3,$$

dostaneme

$$x = BC = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$1 - x = FB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).*)$$

Odtud plyne, že bod B dělí úsečku FC zlatým řezem.

Karavana na sněhu

Nechť délka „vláčku" je x metrů. Zatímco Pavel udělá jeden krok, posunou se sáňky o y metrů. Odtud dostáváme soustavu rovnic

$$x + 120y = 120,$$
$$x = 40 + 40y.$$

*) Pro x dostaneme dvě hodnoty, avšak druhá nevyhovuje podmínkám úlohy, neboť je větší než 1. (Pozn. překl.)

Řešením této soustavy dostaneme

$x = 60.$

Kolikrát ....

a^{n-1} krát. Je-li $a = 3$, dostaneme $3^6 = 729$, jestliže sečteme číslo 3 celkem $3^5 = 243$krát.

Krychlový metr

$1\ m^3 = 1\ 000^3\ mm^3;$

$$1\ 000^3\ mm = \frac{1\ 000^3}{1\ 000\ .\ 1\ 000}\ km = 1\ 000\ km;$$

$1\ 000\ km : 50\ km/h = 20\ h.$

U samovaru

Osm lidí vypije vodu ze samovaru za jednu hodinu, takže obsah samovaru je 8 porcí plus množství vody, která se vyvaří za jednu hodinu. Avšak podle první podmínky je obsah samovaru 5 . 1,5 porcí plus voda, která se vyvaří za půldruhé hodiny, čili 7,5 porcí vody plus voda vyvařená za 1,5 hodiny.

Odtud plyne, že za půl hodiny se vyvaří půl porce vody, za hodinu tedy jedna porce. V samovaru bylo původně 9 porcí vody (8 + 1). 11 osob vypije za půl hodiny 11 . 0,5 = 5,5 porce vody, přičemž se vyvaří 0,5 porce, což dohromady je 5,5 + 0,5 = 6 porcí vody. Zbylé tři porce (9 − 6) vypije 11 osob za čtvrt hodiny.

11 osob vypije obsah samovaru za tři čtvrtě hodiny (45 minut).

Hlavolam

Hlavolam má pět různých řešení. Když je Honzíkovi 6 let, může být Evě, která je mladší, 5, 4, 3, 2 nebo 1 rok. Vaškovi pak musí být po řadě 7, 8, 9, 10, 11 let. V roce otcovy smrti bylo Evě 12 let; Vaškovi 22, 20, 18, 16 nebo 14, Honzíkovi 17, 16, 15, 14 nebo 13 a otci 51, 48, 45, 42 nebo 39 let (viz tabulku).

Věk	V roce otcovy smrti				
Honzík 6	13	14	15	16	17
Eva 5, 4, 3, 2, 1	12	12	12	12	12
Vašek 7, 8, 9, 10, 11	14	16	18	20	22
Otec	39	42	45	48	51

Kolik stránek?

Na očíslování stránek od 1 do 9 potřebujeme 1 . 9 číslic; na očíslování stránek od 10 do 99 potřebujeme 2 . 90 = 180 číslic; na stránky od 100 do 999 potřebujeme 3 . 900 = 2 700 číslic.

Na očíslování stránek od 1 do 999 potřebujeme tedy celkem 2 889 číslic. Zbytek 3 389 − 2 889, tj. 500 číslic, použijeme na očíslování dalších stránek, počínajíce od 1 000. Těchto stran očíslujeme 500 : 4 = 125.

Příruční slovník naučný má 1 124 stránek.

Ptáci a ryba

Pták číhající na vyšším kůlu létá rychlostí

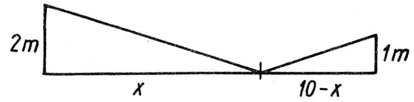
$$\frac{1}{t}\sqrt{2^2 + x^2},$$

pták na nižším kůlu dosáhne rychlosti

$$\frac{1}{t}\sqrt{1 + (10 - x)^2}$$

(viz obr. 87), takže

$$\frac{\sqrt{2^2 + x^2}}{t} = \frac{2\sqrt{1 + (10 - x)^2}}{t}.$$



Obr. 87

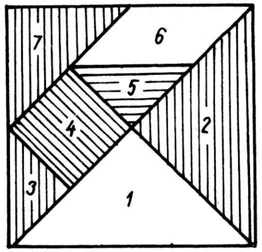
Odtud $3x^2 - 80x + 400 = 0$ čili

$$x = 6\frac{2}{3}\ \text{metru.*)}$$

*) Druhé řešení kvadratické rovnice nevyhovuje, neboť je větší než 10 (vzdálenost kůlů). (Pozn. překl.)

Kapitola 13 „Origami“

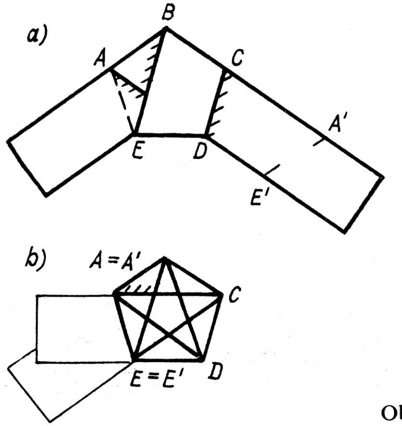
Vedle čínské hry, k níž potřebujeme čtverec rozdělený na sedm částí (obr. 88), existuje stejně zajímavá prastará japonská hra „Origami“. K této hře – v jejím klasickém pojetí – poslouží čtvercový arch papíru, kterému důvtip a zručné ruce dokážou dát podobu ptáků, ryb, zvířat a různých předmětů. Papír je přitom dovoleno pouze překládat, ale nikoli stříhat, slepovat, spojovat, čímkoli doplňovat nebo na něj kreslit. Naproti tomu současná hra origami dovoluje užívat nejen čtverce, ale i obdélníku a zdobit výsledek kresbou.



Obr. 88

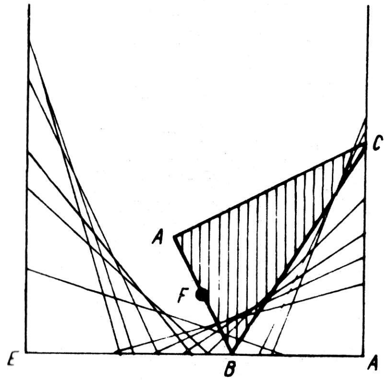
Počátky hry origami se ztrácejí v mlhavé historii japonské kultury. V Japonsku považovali origami původně za užité umění. Nějaký čas byla hra rozšířena mezi dívkami z vyšších společenských vrstev. Nyní se jí zabývají děti v japonských školách. Vlivem origami by se pravděpodobně daly vysvětlit i naše školácké hračky sestrojované z kusu papíru. Kdo z nás by si nepamatoval vlaštovky, střely, loďky atd. vyrobené z papíru, s nimiž měli tolik starostí naši učitelé. Uveďme jako zajímavost, že španělský filozof a spisovatel Miguel Unamuno (1864 až 1936) byl velkým milovníkem origami.

Japonská hra je zajímavá i z hlediska matematického. Ze čtvercového archu papíru lze poměrně snadno vyrobit pravidelné trojúhelníky, čtverce, pravidelné šestiúhelníky a osmiúhelníky, ale sestavení pětiúhelníku je už obtížné. Nejjednodušší způsob zhotovení pravidelného pětiúhelníka z pásku papíru popíšeme v následujícím odstavci.



Obr. 89

Z pásku papíru o rozměrech např. 20 cm × 2 cm uděláme uzel, který sploštíme stisknutím a nakonec přeložíme pravý konec nalevo (viz obr. 89a). Kromě jasně se rýsujícího pětiúhelníku $ABCDE$ je v získaném útvaru skryto ještě jedno překvapení. Po přeložení pravého konce pásku $CA'E'D$ nalevo se podívejte na papír proti světlu: uvidíte slabou siluetu slavné pythagorovské hvězdy (obr. 89b).



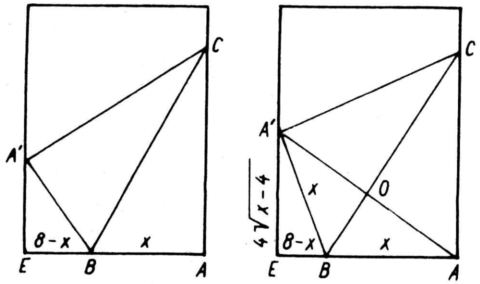
Obr. 90

Vezměte si arch papíru (nikoli nutně čtvercový), vyberte na něm blízko ke straně AE bod F (obr. 90) a přeložte jej patnáctkrát až dvacetkrát tak, aby základna archu procházela bodem F (na obr. 90 např. úsečka AB). Podíváte-li se na stopy přeložení, uvidíte parabolu, která je těmito stopami jakoby „obalována“. Vzniklá křivka je skutečně parabola, neboť všechny dotykové body jsou stejně vzdáleny od bodu F (ohniska) a základny AE (řídicí přímky).

Tečny paraboly jsme dostali překládáním základny archu papíru ve směru k ohnisku F. Například přeložení BC je tečnou paraboly.

S uvedeným pokusem souvisí úzce tato zajímavá početní úloha:

Mějme obdélníkový kousek papíru o rozměrech 8 cm × 11 cm. Tento kousek papíru máme přeložit tak, aby stopa přeložení BC (viz obr. 91) byla co nejkratší. Pravý dolní vrchol obdélníku A musí přitom ležet na jeho levé straně (v bodě A'), po níž se může posunovat nahoru či dolů. Jinými slovy, v jaké vzdálenosti $x = AB$ musí stopa přeložení BC protnout základnu AE, aby délka BC byla nejmenší?



Obr. 91

Je to čistě početní problém. Výpočty, ač nejsou složité, zabírají dost místa. Uvedeme jen postupné kroky výpočtu bez podrobného rozboru:

1. $AB = x$;
2. $EB = 8 - x$;
3. $EA'^2 = x^2 - (8 - x)^2$;
   odtud $EA' = 4\sqrt{x - 4}$;

4. $(2AO)^2 = 8^2 + EA'^2 = 16x;$
odtud $AO = 2\sqrt{x};$
$BO^2 = x^2 - AO^2 = x^2 - 4x$
čili $BO = \sqrt{x^2 - 4x};$

5. $AO^2 = BO \, . \, OC,$

tedy

$$OC = \frac{AO^2}{BO} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 4x}};$$

6. $AC^2 = OC^2 + AO^2 = \dfrac{4x^2}{x - 4}$

čili $AC = \dfrac{2x}{\sqrt{x - 4}};$

7. $BC^2 = AC^2 + x^2 = \dfrac{x^3}{x - 4}$

čili $BC = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x - 4}}.$

Tím jsme převedli úlohu na problém nalezení nejmenší hodnoty funkce

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x - 4}}.$$

S použitím diferenciálního počtu dostaneme, že funkce y nabývá minima při $x = 6$. Vypočtení bodu C je tedy, jak vidíme, dost pracné. Jeho sestrojení je však velmi snadné:

$$AB = \frac{3}{4} AE = \frac{3}{4} \, . \, 8 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Přeložení musí protnout základnu AE v bodě vzdáleném od A o $\frac{3}{4} AE$.

Snadno najdeme i všechny ostatní veličiny z bodů 3 až 7, dosadíme-li v nich za x číslo 6. Je tedy

$BE = 2;$

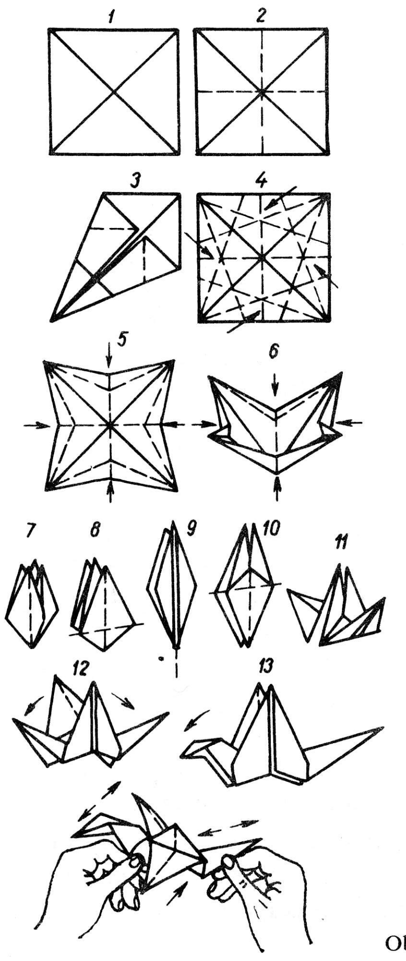
$EA' = 4\sqrt{2};$

$AO = 2\sqrt{6};$

$BO = 2\sqrt{3};$

$OC = 4\sqrt{3};$

$BC = 6\sqrt{3} \approx 10{,}38$ cm.



Obr. 92

Po tomto matematickém výletě, kterým jsme navázali na bezstarostnou hru, se můžeme vrátit k vlastnímu umění origami. Nejefektnější ze všech „skládanek" je pták, který může pohybovat křídly. K této skládance můžeme použít čtvercového papíru o straně 20 cm. Postupné překládání papíru je ukázáno na obr. 92. Nejprve přeložíme papír podél úhlopříček (*1*). Nato obrátíme papír na druhou stranu tak, aby prohloubení („údolí") se stala vyvýšeními („horami") a přeložíme jej podél středních příček (*2*). Na obrázku jsou všechny vhloubené stopy přeložení vyznačeny čárkovanými čarami, vypouklé stopy plnými čarami. Následující krok (3) je přeložení dvou sousedních stran tak, aby po přeložení splynuly. Provedeme-li taková přeložení u každého vrcholu, dostaneme osm vhloubených stop (*4*). Máme tedy dvě vystouplé stopy (plné čáry) a deset stop vhloubených (přerušované čáry). Další překládání je znázorněno na obrázcích *5* až *14*. Mezi origami je řada takových skládanek, které vyjadřují pohyb nebo které je možno uvést do pohybu: ryba otvírá tlamu, pták mává křídly, žabka skáče apod.

Překladatel díla Miguela Unamuna vypráví, že tento spisovatel nejraději zhotovoval právě taková zvířátka, když v kavárně v Salamance popíjel svoji odpolední kávu.

Tyto malé papírové zázraky přitahovaly děti, které s tváří přitisknutou na sklo pozorovaly sympatického staršího pána a jeho „papírové divy".

■ Pascalův trojúhelník a poker

Veliký francouzský filozof, moralista a matematik Blaise Pascal (1623 – 1662) byl přinucen zabývat se hazardními hrami a díky tomu se stal jedním ze zakladatelů teorie pravděpodobnosti. Trojúhelník, který byl nazván jeho jménem a kterého používáme v problémech z teorie pravděpodobnosti, má tento tvar:

1	0
1 1	I
1 2 1	II
1 3 3 1	III
1 4 6 4 1	IV
1 5 10 10 5 1	V
1 6 15 20 15 6 1	VI
1 7 21 35 35 21 7 1	VII
1 8 28 56 70 56 28 8 1	VIII
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	IX
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	X
....	XI

Čísla v řádcích jsou koeficienty binomického rozvoje. Například čísla v řádku označeném X jsou koeficienty rozvoje dvojčlenu (binomu) $(a + b)^{10}$:

$$(a + b)^{10} = 1a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + 1b^{10}.$$

Čísla v řádku IX jsou koeficienty rozvoje dvojčlenu $(a + b)^9$, v řádku VIII jsou koeficienty rozvoje dvojčlenu $(a + b)^8$ atd. až k $(a + b)^1 = 1a + 1b$, jehož koeficienty jsou v řádku I. Každé číslo Pascalova trojúhelníku je součtem dvou čísel stojících vlevo a vpravo nad ním; např. v řádku IV je 4 součtem čísel 1 + 3, 6 je součtem 3 + 3, stojících ve třetím řádku (III).

V matematické disciplíně, která se nazývá *kombinatorika*, se dokazuje, že součet čísel v každém řádku trojúhelníku je roven 2^n, kde n je pořadové číslo řádku; např. součet čísel řádku X ($n = 10$) je $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 2^{10}$, tj. 1 024; součet čísel řádku IX je $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 2^9 = 512$ atd. až k řádku I, jehož čísla dávají součet $1 + 1 = 2^1 = 2$.

Dále se dá dokázat, že jednotlivá čísla v každém řádku vyjadřují počet různých kombinací, které je možno utvořit z n prvků (n je pořadové číslo řádku). Označíme-li symbolem $\binom{n}{k}$ *) počet kombinací o k prvcích, které lze utvořit z n daných prvků, je $\binom{10}{0} = 1$,

$$\binom{10}{1} = 10, \binom{10}{2} = 45, \binom{10}{3} = 120,$$
$$\binom{10}{4} = 210, \binom{10}{5} = 252, \binom{10}{6} = 210,$$
$$\binom{10}{7} = 120, \binom{10}{8} = 45, \binom{10}{9} = 10,$$
$$\binom{10}{10} = 1.$$

Provedený rozbor Pascalova trojúhelníku nám umožňuje přejít ke hře poker.

Jaká je např. pravděpodobnost, že z balíčku 52 karet dostaneme 5 karet téže barvy?

V balíčku je čtyřikrát 13 karet stejné barvy; musíme tedy vypočítat $\binom{13}{5}$. Uvažujeme-li všechny čtyři barvy, je počet rozdání, v němž dostaneme „barvu“, roven $4\binom{13}{5}$. Na druhé straně, počet všech možných kombinací po pěti kartách z 52 karet je $\binom{52}{5}$.

Poměr těchto dvou čísel vyjadřuje pravděpodobnost, že hráč dostane „barvu“:

$$4 . \binom{13}{5} : \binom{52}{5} = 4 \frac{9 . 10 . 11 . 12 . 13}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} :$$

$$: \frac{48 . 49 . 50 . 51 . 52}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = \frac{33}{16\,660};$$

tedy méně než 0,2 % $\left(\text{méně než } \frac{2}{1\,000}\right)$.

A zde je ještě jedno použití Pascalova trojúhelníku.

Házíme desetkrát minci. Je větší pravděpodobnost, že hodíme právě pětkrát orla nebo že jej hodíme právě čtyřikrát?

Intuice napovídá, že pravděpodobnost, že orel padne čtyřikrát, je větší. Výpočet však říká něco jiného. Desátý řádek Pascalova trojúhelníku ukazuje, že celkový počet všech kombinací z deseti prvků je 1 024. Mezi těmito 1 024 kombinacemi je 210 kombinací po čtyřech prvcích a 252 kombinací po pěti. Je tedy pravděpodobnost, že z deseti hodů padne orel čtyřikrát $\frac{210}{1\,024}$ (asi 21 %), a pravděpodobnost, že orel padne pětkrát, je $\frac{252}{1\,024}$ (asi 25 %). Pravděpodobnost, že orel padne pětkrát v deseti hodech, je tedy větší.

Z téhož desátého řádku se dovídáme, že pravděpodobnost, že v deseti hodech hodíme jen jednou orla, je stejná jako pravděpodobnost, že orel padne devětkrát $\frac{10}{1\,024}$; totéž se dá říci o pravděpodobnosti dvou a osmi orlů $\frac{45}{1\,024}$ nebo tří a sedmi nebo čtyř a šesti orlů.

■ Zábavné úlohy

Všeználkovo kouzlo

Všeználek se doslechl, že existuje zaklínadlo, s jehož pomocí je možno zbohatnout bez práce, a tak se každého na toto zaklínadlo vyptával. Nakonec se dozvěděl od jakéhosi potulného kouzelníka, že je třeba vzít jistou přesně určenou částku, jít o půlnoci k řece a hodit do vody 50 korun, pak vyslovit kouzelná slova: „ego sum stultus“*) a zbývající částka se ihned ztrojnásobí.

Všeználek se zachoval přesně podle kouzelníkovy rady. Dal do kapsy určenou částku, šel o půlnoci k řece a hodil do vody 50 korun. Pak spočítal zbytek peněz, důstojně vyslovil „ego sum stultus“ – a peníze se mu před očima ztrojnásobily. Potěšený Všeználek znovu hodil 50 korun do vody a vyslovil zaklínadlo. Celé kouzlo opakoval třikrát. Pak vytáhl peníze a přepočítal je. Jaké však bylo jeho ohromení, když zjistil, že má přesně tolik peněz jako před započetím kouzel!

Kolik peněz měl Všeználek, když se vydal k řece?

Úloha Lva Nikolajeviče Tolstého o sekáčích

L. N. Tolstoj (1838 – 1910) nebyl jen velkým spisovatelem, ale i pedagogem. Ve svém sídle na statku Jasná Polana

*) Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá *Newtonův symbol*. Vypočte se ze vzorce

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots k . 1 . 2 . 3 \ldots (n-k)};$$

znak $n!$ (čti n faktoriál) znamená součin všech přirozených čísel od 1 do n včetně, přičemž definujeme $0! = 1$.

*) To znamená česky „jsem hlupák“.

založil a vedl školu pro vesnické děti a sám pro ně psal učebnice.

Uvádíme zajímavou úlohu, kterou L. N. Tolstoj sestavil:

Skupině sekáčů bylo nařízeno pokosit dvě louky, z nichž jedna byla dvakrát větší než druhá. Půl dne kosila celá skupina sekáčů větší louku; v druhém půldnu se skupina rozdělila na dvě stejné části.

První část skupiny pokračovala v kosení větší louky a do konce dne ji celou pokosila. Druhá část šla kosit druhou, menší louku a kosila ji až do konce dne, ale práci nedokončila. Zbytek menší louky byl pokosen druhý den, a to tak, že ji pokosil jeden sekáč za celý den práce.

Kolik sekáčů bylo ve skupině?

Vašek a Pepík – logický hlavolam

V létě o prázdninách pomáhá Vašek rodičům v hospodářství. Zrovna pase na louce kozy.

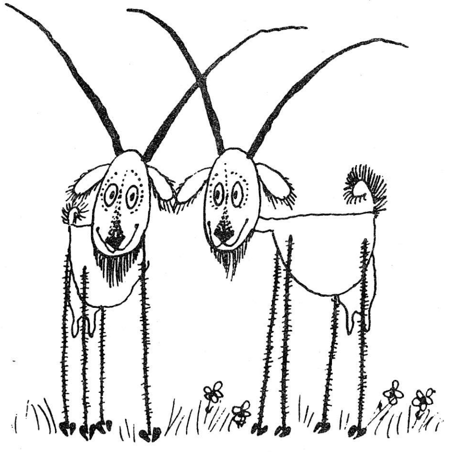
Pepík, jeho spolužák, bydlí v sousední vsi. Jde kolem po pěšině, a když míjí Vaška, pozdraví a ptá se:

„Patří všechny ty kozy tvému otci?“

„Kdepak. Patří čtyřem majitelům: mému dědovi, strýci, tetě a otci. Každému z nich patří jiný počet koz, ale otec jich má nejvíc.“

„A kdo má nejmíň?“

„Nejmíň má děda a hned po něm strýc.“



„A kolik je všech koz dohromady? Rozběhly se po louce, že se nedají spočítat.“

„Kolik je všech koz dohromady? Méně než osmnáct. Ale zvláštní je, že součin počtů koz jednotlivých majitelů je právě tolik, kolik korun dostanu za pasení těch koz o prázdninách.“

„Kolik dostaneš?“

Vašek pověděl Pepíkovi, kolik dostane za pasení koz.

„Už jsi mi toho řekl hodně, ale pořád ještě nevím, kolik koz mají tvoji příbuzní. Má tvůj dědeček jednu kozu nebo víc?“

„Děda má ...“ (Vašek řekl, kolik má děda koz.)

„Tak teď ti mohu říci, kolik koz má každý z tvých příbuzných,“ povídá Pepík.

„To jsem zvědav, pověz!“

„Děda má ..., strýc má ..., teta má ..., otec má ...“

Rozřešte hlavolam sami!

Řešení úloh

Všeználkovo kouzlo

Když šel Všeználek k řece, měl x korun.

Když poprvé ztrojnásobil svůj majetek, měl $3(x - 50)$ korun $= 3x - 150$ korun. Jeho majetek tedy vzrostl o

$$[(3x - 150) - x] \text{ korun} =$$
$$= (2x - 150) \text{ korun.}$$

Po druhém ztrojnásobení majetku měl Všeználek

$$3(3x - 150 - 50) \text{ korun} =$$
$$= (9x - 600) \text{ korun.}$$

Po třetím ztrojnásobení majetku měl Všeználek

$$3(9x - 600 - 50) \text{ korun} =$$
$$= (27x - 1\,950) \text{ korun.}$$

Z podmínek úlohy plyne, že

$$x = 27x - 1\,950,$$

takže $x = 75$.

Když šel Všeználek k řece, měl 75 korun.

Úloha Lva Nikolajeviče Tolstého o sekáčích

(bez použití rovnic)

Po krátké úvaze dojdeme k závěru, že polovina skupiny sekáčů pokosí za půl dne třetinu větší louky.

Protože výkon sekáčů je stejný na větší i na menší louce, je část pokosená polovinou skupiny na menší louce (za druhou polovinu prvního dne) rovna třetině větší louky.

Nyní již můžeme vypočítat, jaká část louky zůstala na druhý den práce: polovina větší louky bez třetiny větší louky, což je šestina větší louky.

Jediný sekáč pokosil šestinu velké louky za jeden den. Za první den byla celkem pokosena celá větší louka (tj. šest šestin) a část menší louky, rovná třetině větší louky (tj. dvě šestiny). Dohromady je to osm šestin větší louky. Na její pokosení je třeba osmi sekáčů.

Skupina měla osm sekáčů.

Vašek a Pepík – logický hlavolam

Výchozím bodem řešení jsou Vaškovy informace, že všech koz je méně než 18, že děda má nejméně a že každý majitel má jiný počet koz.

Může mít dědeček tři kozy?

Kdyby mě dědeček tři kozy, pak nejmenší součet dávají čísla 3, 4, 5, 6. Ale jejich součet je 18, takže dědeček nemůže mít tři kozy. Může tedy mít buď jednu nebo dvě.

Vyšetřme oba případy.

1. Děda má dvě kozy. Pak musíme uvažovat možnosti, uvedené v první tabulce na str. 154. Jiné skupiny čísel dají součet větší než 17. Až vyšetříme druhou možnost, vrátíme se k otázce, kterou skupinu čísel je třeba vybrat.
2. Děda má jednu kozu. Pak musíme uvažovat druhou tabulku.

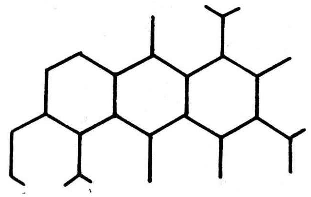
Čísla	Součet	Součin
2, 3, 4, 5	14	120
2, 3, 4, 6	15	144
2, 3, 4, 7	16	168
2, 3, 4, 8	17	192
2, 3, 5, 6	16	180
2, 3, 5, 7	17	210
2, 4, 5, 6	17	240

Čísla	Součet	Součin
1, 2, 3, 4	10	24
1, 2, 3, 5	11	30
....		
1, 2, 3, 11	17	66
1, 2, 4, 5	12	40
....		
1, 2, 4, 10	17	80
1, 2, 5, 6	14	60
....		
1, 2, 5, 9	17	90
1, 2, 6, 7	16	84
1, 2, 6, 8	17	96
1, 3, 4, 5	13	60
....		
1, 3, 4, 9	17	108
1, 3, 5, 6	15	90
1, 3, 5, 7	16	105
1, 3, 5, 8	17	120
1, 3, 6, 7	17	126
1, 4, 5, 6	16	120
1, 4, 5, 7	17	140

Čtenář si tabulku sám snadno doplní. Jiné skupiny čísel dají opět součet větší než 17, a proto nevyhovují.

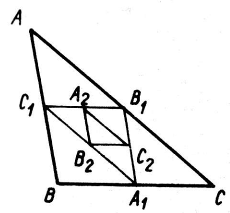
Dále uvažujeme takto: Když se Pepík dozvěděl, kolik dostane Vašek za pasení, nemohl ještě jednoznačně úlohu rozřešit. To znamená, že v úvahu přicházejí ty hodnoty součinu, které se v tabulkách vyskytují několikrát, tj. 48, 60, 72, 80, 84, 90, 96, 120. Když však Vašek řekl Pepíkovi, kolik koz má dědeček, bylo již řešení jednoznačné. Kdyby měl dědeček jednu kozu, nemohl tento případ nastat při žádné z uvedených hodnot součinu (vždy by přicházely v úvahu aspoň dvě možnosti – např. 48 můžeme rozložit na 1, 2, 3, 8 nebo na 1, 2, 4, 6). Musel se tedy Pepík dozvědět, že dědeček má dvě kozy; pak je již jediná možnost, totiž 2, 3, 4, 5, odpovídající součinu 120. Dědeček má tedy dvě kozy a otec pět; strýc má tři a teta čtyři.

Dá se dokázat, že existují jen tři pravidelné mnohoúhelníky, kterými lze pokrýt rovinu, počínaje v daném bodě tak, že zvolený mnohoúhelník se nekonečně mnohokrát opakuje. Jsou to tyto mnohoúhelníky: rovnostranný trojúhelník, čtverec a pravidelný šestiúhelník (obr. 93).



Obr. 93

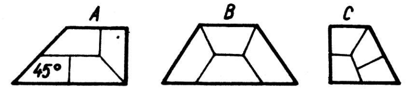
Na druhé straně však existuje nekonečně mnoho obecných (nepravidelných) mnohoúhelníků, jimiž lze podobně pokrýt celou rovinu.



Obr. 94

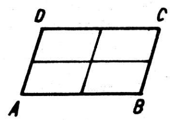
Například libovolný tupoúhlý trojúhelník ABC (obr. 94) lze rozdělit na čtyři navzájem shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, podobné trojúhelníku ABC; každý z těchto čtyř trojúhelníků $A_1B_1C_1$ lze obdobně rozdělit na čtyři shodné trojúhelníky $A_2B_2C_2$, podobné trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Každý ze šestnácti trojúhelníků $A_2B_2C_2$ je možno znovu rozdělit na čtyři shodné trojúhelníky atd.

Stejným způsobem lze trojúhelník ABC zvětšovat, přičemž dostáváme trojúhelníky čtyřikrát větší, podobné trojúhelníku ABC.



Obr. 95

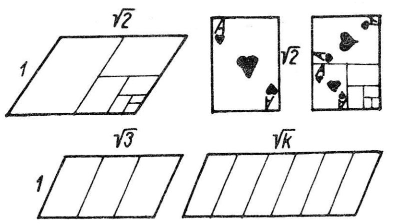
Rovinu lze pokrýt i jinými obrazci, např. lichoběžníky. Na obr. 95 jsou nakresleny tři různé lichoběžníky A, B, C. Každý z nich můžeme rozdělit na čtyři stejné lichoběžníky, podobné původnímu lichoběžníku, a ty můžeme postupně dále dělit nebo naopak zvětšovat do nekonečna.



Obr. 96

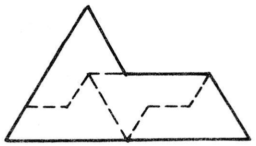
Libovolný rovnoběžník $ABCD$ můžeme rozdělit na čtyři stejné rovnoběžníky, podobné původnímu (obr. 96) nebo jej čtyřnásobně zvětšovat až do nekonečna.

Rovnoběžník nebo obdélník o stranách délky 1 a $\sqrt{2}$ (obr. 97) můžeme do nekonečna dělit na poloviny nebo naopak zdvojnásobovat, přičemž vzniklé rovnoběžníky budou podobné původnímu. Na této vlastnosti obdélníku, jehož strany jsou 1 a $\sqrt{2}$, je založeno řešení úlohy o velikosti formátů papíru nebo hracích karet.



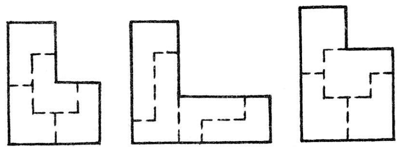
Obr. 97

Rovnoběžník o stranách délky 1 a $\sqrt{3}$ můžeme rozdělit na tři rovnoběžníky shodné a podobné původnímu. Obecně můžeme rovnoběžník o stranách 1 a $\sqrt{k}$ rozdělit na k rovnoběžníků, které jsou navzájem shodné a podobné původnímu (viz obr. 97).

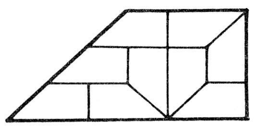


Obr. 98

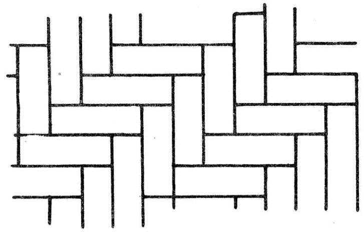
Na obr. 98 je ukázán pětiúhelník, který bychom mohli nazvat „sfinxoidálním" pětiúhelníkem. Je to jediný pětiúhelník, který lze rozdělit na čtyři shodné „sfinxoidální" pětiúhelníky, podobné původnímu. Naproti tomu známe tři různé šestiúhelníky, které je možno rozdělit na čtyři shodné části, podobné původnímu obrazci (obr. 99). Každý lichoběžník, který lze rozdělit na čtyři shodné části, podobné původnímu lichoběžníku, můžeme rozdělit také na devět shodných lichoběžníků, podobných původnímu (obr. 100).



Obr. 99



Obr. 100



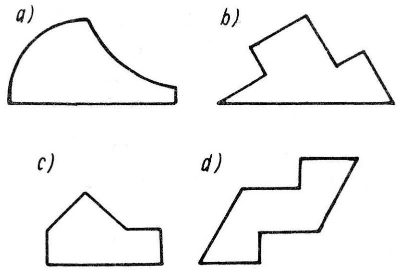
Obr. 101

Protože popsané mnohoúhelníky můžeme nejen nekonečně zmenšovat, ale i zvětšovat, souvisí naše úloha s problémem parketáže podlahy (obr. 101).

■ Zábavné úlohy

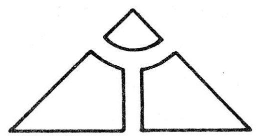
Geometrie a nůžky

1. Na obr. 102 jsou čtyři útvary. Každý z nich rozděl jediným řezem na dvě části a z obou částí slož čtverec.



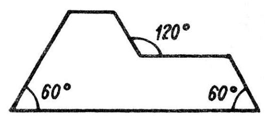
Obr. 102

2. Na obr. 103 jsou tři útvary. Slož z nich čtverec.



Obr. 103

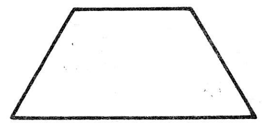
3. Na obr. 104 je šestiúhelník. Ze tří takových šestiúhelníků slož rovnostranný trojúhelník.



Obr. 104

Jak rozdělíš dort?

Dort má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož horní podstava i obě ramena jsou rovna polovině dolní podstavy. (Obr. 105.)

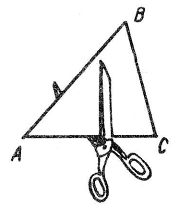


Obr. 105

Jak rozdělíš dort na čtyři shodné části?

Dělení trojúhelníku

A teď malá zkouška geometrického důvtipu. K řešení této úlohy není třeba žádných pouček ani axiómů. Libovolný trojúhelník ABC (obr. 106) rozděl dvěma řezy na tři části, z nichž je možno složit obdélník.



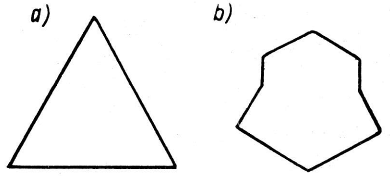
Obr. 106

Dělení čtverce na šestiúhelníky

Rozděl čtverec na čtyři shodné šestiúhelníky.

Jak to dokážeš?

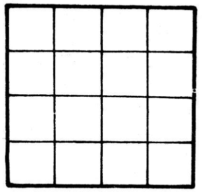
Rovnostranný trojúhelník, který vidíš na obr. 107a, rozděl na tři takové části, aby bylo možno složit z nich útvar nakreslený na obr. 107b (štít).



Obr. 107

Dělení čtverce na poloviny

Čtverec na obr. 108 se skládá ze 16 jednotkových čtverců. Rozděl jej na poloviny, aniž poškodíš jednotkové čtverce. Kolika způsoby je to možné?*)


Obr. 108

Čtvercový arch papíru

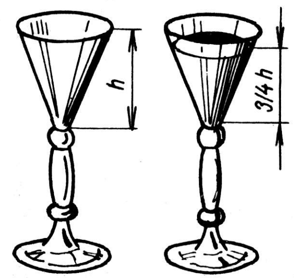
Čtvercový arch papíru je rozdělen různoběžnými přímkami na 56 různých částí, přičemž každým bodem procházejí nejvýše dvě přímky. Kolik přímek je na papíře? Kolika barev by bylo třeba, abychom vzniklou síť obarvili tak, aby dvě sousedící oka sítě byla různých barev?**)

Jak se podělit bez hádek?

Když se dvě děti chtějí o něco rozdělit, často vznikají spory. A přece je možno se hádkám vyhnout, a to tak, že jeden dělí a druhý vybírá. Žádný z podílníků nemůže mít potom námitky, protože každý měl svůj vliv na dělení: jeden dělil a druhý ze svobodné vůle vybral tu část, která se mu zdála výhodnější.

Pohár šťávy

Pohár, který vidíme na obr. 109, je až po okraj naplněn šťávou. Petr a Jan se chtějí o šťávu rozdělit. Petr navrhl, aby Jan šťávu rozdělil, a on že si pak vybere svůj díl. Jan souhlasil a přelil do jiné nádoby tolik šťávy, že zbytek



Obr. 109

*) Poloviny musí být stejné nejen obsahem, ale i tvarem. (Pozn. překl.)

**) Předpokládáme, že všechny průsečíky leží na papíře. Dvě oka sítě, která mají společný jen vrchol, nepovažujeme za sousední. (Pozn. překl.)

šťávy v poháru sahal do tří čtvrtin původní výše. Petr se rozmýšlel a pak si vybral šťávu, která zůstala v poháru. Byla tato volba pro Petra výhodná?

Čokoládový dort

Dělení na polovinu je celkem snadné, ale dělení na třetiny je už obtížnější.

Tři chlapci, Jarda, Standa a Jenda, si měli rozdělit čokoládový dort. Nevěděli však, jak to udělat, aby se žádný z nich necítil ukřivděn. Dumali nad tím, jak se podělit, když přišel Jardův otec a poradil jim, aby postupovali podle zásady jeden dělí, druhý vybírá následujícím způsobem: Nejdřív rozdělí dort na poloviny a pak každou polovinu na tři části.

„Rozuměli jste?“ zeptal se otec.

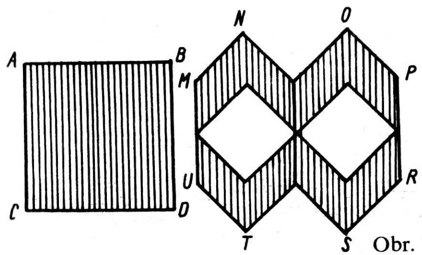
„Rozuměli,“ odpověděli chlapci.

Jak se chytří chlapci podělili?

Rámeček ze čtverce

Z lepenkového čtverce *ABCD* (obr. 110) vyrob rámeček *MNOPRSTU*.

Na výrobu rámečku se má použít celý čtverec.

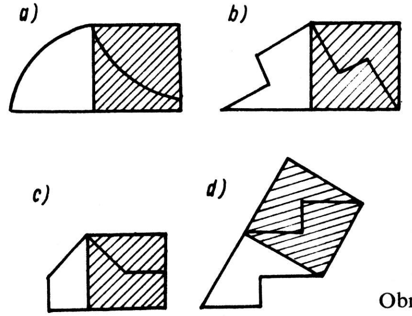


Obr. 110

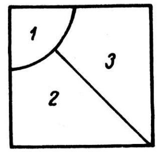
■ Řešení úloh

Geometrie a nůžky

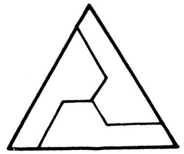
Viz obr. 111, 112 a 113.



Obr. 111

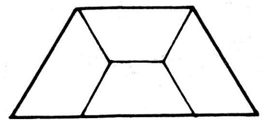


Obr. 112


Obr. 113

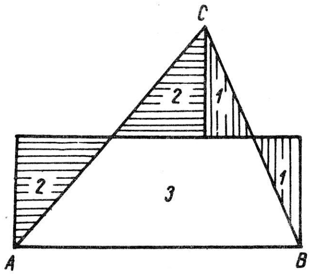
Jak rozdělíš dort?

Dělení dortu na čtyři stejné části je ukázáno na obr. 114.


Obr. 114

Dělení trojúhelníku

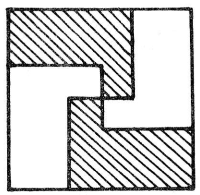
Řešení je ukázáno na obr. 115.



Obr. 115

Dělení čtverce na šestiúhelníky

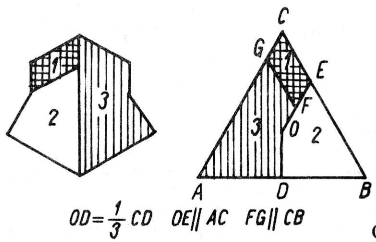
Nejjednodušší, i když ne jediné, řešení je ukázáno na obr. 116.



Obr. 116

Jak to dokážeš?

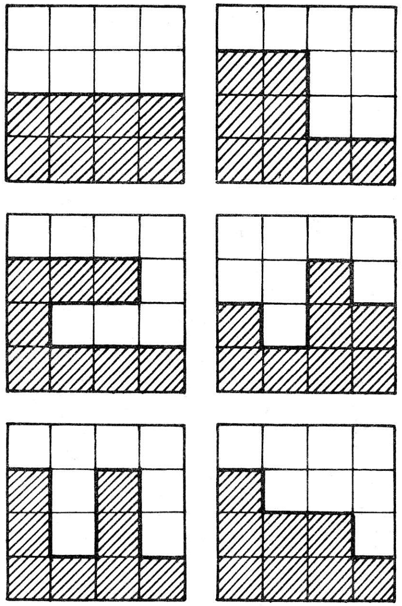
Viz obr. 117.



Obr. 117

Dělení čtverce na poloviny

Čtverec je možno rozdělit na poloviny šesti různými způsoby (viz obr. 118).



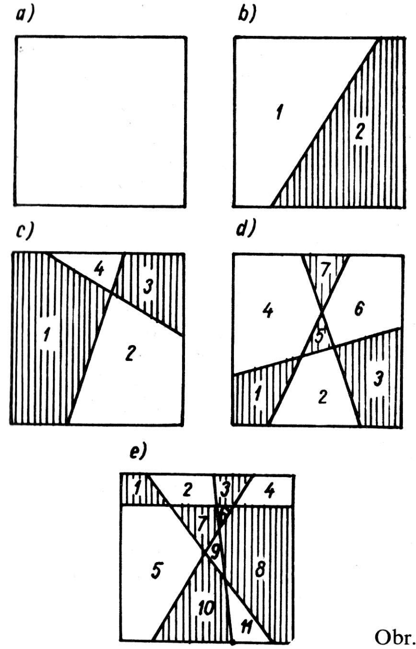
Obr. 118

Čtvercový arch papíru

Jedna přímka rozdělí arch papíru na dvě části (obr. 119), dvě přímky jej rozdělí na čtyři části, tři přímky na sedm částí, čtyři na jedenáct atd.

Počet přímek n	0	1	2	3	4 ...
Počet částí y	1	2	4	7	11 ...

Z tabulky vidíme, že počet částí y závisí na počtu přímek – různoběžek n.



Obr. 119

Číslo y však nezávisí na n lineárně, neboť jeho růst není rovnoměrný. Zkusme, zda y není kvadratickou funkcí n?

Jestliže tomu tak je, musí být $y = an^2 + bn + c$ (obecný tvar kvadratické funkce). Koeficienty a, b, c najdeme na základě toho, že víme, že pro $n = 1$ je $y = 2$, pro $n = 2$ je $y = 4$ a pro $n = 3$ je $y = 7$. Je tedy

$$2 = a + b + c,$$
$$4 = 4a + 2b + c,$$
$$7 = 9a + 3b + c.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, takže $y = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$. Dosadíme-li sem hodnotu $n = 4$, nalezneme $y = 11$, tedy hodnotu totožnou s hodnotou v tabulce.*)

Nyní můžeme vypočítat, kolik přímek je třeba narýsovat, abychom čtve-

*) To ovšem není důkaz, že námi nalezený vzorec platí pro všechna n. Obecný důkaz provedeme matematickou indukcí (srov. kap. 35, str. 312).

V tabulce si můžeme všimnout toho, že počet částí vzroste přidáním jedné přímky nejprve o jednu, pak o dvě, o tři, o čtyři ... . To platí obecně: Je-li papír rozdělen n přímkami a přidáme-li ještě jednu, vzroste počet částí o $n + 1$. Skutečně, za našich předpokladů protne $(n + 1)$-ní přímka ostatních n přímek v n různých bodech, které ji rozdělí na $n + 1$ částí (2 polopřímky a $n - 1$ úseček). Každá z těchto částí přímky leží celá v některé části papíru, tvořené původními n přímkami, a dělí ji na dvě části. Tím se tedy počet částí zvětší o $n + 1$.

Nyní již můžeme získaný vzorec ověřit indukcí: Pro $n = 1$ platí; předpokládejme, že platí pro jisté n, tj. $y_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$; přidáme-li ještě jednu přímku, je podle předchozí úvahy

$$y_{n+1} = y_n + (n + 1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 4) =$$
$$= \frac{1}{2}(n + 1)^2 + \frac{1}{2}(n + 1) + 1,$$

což je skutečně náš vzorec, napsaný pro $n + 1$. (Pozn. překl.)

rec rozdělili na 56 částí:

$$56 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1,$$

odkud $112 = n^2 + n + 2$.

Řešením této rovnice najdeme

$$n_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{441}) =$$

$$= \frac{1}{2}(-1 \pm 21); \quad n = 10.\text{*)}$$

Deseti přímkami rozdělíme čtverec na 56 různých částí. Z obr. 119 je vidět, že síť, kterou tvoří jedna přímka, lze obarvit dvěma barvami (obr. 119b), např. černou a bílou. Síť, kterou tvoří dvě přímky, lze rovněž obarvit dvěma barvami. Části 1 a 3 ani 2 a 4 nemají společnou hranici (společný bod nepovažujeme za společnou hranici). Podobně je tomu i v případě d. Matematickou indukcí lze dokázat, že síť utvořenou libovolným počtem přímek lze obarvit podle našich požadavků dvěma barvami. Tento důkaz vynecháváme.

Pohár šťávy

Označme objem šťávy v plném poháru V_p, objem zbytku šťávy po odlití V_q. Pak poměr V_p ku V_q je roven poměru třetích mocnin výše šťávy v poháru, tj.

$$\frac{V_p}{V_q} = \frac{h^3}{\left(\frac{3}{4}h\right)^3} = \frac{1^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{64}{27}\text{ **)}.$$

Odtud nalezneme

$$\frac{V_p}{V_q} - 1 = \frac{V_p - V_q}{V_q} = \frac{64 - 27}{27} = \frac{37}{27}.$$

Rozdíl $V_p - V_q$ je právě ta část šťávy, kterou Jan odlil do jiné nádoby. Vidíme tedy, že část šťávy, která připadla Janovi, je o 10 jednotek větší než ta, kterou si vybral Petr.

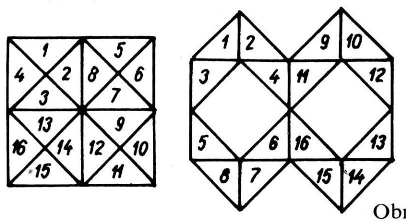
Čokoládový dort

Jarda rozdělil dort na dvě části, podle jeho názoru stejné. Standa si vybral jednu z částí a oba, Jarda i Standa, rozdělili každý svoji polovinu na tři části. Jenda si pak vybral jeden kousek ze tří Standových a jeden ze tří Jardových a zbytek jim nechal.

Snadno odvodíme, že tento způsob dělení vylučuje spory.

Rámeček ze čtverce

Viz obr. 120.



Obr. 120

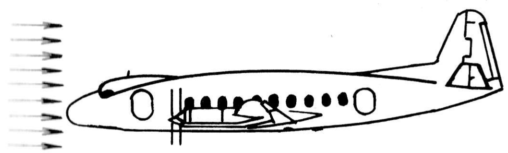
---

*) Záporné řešení ovšem nevyhovuje. (Pozn. překl.)

**) Jde o objem kuželů, které mají týž úhel při vrcholu a poměr výšek 3 : 4; v tomtéž poměru jsou tedy i poloměry základen (podobnost!), takže $V_p = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V_q = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{4}r\right)^2 \cdot \frac{3}{4}h$ atd. (Pozn. překl.)

Zkušební pilot má vyzkoušet maximální rychlost nového typu letadla. Zkušební let má být vykonán na uzavřené trati Varšava – Krakov – Varšava. Tážeme se, zda vítr vanoucí na trati ovlivní dobu letu.

Na první pohled se zdá, že na otázku můžeme odpovědět záporně. Vane-li vítr stejnoměrně ve směru letu z Varšavy do Krakova, zvětší se rychlost letu na této trati. Avšak stejně se zmenší rychlost letu na opačné trati z Krakova do Varšavy. Vítr tedy neovlivní dobu letu na celé trati Varšava – Krakov – Varšava. Důkladnějším rozborem naší úlohy se však přesvědčíme, že náš závěr je chybný. Doba letu letadla po větru na trati Varšava – Krakov je menší než doba letu proti větru (obr. 121)



Obr. 121

na trati Krakov – Varšava, takže příznivé působení větru trvá kratší čas než nepříznivé. Proto bude doba letu po uzavřené trati při větru delší než doba letu za bezvětří. Poznamenejme ještě, že za bezvětří trvá let z Varšavy do Krakova stejně dlouho jako z Krakova do Varšavy. Od těchto předběžných kvalitativních úvah přejděme nyní k početnímu řešení.

Nechť l označuje vzdušnou vzdálenost Varšava – Krakov (nebo Krakov – Varšava). Rychlost větru nechť je w, zatímco v znamená rychlost letadla za bezvětří.

Za bezvětří bude čas potřebný k letu na trati Varšava – Krakov – Varšava roven

$$\text{(I)} \quad t = 2\frac{l}{v}.$$

Jestliže vane vítr, je rychlost letadla po větru $v + w$, proti větru $v - w$. Je tedy čas letu při větru roven

$$\text{(II)} \quad t_1 = \frac{l}{v + w} + \frac{l}{v - w} =$$

$$= \frac{l(v - w) + l(v + w)}{v^2 - w^2} = \frac{2lv}{v^2 - w^2}.$$

Dělíme-li čitatel i jmenovatel posledního zlomku číslem v, dostaneme

$$\text{(III)} \quad t_1 = \frac{2l}{v - \frac{w^2}{v}}.$$

Jmenovatel zlomku (III) je menší než jmenovatel zlomku (I), neboť $w^2/v > 0$.

Odtud $t_1 > t$.*)

Příklad:

Nechť

$l = 500$ km, $v = 400$ m/s,

$w = 25$ m/s.

Pak

$$t_1 = \frac{2\,.\,500\,000 \text{ m}}{\left(400 - \frac{25\,.\,25}{400}\right) \text{m/s}} =$$

$$= \frac{1\,000\,000\,.\,400}{4\,.\,100\,.\,4\,.\,100 - 25\,.\,25} \text{ s} =$$

$$= 2\,509{,}8 \text{ s},$$

zatímco

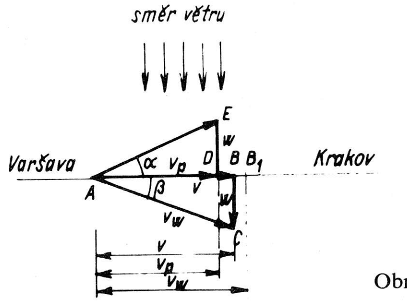
$$t = \frac{2\,.\,500\,000 \text{ m}}{400 \text{ m/s}} = 2\,500 \text{ s}.$$

Skutečně tedy $t_1 > t$, přičemž $t_1 - t = 9{,}8$ s.

Předpokládejme nyní, že vítr vane kolmo na směr letové tratě Varšava – Krakov – Varšava. Pomáhá v tomto případě vítr letci nebo mu překáží?

Vane-li vítr napříč tratě, snáší letadlo z trasy, a tím zhoršuje podmínky letu.

Vyšetřme však tento případ přesněji. Řešení úlohy je znázorněno na obr. 122.



Obr. 122

Na tomto obrázku představuje vodorovná přímka letovou trasu. Vektor**) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ označuje rychlost letadla za bezvětří, vektor $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ rychlost větru.

Výslednicí (součtem) vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$ je vektor $\overrightarrow{AC} = \vec{v}_w$. Vlivem působení větru nepoletí letadlo po přímé čáře do Krakova, ale bude snášeno vpravo o jistý úhel β. Absolutní velikost jeho rychlosti bude sice větší než v, ale letadlo bude odbočovat ze správného směru. Pilot musí proto zvolit kurs o jistý úhel α doleva, aby letěl skutečně do Krakova. Tento úhel musí být zvolen tak, aby výslednice (součet) vektorů $\overrightarrow{AE}$ a $\overrightarrow{ED}$ ($AE = AB$, $ED = BC$) mířila do Krakova. Z obrázku vidíme, že tímto vektorem je vektor $\vec{v}_p = \overrightarrow{AD}$; tento vektor je menší než vektor $\overrightarrow{AB}$ (v absolutní velikosti: $AD < AB$).

Závěr: Příčný vítr zmenšuje rychlost letadla. Z $\triangle AED$ dostáváme

$$\sin \alpha = \frac{w}{v},$$

zatímco z $\triangle ABC$ máme

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v}.$$

Odtud $\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta$, a tedy $\alpha > \beta$.

To znamená, že letadlo musí letět s větší odchylkou, než o jakou je snáší vítr.

Vypočtěme ještě „škodlivost“ větru.

Za bezvětří je doba letu na trati Varšava – Krakov – Varšava rovna

$$t = \frac{2l}{v}.$$

Při příčném větru je doba letu rovna

$$t_1 = \frac{2l}{AD} = \frac{2l}{v \cos \alpha} = \frac{t}{\cos \alpha}.$$

$$t_1 - t = \frac{t}{\cos \alpha} - t =$$

$$= t\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) =$$

$$= \frac{t}{\cos \alpha}(1 - \cos \alpha) =$$

$$= \frac{2t \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha} > 0$$

$$\left(1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha\right),$$

protože z nerovnosti $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ plyne $\cos \alpha > 0$.*)

Poznámka: Dá se říci, že při větru, který vane rovnoměrně a se stálou rychlostí, se letadlo chová jako motorová loď na řece proudící přímočarým korytem.

■ Zábavné úlohy

Dvě rány

Ve vzdálenosti 1 km od kamenolomu je koupaliště. Každý den kolem poledne je slyšet zvuk výbuchu ve skále, z níž se těží kámen. Když jsem v tom okamžiku ve městě, slyším jen jeden výbuch, ale když jsem na koupališti a právě se koupu, slyším výbuch

---

*) Vzorec (III) můžeme napsat také ve tvaru

$$t_1 = \frac{t}{1 - \frac{w^2}{v^2}},$$

což ukazuje přímo vztah mezi t_1 a t. (Pozn. překl.)

**) Vektorem rozumíme ve fyzice veličinu, charakterizovanou její velikostí a směrem (např. síla, rychlost atd.); graficky znázorňujeme vektor obvykle jako orientovanou úsečku. Orientovat úsečku znamená stanovit, který z jejích krajních bodů je počáteční a který koncový. Viz odstavec Vektory a skaláry v kap. 24, str. 237; podstatně podrobnější a hlubší výklad (přístupný však i žákům střední školy) najde čtenář v knížce B. Budinský – S. Šmakal: Vektory v geometrii z knižnice Škola mladých matematiků. (Pozn. překl.)

*) Podobně jako v předešlém případě můžeme psát

$$t_1 = \frac{t}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2}}}$$

(Pozn. překl.)

někdy dvakrát. Okamžik výbuchu mohu vždy určit, protože z koupaliště je vidět oblak prachu zvednutého výbuchem.

Proč slyším výbuch ve městě jen jednou, zatímco na koupališti jej mohu slyšet dvakrát?

Voda a led

Do sklenice tvaru válce, jehož podstava (kruh) má obsah 18 cm^2, nalijeme vodu a pak do ní vhodíme krychli ledu o hraně 3 cm. Led plave ovšem na povrchu vody, přičemž hladina vody je 7 cm nade dnem sklenice. Jak vysoko bude hladina vody, až led úplně roztaje?

Poznámka: Nebereme zřetel na nepatrné změny hladiny, které mohou nastat následkem změn teploty vody a ledu. Pro ty, kteří soudí, že potřebují znát hustotu ledu, uvádíme, že se rovná přibližně 0,9 g/cm^3.

Jaký je objem láhve?

Láhev naplněná kyselinou sírovou (H_2SO_4) váží $Q = 19{,}34$ kg. Tatáž láhev naplněná naftou váží $q = 9{,}1$ kg. Jaký je objem láhve a kolik láhev váží, jestliže hustota kyseliny sírové je

$D = 1{,}834$ g/cm^3

a hustota nafty je

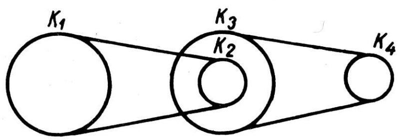
$d = 0{,}81$ g/cm^3?

Jaká byla teplota?

Ve škole měl jeden z žáků za úkol změřit každý den před začátkem vyučování teplotu ve třídě a zapsat ji do zvláštního sešitu. Od 15. do 25. května včetně vzrůstala teplota náhodou rovnoměrně: každý den o 0,5 °C. Průměrná teplota v tomto období byla 18,25 °C. Jakou teplotu ukazoval teploměr dne 17. května?

Převodové pásy

Jistý mechanismus je poháněn prostřednictvím dvou párů kol s převodovými pásy (obr. 123). Kolo K_1 se otočí padesátkrát za dobu, za kterou se kolo K_4 otočí 450krát.



Obr. 123

Jaký je poměr poloměrů těchto kol*)?

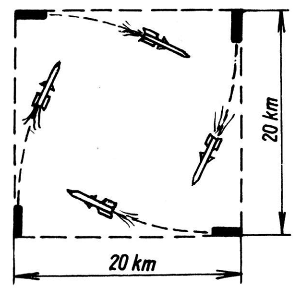
Rychlost jízdy

Kolik sekund musím otáčet pedálem kola, aby se otočil tolikrát, kolik činí v daném okamžiku moje rychlost měřená v km/h?

*) Kolo K_1 má stejný poloměr jako K_3, K_2 má stejný poloměr jako K_4. (Pozn. překl.)

Čtyři střely

Ze čtyř vrcholů čtverce o straně 20 km jsou v tentýž okamžik vystřeleny čtyři střely, které se samy navádějí na cíl tak, jak je ukázáno na obr. 124.



Obr. 124

Za letu se každá střela stáčí doprava, míříc stále na předchozí střelu, až se všechny čtyři setkají uprostřed čtverce. Jestliže rychlost všech čtyř stejných střel je 1 km/s, jak dlouho poletí střely až do bodu vzájemného zásahu?

Dva plavci

Byli jste na plaveckých závodech? Viděli jste závodní plavecký bazén? Tak poslyšte.

Dva plavci, A a B, trénují na sousedních drahách. Plavci startují v tentýž okamžik a plavou stále stejnou rychlostí, i když každý jinou. Plavec A předežene plavce B, doplave na konec dráhy a vrací se. Na zpáteční cestě potká plavce B ve vzdálenosti 5 m od konce dráhy, plave dál, doplave na místo startu, otočí se a opět plave zpátky. Přitom znovu potká plavce B (A a B plavou teď proti sobě) ve vzdálenosti od místa startu rovné jedné pětině délky celého bazénu.

Jak dlouhý je bazén?

Řešení úloh

Dvě rány

Když se koupu, mohu slyšet výbuch dvakrát: Poprvé, když plavu pod vodou, a podruhé, když se vynořím, neboť rychlost šíření zvuku ve vodě je větší než ve vzduchu.

Voda a led

Hladina vody zůstane stejně vysoko. Archimédes by to vysvětlil bez výpočtů. Skutečně, led plave, protože jeho hmotnost je v rovnováze s tlakem zdola nahoru, který se rovná hmotnosti vytlačené vody. Znamená to, že hmotnost kostky ledu je stejná jako hmotnost takového objemu vody, který má část ledu ponořená ve vodě. Když led roztaje (změní se ve vodu), vzniklá voda zaujme právě ten objem, který zaujímala část kostky ledu ponořená ve vodě. Hladina vody zůstane tedy beze změny.

Jaký je objem láhve?

1. Objem láhve je

$$V = \frac{Q - q}{D - d} =$$

$$= \frac{(19{,}34 - 9{,}10)\ \mathrm{kg}}{(1{,}834 - 0{,}81)\ \mathrm{kg/dm^3}} =$$

$$= 10\ \mathrm{dm^3} = 10\ \mathrm{l}.$$

2. Hmotnost láhve je

$$M = Q - DV =$$

$$= 19{,}34\ \mathrm{kg} - 1{,}834\ \mathrm{kg/dm^3} \,.\, 10\ \mathrm{dm^3} =$$

$$= 1\ \mathrm{kg}.^{*)}$$

Jaká byla teplota?

Žák zapisoval teplotu po dobu deseti dnů. Označíme-li a teplotu první den, pak v následujících dnech byla teplota (v °C) $a + 0{,}5$; $a + 1$; $a + 1{,}5$; …; $a + 4{,}5$. Sečtením těchto teplot (které tvoří aritmetickou posloupnost o deseti členech s diferencí $r = 0{,}5$ a prvním členem a) dostaneme $10a + 22{,}5$.

Je tedy $\frac{1}{10}(10a + 22{,}5) = 18{,}25$, odkud máme $a = 16$.

Dne 17. května ukazoval teploměr teplotu 17 °C.

Převodové pásy

Nechť průměry kol K_1 a K_2 jsou $2R$ a $2r$ a jejich poměr $2R : 2r = x$. Potom $R = rx$, odkud plyne, že počet otáček kola K_2 je x-krát větší než počet otáček kola K_1. Za dobu, za kterou se kolo K_1 otočí 50krát, otočí se kolo K_2 $50x$-krát. Stejný počet otáček ($50x$) vykoná kolo K_3. Poměr poloměrů K_3 a K_4 je také roven x, takže kolo K_4 vykoná x-krát tolik otáček co kolo K_3 čili $50x \,.\, x = 50x^2$ otáček. Je tedy

$$50x^2 = 450, \quad x = 3.$$

Poloměr kol K_1 a K_3 je roven trojnásobku poloměru kol K_2 a K_4.

Rychlost jízdy

Nechť k označuje počet úplných otáček pedálu, a tedy zároveň i rychlost měřenou v km/h, p nechť je poměr počtu zubů předního a zadního ozubeného kola (převod), a obvod zadního kola v metrech a t hledaný čas v sekundách.

Otočím-li pedálem k-krát, otočí se zadní kolo kp-krát, takže urazím dráhu akp metrů. Průměrná rychlost na tomto úseku se bude rovnat $v = \frac{akp}{t}$ m/s, což se má rovnat počtu otáček pedálu, tj. rychlosti měřené v km/h: $\frac{akp}{t}$ m/s $= k$ km/h. Převedeme-li obě strany rovnice na stejné jednotky (1 km = 1 000 m, 1 h = 60 . 60 s), dostaneme

$$\frac{akp \,.\, 60 \,.\, 60}{t \,.\, 1\,000} = k\,;$$

odtud $t = 3{,}6ap$.

Příklad: Přední ozubené kolo má 46 zubů, zadní 18, takže $p = \frac{46}{18} = 2{,}55$. Obvod nahuštěného kola je

$$a\ \mathrm{m} = 2{,}18\ \mathrm{m}.$$

Odtud $t = 3{,}6 \,.\, 2{,}55 \,.\, 2{,}18 = 20{,}01$.

Jedu-li na tomto kole, musím počítat otáčky pedálu po dobu 20 sekund. Zjištěné číslo (počet otáček) udává rychlost jízdy v km/h v daném okamžiku.

Čtyři střely

Matematické řešení vyžaduje sestavení diferenciální rovnice, avšak úlohu lze řešit i elementární úvahou. Musíme si představit, že čtyři střely jsou za letu stále ve čtyřech vrcholech čtverce, který se současně zmenšuje a otáčí ve směru hodinových ručiček. Nato musíme „zapomenout" na otáčení a uvažovat jen zmenšování čtverce. Protože střely míří jedna na druhou, dráha každé z nich probíhá stále podél strany zmenšujícího se čtverce, ve směru ke střele nacházející se v sousedním vrcholu. Následkem toho je rychlost zmenšování strany čtverce rovna rychlosti střely, tj. 1 km/s. Počáteční vzdálenost byla 20 km, tedy do vzájemného zásahu uplyne 20 sekund.

Dva plavci

Nechť dráha (bazén) je dlouhá x metrů. Od startu do prvního setkání uplaval A vzdálenost $(x + 5)$ m, zatímco B uplaval $(x - 5)$ m. Rozdíl těchto vzdáleností je $(x + 5) - (x - 5) = 10$ metrů.

---

*) Kdybychom láhev naplnili látkou, jejíž hustota je $D - d$, vážil by obsah $Q - q$ (v obou hmotnostech, Q i q, je započtena hmotnost láhve, takže odečtením se zruší). Tím dostaneme uvedený vzorec pro objem láhve. Můžeme také nejdříve vypočítat hmotnost láhve, neboť $(Q - M)/D = (q - M)/d$. (Pozn. překl.)

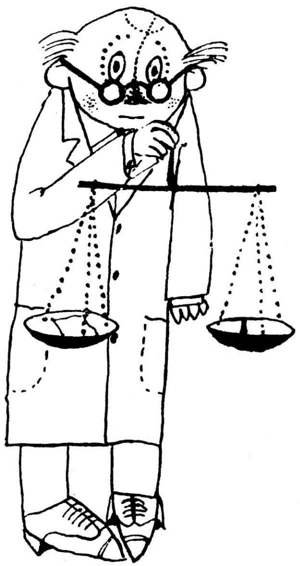
Okamžik prvního setkání můžeme považovat za okamžik nového startu. Vzhledem k tomu uplave A až do dalšího setkání opět o 10 m víc než B.*) Tedy pětina délky bazénu je 10 m a celý bazén měří 50 m.

*) Skutečně, k druhému setkání dojde v okamžiku, kdy oba plavci jsou stejně vzdáleni od startu (plavou ovšem opačnými směry). Takový okamžik nastane, když rychlejší z plavců uplave $2(x + 5) = 2x + 10$ metrů, zatímco pomalejší uplave $2(x - 5) = 2x - 10$ metrů. Jsou tedy v okamžiku setkání 10 m od startu. (Pozn. překl.)

Než odpovíme na otázku položenou v nadpise, povězme si několik slov o *metrologii*. Tímto pojmenováním rozumíme nauku, jejímž hlavním úkolem je stanovení jednotek měření, vytváření přesných modelů těchto jednotek a vypracovávání metodiky měření.

Skoro až do konce 19. století se metrologie zabývala popisováním měr různého druhu. Popisovala míry délkové, plošné, objemové, váhové, časové, peněžní i jiné.

Protože v dnešní době je zaveden jednotný systém měr, nezabývá se současná metrologie popisováním různých, dnes již neaktuálních národních



jednotek míry ani stanovením jejich vztahů. Těmito otázkami se zabývá historická metrologie. Současná moderní metrologie je odvětvím fyziky, vědy, v níž přední místo zaujímá výzkum založený na pokusech, které vyžadují velmi vysokou přesnost měření. Obor metrologie se značně rozšířil. Vedle klasických jednotek délky, obsahu, objemu atd. stanoví také jednotky mechanické, tepelné, elektrické, magnetické, světelné a řadu jiných.

Vážení je velmi důležitým oddílem metrologie. Protože máme odpovědět na otázku „kolik váží Stanislav?“, seznamme se ještě stručně s dějinami základního zařízení užívaného k vážení, s váhami.

Váhy jsou jedním z nejstarších měřicích přístrojů. Obrázky vah nacházíme na egyptských a babylónských památkách (z doby více než 3 000 let před naším letopočtem), kde jsou znázorněny váhy ve tvaru rovnoramenné páky. Také ve starověkém Řecku byly používány váhy založené na principu rovnoramenné páky. Princip nerovnoramenné páky použili poprvé k sestrojení vah Arabové. Na tomto principu byl sestrojen tzv. přezmen, který má na jednom rameni stupnici s posuvným závažím. Takové váhy byly všeobecně používány v římském státě.

V roce 1670 byly sestrojeny miskové váhy s miskami umístěnými nad rameny páky.

Vynikající matematik L. Euler zpracoval moderní vědecké základy vážení (1738). V roce 1818 byly sestrojeny první váhy decimální, roku 1831 váhy centimální (1 : 100).*)

V druhé polovině 19. století se začaly velmi hojně vyrábět váhy k vědeckým účelům a také automatické a pružinové váhy. Současně byly vypracovány různé způsoby přesného vážení.

Vážení může být založeno na různých fyzikálních zákonech. Může to být Archimédův zákon o nadlehčování tělesa ponořeného do kapaliny (váha hydrostatická, areometr); Hookeův zákon o prodloužení pružiny, jež je úměrné působící síle (pružinové váhy, „mincíř“); zákon o rovnováze na páce aj.

Vysoce citlivé a přesné metrologické váhy, jejichž údaje se pozorují z oddělené místnosti (aby vážení nebylo ovlivněno osobou provádějící měření), slouží k ověření správnosti závaží užívaných v technice, ve vědeckých laboratořích i v některých obchodních odvětvích. Vážit na nich lze tělesa až do hmotnosti 1 kg, přičemž přesnost údajů dosahuje 0,002 mg.

K vážení drahokamů a různých látek při přesném chemickém rozboru používáme speciální analytické váhy. Na analytických váhách lze vážit tělesa o hmotnosti až 200 g. Je-li zapotřebí zvážit obzvláště přesně malé množství látek, používáme mikroanalytické váhy. Největší přípustné zatížení takových vah je 20 g.

Nyní již můžeme odpovědět na otázku, kolik váží Stanislav. Na vysoce citlivých a přesných váhách byl zvážen nejprve čistý kousek papíru, pak na něj bylo napsáno obyčejným inkoustem „Stanislav“ a papírek byl zvážen podruhé. Ukázalo se, že papírek, na němž bylo napsáno jméno Stanislav, váží o 0,3 mg více, než vážil tentýž papírek čistý. „Stanislav“ tedy váží 0,3 mg. Odhadneme-li, že hmotnost počátečního (velkého) písmene S se rovná hmotnosti dvou malých písmen, dostáváme, že deset malých písmen váží asi 0,3 mg. Jedno písmeno váží tedy 0,03 mg.

Tečka, písařská značka (.), váží 0,001 5 mg. Geometrický bod neváží nic, neboť nemá rozměr.

■ Dějiny korce, loktu a stopy

Korec, loket, stopa a píď – to jsou prastaré názvy jednotek míry. Jak je z názvů vidět, byly odvozeny z rozměrů lidského těla.

Nejen náš, ale i jiné jazyky svědčí o tom, že původní míry pocházejí z rozměrů člověka: anglické slovo „foot“,

*) Sestrojení decimálních a centimálních vah bylo umožněno přechodem na desetinný systém měr a vah, zavedený v období francouzské revoluce. Jejich princip (nerovnoramenná páka) byl znám již dlouho předtím. (Pozn. překl.)

německé „Fuß“, francouzské „pied“ – stopa – jsou toho důkazem.

Totéž je možno říci o loktu. Starofrancouzské slovo „aulne“, dánské „aln“, německé „Elle“, italské „braccio“ znamenající totéž co loket bylo užíváno jako název jednotky délky. Rčení „nevzdáme se ani pídě naší země“ je všeobecně známé.

Takové jednotky působily mnoho potíží, neboť není loket jako loket ani stopa jako stopa. Podle pověsti byla pravzorem francouzské stopy stopa císaře Karla Velikého a délka anglického yardu (staroanglicky gyrd), která byla stanovena králem Jindřichem I. r. 1101, se rovnala délce jeho paže změřené až ke špičce prostředníku. V Polsku byla prý délka stopy stanovena tak, že třicet lidí vycházejících po bohoslužbě z kostela se postavilo do zástupu, aby se jejich stopy dotýkaly. Pak byla změřena délka těchto třiceti stop a výsledek rozdělen na třicet stejných dílů. Tím se obdržela „průměrná“ stopa.

Co se týče loktu, nejen že každé město mělo svůj loket, ale některé zboží bylo měřeno zvláštním loktem. Jiný loket byl na plátno, jiný na sukno, jiný na zlatohlav (brokát). Proto vzniklo rčení „ukaž mi, jakým loktem měříš“.

Korec byl jednotkou objemu.*) Předtím to byl bezpochyby název všeobecně používané nádoby. Ačkoli byl korec znám v celém Polsku, nebyl jednotně stanoven. Korec se dělil na čtyři „čtvrti“, stejně jako hrnec se dělil na čtyři „kvarty“.

Ve výnosech krále Ladislava Jagellonského byl příkaz vojvodům, aby každý rok v určitý den stanovili míry obilí, látek i jiných věcí „podle odedávna přijatých zvyklostí“.

Ústava Piotrkovského sněmu, vydaná v roce 1545 za vlády Zikmunda II.-Augusta, obsahuje „zákon o mírách a váhách“, který je důkazem snahy o sjednocení měr. Píše se tam:

„... Rozkázali jsme již po všem kraji ustanovit jednotnou váhu.

A co se týče loktů všelijakého zboží: má být tedy po všem království jeden královský loket podle nynější míry krakovské.

Korec by po všem království měl být stejný, jaký jest v hlavním městě onoho vojvodství nebo země.“**)

Snaha o sjednocení měr a vah trvala

*) Dnes víme, že korec je míra plochy (obdobně jako ar či hektar, ale také strych) užívaná při měření rozlohy polností. Zřejmě zde byl přenesen význam objemu obilí vysetého na plochu přímo do názvu plošného dílce (korec). (Pozn. překl.)

**) V českém království se už Václav I. (vládl v letech 1230 až 1253) snažil o sjednocení všech měr. Za vlády Přemysla Otakara II. (1253 – 1278) se všechny míry a závaží musely cejchovat. Neboť, jak říká kronikář: „Toho času byli v Čechách velicí neřádové se strany měření a vážení všelijakých věcí, neb každý prodávající měřil a vážil, jak se mu líbilo... Když se to králi (Přemyslu Otakarovi II.) doneslo, sněmem obecným zřízení vydal, všechny míry a váhy byly změřeny a zváženy a znamením královským aby byly poznamenány.“ To se stalo r. 1268. Řada podobných opatření té doby, mezi něž musíme počítat i soupisy majetku, se stala vzorem i pro sousední země. (Pozn. překl.)

však v Polsku skoro dvě století. V roce 1764 za vlády Stanislava Augusta vydala komise královského pokladu z pověření konvokačního sněmu „Stanovení míry generální", odvolávajíc se na „Zákon o váhách a mírách" z roku 1565, a sněm tyto výnosy v tomtéž roce potvrdil. Tím byly zrušeny všechny lokty, hrnce, půlhrnce, kvarty atd. a byly navždy stanoveny generální varšavské radniční míry, které byly závazné v celém království „cum Provinciis annexis".

V zákonu je velmi podrobně popsán korec a je udán také předpis, jak jím měřit.

Francouzská revoluce otřásla tradicionalismem a zreformovala soustavu měr i vah. Místo týdne (7 dní) zavedla dekádu (10 dní); počítání let začala od prvního roku revoluce místo od narození Kristova; změnila názvy měsíců; místo stop, loktů a korců zavedla metr (jednu desetimilióntinu čtvrtiny pařížského poledníku) čili „míru" (metron znamená řecky míru) založenou na nezměnitelné veličině, na délce poledníku. Z desetiny metru čili decimetru byla odvozena míra objemová čili litr (kubický decimetr) a váha tisíce litrů vody dávala tunu, jednotku hmotnosti.

V době těchto změn prožilo Polsko katastrofu: ztratilo svoji nezávislost. Uchvatitelé rozdělili zemi a v podrobených oblastech podle svého hospodařili, zavádějíce tam svoje míry a váhy.

V části, která se dostala pod vládu carského Ruska, přesněji v kongresovém Království Polském, vypracovala Královská společnost přátel vědy pod vedením knížete Stanislava Staszice novou soustavu měr a vah. Byla zachována tradice. Zůstaly dávné názvy měr a vah a také jejich vzájemné vztahy. Zachoval se název korce s jeho dělením, loket i jeho dělení na 24 palců (coulů). Ale Staszic založil tyto novopolské míry na jednotkách metrických. Z jeho iniciativy bylo určeno, že novopolský coul bude přesně roven 24 mm a novopolská čtvrť (kvarta) bude přesně rovna 1 l. Tato Staszicova reforma zachránila kongresové království před „aršíny", „sáhy" a „čtvrtněmi".

■ Falešná mince

Pan *Z* dostal jistý počet zlatých dukátů. Věděl, že mezi nimi je jeden falešný, který je nepatrně lehčí než pravý dukát. Pan *Z* chce objevit falešný dukát s pomocí vah, ale nemá závaží. Jak může objevit falešný dukát tak, aby při tom provedl co nejmenší počet vážení?

Při každém vážení musíme samozřejmě položit na každou misku stejný počet mincí. Mince rozdělíme na tři skupiny: *A*, *B*, *C*. Skupiny *A* a *B*, které zvážíme, mají stejný počet dukátů.

Porovnáme-li skupiny *A* a *B*, mohou nastat dva případy:

1. Skupiny *A* a *B* nejsou v rovnováze. Jedna z nich váží méně, např. *A* je lehčí než *B*. V tom případě je falešná mince ve skupině *A*.

2. Skupiny *A* a *B* jsou v rovnováze. V tom případě je falešná mince ve skupině *C*.

Je-li počet všech mincí 2 nebo 3, stačí k objevení falešné mince jediné vážení. Při čtyřech mincích jsou již nutná dvě vážení. Skutečně: nezávisle na tom, jak jsme utvořili skupiny *A* a *B* (po jedné minci nebo po dvou), nalezneme falešnou minci – po objevení skupiny, v které se nachází – druhým vážením. Můžeme se tázat, jaký je největší počet mincí, při němž ještě dvě vážení stačí k odhalení falešné mince.

Protože nevíme, který ze dvou případů nastane při prvním vážení, musí být splněny současně dvě podmínky:

1. Skupina *C* smí obsahovat nejvýše tři mince, abychom byli schopni rozřešit situaci, která by nastala v případě ***2*** (*A* a *B* v rovnováze).

2. Skupiny *A* a *B* mohou obsahovat každá nejvýše tři mince, abychom byli schopni rozřešit situaci v případě ***1*** (*A* a *B* v nerovnováze).

Je dokázáno, že v případě, kdy počet mincí není větší než 9, můžeme odhalit falešnou minci dvojím vážením. Milovníkům podobných úloh ponecháváme provedení důkazu, že trojí vážení postačí k odhalení falešné mince mezi nejvýše 27 mincemi. Obecnější metodou se dá dokázat, že *n* vážení postačí k odhalení falešné (lehčí) mince z počtu 3^n mincí.

Úlohu nalezení falešné mince je možno velmi zkomplikovat. Můžeme např. předpokládat, že nevíme, zda falešná mince je lehčí či těžší, zda je falešná jen jedna mince či dvě, zda naše váhy jsou přesné apod.

■ Zábavné úlohy

Devět míčků

Máš devět pingpongových míčků. Jeden z nich je těžší než ostatní. Úkolem je nalézt jej dvojím vážením na miskových váhách bez závaží.

Záhada dvanácti dukátů

Mezi dvanácti dukáty je jeden falešný, lišící se nepatrně váhou od ostatních. Nevíme však, je-li lehčí nebo těžší než pravé dukáty. Najdi falešný dukát trojím vážením na miskových váhách, nemáš-li žádná závaží.

Úkol je obtížný. Chceme však, aby jej každý rozřešil samostatně nebo jen s malou pomocí. Proto uvedeme nyní jen úvodní pokyny.

1. Označíme všechny pravé dukáty písmenem *D*, falešný dukát označíme D_x.

2. Všechny dukáty rozdělíme na tři skupiny po čtyřech: *DDDD*, *DDDD*, $DDDD_x$. Nevíme ovšem, v které skupině je D_x. To, že jsme jej napsali do třetí skupiny, je dáno nutností konkrétního zápisu.

3. Dvě skupiny dukátů vezmeme a položíme na misky vah, jednu na levou misku a druhou na pravou misku.

Třetí skupina zůstane ležet na stole. Nastane jedna ze tří možných variant:

I. Misky jsou v rovnováze.

II. Levá miska je těžší, klesá dolů.

III. Pravá miska je těžší, klesá, zatímco levá stoupá.

Ve variantě I leží falešný dukát na stole, ve třetí skupině. Ve variantě II a III jsou v třetí skupině (na stole) pravé dukáty, není mezi nimi D_x; falešný dukát je na jedné misce vah.

Všechny tyto varianty je třeba podrobně vyšetřit. To čtenář provede s použitím dvou vážení.

Uveďme snazší verzi naší úlohy. V ní se předpokládá, že falešný dukát je lehčí (těžší) než pravý. Pokuste se samostatně rozřešit aspoň tuto snazší úlohu.

Deset otázek

Zodpovíš-li následujících deset otázek správně během osmi minut, prokážeš velmi dobrou početní zručnost; bude-li ti řešení trvat deset minut, jsi dobrý počtář; zodpovíš-li během deseti minut správně šest otázek, je tvoje početní zručnost dostatečná. Odpovídat smíš v libovolném pořadí. Zde jsou otázky:

1. Kolik různých čtyřciferných čísel lze napsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4? V každém napsaném čísle musí být všechny čtyři číslice.

2. Číslo 12 lze rozdělit na různý počet stejných celočíselných sčítanců (totiž na 2, 3, 4 nebo 6). Při kterém rozdělení je součin sčítanců největší?

3. 1 kg jablek, 1 kg švestek a 1 kg hrušek stojí dohromady 20 Kčs; 2 kg jablek, 1 kg švestek a 1 kg hrušek stojí 24 Kčs; 1 kg jablek, 2 kg švestek a 1 kg hrušek stojí 26 Kčs. Kolik stojí 1 kg jablek, kolik 1 kg švestek a kolik 1 kg hrušek?

4. Napiš číslo obsahující 22 tisíce, 22 stovky a 22 jednotky.

5. Ve škole je šest tříd. V první, druhé a třetí třídě je dohromady 120 žáků; ve čtvrté třídě je o 8 žáků méně než ve třetí třídě; v páté třídě je o 10 žáků víc než v první třídě a v šesté třídě je o 2 žáky víc než ve druhé třídě. Kolik žáků je na celé škole?

6. Který součet je větší: součet čísel od 1 do 11 včetně nebo součet čísel od 11 do 15 včetně?

7. Rozdíl dvou kladných čísel je 1, jejich součet je 6. Která jsou to čísla?

8. Pomocí číslic 2, 3 a matematických znaků napiš dvanáct různých kladných čísel, v nichž se vyskytují jen tyto dvě číslice.

9. V jaké číselné soustavě číslo 100 znamená číslo 25 z desítkové soustavy?

10. Součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je 120; součin obou krajních čísel je 24. Urči tato čísla.

■ Řešení úloh

Devět míčků

Míčky rozdělíme na tři skupiny po třech. Na levou misku vah položíme jednu trojici míčků, na pravou misku druhou trojici. Mohou nastat dva případy:

I. Obě misky jsou v rovnováze. Pak je těžší míček ve třetí skupině. Jeden míček z této skupiny položíme na levou misku, druhý na pravou. Při rovnováze misek je hledaný těžší míček zbývající míček ze třetí skupiny. Nejsou-li misky v rovnováze, ihned poznáme těžší míček.

II. Misky nejsou v rovnováze. Těžší míček je na misce, která klesla dolů. Z té misky vezmeme dva míčky a porovnáme jejich hmotnost na miskách. Tímto způsobem najdeme těžší míček stejně jako v případě I.

Záhada dvanácti dukátů

Zkoumejme variantu I prvního vážení (viz pokyny v zadání úlohy), při kterém jsme zjistili, že falešný dukát leží mezi zbývajícími čtyřmi na stole.

1. Na levou misku položíme tři pravé dukáty, na pravou tři dukáty ze skupiny, v níž je falešný dukát D_x (druhé vážení).

2. Nastane-li rovnováha, pak zbývající dukát na stole je falešný.

3. Objevený falešný dukát položíme na pravou misku, kterýkoli pravý dukát na levou (třetí vážení). Jestliže levá miska stoupá, je D_x těžší, klesá-li, je D_x lehčí než D.

Jestliže při druhém vážení nenastala rovnováha (bod 2), je falešný dukát D_x na pravé misce. Mohou nastat dva případy: a) $DDD > DDD_x$ nebo b) $DDD < DDD_x$.*)

V případě a) je jasné, že D_x je lehčí než D. Abychom lehčí dukát objevili, postupujeme jako v předešlé úloze o pingpongových míčcích: Položíme na misky vah po jednom dukátu ze skupiny, v níž je falešný (lehčí) dukát. Nastane-li rovnováha, je falešný zbývající dukát z této trojice; nenastane-li, je jím lehčí z obou dukátů na váhách.

Případ b) zkoumáme obdobně jako případ a). Tím jsme vyšetřili všechny možnosti varianty I, uvedené v pokynech k úloze.

Zkoumejme nyní variantu II prvního vážení (uvedenou v pokynech): Levá miska je těžší než pravá.

D_x je mezi dukáty na váhách, na stole leží pravé dukáty $DDDD$. Protože další úvahy jsou dost spletité, označíme dukáty na levé misce D_1, D_2, D_3, D_4 a dukáty na pravé misce D_5, D_6, D_7, D_8. Na levou misku položme D_1, D_2, D_3, D_5 a na pravou D_4 a DDD – tři dukáty ze čtyř pravých. Při tomto (druhém) vážení mohou nastat tři případy: a) $D_1D_2D_3D_5 = D_4DDD$ nebo b) $D_1D_2D_3D_5 > D_4DDD$ nebo konečně c) $D_1D_2D_3D_5 < D_4DDD$.

V případě a) je D_x mezi D_6, D_7, D_8. V třetím vážení zkoumáme trojici $D_6D_7D_8$. Porovnáváme D_6 s D_7. Je-li $D_6 = D_7$, je $D_x = D_8$ a je lehčí než

*) Znaménko > a < se zde ovšem používá ve smyslu „je těžší než“ a „je lehčí než“. (Pozn. překl.)

pravý dukát. Je-li $D_6 > D_7$, je $D_x = D_7$. Je-li $D_6 < D_7$, je $D_x = D_6$.

Případ b). Protože $D_1D_2D_3D_5 > D_4DDD$, jsou dukáty $D_6D_7D_8$ pravé; D_4 je rovněž pravý, protože v opačném případě by dukáty D_4DDD byly těžší než dukáty $D_1D_2D_3D_5$, neboť D_4 byl při prvním vážení v těžší skupině. Protože D_5 byl při prvním vážení v lehčí skupině, nemůže mít vliv na nerovnováhu $D_1D_2D_3D_5 > D_4DDD$. Je tedy D_5 pravý a falešný dukát D_x je mezi $D_1D_2D_3$. Při třetím vážení porovnáme D_1 a D_2. Je-li $D_1 = D_2$, je $D_x = D_3$ a je těžší. Je-li $D_1 > D_2$, je $D_x = D_1$. Je-li $D_1 < D_2$, je $D_x = D_2$.

Případ c). Protože $D_1D_2D_3D_5 < D_4DDD$, jsou dukáty $D_6D_7D_8$ pravé. Dukáty $D_1D_2D_3$ musí být také pravé, protože při prvním vážení byly spolu s D_4 v těžší skupině a nyní jsou v lehčí, takže nemohou mít vliv na výchylku misek. Falešný dukát D_x je tedy buď lehčí dukát D_5, nebo těžší dukát D_4, což snadno zjistíme třetím vážením porovnáním jednoho z nich s dukátem D.

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti varianty II z prvního vážení.

Rozbor varianty III prvního vážení je zcela obdobný provedenému rozboru varianty II. Ponecháváme jej čtenáři jako výborné logické cvičení.

Deset otázek

1. Tolik, kolik činí součin $1 . 2 . 3 . 4$, tj. 24.

2. Na čtyři sčítance. Největší součin je $3 . 3 . 3 . 3 = 81$.

3. 1 kg jablek stojí 4 Kčs, 1 kg švestek 6 Kčs a 1 kg hrušek 10 Kčs.

4. 24 222.

5. 244, neboť ve čtvrté, páté a šesté třídě je tolik žáků jako v první, druhé a třetí plus $(10 + 2 - 8)$.

6. Součet od 1 do 11, tj. 66, je větší než součet od 11 do 15, tj. 65.

7. Hledaná dvojice čísel je 3,5 a 2,5.

8. Zde je jich dokonce třináct: 23; 32; 2,3; 3,2; $3 . 2$; $3 + 2$; $3 - 2$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; 2^3; 3^2; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[2]{3}$.

9. V pětkové soustavě: $100_{(5)} = 1 . 5^2 + 0 . 5^1 + 0 . 5^0 = 25$.

10. 4, 5, 6.

Říkáme, že dvě celá čísla jsou *kongruentní podle daného modulu*, jestliže při dělení obou čísel tímtéž dělitelem, tzv. *modulem*, dostaneme stejný zbytek; nebo jinými slovy, jestliže rozdíl obou čísel je dělitelný modulem. Například čísla 9 a 17 jsou kongruentní podle modulu 4, neboť jak 9, tak 17 dá při dělení číslem 4 zbytek 1. Tento vztah zapisujeme ve tvaru

$$9 \equiv 17 \pmod 4.$$

Podobně 7 a 2 jsou kongruentní podle modulu 5, tj.

$$7 \equiv 2 \pmod 5,$$

protože rozdíl $7 - 2$ je beze zbytku dělitelný číslem 5.

Popsaný vztah mezi čísly se nazývá *kongruence*. Kongruence uvažujeme jen mezi celými čísly a za moduly volíme jen čísla přirozená.

Kongruenci čísel a a b podle modulu m zapisujeme obecně ve tvaru

$$a \equiv b \pmod m.$$

Uvedeme nyní některé vlastnosti kongruence:

1. Každé číslo je kongruentní samo se sebou podle libovolného modulu, tj. $a \equiv a \pmod m$.

2. Jestliže $a \equiv c \pmod m$ a také $b \equiv c \pmod m$, pak platí $a \equiv b \pmod m$; např. $9 \equiv 5 \pmod 4$ a $13 \equiv 5 \pmod 4$; tedy také $9 \equiv 13 \pmod 4$.*)

3. Kongruence, které mají stejný modul, můžeme sčítat tak, že sečteme levé a pravé strany: např. $23 \equiv 3 \pmod 5$, $9 \equiv 24 \pmod 5$, tedy také $32 \equiv 27 \pmod 5$.

4. Ke každé straně kongruence můžeme přičíst (nebo od ní odečíst) tentýž násobek modulu: např. přičteme-li k oběma stranám kongruence $19 \equiv 7 \pmod 4$ číslo $4 . 3 = 12$, dostaneme $31 \equiv 19 \pmod 4$.**)

5. Obě strany kongruence můžeme vynásobit tímtéž číslem nebo umocnit na stejný mocnitel: např. $9 \equiv 5 \pmod 4$, tedy a) $90 \equiv 50 \pmod 4$ – obě strany jsme znásobili 10, b) $81 \equiv 25 \pmod 4$ –

*) Doplňme ještě jednu vlastnost kongruence: Je-li $a \equiv b \pmod m$, je také $b \equiv a \pmod m$. To je tzv. vlastnost symetrie, která spolu s uvedenými vlastnostmi reflexivity (bod 1) a tranzitivnosti (bod 2) je základem pro odvození všech ostatních vlastností kongruence. (Pozn. překl.)

**) Přičítané (odečítané) číslo nemusí být násobkem modulu, ale může být libovolné. Dokažme to: Je-li $a \equiv b \pmod m$, znamená to totéž, jako že $a - b$ je dělitelné m; ale potom $a + c - (b + c) = a - b$ je dělitelné m, což je totéž jako $a + c \equiv b + c \pmod m$. Podobně můžeme dokázat ostatní tvrzení. (Pozn. překl.)

obě strany jsme umocnili na druhou.

Na základě uvedených vlastností kongruence můžeme dokázat, že číslo $2^{256} - 1$ dá při dělení 7 zbytek 1. Je totiž $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, a tedy $(2^3)^{85} \equiv 1^{85} \pmod 7$ čili $2^{255} \equiv 1 \pmod 7$. Obě strany této kongruence znásobíme číslem 2; $2^{256} \equiv 2 \pmod 7$. Nyní od obou stran odečteme 1; dostaneme $2^{256} - 1 \equiv \equiv 1 \pmod 7$. Z této kongruence plyne, že číslo $2^{256} - 1$ děleno 7 dá zbytek 1.

■ Dělitelnost čísel

Pravidla dělitelnosti čísel – ta přece známe již ze základní školy! Ano, ale žádné z těchto dobře známých pravidel jsme nespojovali s nějakou zajímavou úlohou. A přitom je jich celá řada.

Abychom si o nich mohli pohovořit, musíme si připomenout znaky dělitelnosti čísly od 2 do 15. Zde jsou:

číslem 2 jsou dělitelná všechna sudá čísla, např. 272, 380, ... ;

číslem 3 jsou dělitelná všechna čísla, jejichž ciferný součet (součet všech jejich číslic) je dělitelný 3, např. 2 817, jehož součet 2 + 8 + 1 + 7 je dělitelný 3;

číslem 4 jsou dělitelná všechna čísla, jejichž poslední dvojčíslí je dělitelné 4 (2^2), např. 268;

číslem 5 jsou dělitelná všechna čísla končící nulou nebo číslicí 5;

číslem 6 jsou dělitelná všechna čísla dělitelná současně 2 a 3;

číslem 8 jsou dělitelná všechna čísla, jejichž poslední trojčíslí je dělitelné 8 (2^3), např. 8 720; obecně, číslem 2^n jsou dělitelná všechna čísla, jejichž poslední n-číslí je dělitelné 2^n;

číslem 9 jsou dělitelná všechna čísla, jejichž ciferný součet je dělitelný 9, např. 2 817, neboť součet 2 + 8 + 1 + 7 je dělitelný 9;

číslem 10 jsou dělitelná všechna čísla končící nulou;

číslem 12 jsou dělitelná všechna čísla dělitelná současně 3 a 4;

číslem 14 jsou dělitelná všechna čísla, která jsou současně dělitelná 2 a 7;

číslem 15 jsou dělitelná všechna čísla, která jsou současně dělitelná 3 a 5.

Čtenář si jistě všiml, že jsme vynechali znaky dělitelnosti čísly 7, 11 a 13. Ty nejsou tak jednoduché a je snazší zkoumat dělitelnost daného čísla číslem 7, 11 nebo 13 přímo dělením než používat nějakého pravidla. Přesto však nám znalost těchto pravidel umožní řešit řadu úloh, které bychom jinak těžko rozřešili.

Dělitelnost číslem 7 je spjata s pojmem kongruence. Připomeňme si definici kongruence.

Čísla a a b jsou kongruentní podle modulu m, jestliže rozdíl $(a - b)$ je dělitelný číslem m; nebo jinak, jestliže a děleno m i b děleno m dá stejný zbytek. Například 26 a 12 jsou kongruentní podle modulu 7, neboť 26 − 12 = 14 je dělitelné 7, čili 26 : 7 a 12 : 7 dává stejný zbytek.

Každé víceciferné číslo můžeme napsat ve tvaru mnohočlenu seřazeného podle mocnin 10, např.

$$426\,738 = 4 \,.\, 10^5 + 2 \,.\, 10^4 + 6 \,.\, 10^3 + 7 \,.\, 10^2 + 3 \,.\, 10^1 + 8 \,.\, 10^0.$$

Vyšetřme kongruence jednotlivých mocnin čísla 10 podle modulu 7. Pro stručnost zapisujme získané vztahy v matematické formě:

$10^0 \equiv 1 \pmod 7$, neboť $1 - 1 = 0$ (0 je dělitelná 7);

$10^1 \equiv 3 \pmod 7$, neboť $10 - 3 = 7$ (7 je dělitelné 7);

$10^2 \equiv 2 \pmod 7$, neboť $100 - 2 = 98$ (98 je dělitelné 7);

$10^3 \equiv 6 \pmod 7$, neboť $1\,000 - 6 = 994$ (994 je dělitelné 7);

podobně dostáváme

$10^4 \equiv 4 \pmod 7$,
$10^5 \equiv 5 \pmod 7$.

Kdybychom vyšetřovali další mocniny čísla 10, zjistili bychom, že posloupnost čísel 1, 3, 2, 6, 4, 5 se opakuje, např. $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, $10^7 \equiv 3 \pmod 7$ atd.

Tuto posloupnost čísel nazýváme *charakteristickou posloupností* pro dělitel 7.

Vycházejíce z vlastností kongruence, můžeme nyní odvodit znak dělitelnosti 7.

Vyšetřme například, zda číslo

426 738

je dělitelné 7.

Pro zřetelnost napíšeme číslice zkoumaného čísla zprava doleva do sloupce a vynásobíme je odpovídajícími čísly charakteristické posloupnosti; do druhého sloupce napíšeme zbytky, které dostaneme po odečtení vhodných násobků 7 od těchto součinů:

$$\begin{array}{ll} 8 \,.\, 1 = 8, & 8 - (1 \,.\, 7) = 1, \\ 3 \,.\, 3 = 9, & 9 - (1 \,.\, 7) = 2, \\ 7 \,.\, 2 = 14, & 14 - (2 \,.\, 7) = 0, \\ 6 \,.\, 6 = 36, & 36 - (5 \,.\, 7) = 1, \\ 2 \,.\, 4 = 8, & 8 - (1 \,.\, 7) = 1, \\ 4 \,.\, 5 = 20, & 20 - (2 \,.\, 7) = 6. \end{array}$$

Vypočteme součet součinů jednotlivých číslic zkoumaného čísla s čísly charakteristické posloupnosti:

$$8 \,.\, 1 + 3 \,.\, 3 + 7 \,.\, 2 + 6 \,.\, 6 + 2 \,.\, 4 + 4 \,.\, 5 = 95$$

a také součet zbytků

$$1 + 2 + 0 + 1 + 1 + 6 = 11.$$

Ani číslo 95, ani 11 není dělitelné 7, a tedy ani číslo 426 738 není dělitelné 7.

Jiný příklad: Zkoumejme číslo 1 620 941. Znovu napíšeme do sloupce jeho číslice zprava doleva a vynásobíme čísly charakteristické posloupnosti; v druhém sloupci vypočteme odpovídající zbytky:

$$\begin{array}{ll} 1 \,.\, 1 = 1, & 1 - (0 \,.\, 7) = 1, \\ 4 \,.\, 3 = 12, & 12 - (1 \,.\, 7) = 5, \\ 9 \,.\, 2 = 18, & 18 - (2 \,.\, 7) = 4, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
0 \,.\, 6 &= 0, & 0 - (0 \,.\, 7) &= 0,\\
2 \,.\, 4 &= 8, & 8 - (1 \,.\, 7) &= 1,\\
6 \,.\, 5 &= 30, & 30 - (4 \,.\, 7) &= 2,\\
1 \,.\, 1 &= 1, & 1 - (0 \,.\, 7) &= 1.
\end{aligned}
$$

Součet součinů je nyní 70, součet zbytků 14. Obě čísla jsou dělitelná 7, a tedy i dané číslo 1 620 941 je dělitelné 7. Zjistíme-li, že dané číslo není dělitelné 7, dovíme se tímto způsobem, jaký je zbytek: např. zbytek při dělení čísla 426 738 sedmi je 95 bez největšího možného násobku 7 čili

$$95 - 7 \,.\, 13 = 4 \quad (11 - 7 = 4).$$

Znaky dělitelnosti čísla 11 a 13 jsou obdobné. Je třeba vypočítat příslušné charakteristické posloupnosti: pro číslo 11 má tato posloupnost tvar $-1, 1, -1, 1, \ldots$ a pro číslo 13 tvar $1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, \ldots$. Pak vypočteme součty jednotlivých součinů a zkoumáme jejich dělitelnost.

Vyšetřme např. dělitelnost čísla 80 828 čísly 11 a 13: Platí

$$
\begin{aligned}
8 \,.\, (-1) &= -8, & 8 \,.\, 1 &= 8,\\
2 \,.\, (+1) &= 2, & 2 \,.\, (-3) &= -6,\\
8 \,.\, (-1) &= -8, & 8 \,.\, (-4) &= -32,\\
0 \,.\, (+1) &= 0, & 0 \,.\, (-1) &= 0,\\
8 \,.\, (-1) &= \underline{-8}, & 8 \,.\, 3 &= \underline{24.}\\
&\ -22 & &\ -6
\end{aligned}
$$

Jelikož -22 je dělitelné 11, je také 80 828 dělitelné 11. Naproti tomu -6 není dělitelné 13, takže 80 828 není dělitelné 13.

■ Šeherezádino číslo

Existují čísla pojmenovaná po slavných matematicích: Archimédovo číslo čili číslo

$$\pi \doteq \frac{22}{7},$$

Napierovo číslo čili základ přirozených logaritmů

$$e = 2{,}718\,281 \ldots .$$

Aniž ubereme slávy těmto významným číslům, můžeme uvést ještě jedno číslo, sice ne tak důležité, ale snad o nic méně populární. Je to Šeherezádino číslo 1 001, které vystupuje v nadpise nesmrtelných „Pohádek tisíce a jedné noci“. Z matematického hlediska má číslo 1 001 některé zajímavé vlastnosti:

1. Je nejmenším čtyřciferným číslem, které je možno rozložit na součet dvou třetích mocnin přirozených čísel: $1\,001 = 10^3 + 1^3$.

2. Číslo 1 001 se skládá ze 77 nešťastných třináctek nebo z 91 jedenáctky nebo konečně ze 143 sedmiček (sedmička byla považována za magické číslo). Jestliže budeme uvažovat 52 týdny za jeden rok, pak 1 001 dává

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\text{roku}$$

$$(52 \,.\, 7 + 52 \,.\, 7 + 26 \,.\, 7 + 13 \,.\, 7).$$

Částečný součet

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

je částí nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots .$$

3. A to ještě není vše. Na vlastnostech čísla 1 001 je založen způsob zkoumání dělitelnosti čísel sedmi (a také 11 a 13). Ukažme si tento způsob na příkladech.

Příklad 1.

Je číslo 348 285 dělitelné 7?
Platí

$$
\begin{aligned}
\text{(I)}\quad 348\,285 &= 348 \,.\, 1\,000 + 285 =\\
&= 348 \,.\, 1\,000 + 348 - 348 + 285 =\\
&= 348 \,.\, 1\,001 - (348 - 285).
\end{aligned}
$$

Aby rozdíl na pravé straně (I) byl dělitelný 7, je třeba, aby $348 - 285$ bylo dělitelné 7. Protože $348 - 285 = 63$ je dělitelné 7, je také dané číslo 348 285 dělitelné 7.

Příklad 2.

Je číslo 946 988 875 dělitelné 7?
Platí

$$
\begin{aligned}
946\,988\,875 &= 946\,988 \,.\, 1\,000 +\\
&+ 946\,988 - 946\,988 + 875 =\\
&= 946\,988 \,.\, 1\,001 - (946\,988 - 875).
\end{aligned}
$$

Toto číslo je dělitelné 7, jestliže

$$946\,988 - 875$$

je dělitelné 7. Podobně

$$
\begin{aligned}
946\,988 - 875 &= 946 \,.\, 1\,000 + 946 -\\
&- 946 + 988 - 875 =\\
&= 946 \,.\, 1\,001 - (946 - 113).
\end{aligned}
$$

Toto číslo je dělitelné 7, jestliže

$$946 - 113 = 833$$

je dělitelné 7. Protože 833 : 7 je dělitelné beze zbytku, je také číslo 946 988 875 dělitelné 7.

Odtud plyne, že dělitelnost daného čísla sedmi (nebo 11 nebo 13) zjistíme, jestliže od daného čísla bez posledních tří číslic odečteme číslo utvořené jeho posledními třemi číslicemi. Jestliže tento rozdíl je dělitelný 7 (11, 13), pak také dané číslo je dělitelné 7 (11, 13).

Zajímavá čísla

Všimněte si čísel 11 a 12 $(11 = 10 + 1, 12 = 10 + 2)$:

$10^2 - 1^2$ je dělitelné 11,
$10^3 + 1^3$ je dělitelné 11,
$10^4 - 1^4$ je dělitelné 11,
$10^5 + 1^5$ je dělitelné 11,
$10^6 - 1^6$ je dělitelné 11,
$10^7 + 1^7$ je dělitelné 11
atd.,

$10^2 - 2^2$ je dělitelné 12,
$10^3 + 2^3$ je dělitelné 12,
$10^4 - 2^4$ je dělitelné 12,
$10^5 + 2^5$ je dělitelné 12,
$10^6 - 2^6$ je dělitelné 12,
$10^7 + 2^7$ je dělitelné 12
atd.

Vysvětlíte proč?

Povšimněte si zbytků, které dostanete, když dělíte mocninu deseti jedním z daných čísel. Zvláště prozkoumání dělení jedenácti pomůže objasnit ještě jednu zvláštnost: Dopíšeme-li k nějakému číslu napravo od něho číslo utvořené ze stejných číslic, ale v opačném pořadí, dostaneme číslo dělitelné 11.

Například k číslu 68 připíšeme 86. Dostaneme číslo 6 886, které je dělitelné 11. K číslu 136 připíšeme 631. Dostaneme číslo 136 631, které je dělitelné 11. Proč?

Návod: Rozdělte čísla 6 886 a 136 631 na skupiny po dvou číslicích od pravé strany (od konce čísla). Pak uvažte, jaké zbytky dostaneme při dělení každé skupiny číslem 11.

Znak dělitelnosti jedenácti

Jsou čísla 61 974, 38 148, 30 316, 3 025 dělitelná 11? Odpovídáme: Jestliže rozdíl mezi součtem číslic stojících na lichých místech (od konce čísla) a součtem číslic stojících na sudých místech je dělitelný 11, pak dané číslo je dělitelné 11.

Zkoumejme číslo 61 974;

$(4 + 9 + 6) - (7 + 1) = 19 - 8 = 11$.

Tedy 61 974 je dělitelné 11. Zkoumejme číslo 38 148;

$(8 + 1 + 3) - (4 + 8) = 0$.

Tedy 38 148 je dělitelné 11. Zkoumejme číslo 30 316;

$(6 + 3 + 3) - (1 + 0) = 11$.

Tedy 30 316 je dělitelné 11. Zkoumejme 3 025;

$(5 + 0) - (2 + 3) = 0$.

Tedy 3 025 je dělitelné 11. (Ověřte!)

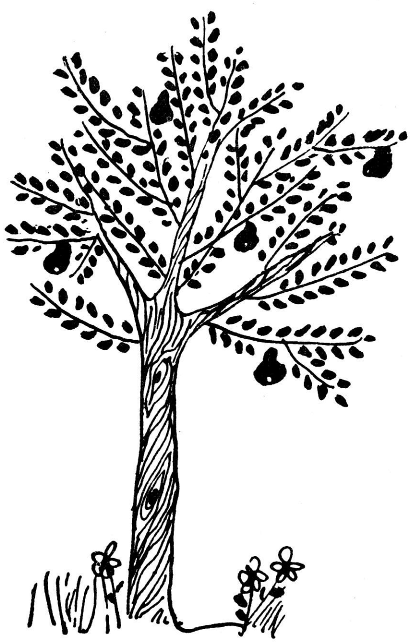
Tento znak dělitelnosti byl znám již arabskému matematiku Al-Karchímu, zvanému též Al-Karádží (11. století). V nynějším znění jej však použil poprvé francouzský matematik J. Lagrange (1736 – 1813).

Zábavné úlohy

Pod kterým stromem je poklad?

Jeden milionář – podivín zanechal tuto závěť:

„V mé zahradě roste šest ovocných stromů: 1 – třešeň, 2 – hrušeň, 3 – jabloň, 4 – ořech, 5 – švestka, 6 – višeň. Pod jedním z těchto stromů jsem zakopal poklad. Ten, kdo chce poklad najít, musí počítat od 1 do 10 004 tímto způsobem: třešeň – 1, hrušeň – 2, jabloň – 3, ořech – 4, švestka – 5,



višeň – 6, švestka – 7, ořech – 8, jabloň – 9, hrušeň – 10, třešeň – 11, hrušeň – 12, jabloň – 13, ořech – 14, švestka – 15, višeň – 16, švestka – 17 atd. Poklad leží pod tím stromem, jemuž odpovídá číslo 10 004.

Jen hlupák bude chodit od stromu ke stromu a počítat. Bystrý člověk nejprve provede výpočet a pak půjde rovnou ke stromu, pod nímž leží poklad.“

Čtyři hádanky

Řešení následujících úloh jsou založena na dříve zmíněných znacích dělitelnosti.

1. Napiš libovolné šestimístné číslo, které není dělitelné sedmi, např. 431 576 (zbytek 5); je možno je zapsat také takto: $431\,576 \equiv 5 \pmod 7$. Utvoř z tohoto čísla šest různých čísel dělitelných sedmi tak, že změníš vždy jednu číslici.

2. Věk tvého přítele je větší než 9 a menší než 100 let (např. 58). Napiš jeho věk třikrát za sebou; dostaneš šestimístné číslo (např. 585 858). Dokaž, že toto číslo je dělitelné sedmi.

3. Napiš nejmenší číslo, které při dělení po řadě čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 dá postupně zbytek 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4. Jaký zbytek vyjde, povýšíme-li 3 na mocnitel 12 345 678 a tuto mocninu dělíme sedmi?

Řešení úloh

Pod kterým stromem je poklad?

Poklad je zakopán pod ořechem. Každý početní cyklus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2; ... obsahuje 10 čísel, takže 10 004 = 1 000 cyklů + 4. Čtvrtý strom je ořech.

Čtyři hádanky

1. Protože 431 576 ≡ 5 (mod 7), číslo 431 576 − 5 = 431 571 je dělitelné sedmi. Po této úvaze napišme čtvercovou tabulku:

4	3	1	5	7	*A*,
4	3	1	5	*B*	6,
4	3	1	*C*	7	6,
4	3	*D*	5	7	6,
4	*E*	1	5	7	6,
F	3	1	5	7	6.

Na místě písmen *A, B, C, D, E, F* mají být takové číslice, aby výsledná čísla byla dělitelná sedmi.

Víme už, že místo *A* je třeba napsat 1. Nyní porovnáme číslo 71 s číslem *B*6, stojícím pod ním. Dělíme-li 71 sedmi, dostaneme zbytek 1. Abychom tentýž zbytek dostali při dělení čísla *B*6 sedmi, musí na místě *B* stát číslice 3. Druhé číslo dělitelné sedmi je 431 536. Píšeme je pod číslo 431 571. Hledáme třetí číslo. Nad *C*7 je 53. Číslo 53 dělené sedmi dá zbytek 4. Aby číslo *C*7 dalo při dělení sedmi tentýž zbytek, je třeba napsat místo *C* číslici 6. Třetí číslo je tedy 431 676.

Obdobně najdeme *D* = 6, *E* = 7, *F* = 3.*)

Odpovídající čísla jsou zapsána v následující tabulce:

4	3	1	5	7	1,
4	3	1	5	3	6,
4	3	1	6	7	6,
4	3	6	5	7	6,
4	7	1	5	7	6,
3	3	1	5	7	6.

*) Postup se zakládá na této úvaze: Protože číslo 431 571 je dělitelné sedmi, je

431 571 : 7 = 431 500 : 7 + 71 : 7,
431 5*B*6 : 7 = 431 500 : 7 + *B*6 : 7.

Zbytek při dělení prvního čísla (431 500) je v obou řádcích stejný; spolu se zbytkem z druhého dělení musí dát v každém řádku číslo dělitelné sedmi (tj. 0 nebo 7). Musí tedy být zbytek při dělení čísel *B*6 a 71 sedmi týž.

Podobně postupujeme dále:

431 536 : 7 = 431 006 : 7 + 530 : 7,
431 *C*76 : 7 = 431 006 : 7 + *C*70 : 7.
Čísla 530 a *C*70 musí dát stejný zbytek, z výkladů této kapitoly je jasné, že totéž musí platit i o číslech desetkrát menších, tj. 53 a *C*7. Obdobně postupujeme dále. Přesvědčte se, že můžeme také položit $A = 8$ a $E = 0$; ostatní čísla jsou určena jednoznačně. (Pozn. překl.)

2. Každé šestimístné číslo N lze psát ve tvaru $N = 1\,000a + b$, kde a a b jsou trojciferná čísla tisíců a jednotek.*) Tento zápis můžeme přepsat takto:

$$1\,000a + b = 1\,001a - a + b = 1\,001a - (a - b).$$

Nechť věk přítele je vyjádřen číslicemi x, y. Pak $a = xyx$, $b = yxy$**). Použijeme-li na čísla xyx, yxy znak dělitelnosti sedmi, dostaneme

$$\begin{array}{ll} x & 1\,.\,x \\ y & 3\,.\,y \\ x & 2\,.\,x \\ \hline & 3x + 3y, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} y & 1\,.\,y \\ x & 3\,.\,x \\ y & 2\,.\,y \\ \hline & 3y + 3x, \end{array}$$

takže $a - b \equiv (3x + 3y) - (3y + 3x) \equiv 0 \pmod 7$. Odtud plyne, že číslo $a - b$ je dělitelné sedmi. Ale $1\,001a = 7\,.\,11\,.\,13a$ je také dělitelné sedmi, a tedy i číslo N je dělitelné sedmi.***)

3. Všimněme si, že z podmínek úlohy vyplývá, že hledané číslo zvětšené o 1 je dělitelné 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Hledané číslo je tedy nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zmenšený o 1, tj. $2^3\,.\,3^2\,.\,5\,.\,7 - 1 = 2\,519$.

4. Zbytek 1. Důkaz: $3^6 = 729$, $729 : 7 = 104$ (zbytek 1). Zapisujeme to takto: $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Obě strany kongruence povýšíme na mocnitel 2 057 613, protože

$$12\,345\,678 = 6\,.\,2\,057\,613.$$

Dostaneme

$$(3^6)^{2\,057\,613} \equiv 1^{2\,057\,613} \pmod 7$$

čili

$$3^{12\,345\,678} \equiv 1 \pmod 7.$$

Odtud plyne, že $3^{12\,345\,678}$ dá při dělení sedmi zbytek 1.

*) Číslo b může ovšem začínat jednou i více nulami. (Pozn. překl.)

**) Tento zápis zde znamená ovšem $a = 100x + 10y + x$. Podobně pro b. (Pozn. překl.)

***) Stručnější úvaha: $N = 10^5x + 10^4y + 10^3x + 10^2y + 10x + y$ je dělitelné sedmi, právě když číslo $5x + 4y + 6x + 2y + 3x + y = 14x + 7y$ je dělitelné sedmi (viz znak dělitelnosti sedmi). Ale to je zřejmé: $14x + 7y = 7(2x + y)$. (Pozn. překl.)

Algebra, která se vyvinula z aritmetiky, je velmi důležitou a rozsáhlou oblastí matematiky.

O algebře můžeme hovořit na různých úrovních: nejnižší úrovní je *elementární algebra*, která se vyučuje na středních školách. Vývoj tohoto úseku algebry byl dokončen v 17. století. V 18. a 19. století se výzkum algebry rozvíjel na vyšší úrovni. V takové podobě se algebra přednáší na vysokých školách. A konečně existuje ještě tzv. *abstraktní algebra*. Nás zajímá algebra na elementární úrovni. Vedle čtyř základních operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení), jimiž se zabývá aritmetika, jsou jejím předmětem i další operace, které můžeme považovat za rozšíření aritmetických početních úkonů: umocňování, odmocňování a logaritmování.

Kromě čísel známých z aritmetiky (přirozených a racionálních) zkoumá algebra i taková čísla, s nimiž se v aritmetice nesetkáváme, tj. čísla celá (i záporná), iracionální a komplexní tvaru $m + in$ (m a n jsou reálná čísla). Zavedení těchto čísel bylo nutné proto, že elementární algebra se zabývá hlavně řešením rovnic a bez těchto čísel by nebylo vždy možné řešit rovnice druhého a vyšších stupňů.

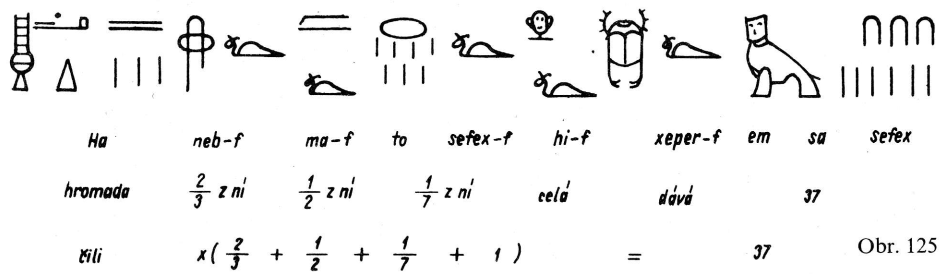
Charakteristickým rysem algebry je i to, že užívá k označení čísel písmen: $a, b, c, d, \ldots, x, y, z, \ldots, A, B, C, \ldots$ a pracuje s bohatší symbolikou než aritmetika, užívající jen znaků čtyř operací a závorek.

Moderní algebraická symbolika se utvářela několik století. Svým dílem k tomu přispěli hlavně F. Viète (1540 až 1603), R. Descartes (1596–1650) a I. Newton (1643–1727). Zpočátku se v algebře psalo všechno slovy, nepoužívalo se žádných symbolů dokonce ani pro čtyři aritmetické operace. Pak přišlo tzv. synkopické období algebry, kdy se některé nejčastěji používané pojmy vyjadřovaly zkratkami příslušných slov. Například místo výrazu „přičíst" se psalo písmeno p, místo „odečíst" písmeno m (počáteční písmena odpovídajících latinských slov plus – přičíst, minus – odečíst). Symbolika algebry dospěla do nynější podoby teprve počátkem 18. století.

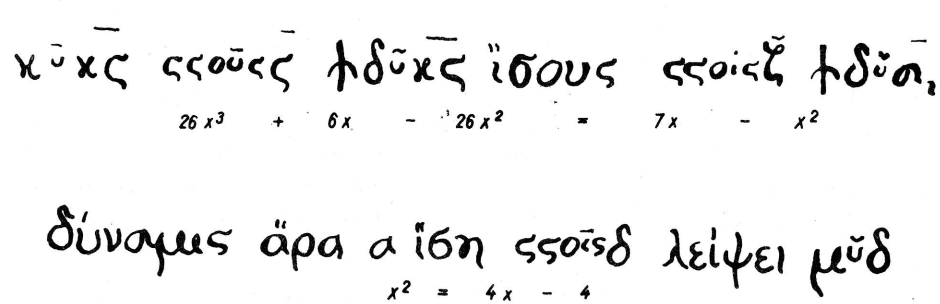
Převážnou dobu svého vývoje se algebra zabývala řešením rovnic druhého, třetího, čtvrtého, pátého atd. stupně. (Proto po dlouhou dobu panoval názor, že předmětem algebry je sestavování a řešení rovnic.) Už v 16. století bylo v boloňské škole nalezeno řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Snahy po řešení obecné rovnice pátého či vyššího stupně byly dlouho bezvýsledné. Jedním z těch, kdo se domnívali, že je nalezli, byl i polský matematik J. M. Hoene-Wroński (1778–1853); ukázalo se však, že jeho vzorec je nesprávný. Teprve na počátku 19. století dokázal Ital P. Ruffini (1765–1822), Francouz E. Galois (1811–1832) a Nor N. H. Abel (1802–1829), že obecné řešení tohoto problému neexistuje. Zde také začal vývoj abstraktní algebry.

Vývoj zápisu rovnic v zrcadle věků

První rovnice sestavené člověkem vypadaly tak jako na obr. 125, kde vidíme úryvek z papyru Egypťana Ahmese (podle F. Cajoriho) a na obr. 126, znázorňujícím Diofantovu rovnici ze 4. století.



Obr. 125



Obr. 126

Uveďme nyní několik příkladů vývoje algebraické symboliky v průběhu 15. až 17. století:

1. Rovnice $16x^2 + 2\,000 = 680x$ zapsaná slavným matematikem, astronomem a astrologem J. Regiomontanem (1436–1476) měla tvar:
16 census et 2 000 aequales 680 rebus.

Census znamená kvadrát neznámé. Tento zápis je ještě výhradně slovní, bez jakýchkoli symbolů.

2. Významný italský matematik a filozof Hieronymus Cardano (1501 až 1576) zapisoval rovnici $x^3 + 6x = 20$ ve tvaru
cubus p 6 rebus aequantur 20.

Cubus znamená třetí mocninu neznámé, p znak +, 6 rebus – šest neznámých, aequantur – rovná se.*)

3. Rovnici $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ psal F. Viète (1540–1603) ve tvaru $1C' - 8Q + 16N$ aequ. 40, kde $C' = \text{cubus} = x^3$, $Q = x^2$, N znamená neznámou čili x.

4. Descartes zapisoval rovnici

$$x^3 + px + q = 0$$

takto:

$$x^3 + px + q \sim 0;$$

znak $\sim$ odpovídá v jeho zápisu znaku =.**)

Algebraické zápisy Newtonovy jsou již stejné jako naše.

Dodejme ještě, že angličtí matematici 17. století Recorde, Harriot a Oughtred (čti Outred) zavedli do matematiky znaky „=“ „>“, „<“ a „×“ jako znak násobení***), a získáme představu, jak dlouhou a obtížnou cestu prošla algebra, než dospěla k dnešní dokonalé symbolice.

Úspěchy matematiky 17. století však nekončí algebrou. V té době byla matematika obohacena dvěma zásadními objevy: Descartes vytvořil analytickou geometrii a Leibniz současně s Newtonem diferenciální počet. O těchto objevech si povíme obšírněji v jedné z následujících kapitol. Zde jen zdůrazněme, že jak objev analytické geometrie, tak i diferenciálního počtu je mezníkem v dějinách matematiky: Descartes otevřel geometrickému bádání úplně nové cesty, odlišné od metod Euklidových, a diferenciální počet zavrhl dělení veličin na spojité a nespojité (diskrétní), zavedené Aristotelem, čímž připravil cestu pro použití matematiky při zkoumání přírodních jevů. Díky tomu se neobyčejně rozšířila oblast praktického použití matematiky.

■ O algoritmu

Algoritmus je soustava (schéma) formálních úkonů, s jejichž pomocí lze mechanickým výpočtem rozřešit všechny úlohy jistého typu.

---

*) Zde by bylo vhodné se zmínit o italském matematiku Luca Paciollim, který ve své knize „Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita“ z r. 1487 užívá již řady algebraických symbolů: co (= cosa = věc) znamená neznámou, ce (= census) čtverec neznámé, cu (= cubo) její třetí mocninu, ce . ce (= censo de censo) čtvrtou apod. Pro odmocninu používal znaku P_x nebo P_x2 (obdobně i pro vyšší odmocniny) a pro sčítání a odčítání symbolů $\bar{p}$ (plus ve smyslu více) a $\bar{m}$ (minus, méně). Paciolliho kniha měla ve své době velký vliv, např. na Johanna Widmana (nar. 1460 v Chebu), Adama Riese (1489–1559) a Kryštofa Rudolffa z Javora ve Slezsku. (Pozn. překl.)

**) Až na tuto odlišnost a psaní aa místo dnešního a^2 je již Descartova algebraická symbolika obdobná naší; mimo jiné používal písmen z konce abecedy pro označení neznámých a písmen ze začátku pro obecná čísla. (Pozn. překl.)

***) V téže době se objevuje – s různými drobnými odchylkami – i dnešní znak pro odmocninu $\sqrt{\ }$. (Pozn. překl.)

Příkladem algoritmu je soustava operací, které je třeba provést k nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a a b (tzv. Euklidův algoritmus) nebo algoritmus, pomocí něhož určujeme kořeny kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, tj.

$$(1) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Je samozřejmé, že jednotlivých rovnic tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ je nekonečně mnoho, avšak řešení kterékoli z nich můžeme vypočítat, vykonáme-li příslušné kroky podle příkazů algoritmu (1) v tomto pořadí:

1. Koeficient b při první mocnině neznámé umocníme na druhou.
2. Od čtverce čísla b odečteme čtyřnásobek součinu koeficientu a při první mocnině neznámé a absolutního členu rovnice c.
3. Najdeme druhou odmocninu z rozdílu $b^2 - 4ac$.
4. Výslednou odmocninu přičteme k číslu opačnému k číslu b (nebo ji odečteme od téhož čísla).
5. Výsledek předešlého kroku dělíme dvojnásobkem čísla a.

Algoritmus musí mít takový tvar, aby bylo možno jeho příkazy komukoli sdělit, aby těchto příkazů byl konečný počet a aby provádění nařízených operací nezáleželo na vůli toho, kdo je provádí, nýbrž aby vytvářelo jednoznačně popsaný a určený proces, který může být kdykoli zopakován a proveden někým jiným.

Algoritmem řešíme všechny úlohy daného typu. V matematice se daná úloha považuje za rozřešenou, je-li nalezen algoritmus, na jehož základě je možno najít její řešení. Sestavování takových algoritmů je úkolem matematiky. Matematické (a nejen matematické) disciplíny, v nichž užíváme algoritmů, jsou poměrně četné.

Bylo dokázáno, že algoritmy mohou být sestaveny tak, že k jejich provedení stačí čtyři aritmetické operace. Obzvlášť důležitou vlastností algoritmu je to, že jeho příkazy může vykonávat automaticky dokonce i ten, kdo nechápe podstatu řešeného úkolu. Od toho, kdo postupuje podle algoritmu, se požaduje jen vykonání těch nejjednodušších, elementárních operací, na něž se výpočet rozkládá. Jednotlivé kroky algoritmu může tedy provádět i stroj. Tak tomu také ve skutečnosti je.

Všimněme si, že všechny pochody odehrávající se v elektronických počítacích strojích jsou v podstatě stejné jako ty, které provádí počtář beze stroje.

Ke svým výpočtům používá počtář číslic, písmen a jiných symbolů, které zapisuje na papír. Stroje neužívají takových symbolů, ale nahrazují je různými navzájem se lišícími fyzikálními stavy, např. elektrickým napětím různé velikosti.

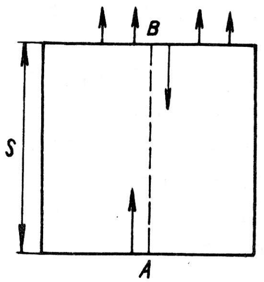
Zábavné úlohy

Spěchající pán

Stále spěchající pán stoupal rychlostí jednoho schodu za sekundu po pohyblivém schodišti, které se také pohybovalo směrem vzhůru. Po dvaceti krocích na takto „vylepšeném" pohyblivém schodišti býval onen pán nahoře. Jednoho dne měl spěchající pán ještě víc naspěch a stoupal po schodišti, které se pohybovalo směrem vzhůru, po dvou schodech, takže každou sekundu zdolal dva schody. Na vrchol schodiště se takto dostal po překonání 32 schodů. Kolik schodů mělo pohyblivé schodiště od úpatí až k vrcholu?

Oddíl pěchoty a jeho maskot

Oddíl pěchoty, seřazený do útvaru o délce 20 m, pochoduje stálou rychlostí přímým směrem. Uprostřed poslední řady (v bodě A – viz obr. 127) jde pes, který je maskotem oddílu.



Obr. 127

V jistém okamžiku pes běží (stále stejnou rychlostí) z bodu A do B, do první řady útvaru (viz obr. 127). Když doběhne do první řady do bodu B, otočí se a hned běží nazpět do poslední řady, do bodu A. Zatímco pes běžel mezi pochodujícími vojáky z bodu A do B a zpět, ušel oddíl 20 m. Jakou vzdálenost (kolik metrů) uběhl pes z bodu A do B a zpět?

Mezi motoristy

Dva automobilisté se vydali současně z místa A do místa B. Oba jeli stejnou cestou, ale různými rychlostmi, které lze vyjádřit přirozenými čísly. Každý z nich však jel stále stejně rychle. Rozdíl obou rychlostí je prvočíslo. Vzdálenost mezi A a B je 100 km. Po dvou hodinách jízdy byla vzdálenost pomalejšího vozu od místa A pětkrát větší než vzdálenost rychlejšího vozu od místa B.

Jakou průměrnou rychlostí jeli oba automobilisté?

Čtyři čtyřky

Pomocí čtyř čtyřek a znaků aritmetických operací [+, −, . , zlomková čára, $\sqrt{\ }$ atd.*)] lze napsat velmi mnoho přirozených čísel, mezi nimi všechna čísla od nuly do 100. Napište pomocí čtyř čtyřek čísla 13, 43, 50.

*) Autor používá ještě jednoho, u nás nezvyklého označení, totiž. $(4) = 0{,}444\ldots = \frac{4}{9}$. (Pozn. překl.)

Řešení úloh

Spěchající pán

Předpokládejme, že pohyblivé schodiště se skládá z n schodů a že v je jeho rychlost (tj. počet schodů, o které se posune za jednu sekundu). Pak

$$n = 20 + 20v$$

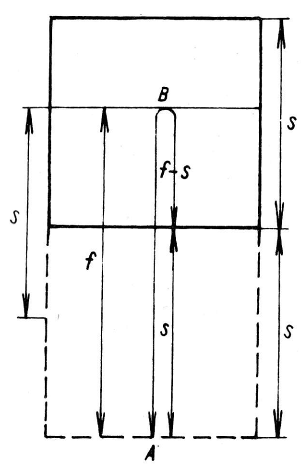
nebo také

$$n = 32 + 16v\ (32 : 2 = 16).$$

Řešíme-li tuto soustavu dvou rovnic prvního stupně, najdeme $v = 3$ schody za sekundu, odkud $n = 80$ schodů.

Oddíl pěchoty a jeho maskot

Řešme úlohu obecně. Nechť s je délka útvaru pěchoty. Předpokládejme, že tuto vzdálenost oddíl přejde za jednotku času. Označme v rychlost psa, t čas, za který pes proběhne mezi pochodujícími vojáky z poslední řady do první, a $f = vt$ vzdálenost, kterou pes uběhne, když běží z A do B. Jak ukazuje obr. 128, v opačném směru uběhne pes vzdálenost $f - s$. Tuto vzdálenost lze vypočítat následujícím způsobem. Podle předpokladu, který jsme učinili na začátku řešení, uběhl pes celou dráhu (tam i zpět) za jednotku času, takže na zpáteční cestu potřeboval $(1 - t)$ jednotek času. Protože rychlost psa je v, platí $v(1 - t) = f - s$ čili $v - vt = vt - s$, neboť $f = vt$.



Obr. 128

Do okamžiku, kdy pes doběhl do čela oddílu, prošel oddíl vzdálenost st*). Vzdálenost, kterou pes uběhl směrem dopředu, je tedy $s + st$. Když do předchozí rovnice dosadíme $s + st$ za vt, dostaneme $v - (s + st) = (s + st) - s$ čili $v = s + 2st$. Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem t a dosadíme-li znovu $s + st$ za vt, dostaneme

$$s + st = (s + 2st)\,t,$$

odkud plyne

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Celá vzdálenost, kterou pes uběhl, je tedy

$$2f - s = s + 2st = s + s\sqrt{2} = 48{,}28 \text{ m}.$$

*) Připomeňme, že podle našeho předpokladu ujde oddíl vzdálenost s za jednotku času. (Pozn. překl.)

Mezi motoristy

Písmenem d km označme vzdálenost, kterou rychlejší vůz ujede směrem k B za dvě hodiny. Jeho vzdálenost od B je pak $(100 - d)$ km, zatímco pomalejší vůz je v tom okamžiku vzdálen od A $(100 - d) . 5 = 500 - 5d$ kilometrů. Označíme-li rychlost rychlejšího vozu v km/h a rychlost pomalejšího vozu w km/h, můžeme napsat dvě rovnice:

$$\frac{d}{v} = 2 ; \quad \frac{500 - 5d}{w} = 2.$$

Z těchto rovnic nalezneme

1. $d = 2v$;
2. $d = \dfrac{500 - 2w}{5} = 100 - \dfrac{2}{5} w$;
3. $2v = 100 - \dfrac{2}{5} w$;
4. $w = 250 - 5v$.

Z toho plyne, že rozdíl rychlostí obou vozů je $v - w = v - 250 + 5v = 6v - 250 = 2(3v - 125)$.

Aby rozdíl $v - w$ byl prvočíslem, musí se číslo $3v - 125$ rovnat jedné. Z rovnice $3v - 125 = 1$ najdeme $v = 42$ a odtud $w = 40$.

Čtyři čtyřky

$$13 = \frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4} ; \quad 43 = \frac{4! - 4}{.(4)} - \sqrt{4} ;$$

$$50 = \frac{4}{\sqrt{4}} + 4! \sqrt{4}.$$

Poznámka: Symbol 4! (čti „čtyři faktoriál") znamená součin 1 . 2 . 3 . 4; symbol .(4) znamená 0,444 4 ... čili $\frac{4}{9}$ *).

*) Bez použití symbolu .(4) můžeme psát např. $43 = 44 - \frac{4}{4}$. (Pozn. překl.)

Geometrie studuje prostorové vztahy a tvary (formy) těles. Při odvozování svých tvrzení abstrahuje od konkrétních předmětů, což znamená, že vztahy mezi útvary vyjadřuje ne jako vztahy mezi konkrétními předměty, ale jako vztahy zcela abstraktních těles.

Výsledky *Euklidovy planimetrie* (*rovinné geometrie*) se týkají rovinných útvarů a neplatí např. pro útvary na povrchu koule. Ve *sférické geometrii* jsou „přímkami" hlavní kružnice, které obdobně přímkám v rovině tvoří úhly a obrazce. Tvrzení sférické geometrie se liší od tvrzení geometrie rovinné. Například délka kružnice na kouli není úměrná jejímu poloměru, součet úhlů ve sférickém trojúhelníku není konstantní a je větší než přímý úhel.

Tyto skutečnosti napovídají, že Euklidova geometrie popisuje vlastnosti reálného prostoru jen přibližně; můžeme se např. domnívat, že součet úhlů velmi velkého trojúhelníka by nemusel být roven 180°. Potvrzení této domněnky nacházíme v obecné teorii relativity, která dokazuje, že v kosmickém měřítku se prostorové vztahy neřídí zákony Euklidovy geometrie.

Euklidovský prostor je takový prostor, v němž platí Euklidovy axiómy. Metodami *analytické geometrie* zobecňujeme euklidovský prostor na prostor, který má více než tři rozměry, např. čtyři, pět, ..., n.

Následující příklady nám dají představu o tom, jak vznikají jiné prostory:

1. Prostor barev. Každý barevný vjem je součtem vjemů tří základních barev: červené ($\check{C}$), žluté ($\check{Z}$) a modré (M). Označíme-li intenzitu těchto barev po řadě x, y, z, potom

$$\text{barva} = x . \check{C} + y . \check{Z} + z . M .$$

Každá zvolená hodnota x, y, z nám dá odpovídající barvu – „bod". Z takových „bodů" dostáváme barevné „přímky", z přímek obrazce, plochy atd.

2. Stav plynu ve válci pod tlakem je popsán teplotou plynu T a tlakem p. Jestliže teplota T a tlak p nabývají různých hodnot, dostáváme dvojrozměrný „prostor stavu plynu". V tomto prostoru můžeme definovat „body", „křivky", „obrazce"; např. spojitá změna stavu plynu může být znázorněna „křivkou" ležící v tomto prostoru.

Současná geometrie zkoumá rovněž „abstraktní prostory". Body abstraktního prostoru mohou být obrazce, útvary. Obdobným způsobem se definuje prostor přímek, kružnic, koulí apod.

V mechanice a v teorii relativity se vyšetřuje čtyřrozměrný abstraktní prostor, v němž se vedle tří prostorových souřadnic zavádí čtvrtá – čas.

Základem každé geometrie je soustava definic, axiómů a základních pojmů. Euklidovská geometrie je založena na nevelkém počtu definic, axiómů a základních pojmů, které zavedl Euklides.

Euklidovy předpoklady byly definitivně uspořádány v 19. století D. Hilbertem (1862–1943).

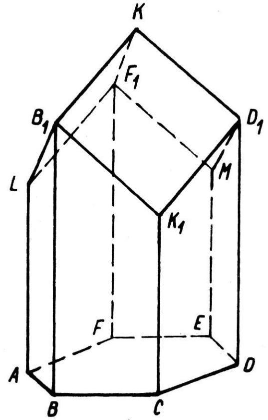
Geometrie má široké použití v přírodních vědách. Kartografie, krystalografie, geodézie, astronomie jsou nepředstavitelné bez geometrie.

Medonosné architektky

Stavba včelí buňky zajímala odedávna nejen matematiky. Zabýval se jí filozof a fyzik Aristoteles (4. stol. př. n. l.), přírodovědec Plinius starší (1. stol. n. l.), fyzik de Réaumur (1683–1757) i řada matematiků: Pappos (3. až 4. stol.), Jan Brožek (17. stol.), Koenig, G. Maclaurin (1698–1746), S. L. Huilier (1750–1840), J. J. de Lalande (1732 až 1807), Braugham aj. Zkoumali architekturu buňky a obdivovali podivuhodný instinkt včel, které budují své voskové buňky v takovém tvaru, aby při co nejmenší spotřebě materiálu (vosku) a práce vytvořily co nejobjemnější nádoby a aby přitom co nejlépe využily skromný prostor úlu.

Již Pythagoras si všiml, že existují jen tři pravidelné mnohoúhelníky, jimiž lze pokrýt (bez mezer) celou rovinu,

počínajíc v daném bodě: rovnostranný trojúhelník, čtverec a pravidelný šestiúhelník (hovořili jsme o tom již v kap. 14). Avšak jen jediný z těchto mnohoúhelníků může být podstavou včelí buňky, totiž ten, který má nejmenší obvod a současně největší plošný obsah. Ukazuje se, že je to pravidelný šestiúhelník. Je sice pravda, že kruh o stejném obsahu má ještě menší obvod, ale kdyby včelí buňky měly tvar válce, zůstávalo by mezi nimi mnoho nevyužitého prostoru, což by zhoršovalo ekonomii využití místa. Proto včelí buňky musí mít tvar pravidelných šestibokých hranolů (obr. 129).

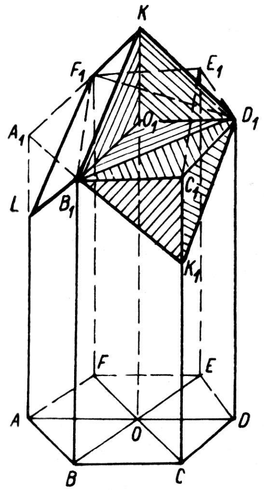


Obr. 129

Jiná je otázka, jakého tvaru má být „víko" (horní podstava hranolů): rovné či jiné? Poměrně složité výpočty ukazují, že rovné víko včelí buňky by nebylo nejekonomičtější, že výhodnější je víko skládající se ze tří kosočtverců se společným vrcholem K, ležícím na prodloužené ose OO_1 hranolu

$ABCDEFF_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1$

(obr. 130).



Obr. 130

Stojí zato si všimnout, že body ležící na prodloužené ose OO_1 mají tuto zajímavou vlastnost: tři roviny procházející libovolně zvoleným bodem K na prodloužení osy OO_1 a každá jednou ze stran rovnostranného trojúhelníka $B_1D_1F_1$ vepsaného do pravidelného šestiúhelníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ utvoří nový mnohostěn, jehož objem je stejný jako objem hranolu

$ABCDEFF_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Na obr. 130 vidíme, že jedna z těchto rovin ($B_1K_1D_1K$) odřízne „roh" $K_1B_1C_1D_1$, ale přidá trojboký jehlan $KB_1D_1O_1$ o stejném objemu, neboť obě tělesa mají shodné podstavy a stejné výšky. Totéž platí pro zbývající dvě roviny, procházející bodem K a stranami F_1D_1 a F_1B_1 rovnostranného trojúhelníka $B_1D_1F_1$. Uvedená změna neovlivní tedy objem hranolu, ale ovlivní povrch tělesa. Povrch buňky bude záviset na volbě bodu K. Musíme tedy vypočítat, v jaké vzdálenosti od O_1 je třeba zvolit bod K, aby povrch včelí buňky byl nejmenší, a tedy aby na její stavbu bylo vynaloženo co nejméně materiálu i práce.

Označíme-li vzdálenost O_1K písmenem x a vypočteme-li obsah tří kosočtverců shodných s $KB_1K_1D_1$ a šesti stěn shodných s K_1CDD_1, můžeme napsat vzorec pro povrch p buňky bez dolní podstavy:

$$p = \frac{1}{2} a \sqrt{3a^2 + 12x^2} \,.\, 3 + \frac{1}{2} a(2b - x) \,.\, 6 \,,$$

kde $a = CD$ je délka hrany podstavy tělesa, $b = DD_1$ je délka boční hrany.

Obě strany rovnice dělíme $3a$, označíme $p/3a = h$ a řešíme rovnici vzhledem k x. Vyšetříme-li diskriminant rovnice, zjistíme, že nejmenší hodnota h, pro niž je x reálné číslo, je $h = 2b + \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

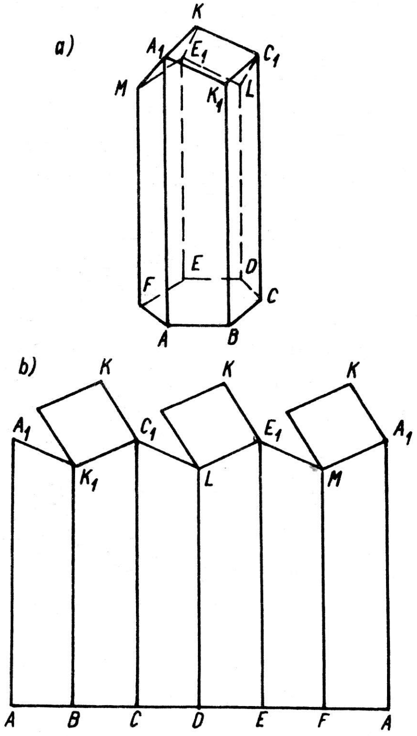
Při této hodnotě h dostaneme

$$O_1K = x = \frac{1}{4}\ a\sqrt{2}\,.$$

Povrch včelí buňky (bez dolní podstavy) má tedy nejmenší hodnotu

$$(1)\quad 6ab + \frac{1}{2} . 3a^2 \sqrt{2}.$$

Včelí buňka s nejmenším povrchem a její síť je znázorněna na obr. 131.



Obr. 131

Kdyby horní víko včelí buňky bylo ploché, její povrch (bez dolní podstavy) by byl

$$(2)\quad 6ab + \frac{1}{2} . 3a^2 \sqrt{3}\,.$$

Rozdíl mezi hodnotou (2) a (1) je

$$\frac{3}{2} a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx \frac{3}{2} a^2 . 0{,}3 = 0{,}45a^2,$$

takže úspora na materiálu (vosku) činí asi 2 %*). Z vosku, který včely tak ušetří na 54 buňkách, mohou postavit jednu další buňku – padesátou pátou.

Matematici 18. a 19. století, o kterých jsme se zmínili v úvodu, zjistili, že včely, vedeny podivuhodným instinktem, budují víka svých buněk vždy tak, že v každém ze tří kosočtverců jsou úhly rovny 109°28′ a 70°32′ a že právě při těchto úhlech kosočtverců je povrch buněk nejmenší.

▪ Möbiův list

Jestliže z archu papíru odstřihneme po délce pásek široký 3 až 4 cm a slepíme jeho konce, dostaneme papírovou „obruč". Brouček, který půjde po této obruči stále vpřed, může obejít celou obruč a vrátit se na místo, odkud vyšel (obr. 132). Brouček obejde jen vnitřní stranu obruče. Kdyby chtěl obejít také její vnější stranu, musel by uhnout ze své rovné cesty nebo bychom jej museli na druhou stranu obruče přenést. Rozstřihneme-li naši

*) Tento i další údaj závisí ovšem na výšce buňky b. (Pozn. překl.)

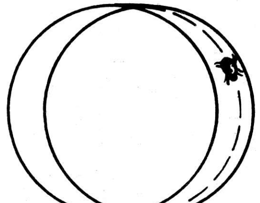
obruč podél dráhy, po níž se brouček pohyboval, dostaneme dvě obruče.

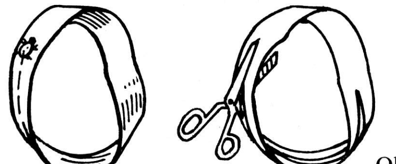
Kdybychom však před slepením konců papírového pásku otočili jeden konec pásku o 180° a pak teprve slepili jako na obr. 133, vypadala by dráha broučka docela jinak. Navrhujeme čtenáři, aby si udělal takový pásek a rozvážil následující tři otázky:

1. Nechť se brouček pohybuje po pásku stále vpřed. Vrátí se do místa, odkud vyšel?

2. Jakou vzdálenost brouček urazí, než se vrátí do místa, z kterého vyšel (délka pásku budiž 30 cm)?

3. Obejde brouček obě strany pásku?


Obr. 132


Obr. 133

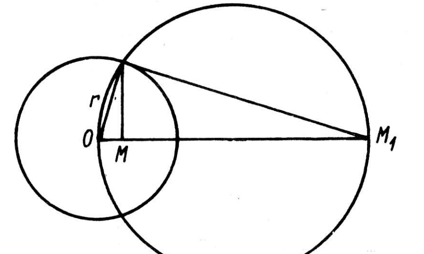
Pásek slepený tak, jak je ukázáno na obr. 133, se nazývá *Möbiův list*; August Möbius (1790–1868), německý matematik a astronom, je považován za jednoho z tvůrců moderní geometrie.

▪ Třikrát „in": interpolace, inverze, involuce

Interpolací nazýváme určení hodnoty nějaké funkce z jejích hodnot daných ve dvou bodech. Předpokládejme například, že hledáme hodnotu funkce sin 20°35′ a v tabulkách máme jen sin 20° = 0,342 0 a sin 21° = 0,358 4. Rozdíl mezi úhly je 1° = 60′, rozdíl mezi hodnotami sinu těchto úhlů je 0,358 4 – 0,342 0 = 0,016 4. Vzhledem k tomu bude rozdíl pro 35′ roven (0,016 4 : 60) . 35 ≐ 0,009 6. Odtud sin 20°35′ ≈ 0,342 0 + 0,009 6 = = 0,351 6.

Základem interpolace je předpoklad, že přírůstek funkce (v našem případě sinu) je přímo úměrný přírůstku nezávisle proměnné (úhlu), je-li změna nezávisle proměnné malá.

Inverze v geometrii znamená jisté zobrazení (transformaci) bodů roviny. Například inverze vzhledem ke kružnici o poloměru r se středem O je zobrazení, v němž libovolně zvolenému bodu M, různému od bodu O, odpovídá takový bod M_1 na přímce OM, že $OM . OM_1 = r^2$ (obr. 134). Bod O



Obr. 134

nazýváme středem inverze, číslo r^2 koeficientem inverze.

Inverzí nazýváme také takový početní postup, při kterém provádíme operace opačné k těm, které jsou uvedeny v zadání, a v opačném pořadí. Vysvětleme to na příkladu.

Máme řešit úlohu: Najděte číslo takové, že jeho dvojnásobek umocněný na druhou a dělený třemi dá 300.

Označíme-li hledané číslo L a číslo, které dostaneme po zdvojnásobení, umocnění na druhou a dělení třemi L_1, najdeme L, postupujeme-li v opačném směru od L_1 k L a vykonáme-li opačné operace – násobení, odmocnění a dělení:

$$300 . 3 = 900; \quad \sqrt{900} = 30;$$

$$30 : 2 = 15.$$

Hledané číslo L je rovno 15.

Involuce je zobrazení, jehož opakované provedení dá původní bod.

Involucí je např. souměrnost podle libovolného středu. Jestliže bod M přejde středovou souměrností v M_1, pak bod M_1 přejde toutéž středovou souměrností v M.

Totéž je možno říci o inverzi: Opakovaná inverze podle téhož středu a téže kružnice vede k původnímu bodu.

■ Zábavné úlohy

Čtverec a přímka

Středem čtverce o jednotkové straně vedeme libovolnou přímku PR. Vypočtěte součet čtverců vzdáleností této přímky od všech čtyř vrcholů čtverce.

Vyzkoušej svoji geometrickou představivost

Narýsuj pravidelný šestiúhelník se všemi úhlopříčkami (je jich devět) a spočítej, kolik vzniklo v šestiúhelníku trojúhelníků.

Ještě o Möbiově listu

Proveďme pokus: rozstřihněme Möbiův list podél dráhy, po které leze brouček, a uvažme, zda vznikne

1. jeden Möbiův list;
2. dva Möbiovy listy;
3. jeden útvar, ale nikoli Möbiův list; tzn. pás, který nemá jeho vlastnosti.

Nakonec rozstřihněme znovu pás, který jsme dostali prvním rozstřižením, čímž dostaneme ...

Co vznikne, jestliže rozstřihneme Möbiův list nikoli uprostřed, ale dvěma řezy ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ nebo $\frac{1}{4}$ šířky od jeho okraje?

Kolik let je strýci?

„Strýčku, kolik je ti let?“

„Dvakrát tolik, kolik je sestřenici Evě.“

„A kolik je sestřenici Evě?“

„Třikrát méně než tétě Haně.“

„A kolik je tetě Haně?“

„Teta Hana je o dvacet let starší než Jana.“

„A kolik let je tetě Janě?“

„Pětkrát tolik co Anně.“

„A kolik je Anně?“

„Dej už pokoj ... Za rok jí bude šest.“

„Strýčku, hned ti řeknu, kolik je ti let.“

Kolik let je strýci?

Spravedlivý otec

Na Nový rok dal farmář každému ze svých synů tolik dolarů, kolik bylo každému z nich, celkem 24 dolary, ale přitom vyslovil toto přání:

„Nejmladší z vás ať si nechá polovinu peněz, které ode mne dostal, a druhou polovinu ať rozdělí stejným dílem mezi oba své bratry. Potom ať si prostřední syn ponechá polovinu peněz, které bude mít po prvním dělení, a zbytek ať rozdělí rovným dílem svým bratrům. Nakonec ať udělá totéž i nejstarší.“

Když dělení skončilo, měl každý ze tří bratrů stejnou částku. Kolik bylo každému z nich let?

Krejčovství a geometrie

Před maškarní zábavou se maminka rozhodla ušít pro svého malého synka kostým klauna. Koupila látku, která byla navrch modrá a vespod červená.

Maminka chtěla co nejjednodušeji ušít hodně pestrý kostým; proto vystřihla z látky několik trojúhelníků, obrátila je spodní stranou (červenou) navrch a chtěla je všít na původní místa. S údivem však zjistila, že to není tak snadné. Šlo to jen tehdy, když vystřižený trojúhelník byl rovnostranný nebo aspoň rovnoramenný. V ostatních případech to bylo obtížnější. Nakonec však maminka objevila způsob, jak obrátit naruby jakýkoli trojúhelník nezávisle na tom, jaké má strany a úhly.

Můžete vysvětlit, jak to udělala?

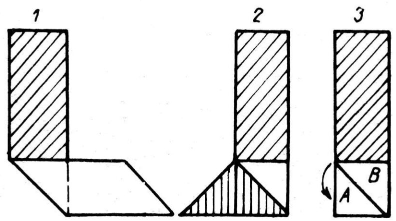
Elegantní dáma a její pásek

Jedna paní poprosila svoji švadlenu, aby jí upravila hedvábný pásek, který byl už nemoderní, protože měl šikmo zastřižené konce (pod úhlem 45°) a byl příliš široký.

Mezi zákaznicí a švadlenou se rozvinul tento rozhovor:

„Prosím vás, upravte mi ten pásek tak, aby jeho konce byly rovné (kolmo zastřižené), ale nic nestříhejte. A také jej zužte."

„Tak můžeme konce pásku prostě založit, asi tak..." (viz obr. 135).



Obr. 135

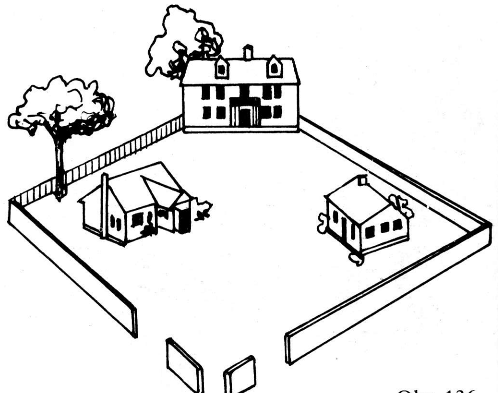
„Ne, to by pásek nebyl všude stejně silný. V místě A bude látka přeložena nadvakrát a v místě B natřikrát. A také nevím, jak byste pásek potom zúžila bez stříhání."

„Dobrá. Rozmyslím si to a udělám, jak si přejete: pásek bude mít kolmé zakončení, bude užší a po celé délce stejně silný."

Jak vyřešila švadlena tento obtížný úkol?

Rozvadění sousedé

Tři pánové měli tři vily. Vily byly postaveny na malém oploceném pozemku (obr. 136). Majitel největší vily si stěžoval, že jej děti sousedů ruší, a vybudoval si vlastní cestu od dveří své vily až k brance v dolním rohu pozemku. Nato si majitel domku vpravo udělal vlastní cestu k brance nalevo a nakonec majitel domku vlevo cestu k brance vpravo. Tyto tři cesty se nikde neprotínaly. Kudy vedly?



Obr. 136

Z deště pod okap

Pavel a Havel nastoupili do práce v různých podnicích, ale se stejným platem. V minulém roce zvýšili Pavlovi plat o 10%, zatímco Havlovi jej o 10% snížili. Letos Pavlovi plat o 10% snížili a Havlovi o 10% zvýšili.

Kdo z nich dostává nyní vyšší plat?

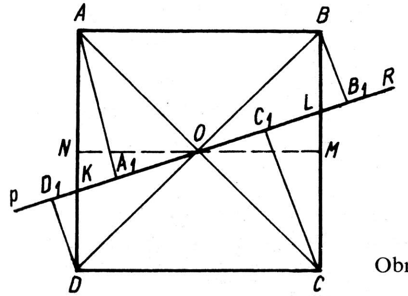
■ Řešení úloh

Čtverec a přímka

Máme vypočítat

$AA_1^2 + DD_1^2 + CC_1^2 + BB_1^2$

(viz obr. 137). Pravoúhlé trojúhelníky ONK a OML jsou shodné, odkud plyne $NK = ML$, $DK = BL$, $AK = CL$, $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$. Narýsujme úhlopříčky AC a BD; platí $\triangle AA_1O = \triangle DD_1O$*) a odtud $AA_1 = D_1O$ a $DD_1 = A_1O$.



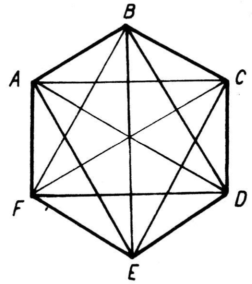
Obr. 137

Hledaný součet je tedy roven

$$2(AA_1^2 + DD_1^2) = 2(AA_1^2 + A_1O^2) =$$
$$= 2AO^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Vyzkoušej svoji geometrickou představivost

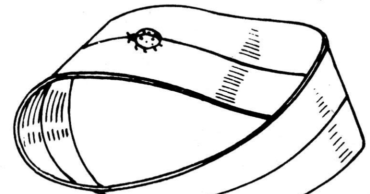
110 trojúhelníků (viz obr. 138).



Obr. 138

Ještě o Möbiově listu

Rozstřižením Möbiova listu v polovině jeho šířky podél čáry, po níž leze brouček (obr. 139), vznikne pás na obr. 140; Möbiův list se nerozpadne na dvě části, ale vytvoří pás, který má opět jeho vlastnosti.

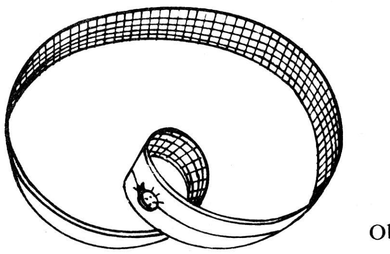


Obr. 139

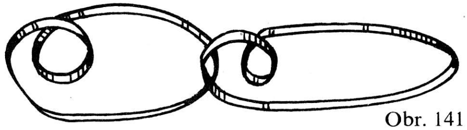
*) Podle poučky o shodnosti úhlů, jejichž ramena jsou navzájem kolmá: $AO \perp OD$, $AA_1 \perp OD_1$, a tedy $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle DOD_1$. (Pozn. překl.)

Druhým rozstřižením Möbiova listu podél čáry půlící jeho šířku se list rozpadne na řetěz o dvou článcích (viz obr. 141).

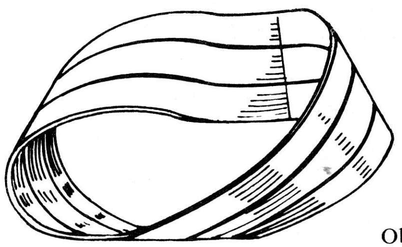
Rozstřihneme-li Möbiův list nikoli uprostřed, ale v jedné třetině či v jedné čtvrtině jeho šíře (obr. 142), vzniknou dva spletené pásy (obr. 143), z nichž jeden je stejný jako pás na obr. 139 a druhý jako pás na obr. 140.



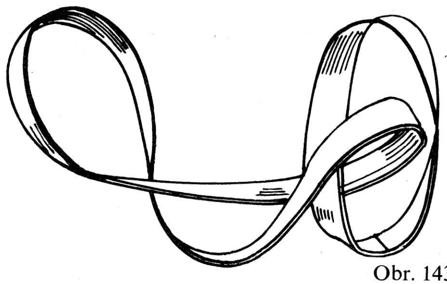
Obr. 140



Obr. 141



Obr. 142



Obr. 143

Kolik let je strýci?

Anně je 5 let;
Janě 5 . 5 = 25 let;
tetě Haně 25 + 20 = 45 let;
Evě 45 : 3 = 15 let;
strýci je 15 . 2 = 30 let.

Spravedlivý otec

Nakonec měl každý z bratrů 8 dolarů. Než nejstarší bratr rozdělil polovinu svých peněz, měl 16 dolarů, prostřední měl 4 dolary a nejmladší 4 dolary. Než prostřední bratr rozdělil polovinu svých peněz, měl 8 dolarů, nejstarší měl 14 a nejmladší 2 dolary. Než nejmladší rozdělil polovinu svých peněz, měl 4 dolary, prostřední 7 dolarů a nejstarší 13 dolarů.

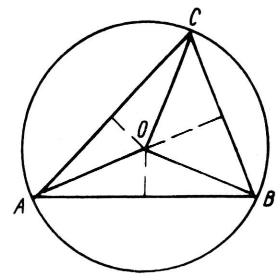
Závěr: Nejstaršímu farmářovu synovi bylo 13 let, prostřednímu 7 let a nejmladšímu 4 roky.

Krejčovství a geometrie

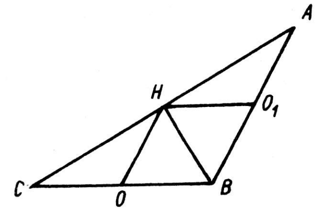
Rovnoramenný trojúhelník je možno obrátit „naruby“ o 180° a ztotožnit jej s jeho původní polohou.

Je-li ABC ostroúhlý trojúhelník, můžeme jej rozdělit na tři rovnoramenné trojúhelníky se společným vrcholem O (viz obr. 144), což je střed kružnice trojúhelníku opsané. Každý z těchto tří trojúhelníků je již možno po obrácení ztotožnit s jeho původní polohou: $\triangle\, OAB$ je shodný s $\triangle\, OBA$,

$\triangle\, OAC$ je shodný s $\triangle\, OCA$ atd., takže červený trojúhelník bude shodný s modrým.



Obr. 144

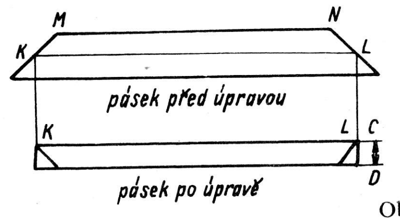


Obr. 145

Je-li ABC tupoúhlý trojúhelník (s tupým úhlem při vrcholu B, viz obr. 145), můžeme jej rozdělit na čtyři rovnoramenné trojúhelníky. Z vrcholu B vedeme výšku BH a sestrojíme body O (střed strany BC) a O_1 (střed strany BA). Tak dostaneme čtyři trojúhelníky, které lze obrátit: OBH, OCH, O_1BH, O_1AH; všechny tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné*).

Elegantní dáma a její pásek

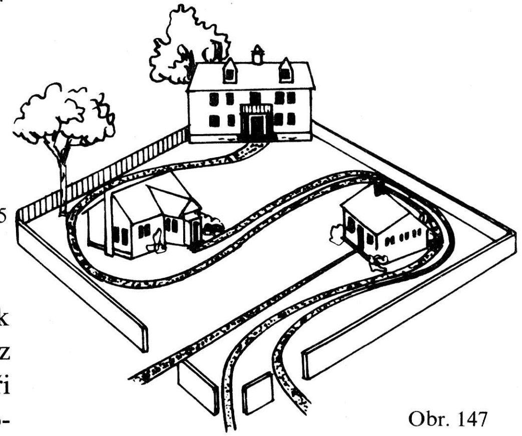
Po úpravě byla délka pásku rovna KL a šířka CD (viz obr. 146).



Obr. 146

Rozvadění sousedé

Obr. 147 ukazuje, jak vybudovali rozvadění sousedé cesty.



Obr. 147

Z deště pod okap

1. V minulém roce dostal Pavel

$$1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

původního platu. Havel dostal

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

původního platu.

*) Proč? Trojúhelníky BHC a BHA jsou pravoúhlé, proto body O, O_1 jsou středy kružnic těmto trojúhelníkům opsaných; proto $OH = OB = OC$, $O_1H = O_1A = O_1B$. (Pozn. překl.)

2. Letos dostal Pavel $\frac{9}{10}$ loňského platu, tj.

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$$

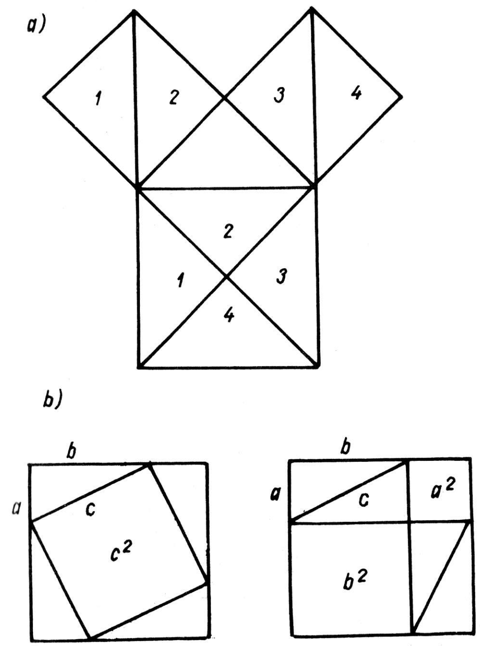
původního platu, zatímco Havel dostal

$$\frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{99}{100}$$

původního platu.

Z toho vidíme, že jak Pavel, tak i Havel dostávají nyní o $\frac{1}{100}$ původního platu méně, tj. plat o 1 % nižší než při nástupu do zaměstnání.

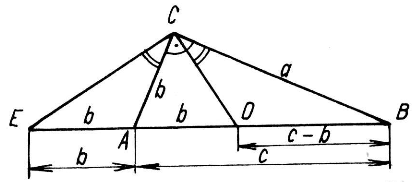
Mezi našimi čtenáři není ani jediný, kdo by neznal Pythagorovu větu. Tato věta říká, že v pravoúhlém trojúhelníku se čtverec nad předponou rovná součtu čtverců nad oběma odvěsnami. Je známa celá řada důkazů tohoto tvrzení, jak geometrických (pomocí obrázku), tak i algebraických (výpočtem). Jeden z nich, nejjednodušší, se připisuje samotnému Pythagorovi. Je tak jednoduchý, že k němu postačí obrázek a slůvko „viz“. (Viz obr. 148a.)*)



Obr. 148

Avšak jistě jen málo čtenářů se pokoušelo dokázat obrácené tvrzení: Jestliže v trojúhelníku platí, že čtverec nad jednou stranou se rovná součtu čtverců nad zbývajícími dvěma stranami, pak tento trojúhelník je pravoúhlý. Důkazů tohoto tvrzení je rovněž několik. Zde je jeden z nich:

P ř e d p o k l a d : V trojúhelníku ABC o stranách a, b, c (obr. 149) platí $c^2 = a^2 + b^2$.



Obr. 149

T v r z e n í : Úhel při vrcholu C je pravý.

D ů k a z : Podle předpokladu je

$$c^2 - b^2 = a^2$$

čili

$$(c + b)(c - b) = a^2,$$

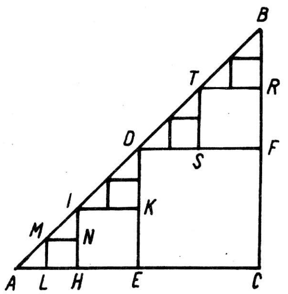
---

*) Pozorný čtenář si povšimne, že důkaz naznačený na obr. 148a platí jen pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník. Avšak obecný důkaz není o mnoho složitější. Čtenář si jej odvodí snadno sám z obr. 148b. (Pozn. překl.)

odkud

$$\text{(I)} \quad \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}.$$

Na přímce AB sestrojme body D, E tak, aby $AD = AE = AC = b$ a současně $DB = c - b$. Z úměry (I) plyne, že trojúhelníky DBC a CBE jsou podobné (úhel při vrcholu B je společný), takže $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CEA$; přitom $\sphericalangle CEA =$ $= \sphericalangle ECA = \frac{1}{2} \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ACD =$ $= \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle CAD) = 90° -$ $- \frac{1}{2} \sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle CEA$. Tedy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB =$ $= (90° - \sphericalangle CEA) + \sphericalangle CEA = 90°$. $\sphericalangle ACB = 90°$; tedy je pravdivá jak Pythagorova věta, tak i naše obrácené tvrzení. A přece ... Zde je důkaz, že přepona se rovná součtu obou odvěsen:



Obr. 150

Nechť $\triangle ABC$ (obr. 150) je pravoúhlý. Pro zjednodušení úvah budeme předpokládat, že je také rovnoramenný ($AC = CB = a$). Dokážeme, že $AB =$ $= AC + CB = 2a$.

Z obrázku vidíme, že $AC + CB =$ $= AE + ED + DF + FB = \frac{1}{2}a \,.\, 4 =$ $= 2a$, ale také $AH + HI + IK +$ $+ KD + DS + ST + TR + RB =$ $= \frac{1}{4}a \,.\, 8$ nebo $AL + LM + MN + \ldots =$ $= \frac{1}{8}a \,.\, 16$ atd.

Jestliže počet úseček lomené čáry mezi koncovými body A a B je n, náš vzorec bude mít tvar

$$\frac{a}{n} \,.\, 2n = 2a.$$

Avšak pro $n \to \infty$ se lomená čára $ALMNI$ ... změní v úsečku AB. Tedy $AB = 2a$. Odtud, umocníme-li obě strany rovnice na druhou, dostaneme $AB^2 = 4a^2$, což je ve sporu s Pythagorovou větou, podle níž je $AB^2 = 2a^2$.

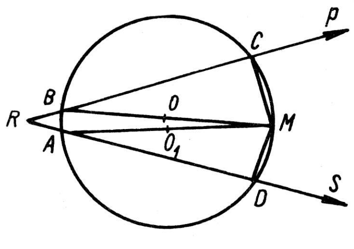
Kde je chyba v naší úvaze?*)

*) Chyba je v neopatrném použití limitního přechodu $n \to \infty$; neoprávněně jsme předpokládali, že když všechny lomené čáry mají tutéž délku, musí mít tuto délku i „limitní čára", tj. úsečka AB. Doporučujeme čtenáři, aby si z tohoto hlediska povšiml úlohy „Plech" v kap. 25, str. 244. (Pozn. překl.)

Zábavné úlohy

Každá kružnice má dva středy

Narýsujme libovolný úhel PRS (obr. 151) a zvolme dva body C a D na ramenech úhlu. Vztyčme kolmice CM na rameno PR a DM na rameno SR. Tyto kolmice se protínají v bodě M.



Obr. 151

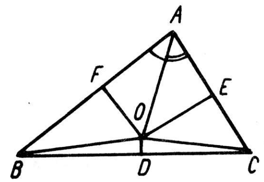
Body C, M, D opíšeme kružnici. Tato kružnice protne ramena úhlu ve dvou bodech; označme je A a B. Spojme body A a B s bodem M. Úhel BCM je pravý úhel vepsaný do kružnice; tětiva, která k němu přísluší, je tedy průměr; je to úsečka BM. Totéž lze říci o úhlu ADM: je to pravý úhel vepsaný do kružnice, takže je sestrojen nad průměrem AM. Odtud plyne, že kružnice opsaná bodům C, M, D má dva středy – O a O_1.

Nalezni chybu v této úvaze.

Každý trojúhelník je rovnoramenný

Podáme důkaz, že každý trojúhelník je rovnoramenný. Úkolem čtenáře je najít chybu v naší úvaze.

Narýsujme trojúhelník ABC, jehož všechny strany jsou navzájem různé (obr. 152). Sestrojme osu úhlu $\sphericalangle BAC$. Ve středu strany BC (bod D) vztyčme kolmici (osu strany BC). Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ a osa strany BC se protnou v bodě O. Bod O je tedy stejně vzdálen od obou ramen úhlu $\sphericalangle BAC$ ($OF = OE$) a od vrcholů B a C ($BO =$ $= OC$). Odtud plyne, že trojúhelníky AFO a AEO jsou shodné, stejně jako trojúhelníky OBD a OCD. Ze shodnosti prvních dvou trojúhelníků plyne $AF =$ $= AE$; ze shodnosti druhých dvou plyne, že i trojúhelníky BFO a COE jsou shodné, odkud $FB = EC$. Sečteme-li tyto dvě rovnosti, dostaneme $AF +$ $+ FB = AE + EC$ čili $AB = AC$.



Obr. 152

Dokázali jsme, že libovolný trojúhelník je rovnoramenný.

Věřitel a dlužník

Věřitel jedoucí tramvají zpozoroval svého dlužníka jdoucího podél kolejí, ale v opačném směru, než jela tramvaj. Během deseti sekund se věřitel dostal k východu, vyskočil z tramvaje a běžel, aby dlužníka dohonil. Věřitel běžel dvakrát rychleji, než byla rychlost dlužníkovy chůze, ale pětkrát pomaleji, než byla rychlost tramvaje.

Po kolika sekundách dohonil věřitel dlužníka?

■ Řešení úloh

Každá kružnice má dva středy

Chyba tkví v tvrzení, že kružnice opsaná bodům C, M, D protne ramena úhlu PRS ve dvou bodech. Rozbor obr. 151 nám ukáže, že toto tvrzení je třeba opravit: kružnice prochází vrcholem úhlu R. Následkem toho body O_1 a O splynou.

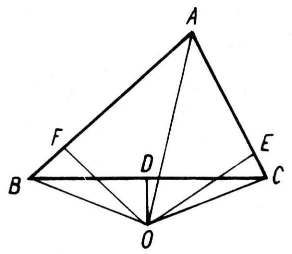
Každý trojúhelník je rovnoramenný

Chyba je v obr. 152. Naše úvahy byly prováděny na základě obrázku, o němž nevíme, zda je správný.

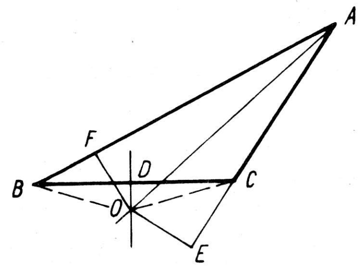
Musíme se zamyslet nad třemi věcmi: za prvé – zda osa úhlu $\sphericalangle BAC$ a osa strany BC se vždy protnou, za druhé – kde leží jejich průsečík O, uvnitř či vně trojúhelníku ABC, a za třetí – zda strany AB a AC jsou vždy rovny součtu úseček AF a FB, resp. AE a EC.

Na první otázku odpovíme kladně: V nerovnoramenném trojúhelníku se osa úhlu $\sphericalangle BAC$ a osa strany BC vždy protnou, a náš trojúhelník měl všechny strany navzájem různé.

Ani druhá otázka, týkající se polohy průsečíku O, nám nepomůže odhalit chybu. I kdybychom předpokládali, že průsečík O leží vně trojúhelníku ABC (obr. 153), bude opět $AB = AF + FB$ i $AC = AE + EC$, a tedy $AB = AC$.



Obr. 153



Obr. 154

Teprve rozbor obr. 154 nám ukáže, kde je chyba v naší úvaze.

Předpokládejme, že trojúhelníku ABC je opsána kružnice, která prochází bodem O. Zkoumejme čtyřúhelník $ABOC$ vepsaný do této kružnice. Součet dvou protějších úhlů tohoto čtyřúhelníku je 180°. Odtud plyne, že buďto je $\sphericalangle ABO$ ostrý a $\sphericalangle ACO$ tupý, nebo naopak. Je-li $\sphericalangle ABO$ ostrý, pak přímka OF protne úsečku AB, ale OE ($\sphericalangle ACO$ je tupý) protne prodloužení strany AC. Dostáváme tedy v tomto případě $AB = AF + FB$, ale $AC = AE - EC$. Tedy AB se nerovná AC, takže není pravda, že každý trojúhelník je rovnoramenný.*)

Věřitel a dlužník

Předpokládejme, že za jednu sekundu urazí dlužník jednu jednotku délky. Věřitel tedy za jednu sekundu uběhne dvě jednotky, zatímco tramvaj jich ujede deset. Než věřitel vyskočil z tramvaje, ujela tramvaj 10 . 10 jednotek délky. V okamžiku, kdy začalo pronásledování dlužníka, byla tedy vzdálenost mezi dlužníkem a věřitelem $100 + 10 = 110$ jednotek. Poněvadž věřitel za každou sekundu ujde 2 jednotky, ale dlužník jen jednu, dohoní věřitel dlužníka za $\frac{110}{2-1}$ sekund, tj. za 1 minutu a 50 sekund.

---

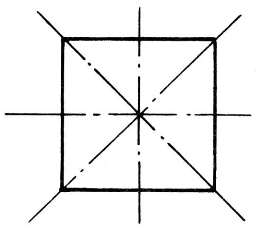
*) Nedostatkem tohoto řešení je, že chybí důkaz, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC prochází bodem O. (Je to ovšem pravdivé tvrzení.) Chyba v úloze je prostě v tom, že se používá následujícího nesprávného tvrzení: Jsou-li dány tři body na přímce, je vzdálenost dvou z nich rovna součtu vzdáleností obou od třetího bodu.

Obr. 152 a 153 nejsou úmyslně narýsovány správně (správný obrázek by nám chybu hned prozradil). Na obr. 154 je tupoúhlý trojúhelník, ale to není podstatné. Narýsujte si obr. 152 správně, abyste viděli, že i v případě ostroúhlého trojúhelníka je situace stejná. (Pozn. překl.)

Symetrie je řecké slovo označující souměrnost, soulad mezi částmi celku. S projevy symetrie se setkáváme v geometrických obrazcích, v neživé přírodě (např. v krystalech), ve světě rostlin (tvar a seskupení listů a květů) i zvířat (rozmístění vnějších tělesných orgánů), ve stavebnictví, v umění (ornamenty, vzory), v řemesle (krajky, výšivky), v technice – zkrátka všude, neboť symetrie je vnitřní nutností organismů i zařízení.

Ze školy víme, co nazýváme souměrností (symetrií) v geometrii. Poznali jsme souměrnost středovou, osovou (v rovině) a rovinovou (v prostoru). Obrazec může být souměrný vzhledem k jinému obrazci nebo vzhledem k sobě samému; může mít osy, střed a roviny souměrnosti. Má-li obrazec osu (rovinu) souměrnosti, skládá se z dvojic bodů ležících na přímkách kolmých k ose (rovině) souměrnosti a stejně od ní vzdálených. Má-li obrazec střed souměrnosti, skládá se z dvojic bodů ležících na přímkách procházejících středem ve stejné vzdálenosti od středu.

Jako celek může mít omezený obrazec několik os (rovin) souměrnosti; např. čtverec má čtyři osy souměrnosti (obr. 155), ale jen jeden (čtyřnásobný) střed souměrnosti, v němž se protínají všechny čtyři osy souměrnosti.

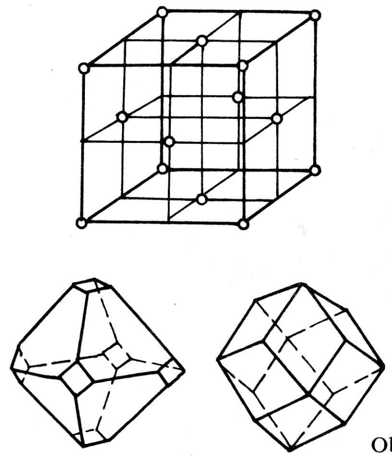


Obr. 155

Obrazce, které nejsou symetrické, nazýváme *asymetrickými*. Některé asymetrické obrazce mohou mít jiné zajímavé vlastnosti.

Velmi důležitá je symetrie v krystalografii – nauce o krystalech a o krystalickém stavu hmoty. Geometrická krystalografie zkoumá polohu stěn a skupiny stěn, mezi nimiž platí vztahy symetrie, tj. výskyt tzv. jednoduchých útvarů: krychlí, čtyřstěnů, osmistěnů, dvanáctistěnů, klenců*) aj. (obr. 156). Vyšetřuje, jak se opakují stejné prvky krystalu (stěny, hrany, vrcholy) jakoby působením symetrického zobrazení: rovinová symetrie dává zrcadlový obraz, osy symetrie opakují při otočení každý prvek dvakrát, třikrát, čtyřikrát či šestkrát a střed symetrie zobrazuje každý prvek promítnutím. Všechny možné kombinace symetrií dávají 32 krystalografických tříd.

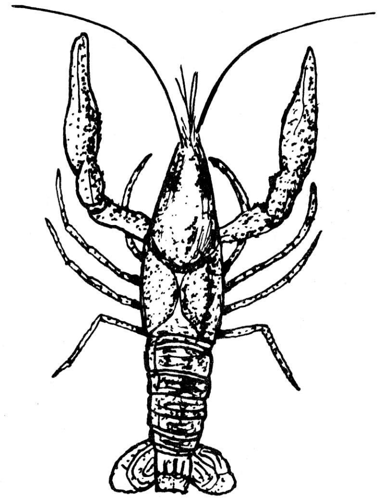
*) Klenec je rovnoběžnostěn, jehož šest stěn tvoří shodné kosočtverce. (Pozn. překl.)



Obr. 156

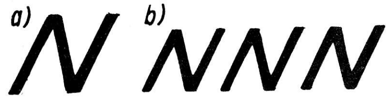
Ve struktuře krystalů vystupují navíc jako základní prvky symetrie roviny posunu (zrcadlení spojené s posunutím) a šroubové osy (otočení spojené s posunutím), které dávají 230 prostorových skupin.

Symetrie v biologii spočívá v harmonickém rozložení podobných částí těla vzhledem k danému bodu, přímce či rovině (obr. 157) – tzv. dvoustranná symetrie. Organismy nejsou úplně symetrické. Obvykle existuje symetrie v celkovém tvaru těla a v poloze některých jeho částí. Vnější stavba lidského těla je symetrická, vnitřní však nikoli (srdce, žaludek, játra). Druh symetrie organismu se vytvářel v souladu s jeho vývojem na základě nutnosti přizpůsobit se životním podmínkám a silám působícím v prostředí, v němž organismus žije.



Obr. 157

Zamýšlíme-li se nad podstatou geometrické symetrie v umění, v technice, v řemeslné výrobě (ornamenty, vzorky, krajky, vystřihovánky apod.), můžeme pozorovat následující fáze jejího vzniku. Představme si lomenou čáru (obr. 158a). Jediný obrázek takové lomené čáry nemá žádné vlastnosti symetrie.*) Opakujeme-li však tutéž

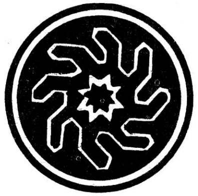


Obr. 158

*) Lomená čára na obr. 158a je náhodou souměrná podle středu, ale to vcelku neovlivňuje autorovy úvahy. (Pozn. překl.)

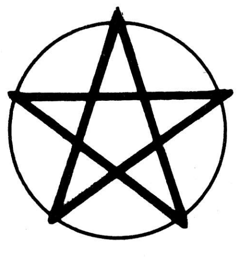
kresbu několikrát podél přímky stále ve stejné vzdálenosti od sebe, dostaneme vzor (obr. 158b), jehož motivem je právě ona jednoduchá kresba lomené čáry. Způsob opakování této kresby (motivu) nazveme rytmem.

Přerušované i souvislé vzory mající tvar podélných pásů jsou známé a používané odedávna, např. ke zdobení stěn obytných místností. Opakuje-li se nějaký motiv rytmicky po celé ploše stěny, vzniká vzorek (tapeta). Jiný způsob rytmického opakování motivu spočívá v jeho otáčení o jistou část plného úhlu $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. Ornament na obr. 159 překrývá sám sebe při otočení o 45°, pěticípá hvězda (obr. 160) se překryje při otočení o 72°. S rytmickým otáčením základního tvaru se často setkáváme u výtvorů přírody i v technice. V umění můžeme takový postup pozorovat na růžicích, ornamentech, krajkách, vystřihovánkách apod.



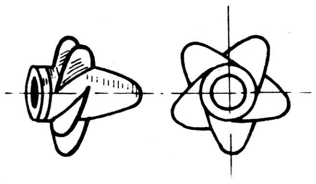
Obr. 159

Konečně třetí způsob rytmického opakování je spojení posunutí podél přímky s otočením kolem svislé osy (obr. 161). Příkladem takového rytmického opakování v technice je lodní šroub (obr. 162). Pásy, vzory, růžice



Obr. 160

Obr. 161



Obr. 162

a ornamenty, které těmito způsoby dostaneme, jsou již útvary, které můžeme popsat s použitím pojmů a zákonů geometrie.

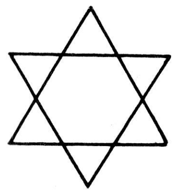
Naskýtá se otázka: může být symetrie pramenem estetického uspokojení a uměleckého zážitku? Bezpochyby může. Rozšíříme-li pojem symetrie na barvy, zvuky a pohyby, můžeme v ní vidět podstatu krásy přírody i lidských děl.

■ Zábavné úlohy

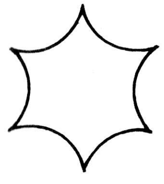
Šerifská hvězda

Krása geometrických útvarů upoutávala odedávna nejen pozornost matematiků. Jejich půvab využívali především umělci, malíři, sochaři a řemeslníci. Zvlášť všeobecně známá je krása čtverce, který má čtyři stejné strany,

čtyři stejné (pravé) úhly a čtyři osy souměrnosti. Stejně často je používán jak v umění, tak i v řemesle rovnostranný trojúhelník. Zvláště důležitou roli mezi mnohoúhelníky hrají mnohoúhelníky hvězdovité; mezi nimi zejména dva: pěticípá hvězda (viz obr. 160) čili *pentagram* – tajemný znak pythagorovců (v dnešní době součást znaku mnoha států) – a šesticípá hvězda (obr. 163) čili tzv. *hvězda krále Davida.* Tajemství úspěchu pentagramu vysvětlili matematici tím, že všechna jeho ramena se navzájem dělí zlatým řezem*). Na obr. 164 vidíme *šerifskou hvězdu.* Její ramena tvoří šest stejných kruhových oblouků. Pokuste se najít:



Obr. 163



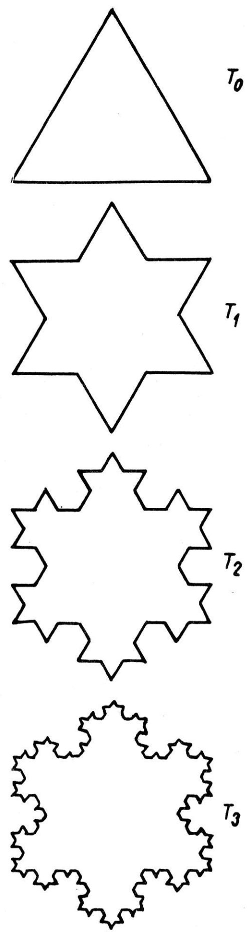
Obr. 164

a) způsob sestrojení,
b) délku obvodu,
c) její plošný obsah.

*) Viz kap. 12.

Křivky Nilse Fabiana Kocha čili „sněhové vločky“

Trojúhelník T_0 (obr. 165) je rovnostranný. Každou jeho stranu rozdělíme na tři stejné části. Střední část každé strany nahradíme dvěma stranami rovnostranného trojúhelníka, čímž dosta-



Obr. 165

neme mnohoúhelník T_1 ve tvaru šesticípé hvězdy. Obrazec T_1 upravíme stejně jako předtím T_0 a dostaneme T_2. Nato stejným způsobem dostaneme T_3 atd. Limita $T = \lim_{n \to \infty} T_n$ se nazývá *křivka N. F. Kocha**). Je možno ověřit, že délka l_n křivky T_n a obsah P_n obrazce, který ohraničuje, jsou dány vzorci

$$l_n = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n ;$$

$$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{3}\frac{l_{n-1}}{a} \cdot \frac{P_0}{3^n},$$

kde P_0 je obsah trojúhelníka T_0, zatímco a je délka jeho strany.**)

Úlohy se zápalkami

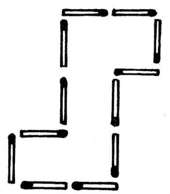
1. Z deseti zápalek slož tři shodné čtverce.

2. Z dvanácti zápalek slož šest shodných čtverců.

3. Ze šesti zápalek slož tři shodné trojúhelníky.

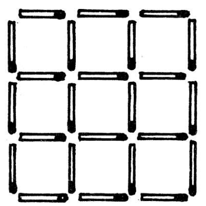
4. Z pěti zápalek slož osm pravých úhlů.

5. V obrazci vytvořeném z dvanácti zápalek (obr. 166) přemísti čtyři zápalky tak, aby vznikly tři shodné čtverce.

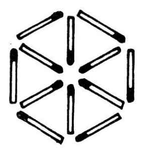


Obr. 166

6. V obrazci vytvořeném ze 24 zápalek (obr. 167) přemísti osm zápalek tak, aby vznikly dva shodné čtverce.



Obr. 167



Obr. 168

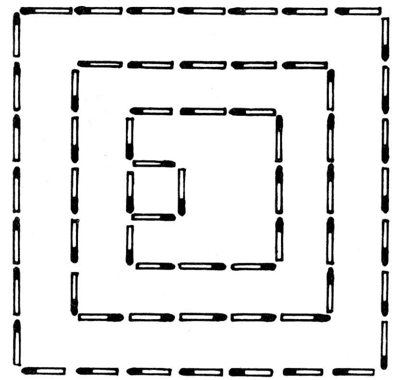
---

*) „Limita křivek T_n“ znamená zhruba řečeno křivku, k níž se křivky T_n s rostoucím n neomezeně přibližují. Tato limita (pokud vůbec existuje) může být velmi složitý geometrický útvar, často jen těžko názorně představitelný a značně odlišný od toho, co pod pojmem „křivka“ rozumíme v běžné řeči. (Pozn. překl.)

**) Ověření vzorců není tak těžké. Tvoříme-li křivku T_n z křivky T_{n-1}, vzniknou z každé úsečky na původní křivce T_{n-1} čtyři úsečky délky třikrát menší; tím se objeví zlomek $\frac{4}{3}$. Co se týče obsahu, přibude na každé úsečce křivky T_{n-1} trojúhelník o straně třikrát menší. Protože úsečka křivky T_{n-1} má délku $\frac{a}{3^{n-1}}$, je jeho obsah $\left(\frac{a}{3^{n-1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Vzorci, který vyjadřuje n-tou veličinu (P_n) pomocí ($n-1$)-ní [a případně ještě ($n-2$)-hé, ($n-3$)-tí atd.], říkáme *rekurentní vzorec.* (Pozn. překl.)

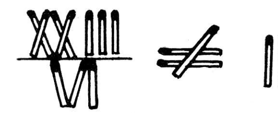
7. V obrazci vytvořeném z dvanácti zápalek (obr. 168) přemísti tři zápalky tak, aby vzniklo šest shodných rovnoběžníků.

8. Ze 63 zápalek jsou vytvořeny čtyři čtverce (obr. 169). Přemísti pět zápalek tak, aby vznikl obrazec podobný spirále.

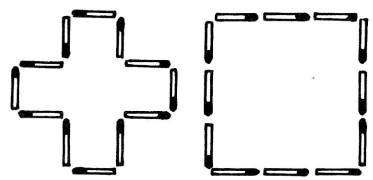


Obr. 169

9. Změň nerovnost z obr. 170 na rovnost tím, že přemístíš jen dvě zápalky.



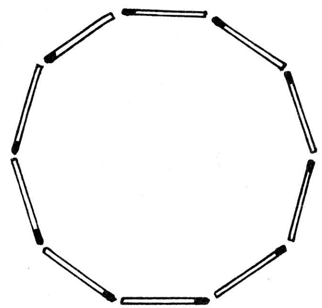
Obr. 170



Obr. 171

10. Na obr. 171 vidíme čtverec a kříž; každý je složený ze dvanácti zápalek. Obsah čtverce je 9 čtverečných jednotek, obsah kříže 5 čtverečných jednotek. Slož ze dvanácti zápalek obrazec s obsahem 4 čtverečné jednotky.

11. Na obr. 172 je pravidelný desetiúhelník vytvořený z deseti zápalek. Přemísti zápalky tak, aby vzniklý desetiúhelník měl tytéž strany, ale menší obsah.



Obr. 172

▪ Řešení úloh

Šerifská hvězda

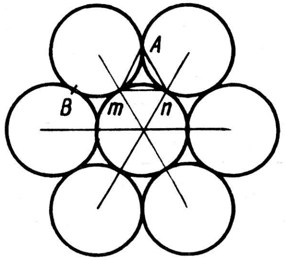
a) Způsob, jak sestrojit šerifskou hvězdu, je ukázán na obr. 173.

b) Obvod hvězdy se rovná délce šesti oblouků *AmB*, tj.

$$\frac{2\pi r}{3} \cdot 6 = 4\pi r.$$

c) Plošný obsah hvězdy se skládá z obsahu kruhu (πr^2) o poloměru r a z obsahu šesti shodných „cípů“ hvězdy. Obsah cípu vypočteme odečtením obsahu tří shodných kruhových úsečí od obsahu rovnostranného trojúhelníka *Amn*. Obsah trojúhelníka *Amn* je roven $\frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$, protože $Am = r$. Jestliže od obsahu kruhu πr^2 odečteme obsah vepsaného pravidelného šestiúhelníka $6 \cdot \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$ a výsledek dělíme dvěma, dostaneme obsah tří hledaných kruhových úsečí. Po provedení těchto výpočtů (výpočtu obsahu jednoho cípu, pak šesti cípů a pak přičtení obsahu kruhu) dostaneme

$$P = 6r^2 \sqrt{3} - 2\pi r^2 \approx 4{,}1r^2.$$



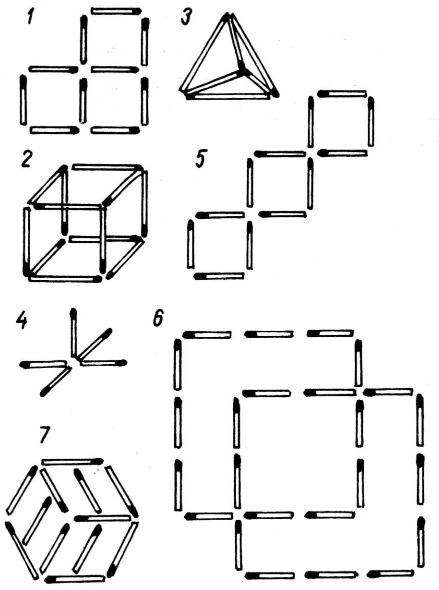
Obr. 173

Je-li např. $r = 10$ mm, je obsah hvězdy roven 410 mm^2 a její obvod má délku 4 . 3,14 . 10 mm = 125,6 mm.

Úlohy se zápalkami

1.–7. Řešení jsou na obr. 174.

8. Přemístí se zápalky označené na obr. 175b šipkami.



Obr. 174

9. $\pi = 22/7$. (Obr. 176a).*)

10. Pravoúhlý trojúhelník o stranách délky 3, 4, 5 jednotek (= délka zápalky) má obsah 6 čtverečných jednotek (obr. 177a). Řešením je obrazec na obr. 177b o obsahu 4 čtverečné jednotky.

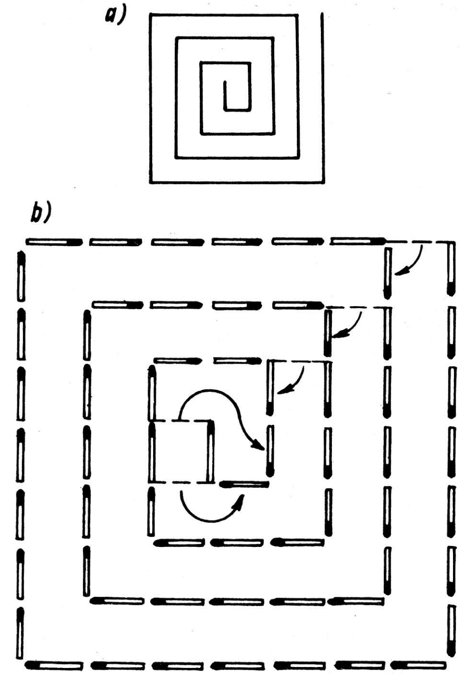
11. Desetiúhelník

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1J_1K_1$

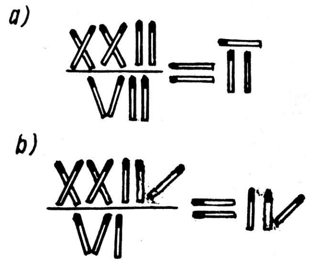
(obr. 178) má strany o délce jedné jednotky, ale jeho obsah je menší než obsah původního desetiúhelníku z obr. 172 o součet obsahů pěti rovnoběžníků $J_1K_1A_1P$.

---

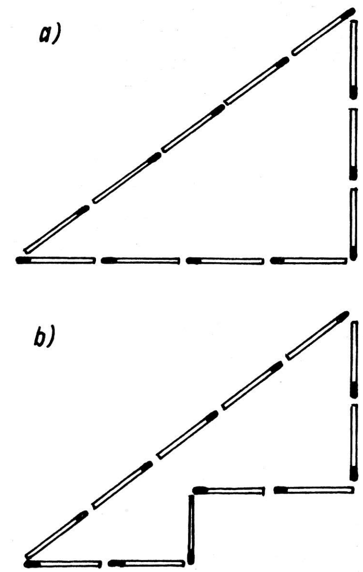
*) To je ovšem jen přibližná rovnost, protože číslo π, jak víme, není racionální (srov. kap. 2). Jiné řešení, které je správné, ale trochu „nekrasopisné“ (máme-li se dotknout jen dvou zápalek), je na obr. 176b: $\frac{\text{XXIV}}{\text{VI}} = \text{IV}$, tj. $24/6 = 4$. (Pozn. překl.)



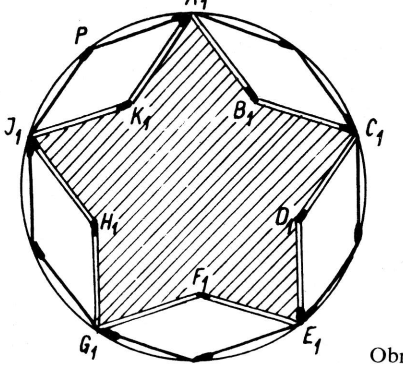
Obr. 175



Obr. 176



Obr. 177



Obr. 178

Člověk poznává prostor po celý svůj život. Nástrojem bezprostředního poznávání prostoru jsou naše smysly, hmat a zrak. Ale omezené schopnosti našeho hmatu a zraku nám umožňují zkoumat prostor jen přibližně a navíc jen jeho malou část. Vlastnosti takové části prostoru, v níž žije člověk, popsal Euklides ve svém epochálním díle „Základy". Toto dílo známe ve školské podobě také pod názvem „Geometrie". Čtenáři vědí, jak jsou „Základy" sestaveny – nejdříve jsou předloženy základní pojmy, pak je uvedeno několik axiómů, tj. tvrzení, která přijímáme bez důkazu, a konečně jistý počet postulátů. Dále se pak na základě těchto axiómů, postulátů a základních pojmů odvozují složitější tvrzení, z nich opět další a další, a tak se buduje vědecké dílo, které nazýváme *deduktivní soustavou.*

V soustavě axiómů, které Euklides uvádí v úvodu svých „Základů", je jeden, který připisuje našemu prostoru zvláštní vlastnost. V současné, moderní úpravě zní: „Daným bodem mimo danou přímku je možno vést právě jednu přímku, která je s danou přímkou rovnoběžná." Mnoho učenců a filozofů soudilo, že tento axióm není nezávislý na ostatních, tj. že jej lze odvodit z ostatních axiómů, a snažili se to dokázat.

Euklides (asi 300 let př. n. l.)

Michail Lobačevskij (1792 – 1856)

Již téměř od počátku našeho letopočtu bylo v každém století několik takových pokusů. Poslední pokusy se datují z 19. století. Ruský matematik N. I. Lobačevskij (1792 – 1856)*) pojal tento problém úplně jinak, jak se o to do té doby nikdo nepokusil. Lobačevskij zásadně změnil znění uvedeného axiómu, aniž změnil kterýkoli jiný axióm či postulát. Zavedl předpoklad, že každým bodem mimo danou přímku lze vést k dané přímce alespoň dvě rovnoběžky. A z takto změněné soustavy axiómů dokázal všechna tvrzení, která obsahují Euklidovy „Základy". Protože se mu podařilo odvodit všechna Euklidova tvrzení, aniž přitom došel ke sporu, usoudil Lobačevskij oprávněně, že axióm o rovnoběžce je nezávislý na ostatních a nedá se z nich odvodit.

Napsali jsme, že Lobačevskij odvodil všechna Euklidova tvrzení. To není úplně přesné, neboť tvrzení Lobačevského zní často jinak než Euklidova. Porovnejme některá z nich:

U Euklida:	U Lobačevského:
1. Bodem mimo danou přímku lze vést právě jednu přímku, která danou přímku neprotíná a leží s ní v téže rovině (rovnoběžku).	1. Bodem mimo danou přímku lze vést nekonečně mnoho přímek, které danou přímku neprotínají a leží s ní v téže rovině; dvě z nich („krajní") se nazývají rovnoběžky.
2. Součet vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka je roven π (dva pravé úhly).	2. Součet vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka je menší než π a může být libovolně malý.
3. Existují podobné trojúhelníky, které nejsou shodné.	3. Jen shodné trojúhelníky jsou navzájem podobné.
4. V rovině protínají kolmice k jedné ze dvou rovnoběžek i druhou.	4. Dvě kolmice k jedné ze dvou rovnoběžek nemusí protínat druhou (rozbíhají se).
5. Jestliže se poloměr kružnice neomezeně zvětšuje, kružnice se blíží přímce.	5. Jestliže se poloměr kružnice neomezeně zvětšuje, neblíží se kružnice přímce, ale jisté křivce, která se nazývá horocykl*).
6. Geometrickým místem bodů stejně vzdálených od dané přímky jsou dvě přímky.	6. Geometrickým místem bodů stejně vzdálených od dané přímky nejsou přímky, ale křivky, které se nazývají ekvidistanty.
7. Třemi body neležícími na přímce můžeme opsat právě jednu kružnici.	7. Třemi body můžeme vést buď kružnici, nebo horocykl, nebo ekvidistantu, nebo přímku.

*) A také maďarský matematik J. Bolyai (1802 – 1860).

*) Horocykl je křivka, která protíná v pravém úhlu všechny přímky svazku rovnoběžek.

8. Délka kružnice je přímo úměrná jejímu poloměru.

8. Délka kružnice není úměrná jejímu poloměru, ale vzrůstá rychleji než poloměr.

■ Zábavné úlohy

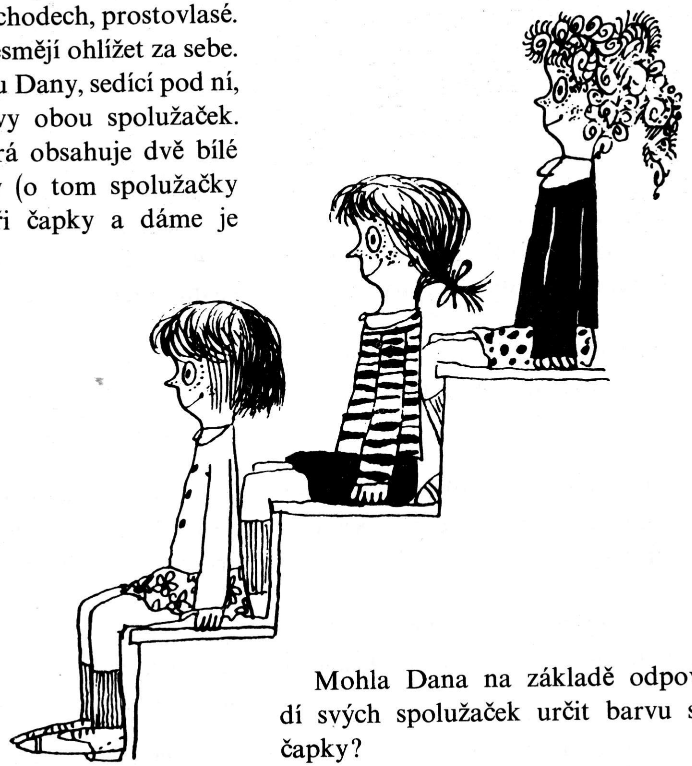
Logické problémy, stejně jako úlohy čistě matematické, vyžadují schopnost orientace, vytrvalost a umění nalézt v úloze tu podmínku, jejíž využití vede k řešení. Zde jsou příklady:

Černá nebo bílá?

Tři spolužačky, Hana, Jana a Dana, sedí za sebou na schodech, prostovlasé. Jana a Dana se nesmějí ohlížet za sebe. Jana vidí jen hlavu Dany, sedící pod ní, a Hana vidí hlavy obou spolužaček.

Z krabice, která obsahuje dvě bílé a tři černé čapky (o tom spolužačky vědí) vyjmeme tři čapky a dáme je děvčatům na hlavy tak, že žádná nezná barvu své čapky. Zbývající dvě čapky necháme v krabici, takže děvčata neznají jejich barvy.

Když se zeptali Hany, jaké barvy je její čapka, odpověděla, že to nemůže určit. Jana slyšela její odpověď a prohlásila, že ani ona neví tolik, aby mohla určit barvu své čapky.



Mohla Dana na základě odpovědí svých spolužaček určit barvu své čapky?

Novoroční hlavolam

Čtyři přátelé – Eduard, František, Hubert a Jiří – šli se svými manželkami do klubu na novoroční ples. Zpočátku každý tančil se svou ženou, ale brzy se páry pomíchaly. Blažena tančila s Eduardem, Alice s mužem Karolíny, Dora s manželem Alice; František tančil se ženou Jiřího a Jiří se ženou Eduarda.

V této zamotané situaci máte určit jednotlivé manželské páry i páry taneční – kdo s kým tančil.

Logický hlavolam

V Londýně byla v testu pro úředníky předložena tato záhada (uvádíme ji v počeštěné verzi):

(1) Příjmení strojvůdce, topiče a průvodčího jsou (nikoli v odpovídajícím pořadí) Kovalský, Petrovský, Závodský.

(2) Příjmení cestujících jsou Dr. Kovalský, Dr. Petrovský a Dr. Závodský.

(3) Dr. Kovalský bydlí v Praze.

(4) Průvodčí bydlí v půli cesty mezi Prahou a Plzní.

(5) Cestující, který se jmenuje stejně jako průvodčí, bydlí v Plzni.

(6) Dr. Petrovský vydělává měsíčně 6 500 Kčs.

(7) Cestující, který bydlí hned vedle průvodčího, vydělává přesně třikrát tolik co průvodčí.

(8) Závodský porazil topiče v kulečníku.

Jak se jmenuje strojvůdce?

Otcové a synové

Tři hospodáři – Kašpar, Melichar a Baltazar – poslali svým synům Jiřímu, Petrovi a Richardovi, kteří studovali v Praze, jisté množství medu na prodej. Množství medu (v kilogramech), která otcové poslali, byla v poměru 1 : 2 : 3. Synové prodali med známému – všichni za stejnou cenu za kilogram medu. Na oslavu úspěšného prodeje zašli chlapci do kavárny. Za vypitou kávu a zákusky zaplatili chlapci celkem tolik, kolik dostali od známého za 1 kg medu; na placení se podíleli ve stejném poměru, v jakém obdrželi peníze za prodaný med.

Víme, že Petr platil v kavárně 5 Kčs, že Jiří dostal za med 240 Kčs, že Baltazar dostal od svého syna za med 345 Kčs a že Melichar poslal svému synovi 8 kg medu. Kdo byl čí syn?

Jarní úklid

Šest spolužáků, kteří se účastnili jarního úklidu města, se rozdělilo na tři dvojice. Vedoucími dvojic byli Béďa, Olda a Tonda. Béďa, který pracoval s Radkem, dostal na vynášení smetí šestnáctikilogramový koš; Olda s Tomkem dostali dvanáctikilogramový koš a Tonda s Dankem (protože byli nejslabší) dostali desetikilogramový koš.

Ve zprávě na školní nástěnce bylo napsáno, že vedoucí Jánský s Lipským odnesli 224 kg smetí, vedoucí Orlovský se Záleským 192 kg a vedoucí Pavlovský s Kolínským 190 kg. Jak se jmenuje Záleský?

■ Řešení úloh

Černá nebo bílá?

Mohla. Z Hančiny odpovědi usoudily její spolužačky, že nemohou obě mít na hlavě bílou čapku. Kdyby Dana měla na hlavě bílou čapku, Jana by snadno uhodla, jakou čapku má na hlavě. Z toho mohla Dana vyvodit, že má na hlavě černou čapku.

Novoroční hlavolam

Seřaďme informace ze zadání úlohy:

1. Blažena tančila s Eduardem;
2. Alice tančila s mužem Karolíny;
3. Dora tančila s mužem Alice;
4. František tančil se ženou Jiřího;
5. Jiří tančil se ženou Eduarda.

Nejprve zjistíme, jak se jmenuje Eduardova žena. Není to Blažena (srov. 1 a 5), není to Alice (srov. 1 a 3) ani Karolína (srov. 1 a 2). Je to tedy Dora. Odtud plyne, že Jiří tančil s Dorou (viz 5) a že je mužem Alice (viz 3). Dále určíme, že František tančil s Alicí (viz 4), a tedy je mužem Karolíny (viz 2). Tím jsme zjistili všechny manželské páry až na jeden – Blaženu a Huberta. Nakonec poznamenejme, že Hubert a Karolína netančili (ze zadání úlohy to alespoň neplyne).

Logický hlavolam

Tři cestující, jmenovaní v (2), bydlí ve třech městech, o nichž se hovoří v (3), (5) a (4) [srov. (7)].

Dr. Petrovský není tím cestujícím, o němž se hovoří v (7), neboť jeho výdělek (6) není dělitelný třemi. Zde je klíč k řešení problému. Dr. Petrovský není ani tím, o kom se hovoří v (3). Eliminací dojdeme k závěru, že Dr. Petrovský je tím cestujícím, o němž se hovoří v (5), takže průvodčí se jmenuje Petrovský [označme tuto informaci (9)].

Ze tří příjmení uvedených v (1) nepatří tedy příjmení Závodský průvodčímu (9), ale ani topičovi (8). Musí to být příjmení strojvůdcovo.

Strojvůdce se jmenuje Závodský.

Otcové a synové

Poměr množství medu (v kilogramech), která otcové poslali, byl 1 : 2 : 3 a stejný byl poměr částek, které synové za med dostali, i poměr vydání v kavárně. Podle podmínek úlohy dostal Jiří za med 240 Kčs, zatímco Baltazar dostal od syna (po zaplacení účtu v kavárně) 345 Kčs. Tato čísla nejsou v poměru 1 : 2 ani 1 : 3.*) Když vezmeme v úvahu částku zaplacenou Baltazarovým synem v kavárně (x Kčs), musí platit $240 : (345 + x) = 2 : 3$, odkud $x = 15$. Baltazarův syn dostal za med $(345 + 15)$ Kčs $= 360$ Kčs.

Protože Petr zaplatil v kavárně 5 Kčs, zaplatil třetí chlapec 10 Kčs. Odtud plyne, že za 1 kg medu dostali chlapci $(5 + 10 + 15)$ Kčs $= 30$ Kčs a že Jiří, který dostal 240 Kčs, musel prodat 8 kg medu. Byl tedy synem Melicharovým. Baltazarův syn platil v kavárně 15 Kčs, nemohl to tedy být Petr. Petr je tedy Kašparův syn a Richard je syn Baltazarův.

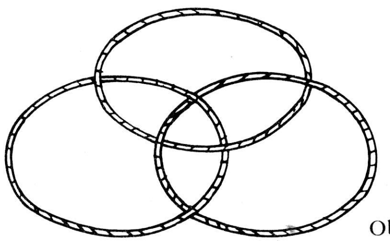
Jarní úklid

Orlovský se Záleským odnesli 192 kg smetí. Ze tří čísel uvedených na nástěnce, tj. 224, 192, 190, pouze 192 je dělitelné dvanácti (chlapci nosili jen plné koše). Z úlohy víme, že dvanáctikilogramový koš používali Olda s Tomkem. Protože Záleský nebyl vedoucím, musel se jmenovat Tomek. Podobně můžeme určit jména ostatních žáků.

*) Správně bychom měli uvažovat poměr čísel 240 a $345 + x$, kde x je částka, kterou syn Baltazarův zaplatil v kavárně. Ta však nemůže být větší než 15 (trojnásobek částky, kterou platil Petr), takže ani pak nedostaneme poměr 1 : 2 nebo 1 : 3. (Pozn. překl.)

Ve Frygii, v městě Gordionu, stála kdysi Diova svatyně a v ní vůz s jařmem, které bylo přivázáno k oji tak složitým uzlem, že jej nikdo nedokázal rozvázat. Až přišel velký vládce Alexandr zvaný Veliký, syn Filipa Makedonského, který uzel svým mečem rozťal. Diova věštírna kladně ocenila toto „řešení" a bohové dali Alexandrovi vládu nad Asií. Tolik pověst.

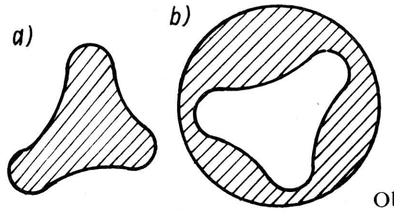
I když „uzly", jimiž se zabývá matematika, jsou často také velmi složité, není mezi nimi žádný, který by se nedal rozvázat. Všimněme si některých z nich.



Obr. 179

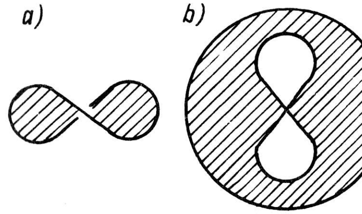
Na obr. 179 vidíme tzv. *borromejský uzel.* Byl tak nazván proto, že jej na rukávě svého stejnokroje nosila zbrojná družina italské rodiny z období renesance – Borromeů. Jeho kruhy se nedají oddělit, ačkoliv žádné dva z nich nejsou spolu spojeny. Je snadné to ověřit. Odstraníme-li jeden kruh (kterýkoli), dva zbývající zůstanou volné, nespojené. Vzájemné křižování křivek, jaké vidíme na příkladě borromejských kruhů, je rovněž matematickým problémem.

Nejjednodušší uzavřená křivka v prostoru nevytváří uzel. Někdy ji nazýváme *uzlem s nulovým počtem křížení.* Na obr. 180a vidíme takovou křivku. Plocha, kterou ohraničuje, je vyšrafována. Poznamenejme, že plochu, kterou graf ohraničuje, můžeme znázornit jiným způsobem (obr. 180b). Přitom je možno si představit, že křivka leží na kulové ploše a má jiné vlastnosti než tentýž graf na obr. 180a.

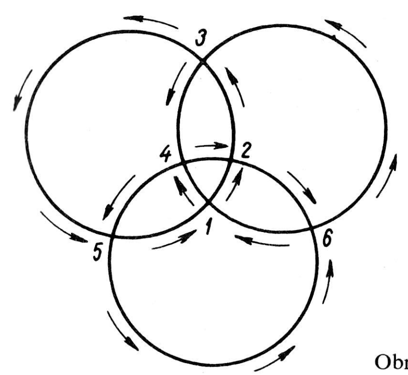


Obr. 180

Uvažujme podobně v poněkud složitějším případě. Nechť křivka narýsovaná na obr. 181a je udělána z pružného vlákna. V bodě křížení prochází jedna část tohoto vlákna pod druhou. I tato křivka je uzlem s nulovým počtem křížení, neboť ji můžeme změnit (překroucením) tak, že křížení odstraníme. *Řád uzlu* se rovná nejmenšímu počtu křížení, kterého můžeme dosáhnout takovou změnou. Vyšrafovaná část obr. 181a má stejné vlastnosti jako obdobná část obr. 180a a obr. 181b odpovídá obr. 180b.

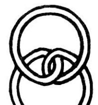


Obr. 181

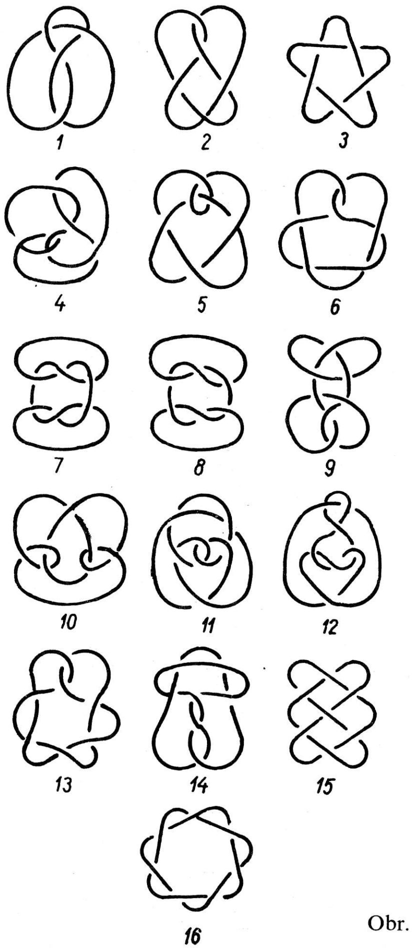


Obr. 182

Po těchto úvodních úvahách můžeme přejít k borromejskému uzlu. Budeme-li považovat tři borromejské kruhy, tvořící uzel (obr. 182), za rovinný průmět prostorové křivky, potom body, v nichž se křižují dva oblouky této křivky (tvoří uzel), procházejíce jeden pod druhým, budou v rovinném průmětu průsečíky; nazývají se dvojné body. Z obr. 179 vidíme, že pohybujeme-li se podél prostorové křivky, jejímž průmětem jsou borromejské kruhy, procházíme dvojné body (uzly) vždy střídavě horem a dolem. V rovinném průmětu můžeme tyto kruhy nakreslit jedním tahem, vedeme-li tužku z jednoho bodu do druhého podle šipek a čísel označujících průsečíky kruhů (dvojné body) v pořadí *1, 2, 3, 4, 5, 6,*



Obr. 183

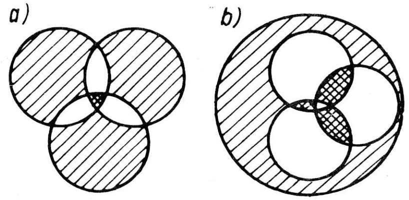


Obr. 184

1, 4, 2, 6, 3, 5, 1. Jestliže při oběhu průmětu nějakého uzlu procházíme dvojné body střídavě horem a dolem, nazýváme takový uzel *uzlem alternativním*.

Z obr. 183 vidíme, že existují uzly, které nejsou alternativní.

Na obr. 185 jsou ukázány dva způsoby znázornění částí plochy ohraničené borromejskými kruhy. Tři borromejské kruhy můžeme považovat za uzly s kříženími třetího řádu.



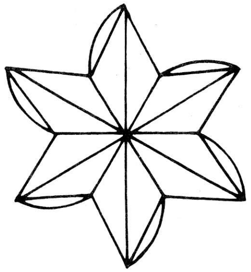
Obr. 185

Na obr. 184 jsou nakresleny uzly, které mají křížení 4. až 7. řádu. Jejich vyšetření přenecháváme čtenáři. (Spočtěte všechna křižování v každém uzlu.)

Zábavné úlohy

Trpělivost a vytrvalost

Vyzbrojte se trpělivostí a vytrvalostí a nabruste si dobře tužku! Aniž zvednete hrot tužky z papíru, projděte všemi čarami, které vytvářejí hvězdu na obr. 186 (po každé čáře smíte projít jen jednou). Obkreslete si hvězdu na list papíru, abyste neničili knížku.

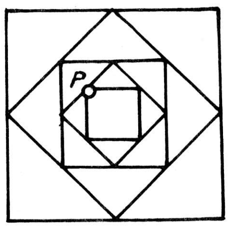


Obr. 186

Poklad

Obr. 187 je schematický plán bludiště. Strany pěti čtverců vepsaných jeden do druhého jsou pěšiny vedoucí k pokladu, který je zakopán v rohu nejmenšího čtverce *P*. Poklad získá jen ten, kdo vyjde z některého bodu na obvodu největšího čtverce, dojde k pokladu a vrátí se s ním do výchozího místa tak, že každou stezku projde právě jednou (buď při cestě tam, nebo zpět). Na žádnou stezku (ani její část) nesmí vstoupit po druhé.

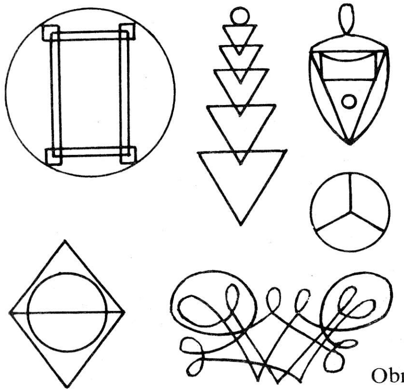
Pokuste se o štěstí.



Obr. 187

Jednotažky

Jednotažky jsou obrazce, které lze nakreslit jedním tahem pera, aniž bychom některou čáru či její část prošli více než jednou. Výjimkou jsou uzlové body, v nichž se čáry křižují.



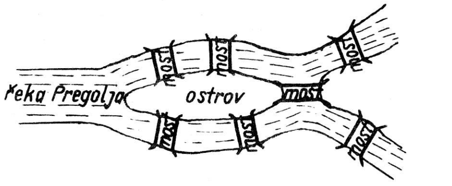
Obr. 188

Který z obrazců (křivek) na obr. 188 lze nakreslit jedním tahem?

Mosty města Královce

Z historie matematiky známe úlohu, která souvisí s problémem jednotažek. Touto úlohou se delší čas (r. 1736) zabýval vynikající matematik L. Euler.

V městě Královci*), položeném na obou březích řeky Pregolji, bylo před dvěma sty lety sedm mostů (viz obr. 189). L. Eulera, tehdy třicetiletého, zaujala otázka, zda je možné při procházce městem přejít přes všech sedm mostů, aniž bychom šli přes některý více než jednou.

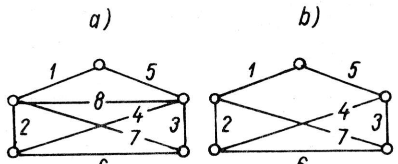


Obr. 189

Euler dokázal, že je to nemožné. Ale vyzkoušejte si to sami!

V cirkuse

Nad cirkusovou arénou předváděl své umění provazolezec. Ve výši 3 m nad zemí byla na pěti sloupech napjata lana, po nichž provazolezec přecházel. Lana byla napjata tak (obr. 190a), že musel přejít po osmi lanech, po každém právě jednou. Dařilo se mu to, i když se nikdy nevrátil nakonec na to místo, odkud vyšel. Při jednom představení se však lano č. 8 přetrhlo a zůstalo jen sedm lan (obr. 190b).



Obr. 190

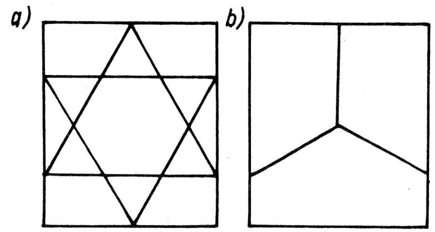
Mohl provazolezec i nyní přejít přes všechna lana, ale tak, aby přes každé přešel jen jednou?

*) Po druhé světové válce se Královec stal součástí SSSR a nazývá se Kaliningrad.

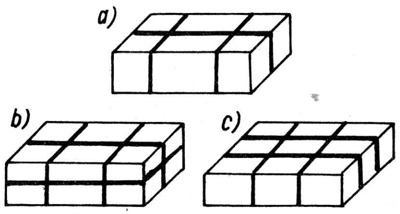
Ukažte, jak chodil provazolezec, než se lano přetrhlo, a pak odpovězte na otázku.

Pěšiny na zahradě

V zahradě pana A tvoří pěšiny obrazec jako na obr. 191a, v zahradě pana B takový jako na obr. 191b. Kdo – A či B – může projít po všech pěšinách ve své zahradě, přičemž po každé z nich půjde jen jednou? (Obvod obdélníka tvoří také pěšina.)



Obr. 191



Obr. 192

Poštovní zásilka

Poštovní zásilka má tvar kvádru. Vaším úkolem je:

a) Převázat ji dvakrát po šířce a jednou po délce (obr. 192a) tak, aby provázek nebyl nikde dvojitě;

b) Převázat ji tak jako na obr. 192b, přičemž provázek nesmí nikde být dvojitě;

c) Převázat ji tak jako na obr. 192c, přičemž provázek nesmí nikde být dvojitě.

Zahradnická úloha

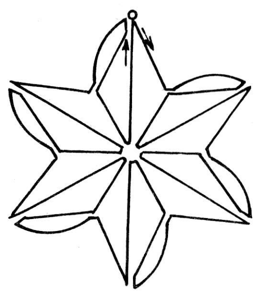
Zahradník měl vysázet na předměstském náměstí ve tvaru rovnostranného trojúhelníku deset stromků. Měl dva druhy stromů: 10 akátů a 10 lip. Aby náměstí pěkně vypadalo, rozhodl se zahradník vysadit akáty a lípy tak, aby na každé straně všech rovnostranných trojúhelníků, které vzniknou, rostly nejvýše dva stromy téhož druhu.

Jak to udělal?

■ Řešení úloh

Trpělivost a vytrvalost

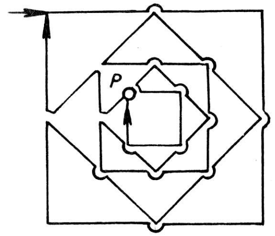
Řešení je na obr. 193.



Obr. 193

Poklad

Cestu k pokladu a zpět ukazuje obr. 194.



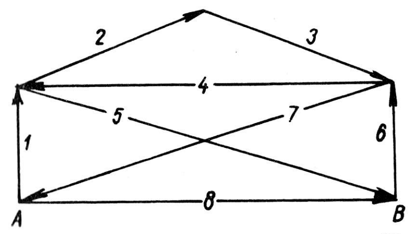
Obr. 194

V cirkuse

Dokud byla všechna lana v pořádku, chodil provazolezec tak, jak ukazuje obr. 195. Po přetržení lana 8 již nemohl úkol splnit.

Jestliže provazolezec přejde po některém laně k některému sloupu, musí existovat jiné lano, po němž může jít ke sloupu následujícímu. Jinými slovy, u každého sloupu se musí sbíhat sudý počet lan. Jestliže se u některého sloupu sbíhá lichý počet lan, nemůže provazolezec přejít všechna lana a vrátit se na místo, odkud vyšel. V nejlepším případě přejde všechna lana (každé jen jednou), ale nevrátí se do výchozího místa. V případě znázorněném na obr. 190a existuje jeden bod (sloup), v němž se sbíhají dvě lana (*1* a *5*), dva body, v nichž se sbíhají čtyři lana (*1*, *2*, *8*, *7* a *5*, *8*, *4*, *3*) a dva body, v nichž se sbíhají tři lana (*2*, *4*, *6* a *3*, *7*, *6*). Vyjde-li provazolezec z bodu A, skončí svoji cestu v bodě B (viz obr. 195). Po přetržení lana *8* se situace zhorší, neboť body, v nichž se sbíhá lichý počet lan (obr. 190b), jsou celkem čtyři (*1*, *2*, *7*; *5*, *3*, *4*; *3*, *7*, *6*; *2*, *4*, *6*) a body se sudým počtem lan jsou jen dva (*1*, *5* a *4*, *7*).

Provazolezec nemůže přejít po všech lanech, aniž by na některé nevstoupil dvakrát.*)



Obr. 195

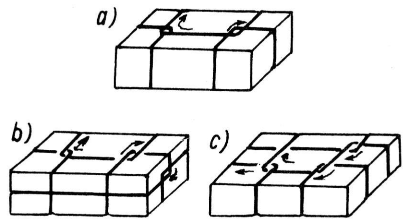
Pěšiny na zahradě

Pan A.

*) Průsečík lan *4* a *7* jsme v první části úlohy neuvažovali, ale to nic nemění na správnosti úvahy. Nezáleží totiž vůbec na počtu sloupů (průsečíků) se sudým počtem lan, ale jen na sloupech s lichým počtem lan. Nejsou-li žádné, lze takovou „síť" přejít a vrátit se na výchozí místo; jsou-li dva, můžeme začít v jednom z nich, projít celou síť a skončit v druhém; je-li jich jiný počet (*1*, *3*, *4*, ...), nelze „síť" přejít a dodržet přitom podmínky úlohy. (Pozn. překl.)

Poštovní zásilka

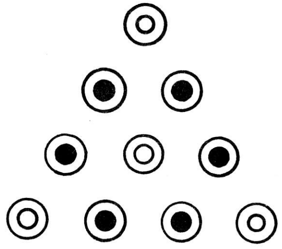
Viz obr. 196a, b, c.



Obr. 196

Zahradnická úloha

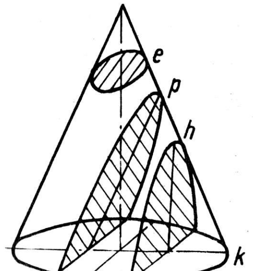
Zahradník vysázel čtyři akáty a šest lip (obr. 197).



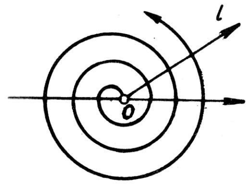
Obr. 197

Geometrický pojem *křivky* není jednoduchý. Jeho definice je dost obtížná a formuluje se různě v různých geometriích.

Euklides definuje křivku jako délku bez šířky nebo jako hranici plochy. Studoval především přímky, lomené čáry, kružnice a části kružnic – oblouky.



Obr. 198



Obr. 199

Apollonios (260–200 př. n. l.) napsal pojednání o kuželosečkách (elipse, hyperbole a parabole – obr. 198), které bylo podnětné pro další rozvoj matematiky. Archimédes, který se vedle matematiky zabýval také mechanikou a fyzikou, popsal matematicky jeden typ spirály, dnes zvané jeho jménem, kterou vytvoří bod stejnoměrně se posunující po polopřímce l, která se stejnoměrně otáčí kolem bodu O (obr. 199).

Zobecněním pojmu křivky je její definice jako geometrického místa (souboru, množiny) bodů. Například kružnice je množina bodů v rovině, stejně vzdálených od daného bodu, středu kružnice; parabola je množina bodů v rovině, stejně vzdálených od ohniska a od řídicí přímky atd. Velký Descartův objev – přiřazení dvojice čísel (souřadnic) každému bodu v rovině – umožnil vyjádřit přímky i křivky rovnicemi. Ukázalo se, že přímku lze vyjádřit rovnicí prvního stupně o dvou proměnných: $ax + by + c = 0$, kružnici o poloměru r rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$, elipsu rovnicí $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (a, b jsou délky poloos elipsy) atd.*)

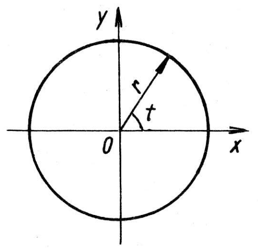
Definice křivky jako geometrického místa bodů však neřeší otázku pojmu křivky vyčerpávajícím způsobem. Dalším zobecněním tohoto pojmu je definice podaná francouzským matematikem M. Camille Jordanem (čti Žordanem, 1838–1922), který popsal křivku pomocí pohybujícího se bodu, jež splňuje soustavu tzv. parametrických

*) Autor uvádí rovnici kružnice a elipsy se středem v počátku; osy elipsy splývají se souřadnými osami. Obecné rovnice jsou poněkud složitější. (Pozn. překl.)

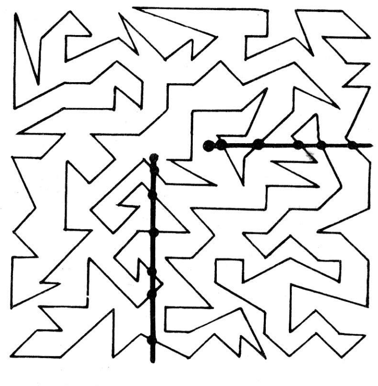
rovnic

$$x = f(t),\ y = g(t),$$

kde x a y jsou souřadnice pohybujícího se bodu, t je parametr nabývající hodnot z intervalu $a \leqq t \leqq b$, takže $f(t)$ a $g(t)$ jsou spojité funkce v intervalu $a \leqq t \leqq b$; např. $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r > 0$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, jsou rovnice kružnice o poloměru r se středem v počátku soustavy souřadnic (obr. 200).



Obr. 200



Obr. 201

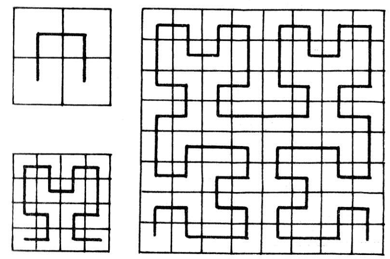
Obr. 201 znázorňuje v Jordanově pojetí uzavřenou křivku, což znamená, že její počáteční i koncový bod splývají. Uzavřená křivka rozděluje rovinu na dvě části: jedna část leží uvnitř křivky, druhá vně.*) Polopřímka vedená z vnitřního bodu protíná uzavřenou křivku v lichém počtu bodů, polopřímka vedená z vnějšího bodu v sudém počtu.

Obr. 202

Obr. 203

*) Autor má na mysli tzv. jednoduché uzavřené křivky čili takové, které samy sebe neprotínají (např. číslice 0 představuje jednoduchou uzavřenou křivku; číslice 8 nikoli). To se týká i další úvahy o průsečících křivky s polopřímkou. (Pozn. překl.)

Je-li uzavřená křivka jednoduchá, je snadné zjistit, který bod leží uvnitř a který vně křivky. Ve složitějších případech je však určení polohy bodu obtížné. Na obr. 202 vidíme velmi složitou křivku, znázorňující jezdce na koni. Čtenář se může přesvědčit, jak obtížné je stanovit, kde leží zvolený bod – zda uvnitř či vně křivky. Abychom čtenáři ulehčili ověření vlastního úsudku, připojili jsme obr. 203, na němž je vnitřek křivky vystínován a vnějšek ponechán bílý.

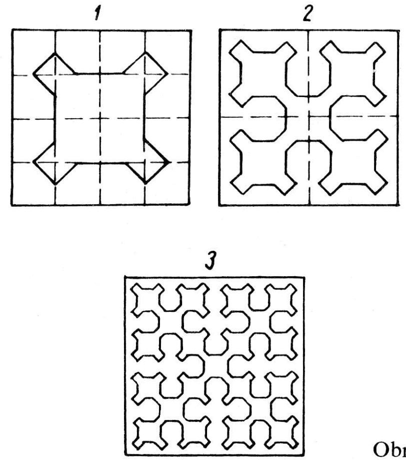


Obr. 204

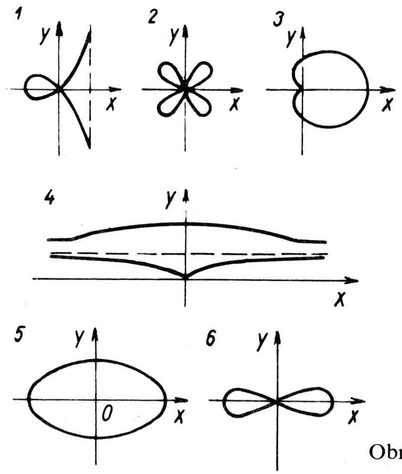
Na obr. 204 je znázorněna tzv. Peanova křivka a na obr. 205 tzv. Sierpińského koberec. Obrázky ukazují postup vytvoření těchto křivek. Jestliže stejným způsobem pokračujeme do nekonečna, dostaneme křivky procházející všemi body daného čtverce, což se zdá být paradoxní.

Podle stupně rovnice křivky dělíme křivky na křivky prvního stupně (přímka), druhého (kuželosečky), třetího atd.*)

Z uvedeného plyne, že zobecnění a upřesnění pojmu křivky je spjato s algebrou.



Obr. 205



Obr. 206

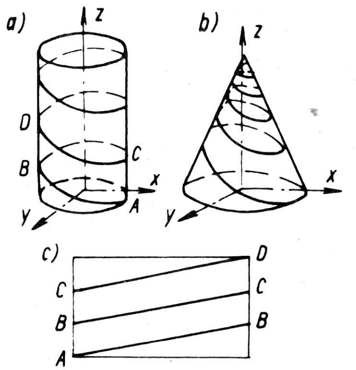
*) Všechny tyto křivky se nazývají algebraické. Existují ovšem i křivky, jejichž rovnice obsahují jiné funkce než mnohočleny, např. sinusoida $y = \sin x$, exponenciální křivka $y = e^x$ apod. (Pozn. překl.)

Upozorněme nakonec také na těsnou souvislost matematiky s uměním, na to, že exaktní rovnice mají často krásné a estetické grafické vyjádření, připomínající hvězdy, květy, architektektonické ornamenty i koberce. Na obr. 206 jsou uvedeny některé z nich:

1. strofoida,
2. čtyřlistá růžice,
3. srdcovka (kardioida),
4. konchoida,
5. ovál,
6. lemniskáta.

■ Šroubovice

Šroubovice je prostorová křivka spirálového tvaru, ležící na povrchu rotačního válce nebo kužele (obr. 207) a protínající všechny površky válce či kužele pod týmž úhlem.



Obr. 207

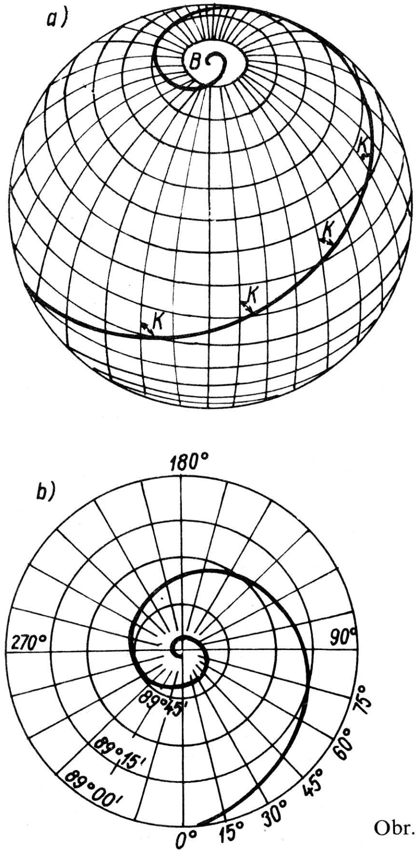
Rozvineme-li povrch válce do roviny, přestane válcová šroubovice být spojitou křivkou (obr. 207c). Změní se v množinu rovnoběžných úseček AB, BC, ... stejně od sebe vzdálených. Délka úseku šroubovice mezi dvěma následujícími průsečíky téže površky se nazývá délka závitu šroubovice.

Kuželová šroubovice vytvoří při rozvinutí povrchu kužele do roviny oblouky podobných a podobně umístěných logaritmických spirál.

■ Loxodroma a ortodroma

Loxodroma (obr. 208) je prostorová křivka na ploše kulové nebo na jiné rotační ploše, protínající všechny její poledníky pod stejným úhlem K. Například loxodroma na zeměkouli protíná všechny zemské poledníky pod stejným úhlem. Dráhy zaoceánských lodí či letadel mají přibližně tvar loxodromy. Na mapách v Mercatorově projekci mají všechny loxodromy tvar přímek. Loxodroma svírající s poledníkem úhel 0° či 180° splývá s poledníkem; svírá-li úhel 90°, splývá s rovnoběžkou. Název „loxodroma“ navrhl v roce 1624 holandský učenec Snellius.

Ortodroma je prostorová křivka, která na rozdíl od loxodromy je nejkratší spojnicí daných dvou bodů na povrchu Země. V námořní i letecké navigaci považujeme Zemi za kouli; ortodroma je tedy obloukem hlavní kružnice. Loď (či letadlo) pohybující se po ortodromě musí neustále měnit svůj kurs. Z toho důvodu neplují lodě přesně po ortodromě, ale po jisté lomené čáře, která je spojením loxodromy a ortodromy.



Obr. 208

■ Vektory a skaláry

Vektor (název pochází z latinského slova vehere – táhnout) si můžeme představit jako orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ (obr. 209) čili dvojici bodů A, B uvažovaných v daném pořadí. První bod, tj. A, nazýváme počátečním bodem vektoru, druhý bod B jeho koncovým bodem. Vektor je jednoznačně určen, známe-li jeho počáteční bod, velikost (délku úsečky AB) a směr (tj. polopřímku AB). Vektory jsou např. fyzikální veličiny rychlost, zrychlení, síla, moment síly.

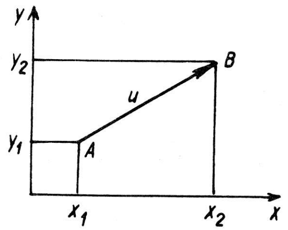
Obr. 209

Skalár (název pochází z latinského slova scalaria) je veličina, jejíž hodnota může být vyjádřena jediným číslem pojmenovaným či nepojmenovaným, např. délka, plošný obsah, hmota, čas, hustota, teplota.

Vektory hrají v matematice i ve fyzice důležitou úlohu. Potřeby fyziky si vynutily v 19. století rozvoj vektorového počtu jako samostatné matematické disciplíny. Základem vektorového počtu je nauka o provádění operací s vektory. Zavádí se pojem nulového vektoru, opačného vektoru k danému, rovnosti vektorů. Definuje se sčítání a odčítání vektorů, násobení vektorů číslem, skalární součin a vektorový součin vektorů. Operace s vektory mají mnohé vlastnosti, které známe z operací s čísly (např. asociativnost a komutativnost sčítání).

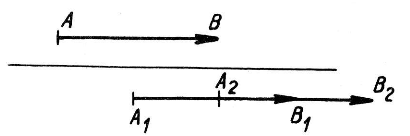
Vektory můžeme zkoumat v soustavě pravoúhlých souřadnic. K tomu účelu zavádíme pojem souřadnic vektoru; jsou to rozdíly odpovídajících si souřadnic koncového a počátečního bodu vektoru. Vektor $\vec{u}$ na obr. 210 má tedy souřadnice $x_2 - x_1, y_2 - y_1$.

Dva vektory rovnoběžné s touž přímkou se nazývají *kolineární*; dva vektory rovnoběžné s touž rovinou se nazývají *komplanární*.

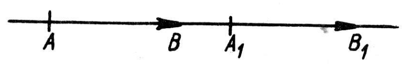


Obr. 210

Rozeznáváme různé druhy vektorů. *Volným vektorem* rozumíme takový vektor, jehož počátečním bodem může být libovolný bod na libovolné přímce, rovnoběžné s danou přímkou (obr. 211).



Obr. 211



Obr. 212

Vektor, jehož počátečním bodem může být libovolný bod na dané přímce, můžeme nazvat klouzavým (obr. 212), zatímco *vázaný vektor* má počáteční i koncový bod pevně určen.

Přiřadíme-li každému bodu nějaké oblasti vektor (představující nějakou veličinu), dostáváme tzv. *vektorové pole.*

■ Zábavné úlohy

Schůzka u Libeňského mostu

Dva přátelé bydlí na různých místech Prahy: jeden na Petřinách, druhý v Dejvicích. Smluvili si schůzku u Libeňského mostu mezi polednem a jednou hodinou odpoledne s tou podmínkou, že ten, kdo přijede na místo schůzky první, počká na druhého deset minut a pak odejde, předpokládaje, že ke schůzce nedojde.

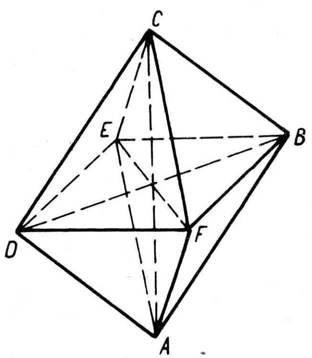
Z obou míst jede na místo schůzky jedna linka tramvaje. Jaká je pravděpodobnost, že se přátelé sejdou?

Řez krychle rovinou

Jaká trojrozměrná tělesa můžeme obdržet, protneme-li krychli rovinou?

Máš prostorovou představivost?

Na obr. 213 vidíš osmistěn, jehož každá hrana má délku 1 dm. Co je třeba udělat, aby se osmistěn změnil na čtyřstěn o hraně délky 2 dm?



Obr. 213

Sedm otázek

1. Námořní jednotkou rychlosti je uzel. Která jednotka rychlosti je větší – uzel či km/h?

2. V jaké vzdálenosti od oka musíme držet zápalku, abychom její hlavičku viděli pod stejným úhlem, pod jakým vidíme Měsíc v úplňku? Z jaké vzdálenosti vidíme pod stejným úhlem člověka vysokého 1,8 m?

3. Podle pověsti byl nad klenbou brány jednoho slavného učiliště nápis: „Nechť sem nevstupuje nikdo, kdo nezná geometrii“. Jak se jmenovala ta škola?

4. Krejčí má stůček podšívky dlouhý 30 m. Každý den odstřihne z balíku 5 m. Kolikátý den ustřihne poslední kus?

5. Když synovi bylo šest let, bylo otci třicet. Nyní je otci čtyřikrát tolik co synovi. Kolik let je nyní synovi?

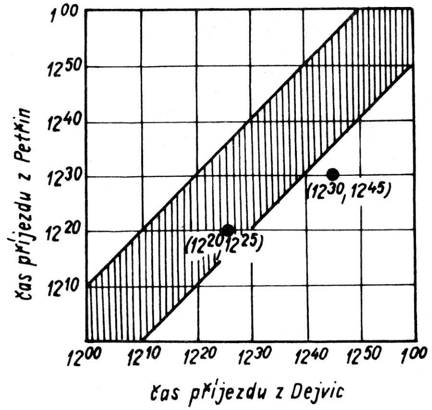
6. Jaké největší číslo lze napsat čtyřmi jednotkami?

7. Ve které číselné soustavě platí rovnost 400 − 344 = 1?

■ Řešení úloh

Schůzka u Libeňského mostu

Každý z obou přátel má k dispozici jednu tramvajovou linku. Můžeme tedy předpokládat, že jim každých deset minut pojede tramvaj, kterou se dostanou na místo schůzky. Grafické řešení úlohy je ukázáno na obr. 214.



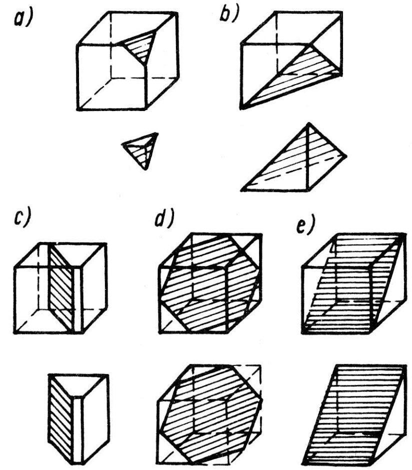
Obr. 214

Teoreticky může dojít k setkání v kterýkoli okamžik mezi 12 hod. a 13 hod., který padne do vyšrafované části čtverce. Jestliže přijede přítel z Petřin např. ve 12.20 hod. a přítel z Dejvic ve 12.25 hod., dojde k setkání; obrázek to potvrzuje, neboť bod o souřadnicích (12.20, 12.25) leží ve vyšrafované části „prostoru událostí“. Naproti tomu, kdyby přítel z Petřin přijel ve 12.30 hod. a přítel z Dejvic ve 12.45 hod., k setkání nedojde. Na obrázku leží bod o souřadnicích (12.30, 12.45) vně vyšrafované části časového čtverce.

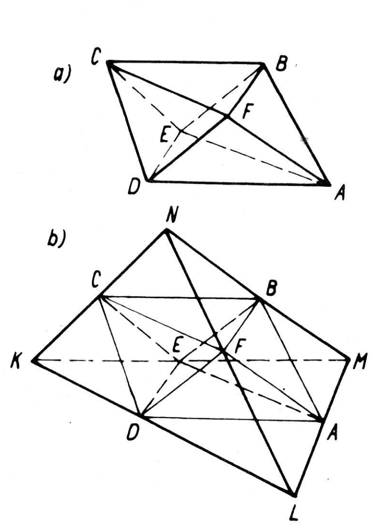
Protože celý „prostor událostí“ se skládá ze 36 časových čtverečků, z nichž vyšrafovaných, tj. setkání příznivých, je 11, je pravděpodobnost setkání $\frac{11}{36}$.

Řez krychle rovinou

Na obr. 215 vidíme nejjednodušší tělesa, která mohou vzniknout z krychle, protneme-li ji rovinou.



Obr. 215



Obr. 216

Máš prostorovou představivost?

Na obr. 213 je osmistěn $ABCDEF$, který je na obr. 216a položen na stěnu ADE. Z obr. 216b je vidět, jakým způsobem změníme osmistěn na čtyřstěn. Docílíme toho připojením čtyř čtyřstěnů o délce hrany 1 dm; tyto čtyřstěny jsou $NFBC$, $KCED$, $ADLF$, $BFAM$.

Sedm otázek

1. Uzel, neboť 1 uzel = 1,852 km/h.

2. Měsíc vidíme pod úhlem $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$.

To znamená, že vedeme-li z bodu, jímž je naše oko, tečny k měsíčnímu kotouči, svírají tyto dvě přímky úhel $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$. Abychom pod stejným úhlem viděli hlavičku zápalky, musíme ji podržet ve vzdálenosti asi 25 cm od oka. Člověka vysokého 1,8 m vidíme pod tímto úhlem ze vzdálenosti téměř 200 m.

3. Platónova Akademie, umístěná v háji zasvěceném héroovi Akademovi blízko Athén, nad řekou Kephisos.

4. Pátého dne.

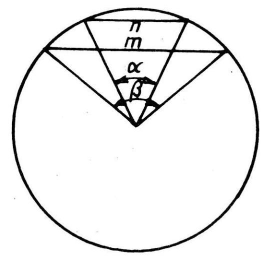
5. 8 let. Otci je nyní 32 let.

6. 11^{11}. Je to jedenáctimístné číslo, ale číslo 1 111! je mnohem větší.

7. V pětkové soustavě znamená zápis 400 – 344 totéž, co 100 – 99 v desítkové soustavě, neboť $400_{(5)} = 4 \cdot 5^2$, $344_{(5)} = 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 4$.

Trigonometrie je disciplínou elementární matematiky, lišící se od euklidovské geometrie tím, že hledá řešení daných úloh nikoli metodou konstruktivní, ale početní. Název „trigonometrie" pochází ze dvou řeckých slov: „trigonon", tj. trojúhelník, a „metreo", měřím. To neznamená, že by se trigonometrie zabývala jen trojúhelníky. Zkoumá i jiné obrazce, neboť každý obrazec ohraničený úsečkami můžeme rozdělit na trojúhelníky. Trigonometrie studuje nejen rovinné trojúhelníky, ohraničené úsečkami, ale i trojúhelníky na kulové ploše, jejichž strany jsou oblouky kružnic. Rozeznáváme proto *rovinnou* a *sférickou trigonometrii.*

K početnímu řešení trojúhelníků bylo třeba nalézt vztahy mezi prvky trojúhelníku, mezi jeho stranami a úhly. Protože tyto vztahy nemohou být zapsány v algebraickém tvaru, byly zavedeny tzv. trigonometrické veličiny. Staří řečtí astronomové Hipparchos (2. stol. př. n. l.) a Ptolemaios (2. stol. n. l.), kteří používali trigonometrie ve svých astronomických výpočtech, si povšimli, že v kruhu o daném poloměru závisí délka tětivy na velikosti příslušného (vypuklého) středového úhlu: většímu úhlu odpovídá větší tětiva a obráceně, větší tětivě – větší středový úhel (viz obr. 217: $\beta > \alpha$,



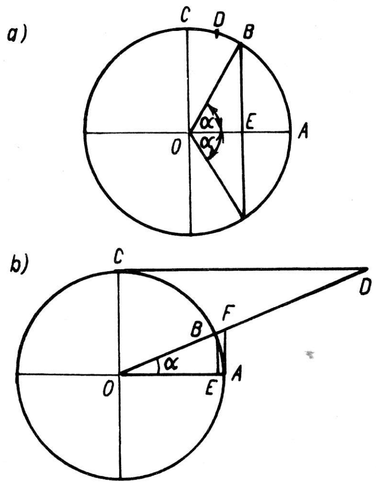
Obr. 217

$m > n$). Hipparchos a po něm Ptolemaios vypočetli proto délky tětiv pro středové úhly měnící se po půl stupni (řečtí astronomové převzali od Babylóňanů dělení kruhu na 360 stupňů a každého stupně na 60 minut). Tak vznikly v Evropě tabulky trigonometrických veličin. Vzhledem k tomu, že délka tětivy záleží pouze na velikosti příslušného středového úhlu, byly trigonometrické veličiny později nazvány *goniometrickými* (úhloměrnými) *funkcemi.*

Staří Řekové neznali funkce, které dnes nazýváme sinus, kosinus atd. Geometrický sinus úhlu α (úsečka EB na obr. 218a) je polovina tětivy příslušné středovému úhlu 2α.*) Úsečka OE je

*) Čtenář je možná překvapen, že autor nehovoří o poměru délky tětivy a poloměru kružnice. Staří matematici však pracovali s libovolným (pevně zvoleným) poloměrem kružnice a délku tětivy tímto poloměrem nedělili. (Pozn. překl.)

geometrickým kosinem úhlu α. Sinus a kosinus byly zavedeny indickými astronomy asi ve 4.–5. století. Do Evropy se dostaly díky astronomickým a matematickým pracím Arabů a samotný název „sinus" byl zaveden latinskými překladateli arabských děl ve 13.–14. století. Při sestavování tabulek sinů byl používán krok jedné úhlové minuty. Protože geometrickým sinem oblouku AC odpovídajícího 90° je poloměr kružnice OC a oblouk AD, jehož délka je rovna poloměru OC, odpovídá úhlu přibližně 57°18′ = 3 438′, bylo stanoveno, že sinus 90° je roven 3 438.



Obr. 218

Indické tabulky sinů, které se zachovaly, jsou méně přesné než řecké tabulky tětiv. Udávají velikost sinů po 3°45′ (čili s krokem $\frac{1}{24}$ čtvrtkružnice). Za další rozvoj trigonometrie vděčíme tadžickému astronomovi Abu-l-Vafovi (10. století) a jeho znamenitému krajanu Násiruddínovi Túsí (1201–1274). Ten rozpracoval trigonometrii v samostatnou vědu, zavedl pojmy tangens a kotagens (na obr. 218b je délka úsečky AF geometrickou tangentou úhlu α a CD jeho geometrickou kotangentou) a odvodil vztahy mezi goniometrickými funkcemi téhož úhlu:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

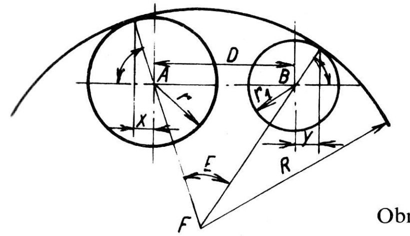
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Evropští vědci nevěděli o těchto Násiruddínových objevech a dospěli k nim znovu o dvě stě let později. Stalo se tak zásluhou německého astronoma a matematika J. Regiomontana (1436 až 1476). Nemálo přispěl k rozvoji trigonometrie geniální polský astronom Mikoláš Koperník, který spolu se svým přítelem Rheticem vypracoval v úvodu ke svému dílu „De revolutionibus orbium coelestium" („O pohybech nebeských těles") sférickou trigonometrii. Tabulky, které vypočetli, udávají hodnoty goniometrických funkcí s diferencí (krokem) 10 vteřin; poloměr (jednotka míry) byl přitom rozdělen na 10^{15} částí a ne jen na 3 438 částí jako u Indů. To dalo možnost vypočítat sinus na 15 platných míst.

Dnes užívané názvy goniometrických funkcí tangens (česky též směrnice) a sekans byly zavedeny dánským matematikem T. Finckem v jeho díle z r. 1583, zatímco kotangens (tzn. complementum tangentis – doplněk tangenty) a kosekans se objevují v 17. století. Písmenné znaky, které zavedl v algebře francouzský matematik F. Viète v 16. století, objevily se v trigonometrii až v polovině 18. století. Obzvlášť významně k tomu přispěl slavný švýcarský matematik L. Euler (1707–1783). Euler zkoumal hodnoty sin x, cos x, tg x atd. jako funkce čísla x – obloukové míry úhlu. Přitom pro číslo x připouštěl všechny hodnoty kladné, záporné, a dokonce i komplexní.

O kružnici, dotýkající se dvou daných kružnic

Na obr. 219 vidíme konstrukci kružnice dotýkající se dvou daných kružnic, jestliže body dotyku leží po jedné



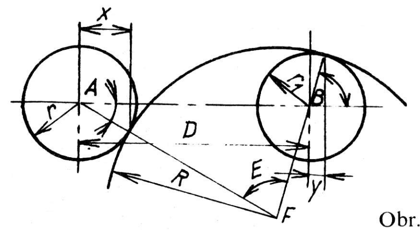
Obr. 219

straně středné daných kružnic; na obr. 220 vidíme obdobnou konstrukci v případě, že body dotyku leží na opačných stranách středné. Početní postup určení poloměru dotykové kružnice je tento:

Jsou dány poloměry kružnic r, r_1, délka středné D a délky úseček x a y (viz obr. 219 nebo obr. 220), které určují body dotyku hledané kružnice a daných kružnic. Úhly A a B nalezneme ze vztahů $\cos A = \frac{x}{r}$, $\cos B = \frac{y}{r_1}$. Znalost úhlů A a B a délky D nám umožňuje řešit trojúhelník FAB, tzn. určit strany $FA = R - r$ a $FB = R - r_1$. Dostáváme

$$\frac{D}{\sin(180° - (A + B))} = \frac{R - r}{\sin B},$$

$$\frac{D}{\sin(180° - (A + B))} = \frac{R - r_1}{\sin A}.$$



Obr. 220

Odtud najdeme

$$R = \frac{D \sin B}{\sin(A + B)} + r;$$

$$R = \frac{D \sin A}{\sin(A + B)} + r_1$$

(obr. 219) nebo stejným způsobem, s použitím sinové věty,

$$R = \frac{D \sin B}{\sin(A + B)} - r;$$

$$R = \frac{D \sin A}{\sin(A + B)} + r_1$$

(obr. 220).*)

*) V obou případech jsme pro R dostali dvě hodnoty, které jsou obecně různé. Z toho je vidět, že

Jsou-li dány délky stran trojúhelníka FAB, pak úhly A a B vypočteme pomocí kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

odkud

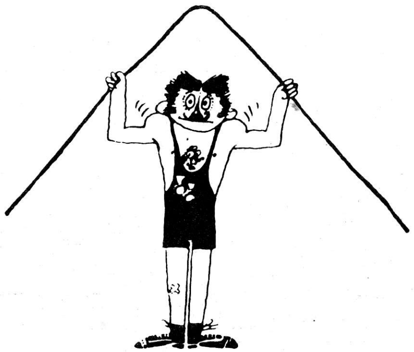
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc} - 1 .$$

Jsou-li např. strany trojúhelníka $a = 7{,}95$; $b = 8{,}31$; $c = 9{,}54$, dostaneme po dosazení do posledního vzorce $\cos A = 0{,}61$, odkud $A = 52°25'$.

■ Zábavné úlohy

Ohnutý prut

Železný prut je dlouhý 4 m. Máme jej ohnout v polovině tak, aby vznikl úhel 240°. Jaká bude vzdálenost mezi jeho konci?



Plech

Družstvo vyrábí pro chovatele králíků králíkárny z vlnitého plechu. Průřez plechu je vlnovka, skládající se ze stejných oblouků kružnic (obr. 221). Na výrobu jedné králíkárny je třeba 6 m vlnitého plechu s průřezem, při němž každému oblouku kružnice odpovídá středový úhel α, $60° \leqq \alpha \leqq 180°$. Družstvo si samo vyrábí vlnitý plech z obyčejného (rovného) plechu.

Kolik metrů rovného plechu je potřeba na výrobu 100 králíkáren?

Obr. 221

Při jaké hodnotě úhlu α se spotřebuje nejméně materiálu (rovného plechu)?

Je možné dosáhnout úspory na materiálu změnou poloměru oblouku tvořícího průřez vlnitého plechu?

■ Řešení úloh

Ohnutý prut

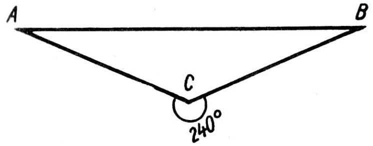
Po ohnutí tvoří prut vypuklý úhel (obr. 222). Spojíme-li konce prutu, nedostaneme trojúhelník, neboť vypuklý úhel nemůže být vnitřním úhlem trojúhelníku.

zvolíme-li x, y libovolně, nemusí mít úloha řešení. Zhruba řečeno, smíme volit jeden dotykový bod (např. x). Tím je určeno y, a tedy na druhé kružnici můžeme zvolit jeden ze dvou bodů, buď na jedné, nebo na druhé straně středné daných kružnic. Podrobná diskuse (s ohledem na vzájemnou polohu daných kružnic) by vyžadovala příliš mnoho místa. (Pozn. překl.)

Úhel, který doplňuje vypuklý úhel na 360°, je roven 120°. Délku úsečky AB, spojující konce prutu, vypočteme ze vztahu

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \,.\, BC \cos 120° = 4 + 4 + 8 \,.\, \frac{1}{2} = 12,$$

odkud $AB = \sqrt{12}$.*)



Obr. 222

Plech

Délka úsečky

$$AC = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

délka oblouku

$$\widehat{AC} = \frac{2\pi R\alpha}{360°}.$$

Na délku 6 m se úsečka AC vejde n-krát, tj.

$$6 = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha \,.\, n,$$

odkud

$$n = \frac{3}{\left(R \sin \frac{1}{2} \alpha\right)},$$

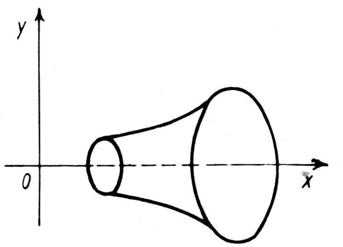
$$L = \widehat{AC} \,.\, n = \frac{2\pi R\alpha}{360°} \,.\, \frac{3}{R \sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\pi\alpha}{60° \sin \frac{1}{2} \alpha} \quad {}^{**)}.$$

Je-li $\alpha = 60°$, je $L = 2\pi$; je-li $\alpha = 180°$, je $L = 3\pi$. Spotřeba materiálu nezáleží na poloměru oblouku vlnovky. Na 100 králíkáren je potřeba přibližně 628 až 942 m rovného plechu v závislosti na velikosti úhlu α.

*) Stejný výsledek dostaneme bez použití kosinové věty, spustíme-li z vrcholu C na stranu AB výšku, která rozdělí trojúhelník ABC na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky; úhel při vrcholu C je $\frac{1}{2} \,.\, 120° = 60°$, takže $\frac{1}{2} AB = AC \sin 60°$. (Pozn. překl.)

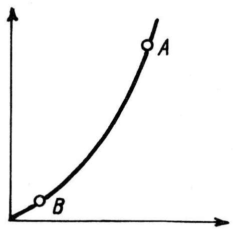
**) L je spotřeba rovného plechu na jednu králíkárnu. (Pozn. překl.)

Variační počet je část matematické analýzy, která zkoumá metody nalezení největších či nejmenších hodnot tzv. *funkcionálů*, tj. proměnných veličin závisejících na výběru jedné či několika funkcí. Příkladem funkcionálu je velikost obsahu rovinného obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou. Obsah obrazce závisí (je funkcionálem) na křivce (na rovnici křivky), která je hranicí obrazce. Již ve starověku bylo známo, že ze všech uzavřených křivek stejné délky ohraničuje kružnice obrazec o největším obsahu. Rotační plochu o nejmenším povrchu dává křivka, která se nazývá řetězovka (obr. 223).



Obr. 223

Variační počet se začal rozvíjet koncem 17. století, z počátku jen jako soubor zajímavých úloh. Zde je úloha, kterou předložil matematikům Jan Bernoulli v roce 1696 v časopise „Acta Eruditorum" (Listy učenců). Zněla takto: „Ze všech hladkých rovinných křivek spojujících body A a B, které neleží na svislé přímce, vybrat a napsat rovnici té křivky, po níž hmotný bod pohybující se z bodu A pouze pod vlivem zemské přitažlivosti (bez uvažování tření) dorazí do bodu B v nejkratším čase." To je tzv. úloha o brachystochroně (křivce nejkratšího pádu – viz obr. 224).



Obr. 224

Nejzajímavější řešení této úlohy podal Jakub Bernoulli (1654–1705). Avšak teprve práce L. Eulera (1707 až 1783) učinily ze sbírky zajímavých úloh samostatnou matematickou disciplínu.

Početní metody, kterých Euler původně používal, byly velmi složité, a proto na jejich místo nastoupila brzo jiná metoda, tzv. „variační metoda" objevená J. L. Lagrangem (1736–1813).

▪ Izoperimetrické úlohy

Izoperimetrické úlohy jsou základním typem úloh variačního počtu. Slovo „izoperimetrický" vzniklo spojením dvou řeckých slov: isos – stejný a perimetreo – měřím dokola.

Jednoduché izoperimetrické úlohy byly známy a řešeny již ve starověkém Řecku Archimédem, Zenodorem a jinými. Již ve starověku bylo např. dokázáno, že ze všech trojúhelníků s daným obvodem má největší obsah rovnostranný trojúhelník; že ze všech čtyřúhelníků s daným obvodem má největší obsah čtverec; že mají-li čtverec a trojúhelník tentýž obvod, pak čtverec má větší obsah než trojúhelník apod. Obecná metoda řešení izoperimetrických úloh byla však objevena až koncem 17. století. Její objev je zásluhou znamenitých švýcarských matematiků, bratří Bernoulliů – Jakuba a Jana (1667–1748). První z nich rozřešil (r. 1697) úlohu, která byla zobecněním řady konkrétních geometrických a mechanických problémů: „Mezi křivkami dané délky l nalézt tu, pro kterou jistá veličina závisející na této křivce (např. obsah obrazce, který ohraničuje) nabývá maximální či minimální hodnoty". Později (okolo roku 1732) se izoperimetrickými úlohami zabýval obšírněji a soustavněji L. Euler. Z polských matematiků se těmto úlohám věnoval jako první J. Brožek (1585 až 1652).

▪ Didonina lest

Pověst vypráví, že královská dcera Dido si zachránila život útěkem z fénického města Tyru do Afriky (přičemž nezapomněla vzít s sebou svoji klenotnici). Tam, na severním pobřeží Afriky, koupila Dido od numidského krále Jarba „tolik země, kolik je možno ohraničit staženou volskou kůží". Jarb, netuše lest, svolil k prodeji tak nepatrného kousku půdy. Tehdy Dido rozřezala volskou kůži na velmi úzké proužky a ohraničila jimi velký pozemek ve tvaru kruhu.

Tolik pověst. Dido tedy věděla, že při dané délce obvodu obrazce má největší obsah kruh; tedy ani trojúhelník, ani čtverec, ale kruh. Podle pověsti došlo k této události v devátém století před naším letopočtem. Tedy již tehdy učenci (pravděpodobně babylónští) řešili izoperimetrické úlohy.

Nechť rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník a kruh mají tentýž obvod rovný p. Označme obsahy těchto obrazců po řadě P_3, P_4, P_6 a P.

S použitím geometrických vzorců pro obsahy těchto obrazců nalezneme:

$$P_3 = \left(\frac{1}{3}p\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\left(\frac{1}{3}p \text{ je délka strany rovnostranného trojúhelníka}\right)$;

$$P_4 = \left(\frac{1}{4}p\right)^2$$

$\left(\frac{1}{4}p \text{ je délka strany čtverce}\right)$;

$$P_6 = \left(\frac{1}{6}p\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6$$

$\left(\frac{1}{6}p\right.$ je délka strany pravidelného šestiúhelníka$\left.\right)$;

$$P = \pi\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$$

$\left(\frac{p}{2\pi}\right.$ je poloměr kružnice o obvodu $\left.p\right)$.

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$P_3 = \frac{1}{36}p^2\sqrt{3};\quad P_4 = \frac{1}{16}p^2;$$

$$P_6 = \frac{1}{24}p^2\sqrt{3};$$

$$P = \frac{1}{4\pi}p^2 \approx \frac{p^2}{12{,}56}.$$

Snadno dokážeme, že

$$P_3 < P_4 < P_6 < P.$$

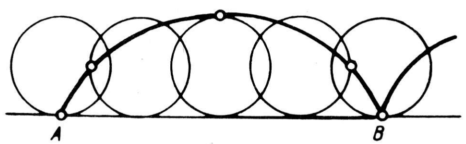
Poznámka: Při stejném obvodu je obsah pravidelného vypuklého mnohoúhelníka tím větší, čím větší je počet jeho stran. Kruh je „mnohoúhelníkem o největším počtu stran", a proto má při daném obvodu největší obsah.

■ Podivuhodná křivka

Stojíme-li u cesty nebo u silnice a pozorujeme kolemjedoucí selské vozy, můžeme často vidět, jak se list či útržek papíru zachytí do obruče kola a pohybuje se současně s ním. List střídavě stoupá do nejvyššího bodu a zase klesá, až se dotkne vozovky, znovu stoupá a znovu klesá. Jede-li povoz stejnoměrně, prochází list nejvyšším bodem i bodem na vozovce stále ve stejných vzdálenostech.

Opisuje list nějakou křivku? Prozkoumala tuto křivku matematika? Je to snad sinusoida?

Křivka, kterou opisuje list či útržek papíru, zachycený do obruče kola, není sinusoida, ale je to křivka, kterou matematici již dávno přesně prostudovali. Abychom zjednodušili svoje úvahy, nahradíme kolo selského povozu geometrickým útvarem – kružnicí a list bodem, který na ní zvolíme.



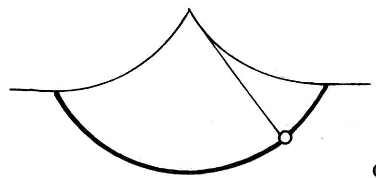
Obr. 225

Obr. 225 znázorňuje kolo, které se valí bez smýkání. Jeho otáčení začíná v bodě A a jedna celá otočka končí v bodě B. Odtud plyne, že $AB = 2\pi r$, kde r znamená poloměr valícího se kola. Na úsečce AB je narýsováno pět poloh kola. Vzdálenosti mezi nimi jsou rovny $\frac{2\pi r}{4}$ čili $\frac{1}{2}\pi r$. Při pohybu z bodu A do bodu B opisuje zvolený bod křivku, která se nazývá *cykloida*. Tato křivka, jak jsme již řekli, je prozkoumána. Známe její rovnici a mnohé její zajímavé i důležité vlastnosti jak geometrické, tak i technické.

Kdy byla objevena? Do roku 1500 nenacházíme o ní v matematice žádnou zmínku. První, kdo ji studoval, byl G. Galilei (1564 – 1642); po něm jeho žák Evangelista Torricelli (1608 až 1647), který v roce 1644 vydal vědeckou práci o cykloidě. V ní uvedl vzorec pro obsah obrazce ohraničeného obloukem cykloidy a její základnou. Cykloidou se zabýval také významný francouzský matematik a fyzik B. Pascal (1623 – 1662). S tím souvisí žertovná historka.

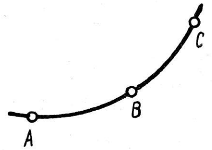
Pascala bolely zuby. Jednou, když bolení zubů bylo zvlášť nesnesitelné, začal Pascal uvažovat o cykloidě, aby se rozptýlil. Náhodou bolest ustala. Pascal usoudil, že to není náhoda, ale neobvyklý účinek jeho přemýšlení o cykloidě, a dal se do jejího soustavného zkoumání. Vypočetl, že obsah obrazce ohraničeného jedním obloukem cykloidy a její základnou AB (obr. 225) je přesně trojnásobek obsahu kruhu, ze kterého je vytvořena, tj. $3\pi r^2$. Vypočetl také r. 1634 objem V a povrch P tělesa, které vznikne, jestliže oblouk cykloidy otočíme kolem její základny AB. Objem V je roven $3\frac{3}{4}$ násobku objemu koule o poloměru r čili $V = 5\pi r^3$, zatímco povrch P je roven $5\frac{1}{3}$ násobku povrchu koule o poloměru r čili $P = \frac{64}{3}\pi r^2$. Délku oblouku cykloidy vypočetl v 17. století anglický architekt Christopher Wren (1632 až 1723). Ukázalo se, že délka jednoho oblouku cykloidy je $8r$, tedy osminásobek poloměru kruhu, z něhož je vytvořena, ačkoli, jak víme, délka kružnice se nedá přesně změřit pomocí jejího poloměru. Stojí zato si tuto překvapující vlastnost zapamatovat.

Také mechanické vlastnosti cykloidy jsou udivující. Objevil je výborný holandský matematik, fyzik a přírodovědec Christian Huygens (čti Hojchens, 1629 – 1695), který v roce 1673 uveřejnil pojednání nazvané „Horologium Oscillatorium" (česky „Kyvadlové hodiny"). Huygens ukázal, že hodinové kyvadlo, jehož doba kyvu nezávisí na jeho výkyvu (amplitudě), se pohybuje po křivce nazývané „izochrona", která je cykloidou obrácenou „vzhůru nohama". Na obr. 226 je znázorněno kyvadlo zavěšené mezi dvěma cykloidami. Závaží kyvadla opisuje stejnou cykloidu jako jsou ty, mezi nimiž je zavěšeno.



Obr. 226

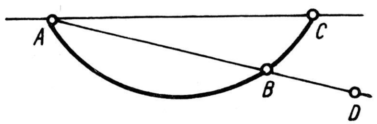
Kyvadla obyčejných hodin se pohybují po oblouku kružnice, a nikoli cykloidy. Oblouk opisovaný závažím kyvadla je však velmi malý a odpovídá střední části oblouku cykloidy, kterou (v této střední části) můžeme považovat přibližně za oblouk kružnice. Zapamatujme si, že *izochrona* (obr. 227) je taková křivka, po níž hmotný bod dorazí do nejnižšího místa za tentýž čas nezávisle na tom, v kterém bodě křivky začíná svůj pohyb. Hmotné body B, C pohybující se po izochroně se dostanou do bodu A současně.



Obr. 227

V roce 1696 uveřejnil švýcarský matematik Jan Bernoulli ve významném vědeckém časopise „Acta Eruditorum" výzvu – soutěž, v níž předložil tehdejdejším matematikům následující problém: „Po jaké křivce se má pohybovat hmotný bod B, aby se co nejrychleji dostal do bodu A, který je níže než bod B, ale nikoli přímo pod ním?" Termín řešení byl jeden rok. Krátce před uplynutím stanovené lhůty rozřešili úlohu Jakub Bernoulli (bratr Janův), Leibniz, Huygens a Newton. Nalezenou křivku nazvali „brachystochronou" čili „křivkou nejkratšího pádu". Ukázalo se, že *brachystochrona* je obloukem cykloidy, procházejícím body A a B (obr. 228). Všimněme si toho, že hmotný bod se má pohybovat po křivce (brachystochroně), ačkoli nejkratší dráhou spojující body A a B je úsečka.

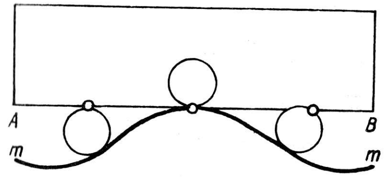
Předpokládejme, že dvěma body A a B máme narýsovat oblouk cykloidy. Nejdříve nalezněme poloměr kružnice, která při valení (kotálení) podél přímky AC vytvoří cykloidu. K tomu cíli spojíme A a B přímkou a narýsujeme kružnici o libovolném poloměru, ležící pod přímkou AC a dotýkající se této přímky v bodě A. Valí-li se tato kružnice bez smýkání po přímce AC, protne přímku AB v bodě, který označíme D (viz obr. 228). Protože všechny cykloidy mají tentýž tvar (jsou podobné), má se AD ku AB tak jako poloměr zvolené kružnice k poloměru kružnice hledané. Vypočteme-li hledaný poloměr, můžeme narýsovat oblouk brachystochrony spojující body A a B.



Obr. 228

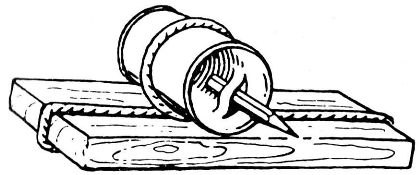
Cykloida má i jiné technické vlastnosti. Oblouk cykloidy (jak tušil již Galilei) je obloukem, který snese největší zatížení. Z toho důvodu má mnoho mostů cykloidální oblouky. Také boky zubů ozubených kol mají tvar cykloidy, aby se zmenšilo tření v převodových ústrojích.

Americký inženýr S. C. Ogilvy obrátil vztah mezi kružnicí, přímkou a cykloidou. Položil otázku, po jaké křivce se musí valit bez smýkání kružnice, aby její pevně zvolený bod opisoval přímku? Odpověď je snadná: po cykloidě obrácené „vzhůru nohama" (obr. 229).



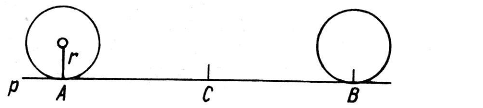
Obr. 229

Čtenáře by jistě zajímal nějaký jednoduchý praktický způsob narýsování cykloidy. Americký matematik M. Gardner uvádí v měsíčníku „Scientific American" způsob, jak narýsovat cykloidu pomocí plechovky od kakaa, provázku a prkénka. Plechovka je převázaná provázkem, který je připevněn k oběma koncům prkénka. Uvnitř plechovky je připevněna tužka. „Přístroj" přiložíme k archu papíru zavěšenému na stěně (tužka má být dole) a otáčíme plechovkou, až se tužka znovu octne dole. Při tomto otáčení narýsuje tužka cykloidu.

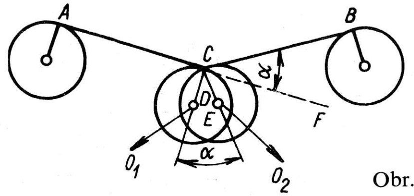


Valení bez smýkání

1. Po přímce p se valí kolo o poloměru r (obr. 230). Nechť po jednom otočení se kolo dostane z bodu A do bodu B. Je tedy $AB = 2\pi r$.



Obr. 230

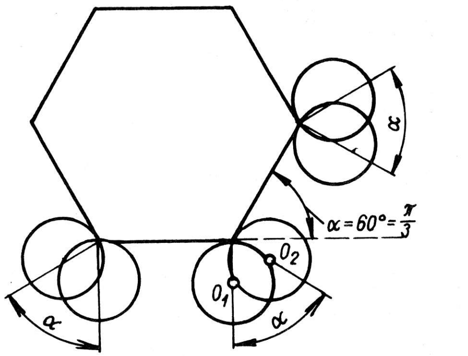


Obr. 231

2. „Zlomíme" úsečku AB v bodě C (obr. 231), tj. ve středu úsečky AB, a necháme kolo opět valit z bodu A do bodu B. Při pohybu z A do C se kolo otočí o polovinu otáčky (vzdálenost πr). Aby se mohlo valit dál z C do B, musí přejít z polohy O_1 do polohy O_2 čili otočit se o úhel $\sphericalangle\, DCE$. Tento úhel je roven úhlu $\sphericalangle\, FCB$ (vnějšímu úhlu lomené čáry ACB). Všimněme si, že úhel $\sphericalangle\, DCE$ je roven $\frac{\alpha}{2\pi}$ násobku plného úhlu, tj. celé otáčky kola. Kolo dále provede při pohybu z C do B polovinu otáčky. Při valení bez smýkání po lomené čáře ACB ($AC + CB = AB$) se kolo otočí o jednu celou otáčku plus $\frac{\alpha}{2\pi}$ násobek celé otáčky.

3. Kdybychom z úsečky AB vytvořili pravidelný šestiúhelník (uzavřenou lomenou čáru) a valili kolo po obvodě šestiúhelníka (obr. 232), pak kolo se otočí na každé jeho straně o $\frac{1}{6}$

celé otáčky, ale při přechodu z jedné strany na druhou se navíc otočí o $\frac{\alpha}{2\pi}$ násobek celé otáčky. V případě šestiúhelníka $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{6}\left(\text{neboť } \alpha = \frac{1}{3}\pi\right)$. Jestliže se tedy kolo valí po obvodu šestiúhelníka, provede jednu plus $\frac{1}{3}\pi \cdot 6$ otáčky čili dvě celé otáčky. Z úsečky AB můžeme vytvořit mnohoúhelník s libovolným počtem stran (8, 16, 32, ...).



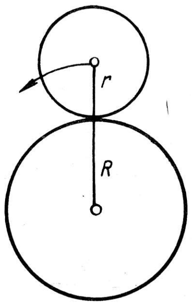
Obr. 232

U kola valícího se po obvodu mnohoúhelníka (bez smýkání) bude počet jeho otáček vždy o jednu větší než při valení po úsečce AB. To plyne z toho, že součet vnějších úhlů každého mnohoúhelníka se rovná plnému úhlu: $\frac{\alpha}{2\pi} n = 360°$ (n je počet stran mnohoúhelníka).*)

Protože i kruh můžeme považovat za „mnohoúhelník" (s nekonečným počtem stran), platí i pro kolo o poloměru r valící se bez smýkání po jiném kole, jehož obvod je roven délce úsečky AB, že počet jeho otáček bude o jednu větší než při valení po úsečce AB.

Nyní můžeme rozřešit následující úlohu:

Máme dvě kola o různých poloměrech R a r. Kolo o poloměru R je nehybné, kolo o poloměru r se valí bez smýkání po obvodu pevného kola (obr. 233). Během jednoho oběhu kola o poloměru R se kolo o poloměru r otočí čtyřikrát. V jakém poměru jsou poloměry R a r?



Obr. 233

$R : r = 3 : 1$, neboť

$2\pi R = (4 - 1)\, 2\pi r$.

*) To platí i tehdy, když vnější úhly nejsou stejné, tj. pro obecné (nikoli jen pravidelné) mnohoúhelníky. (Pozn. překl.)

Zábavné úlohy

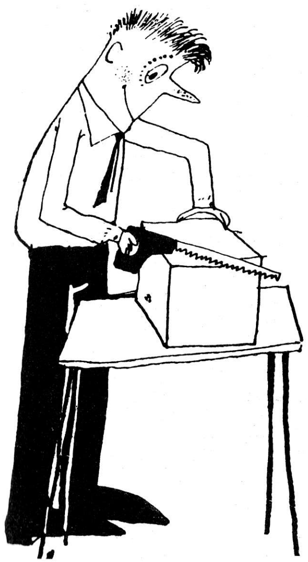
Úkol pro klempíře

Ze čtvercového kousku pozinkovaného plechu o straně a cm = 15 cm se má vyrobit nádoba se čtvercovým dnem shora otevřená.

Vypočtěte, jaký největší objem může nádoba mít.

Najdi číslo

1. Najdi takové čtyřciferné číslo, jehož devítina je opět čtyřciferné číslo zapsané týmiž číslicemi, ale v obráceném pořadí (jako slova „alej" a „jela").



2. Najdi jiné čtyřciferné číslo, jehož čtvrtina je opět čtyřciferné číslo zapsané týmiž číslicemi, ale v obráceném pořadí.

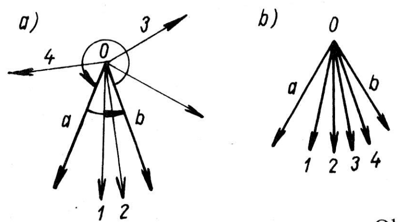
Krychlová kostka

Krychlová kostka o hraně 3 dm je natřená ze všech stran zelenou barvou. Kostku rozřízneme několika rovinami (kolika?) na 27 kostek o hraně 1 dm.

Kolik těchto kostek má tři stěny zelené, kolik dvě, kolik jednu a kolik žádnou?

Geometrické drobnosti

a) Kolik úhlů menších než 360° vznikne v rovině, jestliže z libovolného jejího bodu vedeme m polopřímek (obr. 234a)?



Obr. 234

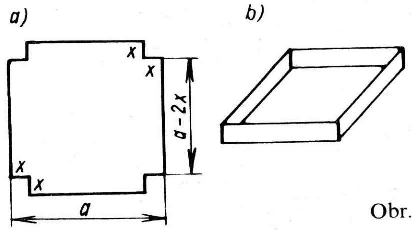
b) Kolik úhlů vznikne, jestliže z vrcholu úhlu vedeme dovnitř úhlu m polopřímek (obr. 234b)?*)

*) To znamená, že všech m polopřímek leží uvnitř daného úhlu a počítáme jen ty úhly, které jsou vytvořeny vždy dvěma z těchto polopřímek uvnitř daného úhlu. (Pozn. překl.)

■ Řešení úloh

Úkol pro klempíře

Aby nádoba měla čtvercové dno, musí její síť vypadat tak, jak vidíme na obr. 235a. Obr. 235b ukazuje nádobu v konečném stavu.



Obr. 235

Objem nádoby označme písmenem y. Pak $y = (a - 2x)(a - 2x)\,x$. Tato funkce dosahuje největší hodnoty, jestliže $x = \frac{1}{6}a$.

Důkaz. Vyšetřujme funkci $y = (a - 2x)(a - 2x)\,x$; její čtyřnásobek $4y$ nabývá maxima pro tutéž hodnotu x, pro kterou nabývá maxima původní funkce y. Jest $4y = (a - 2x)(a - 2x)\,4x$. Protože $(a - 2x) + (a - 2x) + 4x = 2a$ (konstanta), součin těchto čísel $4y$ nabývá maxima tehdy, kdy jsou si tato čísla rovna, tj. když $a - 2x = 4x$ čili $a = 6x$, $x = \frac{1}{6}a$.*) Odtud docházíme k závěru: Největší možný objem nádoby je 250 cm³:

$$\left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27} = \frac{500}{2} = 250.$$

Najdi číslo

1. Devítina hledaného čísla musí být čtyřciferná, z čehož usuzujeme, že první číslice této devítiny musí být 1, zatímco první číslice hledaného čísla musí být 9. Lze tedy hledané číslo napsat ve tvaru $9\,000 + 100x + 10y + 1$ a jeho devítinu ve tvaru $1\,000 + 100y + 10x + 9$. Vypočteme

$(1\,000 + 100y + 10x + 9) \,.\, 9$.

Násobíme: devětkrát devět je 81; píšeme 1 a pamatujeme si 8. Hledáme počet desítek, přičemž máme na paměti, že tatáž číslice (x) musí dát počet stovek hledaného čísla. Najdeme tedy čísla $1\,000 + 100y + 80 + 9$ a $9\,000 + 800 + 10y + 1$. Teď už snadno najdeme chybějící číslici. Je to 0.

Odpověď: Hledané číslo je 9 801, jeho devítina 1 089.**)

*) Všimněte si, že je-li např. $p + q + p = K$, $r + q + s = K$, je nutně $r = p + d$, $s = p - d$; odtud $rqs = (p + d) \,.\, q(p - d) = (p^2 - d^2)\,q = p^2q - d^2q < p^2q$ pro každé $dq \neq 0$. Obecný důkaz našeho tvrzení by byl ovšem obtížnější. (Pozn. překl.)

**) Můžeme uvažovat také takto: První číslice musí být 9. Dělíme-li číslo $9\,xyz$ (písmena znamenají číslice) devíti, dostaneme na prvním místě 1, na druhém 1 nebo 0 (neboť zbytek při prvním dělení je nula, takže dělíme devíti jednociferné číslo). Číslici 1 snadno vyloučíme, neboť by muselo být $9\,x11 = 1\,1x9.9$, ale taková číslice x neexistuje. Musí tedy být hledané číslo $9\,x01$ a přitom $9\,x01 = 1\,0x9.9$, takže hledané číslo je 9 801, protože $9x + 8$ musí končit nulou. (Pozn. překl.)

2. Podobně řešíme druhou úlohu: Hledané číslo je 8 712, jeho čtvrtina 2 178.*)

Krychlová kostka

Odpověď: Šesti rovinami; 8, 12, 6, 1.

Geometrické drobnosti

a) Každá z m polopřímek tvoří se zbývajícími $(m - 1)$ úhel menší než 360°, a to jednou menší než přímý, podruhé větší; např. polopřímky a a b tvoří úhly (a, b) a (b, a). Celkem je tedy úhlů $m(m - 1)$. Je-li $m = 5$, dostaneme $5 \,.\, 4 = 20$ úhlů.**)

b) V tomto případě bude úhlů $\frac{1}{2}m(m - 1)$. Když $m = 5$, dostaneme 10 úhlů.

*) Uvažujeme podobně jako v předešlé úloze. Hledané číslo musí být dělitelné čtyřmi, tedy musí končit sudou číslicí. Dělíme-li první číslici čtyřmi, musíme tedy dostat 2 (více to být nemůže), takže první číslice může být 8 nebo 9. 9 nevyhovuje, protože by muselo být $2\,xy9.4 = 9\,yx2$, ale $9 \,.\, 4 = 36$. Tedy první číslice je 8. Třetí číslicí (tj. druhou číslicí čtvrtiny hledaného čísla) může být 0, 1 nebo 2 (protože je to čtvrtina z jednociferného čísla). Avšak 0 ani 2 nevyhovuje; muselo by totiž být $2\,0y8.4 = 8\,y02$ nebo $2\,2y8.4 = 8\,y22$, ale $8 \,.\, 4 = 32$, přenos 3, takže $4y + 3$ je liché a nemůže končit 0 ani 2. Zbývá tedy poslední možnost a z ní snadno dostaneme uvedené číslo 8 712. (Pozn. překl.)

**) Čtenář by si měl uvědomit, že podle této úvahy každá polopřímka vytvoří se zbývajícími celkem $2(m - 1)$ úhlů; kdybychom však sečetli všechny tyto úhly, byl by každý počítán dvakrát. Je tedy uvedený výsledek správný. (Pozn. překl.)

Dříve než podáme definici *kombinatoriky* a uvedeme vzorce, se kterými pracuje, probereme si několik úloh patřících do této oblasti matematiky.

Úloha 1. Máme k dispozici látky tří barev: bílé, zelené a červené. Kolik různých tříbarevných vlajek můžeme z těchto tří barev ušít?*)

Kombinatorika odpovídá: šest. Jsou to: b, č, z; b, z, č; č, b, z; č, z, b; z, b, č; z, č, b.

Úloha 2. Mějme nyní pět barev: bílou, červenou, zelenou, modrou a žlutou. Kolik různých tříbarevných vlajek můžeme ušít z těchto pěti barev?

Kombinatorika odpovídá: šedesát. Skutečně: na dvanácti vlajkách bude první barvou bílá. Jsou to b, č, z; b, č, m; b, č, ž; b, z, č; b, z, m; b, z, ž; b, ž, m; b, ž, č; b, ž, z; b, m, č; b, m, z; b, m, ž. Na dalších dvanácti vlajkách bude první barvou červená. Potom bude první barvou po řadě zelená, modrá a žlutá, každá na dvanácti vlajkách.

Úloha 3. V jednom ústředním úřadě mají být obsazeny tři funkce: ředitele sekce, vedoucího oddělení a samostatného referenta. Na tato tři místa jsou čtyři kandidáti. Kolik trojic, lišících se aspoň jedním kandidátem, lze utvořit ze čtyř kandidátů?

Kombinatorika odpovídá: čtyři. Označíme-li kandidáty čísly od 1 do 4, můžeme napsat tabulku

Trojice**)	I	II	III	IV
ředitel	1	1	1	2
vedoucí	2	2	3	3
referent	3	4	4	4

Co je tedy kombinatorika? Je to odvětví matematiky, zabývající se zjišťováním počtu možností seskupování prvků dané konečné množiny do skupin různých vlastností. V kombinatorice rozeznáváme tři druhy takových skupin:

1. *Permutace* – označujeme je znakem P_n, kde n znamená počet prvků v každé skupině. Příkladem výpočtu čísla P_n byla úloha 1. Prvky byly barvy, které byly tři ($n = 3$). Viděli jsme, že $P_n = 6$ ($P_3 = 1 . 2 . 3 = 6$). Obecně

$P_n = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . n$,

např.

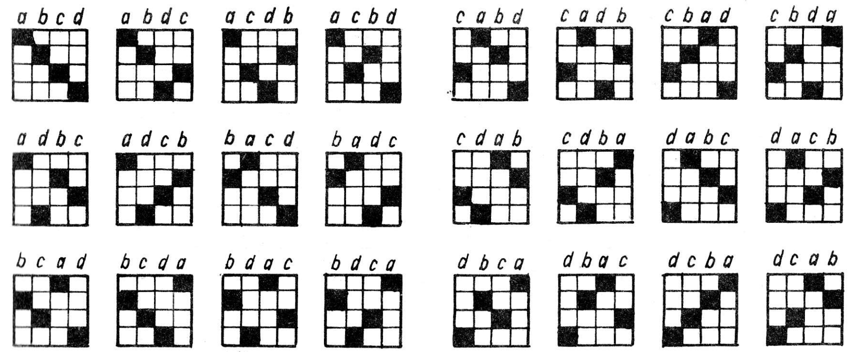
$P_{10} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 = 3\,628\,800$.

2. *Variace* – označujeme je znakem A_n^k, v němž n znamená počet všech prvků a k počet prvků vystupujících v každé skupině. Příkladem výpočtu čísla A_n^k byla úloha 2. V ní jsme uvažovali pět prvků (barev) a skupiny po třech prvcích: $n = 5$, $k = 3$. Viděli jsme, že $A_5^3 = 60$ ($A_5^3 = 5 . 4 . 3$). Obecně $A_n^k = n . (n-1) . (n-2) \ldots (n-k+1)$, tj. A_n^k je rovno součinu k přirozených čísel od n do $n - k + 1$; např. $A_6^4 = 6 . 5 . 4 . 3 = 360$.

3. *Kombinace* – označujeme je znakem C_n^k nebo $\binom{n}{k}$, kde n znamená počet všech prvků a k počet prvků v každé skupině ($k < n$). Úloha 3 byla příkladem na výpočet $\binom{n}{k}$ (ze čtyř kandidátů vytvořit skupiny po třech). Kombinace se liší navzájem aspoň jedním znakem. Obecně

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots k},$$

např. $\binom{4}{3} = \frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} = 4$.*)



Obr. 236

*) V této i v následující úloze má autor na mysli jen vlajky sestavené ze tří různobarevných stejně širokých pruhů, položených v jednom směru (např. podélně). (Pozn. překl.)

**) Ostatní trojice by se lišily jen záměnou funkcí, ale skládaly by se z těchže kandidátů jako trojice I až IV. Jiná úvaha vedoucí k řešení: Vybrat trojici ze čtyř kandidátů znamená totéž, jako vyloučit jednoho kandidáta. To je však zřejmě možné právě čtyřmi způsoby. (Pozn. překl.)

*) Variace a kombinace se liší navzájem tím, že v prvním případě sestavujeme skupiny prvků s ohledem na pořadí (v úloze 2 jsme skupiny b, č, m; č, b, m; b, m, č atd. považovali za různé), v druhém bez ohledu na pořadí (v úloze 3 jsme nerozlišovali mezi skupinou ředitel – 1, vedoucí – 2, referent – 4 a skupinou ředitel – 4, vedoucí – 1, referent – 2 apod.). Permutace můžeme považovat za zvláštní případ variací pro $n = k$; uvažujeme tedy všechny prvky dané množiny a měníme jen jejich pořadí. (Pozn. překl.)

Francouzský matematik E. Lucas objevil velmi zajímavý způsob grafického znázornění permutací P_n. Lucas nazval svůj způsob „figurálním zobrazením". Obr. 236 ukazuje obrazce, které Lucas získal přemísťováním čtyř prvků. Jak je vidět, je všech možností přemístění čtyř prvků $P_4 = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$.

Milovníkům matematických hříček navrhujeme, aby se pokusili podobným způsobem znázornit všechny možnosti seřazení pěti prvků. Upozorňujeme, že je jich $P_5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$.

▪ Hra „patnáct"

S kombinatorikou souvisí hra vynalezená r. 1878 jedním hluchoněmým Američanem. Byla nazvána hrou „patnáct" (fifteen puzzle).

Popíšeme nyní stručně postup hry: Na dně čtvercové krabičky o rozměrech 4 × 4 leží 16 jednotkových kostek, očíslovaných od 1 do 16. Po vyjmutí kostky s číslem 16 je naším úkolem uspořádat zbylé kostky v přirozeném pořadí (1, 2, 3, 4, ..., 15). Smíme však kostky pouze posunovat; není dovoleno je přenášet.

Nechť např. počáteční poloha patnácti kostek v krabičce je stejná jako na obr. 237a. (Pozor: Poslední pole v krabičce je na začátku hry vždy prázdné!) Úlohu vyřešíme provedením těchto posunutí:

1. Kostku 15 posuneme na volné místo, tři kostky 12, 8, 11 posuneme vpravo. Dostaneme pozici znázorněnou na obr. 237b.

a)

1	6	2	3
5	10	7	4
11	8	12	15
9	13	14	

b)

1	6	2	3
5	10	7	4
	11	8	12
9	13	14	15

c)

1	6	2	3
5	10	7	4
9	11	8	12
13	14	15	

d)

1	6	2	3
5	10	7	4
9	11		8
13	14	15	12

e)

1		2	3
5	6	7	4
9	10	11	8
13	14	15	12

f)

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	11	8
13	14	15	12

g)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 237

2. Kostku 9 posuneme vzhůru, kostky 13, 14, 15 posuneme vlevo (obr. 237c).

Další posunutí, znázorněná na obr. 237d, e, f vedou k řešení (obr. 237g).

Čtenář si může zvolit jinou počáteční polohu patnácti kostek a posunováním je uspořádat v přirozeném pořadí. Upozorňujeme však, že počet permutací patnácti prvků je

$$P_{15} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 = 1\,307\,674\,368\,000.$$

Matematickou teorii této hry předložil r. 1879 americký matematik Johnson.*)

▪ Anekdota o dvanácti stolovnících

Jednoho dne se dvanáct velmi zdvořilých pánů setkalo na obědě u společného přítele. Protože hostitel nevyznačil předem zasedací pořádek, začali se hosté předbíhat ve zdvořilosti a navzájem si nabízeli místa u stolu. Aby se situace zjednodušila, navrhl jeden z nich losovat. Jiný, matematik, se záhadným úsměvem naléhal, aby se vyzkoušely všechny možnosti rozmístění dvanácti osob u jednoho stolu. Hosté s jeho návrhem souhlasili, ale brzy nastal takový zmatek, že museli hru přerušit. A tak si nakonec zdvořilí pánové sedli ke stolu bez zbytečných ceremonií.

Když oběd skončil a všichni seděli u kávy, vysvětlil matematik všem shromážděným, že kdyby jednu změnu míst u stolu bylo možno provést za jednu sekundu a kdyby hosté měnili svá místa bez přestávky dnem i nocí, trvala by tato nesmyslná hra asi patnáct let a dva měsíce.

Jak jste to vypočetl? ptali se ostatní.

Velmi jednoduše. Počet všech možných umístění 12 osob u stolu je $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$. Předpokládáme-li, že jedna změna míst trvá sekundu, dostaneme 479 001 600 sekund = 15 let a 2 měsíce.

▪ $n!$ (n faktoriál)

Tento velmi užitečný symbol byl v matematice zaveden r. 1808.

$0! = 1,$
$1! = 1,$
$2! = 2,$
$3! = 6,$
$4! = 24,$
$5! = 120,$
$6! = 720,$
$7! = 5\,040,$
$8! = 40\,320,$
$9! = 362\,880,$
$10! = 3\,628\,800,$
$11! = 39\,916\,800,$
$12! = 479\,001\,600,$
$13! = 6\,227\,020\,800,$
$14! = 87\,178\,291\,200,$
$15! = 1\,307\,674\,368\,000,$
$16! = 20\,922\,789\,888\,000,$
$17! = 355\,687\,428\,096\,000,$

*) Bylo dokázáno, že úloha je řešitelná právě tehdy, je-li v počáteční poloze sudý počet „přeházených" dvojic čísel, např. 6 před 2, 7 před 4, 11 před 8, 11 před 9, 15 před 9 atd. Na obr. 237a je takových dvojic 16, proto je úloha řešitelná. (Pozn. překl.)

$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000,$
$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000,$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000,$
$21! =$
$22! =$
$23! =$
$24! =$
$25! =$

Zdatné počtáře prosíme o doplnění tabulky.

1. Nikoho neudivuje, že matematika objevuje zákony, jimiž se řídí přírodní síly, a že na základě těchto zákonů dokáže předvídat nejrozmanitější události, např. zatmění Slunce či Měsíce, objevení se komet apod., nebo vypočítat vzdálenosti planet a hvězd, velikost gravitační síly na vzdálených planetách atd.

Dokážeme pochopit i to, že matematika je nástrojem v rukou inženýra budujícího mosty a konstruujícího přesné stroje nebo vědce užívajícího počítací stroje.

Leckdo se však podiví, uslyší-li, že matematika umožňuje předpovědět např., kolik punčoch první jakosti je průměrně obsaženo v zásilce 1 000 párů punčoch, kterou obdrží od výrobce obchodní dům, zdali salva 250 střelců zasáhne nepřátelské letadlo nebo kolik žárovek odpovídajících normě (takových, které vydrží alespoň 1 200 hodin svícení) je v každém tisíci žárovek vyrobených jistou továrnou. Takové události či jevy považujeme za náhodné, tj. takové, které se neřídí žádnými zákony. Přesto se matematice podařilo i tyto případy zahrnout do svých tvrzení.

2. Jistý francouzský šlechtic, pan Chavalier de Méré, věnoval mnoho času odhalení tajemství hry v kostky.

Vymýšlel různé varianty hry, doufaje, že tak nabude velkého majetku. Navrhl například házet jednou kostkou čtyřikrát za sebou a ujišťoval spoluhráče, že v těchto čtyřech hodech musí aspoň jednou padnout šestka. Jestliže šestka nepadla ve čtyřech hodech ani jednou, vyhrával soupeř. Tehdy ještě neexistovala matematická disciplína, kterou dnes nazýváme *počtem pravděpodobnosti,* a proto se pan de Méré obrátil na svého přítele, vynikajícího matematika a filozofa, B. Pascala (1623 – 1662) s prosbou, aby rozhodl, zda jeho úvahy jsou správné. Pascal se nejen začal sám zabývat tímto problémem, ale napsal o tom dopis slavnému matematiku P. Fermatovi (1601 – 1665), jehož tak přivedl k obecným úvahám o základech hry v kostky a pravděpodobnosti výhry.

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Tak se vzrušující problémy hazardních her staly jedním z podnětů k vytvoření nové, nesmírně důležité matematické disciplíny: teorie pravděpodobnosti. K jejímu rozvoji přispěli vedle Pascala a Fermata rovněž Ch. Huygens (1629 – 1695), který je autorem pojednání „O výpočtech v hazardních hrách“, Jakub Bernoulli (1654 až 1705), A. Moivre (1667 – 1754), P. S. Laplace (1749 – 1827), C. F. Gauss (1777 – 1855), S. D. Poisson (1781 až 1840) aj.

Dnes, v době Sportky, Sazky, Matesa a nejrůznějších loterií, používáme počtu pravděpodobnosti snad v každé oblasti vědy: ve statistice, v synoptické meteorologii, v biologii, v ekonomice, v technologii, stavebnictví atd.

V některých zemích, např. v Japonsku, jsou základy počtu pravděpodobnosti povinným předmětem na středních školách. V Polsku se počítá s vyučováním základů počtu pravděpodobnosti v programu matematiky pro reformované střední školy.

3. Matematickou pravděpodobnost chápeme jako neměnnou četnost nějakého náhodného jevu. Zkoumání pravděpodobností a zákonitostí, jimiž se řídí, je obsahem počtu pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost jevu (události) A označujeme symbolem $P(A)$. Jestliže se pravděpodobnost, že A nastane, změní v jistotu, zapisujeme to symbolicky ve tvaru

$P(A) = 1.$

Víme-li, že jev A určitě nenastane, zapisujeme to symbolicky jako

$P(A) = 0.$

Házíme-li např. mincí, můžeme očekávat dva různé jevy: buď padne orel, nebo panna. Pravděpodobnost, že padne orel (nastane jev A), je $\frac{1}{2}$; zapíšeme to rovností

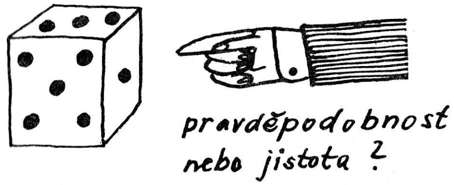
$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Je zřejmé, že pravděpodobnost, že padne panna (jev B), je stejná:

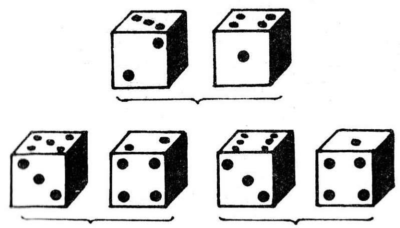
$$P(B) = \frac{1}{2} = 1 - P(A).$$

Vyšetřme nyní složitější případ. Házíme dvěma kostkami (každá kostka je

krychle, která je na stěnách označena různým počtem bodů – od jednoho do šesti). Jaká je pravděpodobnost, že součet bodů při hodu bude 7?



Uvažme, jaké jsou možnosti, aby součet bodů při hodu byl 7. Může to být 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4, 6 a 1, 5 a 2, 4 a 3. Vidíme, že takových možností je 6 (obr. 238).



Obr. 238

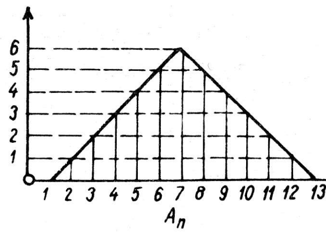
Nyní uvažme, kolik je všech možností, házíme-li dvěma kostkami. Je jich 36, totiž

1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, 1 – 6,
2 – 1, 2 – 2, 2 – 3, 2 – 4, 2 – 5, 2 – 6,
3 – 1, 3 – 2, 3 – 3, 3 – 4, 3 – 5, 3 – 6,
. . . .
6 – 1, 6 – 2, 6 – 3, 6 – 4, 6 – 5, 6 – 6.

Odtud plyne, že pravděpodobnost hození sedmi bodů dvěma kostkami (jev A_7) je

$$P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}16 \text{ (asi 16 \%)}.$$

Kdybychom vyšetřili všechny součty bodů, které mohou padnout při házení dvěma kostkami (2, 3, 4, 5, 6, 7,



obr. 239

8, 9, 10, 11, 12), a znázornili náš výsledek graficky, vypadal by tak jako na obr. 239.

Povšimněme si, že je 30 možností, při nichž součet bodů na dvou kostkách není roven 7. Pravděpodobnost tohoto jevu, který označíme B, je

$$P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 0{,}84 \text{ (asi 84 \%)}.$$

Jevy A a B, které se navzájem vylučují, se nazývají *opačné* nebo *doplňkové*. Součet pravděpodobností dvou opačných událostí je 1:

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

čili

$P(B) = 1 - P(A)$.

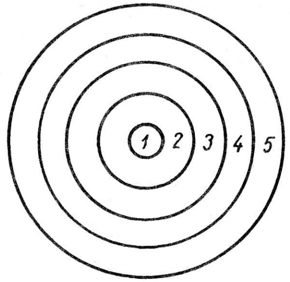
4. Nejjednodušším a nejdůležitějším zákonem používaným při výpočtu pravděpodobnosti je *součtový zákon*. Pro ilustraci rozřešme tento příklad:

Na stanici tramvaje na Prašném mostě v Dejvicích staví tramvaje 2, 8, 20, 23, 31. Jistý občan, jehož pracoviště je blízko Dopravního podniku, může používat tramvaje číslo 8 nebo 31. Předpokládáme, že tramvaje všech pěti linek jezdí ve stejných intervalech. Vypočtěte pravděpodobnost, že jako první přijede do stanice tramvaj, kterou náš cestující bude moci jet.

Protože pravděpodobnost je poměr počtu příznivých případů k počtu všech možných (v našem případě je jich 5), je hledaná pravděpodobnost – označme ji $P(8$ nebo $31)$ – rovna $\frac{2}{5}$, avšak $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, to znamená $P(8$ nebo $31) = P(8) + P(31)$.

Obecně: Jestliže v řadě n jednotlivých vzájemně se vylučujících událostí má událost A_1 pravděpodobnost m_1/n (A_1 nastane průměrně m_1-krát v n pokusech), událost A_2 má pravděpodobnost m_2/n (A_2 nastane průměrně m_2-krát v n pokusech), ..., A_n má pravděpodobnost m_n/n (A_n nastane průměrně m_n-krát v n pokusech), pak pravděpodobnost, že nastane některá z událostí A_i $(i = 1, 2, ..., n)$, se vyjádří vzorcem

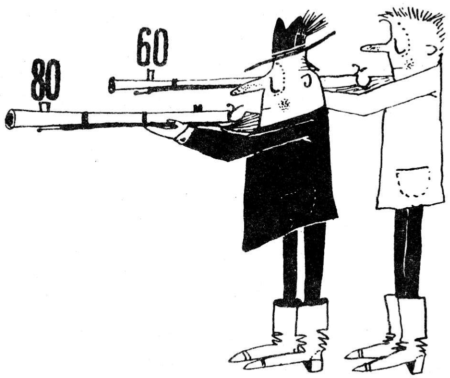
$$P(A_1 \text{ nebo } A_2 \text{ nebo} \dots \text{nebo } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$



Obr. 240

Při použití tohoto vzorce je velmi důležité ověřit, že jednotlivé možnosti se skutečně vylučují. Jinak můžeme obdržet chybný výsledek. Zde je příklad:

Do terče střílejí dva střelci. Terč je rozdělen na pět polí (obr. 240). Zasáhne-li střela pole 1, je hodnocena jako velmi dobrá, zasáhne-li pole 2, je dobrá. První střelec má ze 100 výstřelů 60 velmi dobrých zásahů (jev A_1), druhý střelec 80 velmi dobrých zásahů (jev A_2). Vypočtěte pravděpodobnost zásahu pole 1, jestliže oba střelci střílejí současně.



Předpokládejme, že oba střelci vystřelili současně 100krát, takže padlo 100 dvojnásobných výstřelů. Asi 60 zásahů prvního střelce bylo velmi dobrých; 40krát tento střelec chybil. Druhý střelec má ze 100 výstřelů 80 velmi dobrých zásahů; zasáhne tedy pole 1 osmi výstřely z deseti. Ze 40 chybných výstřelů prvního střelce bude tedy asi $8 . 4 = 32$ velmi dobrých zásahů. Odtud plyne, že ze 100 dvojnásobných výstřelů bude asi $60 + 32 = 92$ velmi dobrých zásahů. Kdybychom vypočetli pravděpodobnost podle vzorce

$$P(A_1 \text{ nebo } A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$

dostali bychom

$$\frac{80}{100} + \frac{60}{100} = \frac{140}{100} = 1{,}4.$$

Takový výsledek nemá smysl, neboť pravděpodobnost nemůže být větší než 1. Chyba vznikla zanedbáním skutečnosti, že jevy A_1 a A_2 se nevylučují: zásah prvního střelce nevylučuje zásah druhého. Použití součtového zákona je tedy podmíněno tím, že se zkoumané jevy navzájem vylučují.

5. Dvě továrny vyrábějí punčochy. První továrna vyrábí 80 % všech punčoch, druhá 20 %. Ze 100 párů punčoch vyrobených v první továrně jsou průměrně 83 páry první jakosti, ze 100 párů punčoch z druhé továrny průměrně jen 63 páry. Kolik párů punčoch první jakosti je v každé stovce párů, kterou zakoupí obchodní dům?

Snadno vypočteme, že z každé stovky párů koupených punčoch je průměrně 79 párů první jakosti, neboť

$$0{,}83 . 80 + 0{,}63 . 20 = 79.$$

Pravděpodobnost, že zakoupíme pár punčoch první jakosti, je tedy $\frac{79}{100}$.

Kdybychom však koupili punčochy v obchodě, ve kterém se prodávají jen výrobky první továrny, byla by pravděpodobnost zakoupení punčoch první jakosti $\frac{83}{100}$. Tento příklad ukazuje, že doplníme-li obecné podmínky úlohy (koupě punčoch) novou podstatnou podmínkou (punčochy kupujeme v obchodě, který prodává jen výrobky první továrny), dojde ke změně pravděpodobnosti jednotlivých jevů.

Přidáme-li novou podmínku, změníme podstatně dosavadní soustavu podmínek a zkoumaný hromadný proces bude probíhat odlišně.

Nalezli jsme tedy dvě různé pravděpodobnosti téže události – zakoupení punčoch první jakosti. Každou z nich jsme vypočetli za jiných podmínek. V prvním případě, dokud jsme neuvažovali dodatečnou podmínku (kupujeme v obchodě, který prodává jen výrobky první továrny), pracovali jsme s *nepodmíněnou pravděpodobností*

$$P(A) = \frac{79}{100};$$

po zavedení dodatečné podmínky (kupujeme v obchodě, který prodává jen výrobky první továrny) dostáváme tzv.

podmíněnou pravděpodobnost, kterou označujeme symbolem $P(A \mid B)$. Písmeno B označuje dodatečnou podmínku. Symbol $P(A|B)$ čteme: pravděpodobnost jevu A, jestliže nastal jev B. V našem případě je

$$P(A|B) = \frac{83}{100}.$$

6. Vraťme se k předešlému příkladu s punčochami. Nechť z 1 000 párů punčoch v prodeji je průměrně 200 párů z druhé továrny a z těch je 126 párů

první jakosti. Pravděpodobnost, že vybraný pár punčoch pochází z druhé továrny (jev B), je

$$P(B) = \frac{200}{1\,000} = 0{,}2.$$

Pravděpodobnost, že pár punčoch je první jakosti za předpokladu, že jde o výrobek druhé továrny, je

$$P(A \mid B) = \frac{126}{200} = 0{,}63.$$

Protože v každém 1 000 párů punčoch je 126 párů první jakosti, které současně pocházejí z druhé továrny, je pravděpodobnost, že současně nastane A i B rovna

$$(1) \quad P(A \text{ i } B) = \frac{126}{1\,000} = \frac{200}{1\,000} \cdot \frac{126}{200} = P(B) \,.\, P(A|B)^{*)}$$

čili součinu $P(B)$ a $P(A|B)$. Odvodili jsme vzorec pro zákon násobení. Tento vzorec lze zobecnit.

Zákon násobení pravděpodobností zní:

Pravděpodobnost, že nastanou současně dvě události, je rovna součinu pravděpodobnosti jedné z událostí a podmíněné pravděpodobnosti druhé události za podmínky, že nastala událost první.**)

*) Změnou označení v tomto vzorci dostaneme obdobný vzorec $P(A \text{ i } B) = P(A) \,.\, P(B|A)$.

**) Podobně můžeme formulovat zákon sčítání pravděpodobností v případě, že se jednotlivé události nevylučují: $P(A \text{ nebo } B) = P(A) + P(B|A')$, kde A' znamená, že nenastane A. Naopak, jsou-li dvě události nezávislé [tj. $P(A|B) = P(A)$], můžeme zákon násobení pravděpodobností psát ve tvaru $P(A \text{ i } B) = P(A)P(B)$. (Pozn. překl.)

Příklad 1. V jednom družstvu vyrábějí košile, z nichž 90 % je nákupčími uznáno za prodejné (jev A). Ze 100 košil daných do prodeje je průměrně 80 košil první jakosti (jev B). Jaká je pravděpodobnost, že vybraná košile, vyrobená v onom družstvu, je první jakosti?

Hledáme $P(A \text{ i } B)$, neboť k tomu, aby košile byla první jakosti, musí být uznána za prodejnou (jev A) a současně být první jakosti. Podle podmínek úlohy je $P(A) = 0{,}90$ a $P(B|A) = 0{,}80$, takže podle vzorce (1) dostaneme $P(A \text{ i } B) = 0{,}90 \,.\, 0{,}80 = 0{,}72$.

Při výpočtu pravděpodobnosti, že nastanou současně dvě či větší počet událostí, používáme následující pravidlo:

Pravděpodobnost, že současně nastane jistý počet událostí, je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých událostí pod podmínkou, že tyto události jsou navzájem nezávislé:

$$(2) \quad P(A \text{ i } B \text{ i } C \text{ i} \ldots \text{ i} K) = P(A)P(B)P(C) \ldots P(K).$$

Poznámka: Před použitím tohoto vzorce je vždy třeba ověřit, zda události $A, B, C, \ldots, K$ jsou navzájem nezávislé, podobně jako při použití pravidla o sčítání pravděpodobností musíme ověřit, zda se události navzájem vylučují.

Příklad 2. Technik obsluhuje tři automaty. Pravděpodobnost, že během hodiny nebude automat vyžadovat technikův zásah, je u prvního 0,9, u druhého 0,8 a u třetího 0,75. Jaká je pravděpodobnost, že během hodiny nebude žádný z automatů vyžadovat technikův zásah?

Protože automaty pracují nezávisle jeden na druhém, použijeme vzorce (2). Hledaná pravděpodobnost je rovna

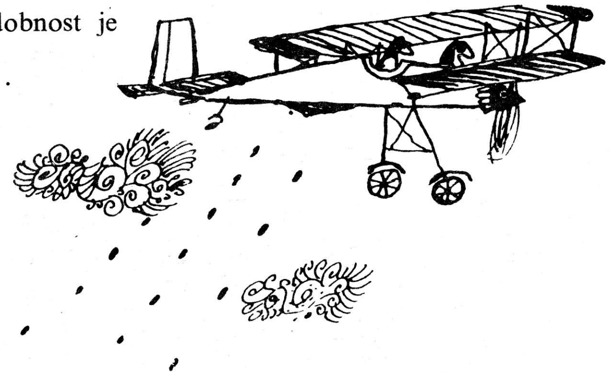
$$0{,}9 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}75 = 0{,}54.$$

Příklad 3. Americký bombardér letící směrem na severní Vietnam byl ostřelován oddílem partyzánů v počtu 250 střelců. Jaká je pravděpodobnost, že letadlo bude sestřeleno salvou (současným výstřelem) 250 pušek?

Bylo vypočteno, že za jistých podmínek je pravděpodobnost zásahu letadla jednotlivým výstřelem 0,004. Odtud plyne, že pravděpodobnost, že střela mine letadlo, je $1 - 0{,}004 = 0{,}996$. Pravděpodobnost, že letadlo nezasáhne ani jediný výstřel z 250 současně vystřelených střel, je $0{,}996 \,.\, 0{,}996 \ldots . \, 0{,}996$ (250krát) čili $0{,}996^{250}$. Pravděpodobnost opačné události (letadlo bude zasaženo) vypočteme ze vzorce

$$P = 1 - 0{,}996^{250} \approx 0{,}625.$$

Vidíme, že tato pravděpodobnost je poměrně velká $\left(\text{větší než } \frac{1}{2}\right)$.



■ Mates, Sportka, Sazka

Pan Mikuláš nekouří, nepije, nehraje karty, ale přesto má svoji vášeň: sází Matesa. Sází náruživě a nevynechá jediný týden. Rozhodl se vyhrát milión.

Pan Mikuláš prostudoval pozorně „Kabalu“, nejstarší knihu o vlastnostech čísel, „Sybilinu knihu“, Pythagorovu filozofii čísel příbuzných, dokonalých, polygonálních, šťastných i smolných i řadu neméně závažných knih současných badatelů v oboru hazardních her. Pan Mikuláš sázel, ale stále prohrával. Nepomohla ani porada u známé věštkyně, ačkoli po této návštěvě měl již k výhře blízko. Jen kdyby mu jakýsi nepřející skřítek nebyl přeházel správně tipovaná čísla! Pan Mikuláš tipoval 12 a skřítek je změnil na 21; z čísla 23 udělal 32 a číslo 6 obrátil vzhůru nohama na 9. A tak místo pěti „zásahů“ měl pan Mikuláš jen dva.

Na domluvy a prosby nejbližšího okolí, aby přestal hrát, odpovídal: „Hrají milióny Čechoslováků, proč právě já bych neměl? Nevzdělanci, nevyznáte se v zákonu velkých čísel.“ Ani nejklidnější z příbuzných pana Mikuláše, jeho tchyně, nevydržela a obrátila se na redakci jednoho časopisu s prosbou o vysvětlení, jak je to ve skutečnosti

se sázením Matesa. Dostala následující odpověď:

Populární Mates se hraje s 35 čísly od 1 do 35. V každém tahu se vylosuje 5 čísel. Podle pravidel hry může každý hráč vsadit na libovolných 5 čísel z uvedených 35.

Počet všech možných tahů je tedy roven počtu všech kombinací po 5 číslech z 35 čísel čili

$$C_n^k = C_{35}^5 = \binom{35}{5} =$$

$$= \frac{35 \,.\, 34 \,.\, 33 \,.\, 32 \,.\, 31}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 324\,632.$$

Předpokládejme nejprve, že v osudí je jen jedno vyhrávající číslo a 34 nevyhrávající. Losujeme 5 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi je vyhrávající číslo?

Uvažujeme takto: Počet příznivých tahů, obsahujících vyhrávající číslo, je roven počtu kombinací čísel, mezi nimiž je číslo vyhrávající a jakákoli čtyři čísla z ostatních 34 čili tolik, kolik je

$$\binom{34}{4} = \frac{34 \,.\, 33 \,.\, 32 \,.\, 31}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Poměr tohoto čísla k počtu všech možných tahů, tj. k číslu $\binom{35}{5}$, je právě hledaná pravděpodobnost. Označíme-li ji p_1, máme

$$p_1 = \frac{\binom{34}{4}}{\binom{35}{5}} =$$

$$= \frac{34 \,.\, 33 \,.\, 32 \,.\, 31 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{35 \,.\, 34 \,.\, 33 \,.\, 32 \,.\, 31 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} =$$

$$= \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Nyní předpokládejme, že v osudí jsou 2 vyhrávající čísla a 33 nevyhrávající. Losujeme opět jako předešle 5 čísel. Vypočtěme, jaká je pravděpodobnost p_2, že mezi 5 vylosovanými čísly budou ta dvě čísla, která vyhrávají. Stejnou úvahou jako v předešlém případě dojdeme k závěru, že počet příznivých případů je roven počtu těch kombinací čísel, v nichž vystupují obě vyhrávající čísla a libovolná 3 čísla ze zbývajících 33. Takových kombinací je

$$\binom{33}{3} = \frac{33 \,.\, 32 \,.\, 31}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Odtud plyne, že

$$p_2 = \frac{\binom{33}{3}}{\binom{35}{5}} =$$

$$= \frac{33 \,.\, 32 \,.\, 31 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{35 \,.\, 34 \,.\, 33 \,.\, 32 \,.\, 31 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} =$$

$$= \frac{2}{119} \approx \frac{1}{60}.$$

Podobným způsobem najdeme pravděpodobnost p_3, že budou tažena 3 vyhrávající čísla:

$$p_3 = \frac{\binom{32}{2}}{\binom{35}{5}} =$$

$$= \frac{32 . 31 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5}{35 . 34 . 33 . 32 . 31 . 1 . 2} =$$

$$= \frac{2}{1\,309} \approx \frac{1}{655}$$

a obdobně

$$p_4 = \frac{\binom{31}{1}}{\binom{35}{5}} =$$

$$= \frac{31 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5}{35 . 34 . 33 . 32 . 31 . 1} =$$

$$= \frac{1}{10\,472}.$$

Konečně pravděpodobnost p_5 tahu všech pěti vyhrávajících čísel je rovna

$$p_5 = \frac{1}{\binom{35}{5}} = \frac{1}{324\,632}.$$

Čitatel výrazu pro p_5 je roven jedné, protože je jediná možnost vylosování všech pěti vyhrávajících čísel.

Abychom vypočetli, jaká je pravděpodobnost výhry prvního pořadí ve Sportce, kde je taženo v každém tahu 6 čísel ze 49, musíme vypočítat $\binom{49}{6}$ a pravděpodobnost p dostaneme jako jeho převrácenou hodnotu:

$$p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{49 . 48 . 47 . 46 . 45 . 44} =$$

$$= \frac{1}{13\,983\,816}.$$

Je těžké najít jehlu v kupce sena, ještě těžší najít perlu v azurových vlnách Baltického moře, ale snad ještě obtížnější je vyhrát vytouženou první cenu.

■ Zábavné úlohy

Dětská tiskárna

Chlapec má malou tiskárničku. Kromě písmen obsahuje tiskárnička také deset razítek číslic od nuly do devíti. Razítka číslic nejsou v krabičce nijak seřazena. Jaká je pravděpodobnost, že při vytažení tří namátkou vybraných razítek z krabičky dostaneme číslice, z nichž bude možno sestavit číslo dělitelné devíti?

Návod: Využijte znaku dělitelnosti devíti (kap. 17).

Moudrý otec a bystrý syn

Syn jednoho amerického profesora matematiky dostával od otce měsíčně 10 dolarů kapesného. Jednoho dne však otec řekl synovi:

„Dnes ti kapesné nedám, ale můžeš svých 10 dolarů získat, jestliže přistoupíš na jistou hru."

Syn si povzdechl a zeptal se:

„A co je to za hru, tatínku?"

„Tenhle balíček," odpověděl otec, „obsahuje deset desetidolarových bankovek, a tenhle deset jednodolarových. Jak víš, liší se desetidolarová bankovka od jednodolarové jen kresbou. Všechny bankovky rozdělíš podle svého uvážení na dvě hromádky. Já ti zavážu oči a vložím jednu hromádku bankovek do

černého klobouku a druhou do hnědého. Pak bankovky v každém klobouku zamíchám a klobouky položím před tebe, jeden napravo a druhý nalevo. Ty vytáhneš se zavázanýma očima jedinou bankovku. Bude-li to desetidolarová, můžeš si ji ponechat."

„A když ne?"

„Tak jsi prohrál. Budeš muset celý měsíc zalévat naši zahradu a nic za to nedostaneš."

Chlapec přijal otcovy podmínky.

Jakým způsobem rozdělil dvacet bankovek na dvě hromádky, aby pravděpodobnost vytáhnutí desetidolarové bankovky byla co největší? Jakým číslem byla vyjádřena tato pravděpodobnost?

V ringu

Aby se stal členem družstva vysílaného na olympijské hry v Mexiku, musel jistý rohovník vybojovat ve třech po sobě jdoucích dnech tři utkání se dvěma soupeři. Dvě vítězství následující za sebou mu zajišťovala zařazení do družstva. Jeden z jeho soupeřů patřil do nejvyšší výkonnostní třídy (nazvěme jej A) a druhý do nižší třídy (nazvěme jej B).

V jakém pořadí má náš rohovník (nazvěme jej C) bojovat, aby pravděpodobnost dvou po sobě následujících vítězství byla co největší: v pořadí $A-B-A$ (se soupeřem A, pak se soupeřem B a pak opět s A) nebo v pořadí $B-A-B$?

■ Řešení úloh

Dětská tiskárna

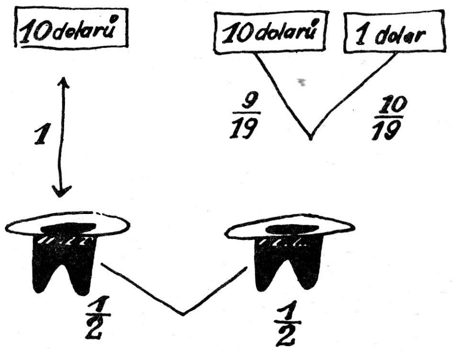
Z deseti razítek lze utvořit celkem

$$\frac{10 . 9 . 8}{1 . 2 . 3} = 120 \text{ kombinací po třech.}$$

Příznivých kombinací, tzn. takových, kdy součet číslic je roven 9 nebo 18, je jen 14 (126, 135, 180, 234, 270, 360, 450, 189, 279, 369, 378, 459, 468, 567). Pravděpodobnost vytáhnutí příznivých číslic je 14/120.

Moudrý otec a bystrý syn

Chlapec položil na jednu hromádku jedinou desetidolarovou bankovku a na druhou všech ostatních 19 bankovek. Pravděpodobnost vytažení té jedné desetidolarové bankovky byla $\frac{1}{2}$ (dva klobouky – jeden z nich ji obsahuje).



Jestliže chlapec zvolil správný klobouk, měl jistotu, že vytáhne desetidolarovou bakovku. Jestliže zvolil klobouk, ve kterém bylo 19 bankovek, byla pravděpodobnost vytažení desetidolarové $\frac{9}{19}$ a jednodolarové $\frac{10}{19}$.*)

V ringu

Řešení této úlohy nelze ani najít intuicí, ani uhádnout. Proto se obrátíme o pomoc k matematice, k teorii pravděpodobnosti.**)

Nechť p_1 je pravděpodobnost vítězství rohovníka C v utkání s rohovníkem A a p_2 v utkání s rohovníkem B. Samozřejmě předpokládáme, že $p_1 < p_2$. Pravděpodobnost porážky rohovníka C rohovníkem A je $1 - p_1$, pravděpodobnost porážky C rohovníkem B je $1 - p_2$. Jistotu nějakého jevu, např. že po zimě přijde jaro, vyjadřujeme číslem 1. Jestliže p je pravděpodobnost, že nějaký jev nastane, pak $1 - p$ je pravděpodobnost, že tento jev nenastane.

Jestliže rohovník C zvolí pořadí utkání $A - B - A$, jsou celkem tři různé možnosti, jak může získat dvě vítězství následující za sebou:

I. C vyhraje všechna utkání. Pravděpodobnost tohoto jevu je dána číslem $p_1p_2p_1 = p_1^2p_2$.

---

*) Celkovou pravděpodobnost vytažení desetidolarové bankovky vypočteme takto: Pravděpodobnost, že chlapec zvolí klobouk s jednou desetidolarovou bankovkou, je $\frac{1}{2}$ a pravděpodobnost, že

II. C vyhraje první dvě utkání a třetí prohraje. Pravděpodobnost tohoto výsledku je dána číslem $p_1p_2(1 - p_1) = p_1p_2 - p_1^2p_2$.

III. C prohraje první utkání a vyhraje obě zbývající. Pravděpodobnost je $(1 - p_1)p_2p_1 = p_2p_1 - p_2p_1^2$.

Když sečteme pravděpodobnosti všech tří výsledků, dostaneme

$p_1p_2(2 - p_1)$.

To je pravděpodobnost, že C vyhraje dvě po sobě jdoucí utkání, zápasí-li v pořadí $A - B - A$.

Uvažujeme-li obdobně jako výše i v případě, že rohovník C zápasí se svými soupeři v pořadí $B - A - B$, dojdeme k těmto výsledkům:

I. Pravděpodobnost, že vyhraje všechna utkání, je $p_2p_1p_2 = p_1p_2^2$.

II. Pravděpodobnost, že vyhraje jen první dvě utkání, je

$p_2p_1(1 - p_2) = p_1p_2 - p_1p_2^2$.

III. Pravděpodobnost, že vyhraje jen druhé a třetí utkání, je

$(1 - p_2)p_1p_2 = p_1p_2 - p_1p_2^2$.

Součet těchto pravděpodobností činí $p_1p_2(2 - p_2)$. To je pravděpodobnost, že C vyhraje dvě po sobě jdoucí utkání, bude-li zápasit v pořadí $B - A - B$.

---

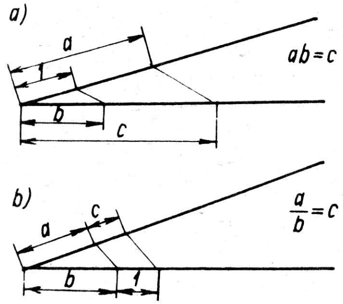
z něho vytáhne desetidolarovou bankovku, je 1 (jistota). Tedy pravděpodobnost, že zvolí tento klobouk a z něho vytáhne desetidolarovou bankovku, je $\frac{1}{2} . 1 = \frac{1}{2}$ (srov. str. 267). Pravděpodobnost, že vybere druhý klobouk, je opět $\frac{1}{2}$ a pravděpodobnost, že z něho vytáhne desetidolarovou bankovku, je $\frac{9}{19}$. Tedy pravděpodobnost, že vytáhne druhý klobouk a z něho desetidolarovou bankovku, je $\frac{1}{2} . \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$. Celková pravděpodobnost, že vytáhne deset dolarů, je rovna součtu: $\frac{1}{2} + \frac{9}{38} = \frac{28}{38} = \frac{14}{19}$, tj. skoro $\frac{3}{4}$. Tvrzení, že toto rozdělení bankovek je pro chlapce nejpříznivější, lze podepřít touto úvahou (která ovšem není matematickým důkazem): Dám-li do jednoho klobouku všechny desetidolarové a do druhého všechny jednodolarové bankovky, je pravděpodobnost vytažení desetidolarové zřejmě $\frac{1}{2}$ (záleží jen na volbě správného klobouku). Ale pak je zbytečné, aby ve „šťastném" klobouku bylo deset bankovek – čím víc desetidolarových bankovek přemístím do druhého klobouku (nejvýše ovšem devět), tím větší budou moje „šance". (Pozn. překl.)

**) Možná, že čtenář přece jen dokáže správně odpovědět bez podrobného matematického rozboru, např. na základě této úvahy: Předpokládejme, že rohovník C „skoro jistě" vyhraje s B, ale s A je výsledek nejasný. Bude-li zápasit v pořadí $B - A - B$, utká se sice s lepším soupeřem A jen jednou, ale prohraje-li s ním, nepomohou mu ani dvě vítězství s B. Naopak, bude-li zápasit v pořadí $A - B - A$ a vyhraje-li podle „papírové formy" s B, pak jedno vítězství ze dvou zápasů s A, tj. vlastně nerozhodný výsledek, je postačující pro příznivý výsledek. Tuto úvahu autor dále podrobně a obecně ověřuje. (Pozn. překl.)

Porovnáme-li pravděpodobnost vítězství v pořadí bojů $A-B-A$ s pravděpodobností vítězství v pořadí bojů $B-A-B$, tzn. čísla $p_1p_2(2-p_1)$ a $p_1p_2(2-p_2)$, zjistíme, že $p_1p_2(2-p_1)$ je větší než $p_1p_2(2-p_2)$, protože $(2-p_1)$ je větší než $(2-p_2)$.

Shrnujíce tyto úvahy můžeme odpovědět, že větší naděje dvou po sobě jdoucích vítězství rohovníka C je při výběru pořadí bojů nejdříve se soupeřem nejvyšší výkonnostní třídy A, pak se slabším soupeřem B a pak znovu s A čili v pořadí $A-B-A$.

Při řešení matematických úloh zpravidla provádíme různé výpočty. Je však řada úloh, které mnohem rychleji a přehledněji vyřešíme pomocí obrázku. Jestliže nějaké dvě veličiny znázorníme úsečkami, např. a a b, je možno nalézt graficky takovou úsečku c, jejíž délka je rovna $a+b$ nebo $a-b$ nebo $a \cdot b$ nebo a/b (viz obr. 241a, b).

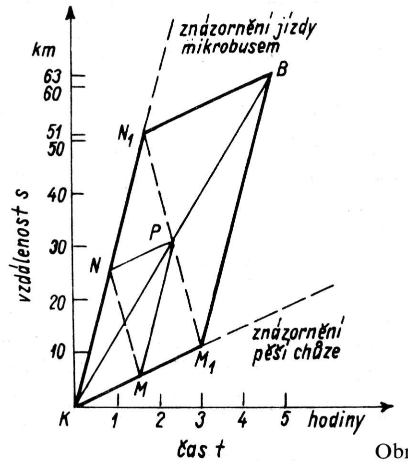


Obr. 241

Grafické sčítání, násobení, řešení rovnic apod. je soustava konstrukcí, které s jistou přesností nahrazují početní operace. V grafických postupech se užívá také grafů funkcí. S grafickými metodami řešení se často setkáváme v aplikované matematice, tyto metody jsou také základními metodami některých odvětví techniky, např. grafické statiky. Význam grafických metod je v jejich snadnosti a názornosti, ale jejich nedostatkem je malá přesnost. Avšak v mnoha případech, např. v inženýrské praxi, je jejich přesnost postačující, protože dané veličiny, s nimiž se pracuje ve výpočtech, jsou známy jen přibližně, což samo o sobě má vliv na malou přesnost odpovědi (výsledku výpočtů).

Zde je jeden příklad grafického řešení úlohy:

Zájezdu z místa A do místa B, které je vzdáleno od A 63 km, se účastní 30 osob. Zájezdu byl však přidělen jediný mikrobus, který mimo místa pro řidiče má jen 15 míst pro cestující. Proto bylo rozhodnuto, že mikrobusem pojede z A skupina 15 osob, která v jisté vzdálenosti od B vystoupí a bude pokračovat pěšky, zatímco mikrobus se vrátí a naloží zbytek výpravy, která zatím



Obr. 242

půjde pěšky z A směrem k B. Jak je třeba zorganizovat cestu mikrobusu, aby celá výprava dorazila do B současně, jestliže průměrná rychlost mikrobusu je 30 km/h a průměrná rychlost pěší chůze 4 km/h? Úlohu máme řešit graficky, bez sestavení rovnic a bez výpočtů.

Grafické řešení úlohy je znázorněno na obr. 242. Čtenář si sám rozmyslí, jak byla sestrojena přímka KB.*)

Z obrázku můžeme vyčíst tyto údaje:

1. Mikrobus odvezl první skupinu do vzdálenosti 51 km, na což spotřeboval 1,7 h = 1 h 42 min (bod N_1 na obr. 242), pak se vrátil pro zbytek výpravy.

2. Druhou skupinu potkal mikrobus ve vzdálenosti 12 km od A, kam se skupina dostala po třech hodinách pěšího pochodu (bod M_1 na obr. 242).

3. V okamžiku, kdy první část výpravy dorazila pěšky do B, vyjížděl tam i mikrobus s druhou částí výpravy (bod B na obr. 242).

4. Cesta z A do B trvala asi 4 h 42 min.

5. Obě části výpravy šly stejnou část pěšky a stejnou část jely mikrobusem ($N_1B = KM_1$; $KN_1 = M_1B$).

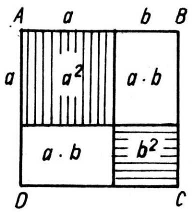
Pokuste se řešit tuto úlohu také početně (výsledek si můžete ověřit v „Řešeních úloh").

■ Vzorec a jeho geometrické znázornění

Ve škole jsme se dozvěděli, že

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Těmto vzorcům můžeme dát geometrickou interpretaci. Podle vzorce I lze ze čtverce o straně a, ze čtverce o straně b a ze dvou obdélníků o stranách a, b složit čtverec o straně $a + b$, jak ukazuje obr. 243.

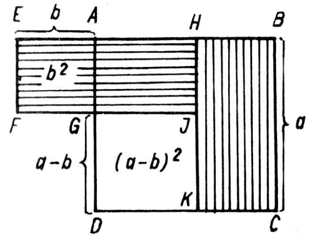


Obr. 243

Podle vzorce II, odečteme-li od součtu dvou čtverců, jednoho o straně a a druhého o straně b, dva obdélníky o stranách a, b, dostaneme čtverec

*) Postup grafického řešení: Kdyby se mikrobus vrátil z bodu N (který jsme zvolili libovolně na přímce znázorňující dráhu mikrobusu), potkal by druhou skupinu v bodě M (sklon čárkované úsečky NM je dán rychlostí mikrobusu) a s první skupinou, která by šla z bodu N dále pěšky, by se setkal v bodě P. Grafické řešení naší úlohy musí být dáno rovnoběžníkem podobným rovnoběžníku $KMPN$, jehož vrchol B leží 63 jednotek nad vodorovnou osou. (Pozn. překl.)

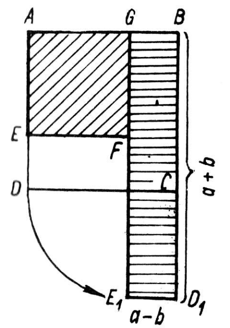
o straně $a - b$ (obr. 244). Obsah obrazce $ABCD$ je a^2, obsah obrazce $EAGF$ je b^2, obsah obrazce $EBCDGF$ je $a^2 + b^2$, obsah obdélníka $EHJF$ i obsah obdélníka $HBCK$ je roven ab. Odstraníme-li z obrazce $EBCDGF$ dva shodné vyšrafované obdélníky (jeden svisle a druhý vodorovně), zbude čtverec o straně $a - b$.



Obr. 244

Vzorec III je graficky znázorněn na obr. 245. Čtenář si sám rozváží jeho smysl. Na obrázku je

$AB = BC = CD = DA = a$;
$AG = GF = FE = EA = b$;
$ED = GB = a - b$;



Obr. 245

$BD_1 = a + b$;
$ABCD = a^2$;
$AGFE = b^2$;
$EFGBCD = (a + b)(a - b)$.

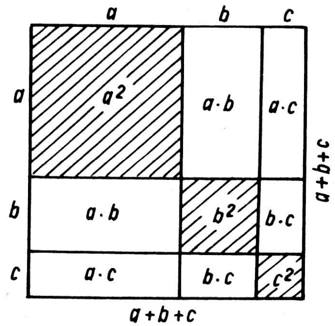
Vzorec I vyjadřuje druhou mocninu součtu dvou čísel. Můžeme odvodit vzorec pro druhou mocninu součtu tří, čtyř i více čísel. Například

IV. $(a + b + c)^2 =$
$= a^2 + b^2 + c^2 +$
$+ 2ab + 2ac + 2bc$

V. $(a + b + c + d)^2 =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$
$+ 2ab + 2ac + 2ad +$
$+ 2bc + 2bd + 2cd.$

Také tyto vzorce lze snadno odvodit geometricky. Čtenář to jistě dokáže s pomocí obr. 246 a obr. 247. Může se pak samostatně pokusit o znázornění výrazů

$(a + b + c + d + e)^2 = \dots,$
$(a + b - c)^2 = \dots.$



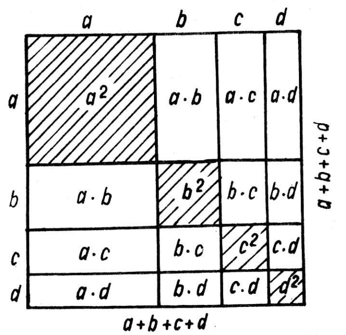
Obr. 246

Z obr. 246 je možno odvodit ještě dva jiné vzorce, totiž

VI. $(a + b + c)^2 =$
$= (a + b)^2 + 2(a + b)\,c + c^2;$

VII. $(a + b + c)^2 =$
$= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2.$

Pokuste se k nim načrtnout odpovídající obrázky.



Obr. 247

Z obr. 247 lze odvodit dokonce tři podobné vzorce. Jaké?

■ Zajímavá rovnost

Čtenář nechť si ověří (srov. „Řešení úloh"), že platí

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a - b)^3} = \frac{a + b}{a + (a - b)}.$$

Pravá strana rovnosti se liší od levé jen tím, že chybí mocnitele; písmena i operace jsou na obou stranách stejné.

Tento vzorec můžeme použít k nedovolenému „krácení" (třemi), například

$$\frac{25^3 + 11^3}{25^3 + (25 - 11)^3} =$$

$$= \frac{25 + 11}{25 + (25 - 11)} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}.$$

■ Zábavné úlohy

Nesprávné krácení

Třída psala prověrku z počtů. Žák Zmatlík dostal pětku, ačkoli měl výsledky krácení zlomků stejné jako jeho spolužák, kterému dala učitelka jedničku. Zmatlík zkrátil zlomek $\frac{19}{95}$ tak, že škrtl devítku v čitateli i ve jmenovateli a dostal $\frac{1}{5}$. Stejným způsobem zkrátil $\frac{49}{98}$ a dostal $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Ve zlomku $\frac{16}{64}$ škrtl v čitateli i ve jmenovateli šestku, zůstala $\frac{1}{4}$, a ve zlomku $\frac{266}{665}$ škrtl 66 a dostal výsledek $\frac{2}{5}$.

Jeho soused, který dostal jedničku, dělil ve zlomku $\frac{19}{95}$ čitatel i jmenovatel číslem 19, ve zlomku $\frac{49}{98}$ číslem 49, ve zlomku $\frac{16}{64}$ dělil čitatel i jmenovatel číslem 16 a $\frac{266}{665}$ zkrátil tak, že dělil čitatel i jmenovatel číslem 133. I to se stává. Správný konečný výsledek nedokazuje vždycky správnost úsudku.

Hříčky s čísly

a) $145 = 1! + 4! + 5!$,
tj. $1 + 1 . 2 . 3 . 4 + 1 . 2 . 3 . 4 . 5$;
b) $387\,420\,489 = 3^{87+420-489}$,
tj. 3^{18} (kdo nevěří, ať to spočítá);
c) $\underline{1 + 2 + 3} = \underline{1 . 2 . 3} =$
$= \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}$.

Broušení diamantů

Než vám položíme otázku, připomeňme si:

1. Jestliže několik obdélníků má tentýž obvod, pak největší obsah má ten, jehož strany jsou stejné, tj. čtverec.

2. Jestliže tyč, např. stříbrná, stojí m korun, pak tyč z téhož kovu (stejné ryzosti) dvakrát (třikrát, čtyřikrát, ...) těžší stojí dvakrát (třikrát, čtyřikrát, ...) více. Totéž platí o každém zboží, s výjimkou diamantů.

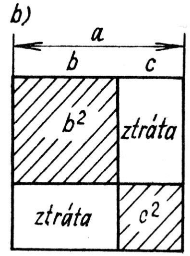
3. Diamant dvakrát těžší stojí čtyřikrát víc, třikrát těžší devětkrát víc atd. Stručně: cena diamantu je úměrná čtverci jeho hmotnosti.

Při broušení se diamant o hmotnosti a karátů rozpadl na dvě nestejné části. Jak velká je brusičova ztráta? V jakém případě je ztráta největší?

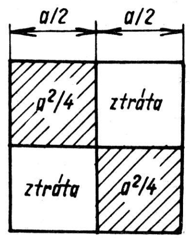
Úlohu vyřešíme graficky. Na obr. 248a je hmotnost diamantu znázorněna úsečkou délky a, zatímco jeho cenu znázorňuje čtverec o straně a. Na obr. 248b vidíme ceny částí diamantu o hmotnosti b a c, na které se diamant o hmotnosti a karátů rozpadl. Jsou znázorněny čtverci o stranách b a c. Obrázek znázorňuje také velikost ztráty: jsou to dva nevyšrafované obdélníky, jejichž obvody jsou rovny $2b + 2c = 2a$. Ztráta je tedy největší, jestliže se z těchto obdélníků stanou čtverce. Tento případ je ukázán na obr. 249.

a)

b)



Obr. 248



Obr. 249

Rozmanité drobnosti – Kolumbovo vejce

Pověst o Kolumbově vejci jistě znáte. Přesto vám ji zopakujeme.

Kritici vytýkali Kolumbovi, že se pouští do takových úkolů, které nikdo není schopen vykonat. Argumentovali také tím, že je-li Země kulatá, musely by Kolumbovy lodě vyjet na horu vody, což je nemožné.

Když se Kolumbus vrátil ze své objevitelské výpravy, prohlásili jeho protivníci, že vlastně nedokázal nic zvláštního. Dříve či později by někdo jiný stejně doplul k neznámé pevnině. Když Kolumbus uslyšel tento názor, poprosil o syrové vajíčko, a když je dostal, zeptal se:

„Uměl by někdo z přítomných postavit vajíčko tak, aby stálo na špičce?"

Všichni po řadě to zkoušeli, ale nikomu se to nepodařilo. Tu vzal Kolumbus vejce, klepl s ním o desku stolu, a postavil je tak na špičku.

„Takhle bych to taky uměl," řekl jeden z nejzarytějších Kolumbových protivníků.

„Tak proč jsi to neudělal?" zeptal se ho Kolumbus.

Z tohoto příběhu plyne naučení: Každý úkol se zdá snadný, když jej již rozřešil někdo jiný.

Každá z následujících otázek je právě takovým „Kolumbovým vejcem".

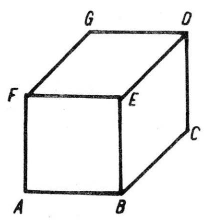
1. Trojúhelník ABC má strany dlouhé 18, 23 a 41 cm. Trojúhelník DEF má strany dlouhé 25, 33 a 58 cm. Který z trojúhelníků má větší obsah?

2. Tři ulice, které se navzájem vždy po dvou protínají, tvoří náměstí ve tvaru rovnostranného trojúhelníku. Najdi na náměstí takový bod, aby součet vzdáleností novinového stánku postaveného v tomto bodě od všech tří ulic tvořících náměstí byl co nejmenší. Kde leží onen bod?

3. Jestliže jsi pozorně četl knížku až sem, pamatuješ si jistě, co je vyryto na Archimédově náhrobku.

4. Jan hodil krychlovou hrací kostkou. Po něm hodil toutéž kostkou Dan. Jaká je pravděpodobnost, že Jan hodil větší číslo?

5. Těleso $ABCDEFGH$ je krychle (obr. 250). Jaký úhel svírají přímky GE a EA, jaký přímky GD a DB? Svoji odpověď dokaž!



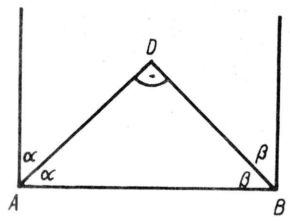
Obr. 250

6. Na rybníku plulo pět kachen. Myslivec zastřelil dvě kachny. Kolik kachen tam zůstalo?

7. Na tuto otázku odpověz během tří sekund. Které číslo je větší: 2 děleno 0,125 nebo 2 násobeno 4?

8. „Zde jsou tři pilulky," praví lékař nemocnému. „Berte od této chvíle každou půlhodinu jednu pilulku." Na jak dlouho vystačí nemocnému pilulky?

9. Vrchol C trojúhelníku ABC se na obr. 251 nevešel. AD a BD, osy úhlů trojúhelníku při základně trojúhelníku, svírají pravý úhel ADB; základna AB je dlouhá 10 cm. Jaká je výška trojúhelníka ABC?



Obr. 251

10. Žák řeší úlohu 60 minut. Za jak dlouho rozřeší tutéž úlohu deset žáků?

11. Dva chlapci se narodili stejným rodičům, stejný rok a stejný den, ale přesto to nebyla dvojčata. Je to možné?

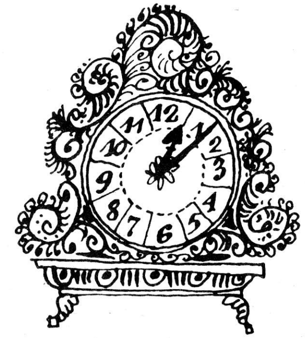
12. Žák odečetl od zlomku tisíc dvě stě padesátin zlomek tisíc dvě stě padesátin a dostal výsledek 20. Je to možné?

13. V aleji roste v řadě za sebou deset stromů. Mezi každými dvěma stromy stojí lavička. Kolik laviček je mezi stromy?

14. Od dávných časů se matematici snaží najít obecný vzorec vyjadřující všechna prvočísla. Nalezni velmi jednoduchý vzorec obsahující jen jednu číslici a jednu proměnnou x a vyjadřující při libovolném přirozeném čísle x totéž prvočíslo.

15. Na stěně visí hodiny. Na jejich číselníku jsou čísla od 1 do 12. Veďte přes číselník čáru tak, aby součet čísel po obou stranách čáry byl stejný.

Kolika čarami je třeba číselník rozdělit, aby vznikly tři stejné součty? A chceme-li dostat šest stejných součtů?



16. Máme dvě kola se stejnými obvody. Kolo B je nehybné, kolo A se valí po kole B. Kolikrát se musí A otočit, aby proběhlo celý obvod kola B?

17. Kolikrát je číslo

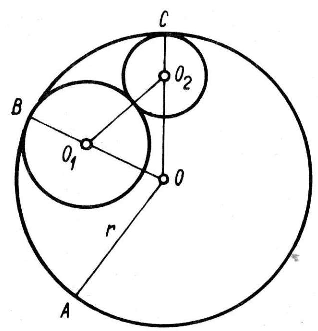
1 307 674 368 000

menší než číslo 16!?

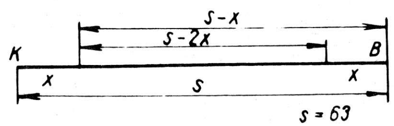
18. Jak známo, je posloupnost přirozených čísel 1, 2, ..., n, ... nekonečná. Kolik je v této posloupnosti čísel dělitelných třemi?

19. Napiš číslo 65 536 pomocí jediné cifry a jediné početní operace.

20. Vypočti obvod trojúhelníka OO_1O_2 (obr. 252), jestliže víš, že poloměr $OA = r$ a že kružnice se středy O_1 a O_2 se dotýkají vně navzájem a zevnitř kružnice o středu O.



Obr. 252



Obr. 253

Řešení úloh

Obrázek či výpočet

Písmenem x km označme vzdálenost obce B od bodu, v němž mikrobus vysadil prvních patnáct cestujících a vrátil se pro zbytek (viz obr. 253); $s = 63$.

Mikrobus ujel nejdřív vzdálenost $(s - x)$ km ve směru z A do B, pak se vracel $(s - 2x)$ km pro druhou skupinu.*) Celkem tedy mikrobus ujel až do okamžiku setkání s druhou skupinou $(s - x) + (s - 2x) = 2s - 3x$ kilometrů. Platí tedy

$$\frac{2s - 3x}{x} = \frac{30}{4},$$

odkud

$$x = \frac{8s}{42} = \frac{8 \,.\, 63}{42} = 12\,.$$

Mikrobus vysadil první skupinu cestujících po ujetí $(63 - 12)$ km $= 51$ km. Druhá skupina se v okamžiku setkání nacházela 12 km od A. Čas potřebný k přepravě celé výpravy na vzdálenost $AB = 63$ km je

$$\frac{12}{4} + \frac{63 - 12}{30} = 3 + \frac{51}{30} = 4{,}7\,,$$

tj. asi 4 h 42 min.

*) Z podmínek úlohy je zřejmé, že obě skupiny musely jít stejnou vzdálenost pěšky (označili jsme ji x) a stejnou jet mikrobusem (tj. $s - x$). (Pozn. překl.)

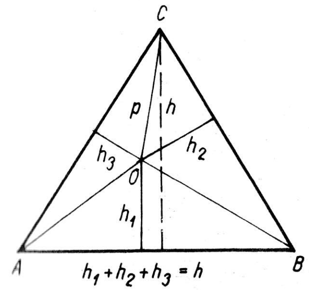
Zajímavá rovnost

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a - b)^3} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{[a + (a - b)](a^2 - a^2 + ab + a^2 - 2ab + b^2)} =$$

$$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{[a + (a - b)](a^2 - ab + b^2)} = \frac{a + b}{a + (a - b)}\,.$$

Rozmanité drobnosti – Kolumbovo vejce

1. Oba „trojúhelníky" mají stejný obsah: nula. Body A, B, C stejně jako D, E, F leží totiž na přímce, takže netvoří trojúhelník.



Obr. 254

2. Kdekoli, neboť v rovnostranném trojúhelníku je součet vzdáleností libovolného vnitřního bodu trojúhelníku od jeho stran roven výšce trojúhelníku. Skutečně, obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahu trojúhelníků ABO, BCO, CAO (viz obr. 254), takže

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3,$$

odkud dělením obou stran rovnice číslem $\frac{1}{2}a$ dostaneme $h = h_1 + h_2 + h_3$.

3. Koule vepsaná do válce.

4. Je-li k některé z čísel na kostce, je pravděpodobnost jeho vrhu $\frac{1}{6}$. Protože menších čísel je na kostce $k - 1$, je pravděpodobnost, že Dan hodí menší číslo, $\frac{k - 1}{6}$. Pravděpodobnost, že Jan hodí k a Dan méně než k, je tedy (srov. str. 266) $\frac{1}{6} \cdot \frac{k - 1}{6} = \frac{k - 1}{36}$.

Pravděpodobnost, že tento případ nastane pro některé číslo na kostce (tj. $k = 1, 2, \ldots, 6$), je (srov. str. 265)

$$0 + \frac{1}{36}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) =$$

$$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}\,.$$

5. Úhel GEA je 60°, neboť trojúhelník GEA je rovnostranný. Úhel GDB je pravý, neboť přímka GD je kolmá ke stěně $BCDE$.

6. Dvě kachny (zastřelené). Ostatní uletěly.

7. 2 děleno 0,125, protože $2 : 0{,}125 = 16$, zatímco $2 . 4 = 8$.

8. Na jednu hodinu.

9. „Nekonečná“, neboť součet úhlů při základně je roven 180°. Přímky AC a BC jsou tedy rovnoběžné a netvoří trojúhelník; bod C „leží v nekonečnu“.

10. Úloha nemá smysl.

11. Je to možné: narodila se trojčata.

12. Úloze je třeba rozumět takto:

$$\frac{1\,200}{50} - \frac{1\,000}{250} = \frac{5\,000}{250} = 20.$$

13. Devět laviček.

14. Výraz $1 + 1^x$ je pro každé přirozené číslo x roven 2.

15. Řešení je ukázáno na obr. 255.

16. Dvakrát.

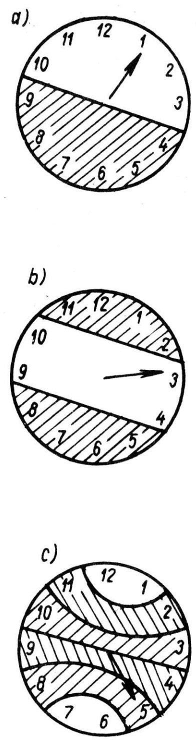
17. 16 ×, neboť $1\,307\,674\,368\,000 = 15!$, takže $16! = 1\,307\,674\,368\,000 \times 16$.

18. Tolik jako přirozených čísel, neboť pod každé přirozené číslo můžeme napsat číslo dělitelné třemi:

1, 2, 3, 4, …, n, … ,
3, 6, 9, 12, …, $3n$, …*).

19. $2^{2^{2^2}} = 65\,536$.

20. Obvod trojúhelníku OO_1O_2 je roven $2r$, neboť $O_1O_2 = O_1B + O_2C$ (viz obr. 252).



Obr. 255

*) Tento postup se nazývá *vzájemně jednoznačné přiřazení* prvků obou množin. Tímto způsobem lze porovnávat „počet prvků“ nekonečných množin. Z uvedeného příkladu vidíme, že dvě nekonečné množiny mohou mít „stejný počet prvků“, i když jedna z nich obsahuje druhou a ještě nekonečně mnoho dalších prvků. (Pozn. překl.)

Matematický vzorec je stručný zápis vztahu mezi veličinami, zapsaný pomocí matematických znaků a symbolů. Například vzorec $a^2 + b^2 = c^2$ vyjadřuje vztah mezi odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku a a b a jeho přeponou c. Matematický vzorec může vyjadřovat také matematický zákon, např. vzorec $a + b = b + a$ představuje komutativní zákon pro sčítání. Vzorec, který nazýváme *algoritmem*, zaznamenává všechny operace i pořadí, v němž je třeba je vykonat, abychom rozřešili úlohu daného typu: např. algoritmus

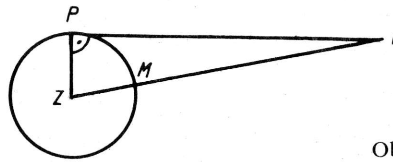
$$\frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

nám říká, jaké operace a v jakém pořadí je třeba vykonat s koeficienty rovnice typu $ax^2 + bx + c = 0$, abychom našli její řešení.

Vzorce $2\pi r$, πr^2, $4\pi r^2$ a $\frac{4}{3}\pi r^3$ udávají, jak vypočítat po řadě délku kružnice, obsah kruhu, povrch koule a její objem. Matematici objevili velký počet vzorců, kterých používáme nejen v matematice, ale i v jiných exaktních vědách a v technice. Obrazně řečeno, matematické vzorce jsou klíčem otvírajícím bránu k Sezamu tajemství přírody.

Starověcí matematici neznali vzorce v té podobě, jak je vyjadřujeme dnes my. Vzorce se objevily teprve tehdy, když se matematici naučili vyjadřovat čísla a jiné veličiny písmeny a spojovat je znaky operací (v 16. století). Ve starověku se vzorce vyjadřovaly slovně a v takovém tvaru se používaly i k řešení velmi složitých úloh.

Zde je příklad, jak Ptolemaios (2. stol. n. l.) vypočetl vzdálenost Měsíce od Země (v dnešní symbolice). Ptolemaios uznal za správné úvahy a početní výsledky Eratosthenovy (asi 275–194 př. n. l.) a založil na nich své výpočty.



Obr. 256

Předpokládejme, že Měsíc K (obr. 256) se nachází nad bodem M ležícím na povrchu Země. Geometricky to znamená, že Měsíc leží na polopřímce vycházející ze středu Z Země a procházející bodem M. Budiž P takový bod na povrchu Země, z něhož pozorujeme východ Měsíce v okamžiku, kdy je nad bodem M. To znamená, že přímka KP je tečnou k povrchu Země v bodě P, takže $\triangle\ KPZ$ je pravoúhlý. Hledáme vzdálenost ZK, považujíce Měsíc za bod v prostoru. Pro zjednodušení úvah můžeme předpokládat, že body M a P leží na rovníku. Taková situace nastane jednou za měsíc. Délku zemského poloměru znal Ptolemaios z Eratosthenových výpočtů (6 000 km). Středový úhel Z měříme délkou oblouku PM, která je rovna rozdílu zeměpisných délek bodů P a M. Ptolemaios uměl vypočítat zeměpisnou délku; to dovedl již Hipparchos (2. století př. n. l.). Velikost úhlu Z je 89°4'12". Z Hipparchových tabulek můžeme vypočítat $\cos Z = 0{,}016\,3$. Můžeme tedy psát

$$\frac{PZ}{ZK} = \cos 89°4'12'' = 0{,}016\,3,$$

odkud $PZ = ZK \,.\, 0{,}016\,3$, a tedy

$$ZK = \frac{PZ}{0{,}016\,3} = \frac{6\,000 \text{ km}}{0{,}016\,3} \approx$$

$$\approx 368\,000 \text{ km}.$$

Je samozřejmé, že vypočtená hodnota vzdálenosti ZK je přibližná, neboť jsme použili přibližné hodnoty zemského poloměru 6 000 km (místo 6 370 km) a také hodnota $\cos Z$ byla jen přibližná.

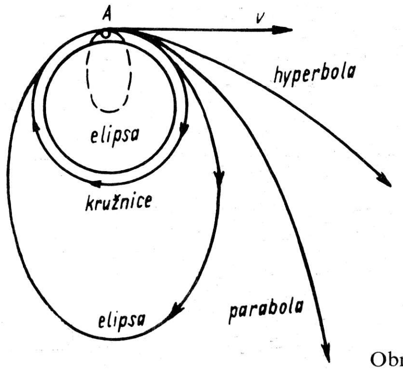
Podobně je možno vypočítat vzdálenost Země od Slunce.

Obrovský význam pro poznání zákonů, jimiž se řídí přírodní jevy, mělo nalezení vzorců přímočarého, křivočarého a orbitálního pohybu (Koperník, Galilei a Kepler) a zákona všeobecné gravitace (Newton).

Rozborem těchto vzorců byla objevena řada faktů do té doby přírodovědcům neznámých. Například z Newtonových vzorců $F = ma$, vyjadřujícího druhý zákon dynamiky (F je působící síla, m hmotnost, a zrychlení), a $F = km_1m_2/r^2$, vyjadřujícího zákon všeobecné přitažlivosti (F je síla, m_1 a m_2 hmotnosti navzájem se přitahujících těles, r jejich vzdálenost a k gravitační konstanta), se s použitím vzorce $h = \frac{1}{2} gt^2$ pro dráhu tělesa padajícího volným pádem ($g = 9{,}8$ m/s^2 je gravitační zrychlení na Zemi, t doba pádu) dá vypočítat zrychlení padajícího tělesa na libovolné planetě, na Měsíci či na Slunci, ale také hmotnost libovolné planety (tedy i Země a Měsíce) i hmotnost Slunce. Rozborem těchto vzorců a srovnáním tohoto rozboru s výsledky svých pozorování dokázal Newton, že tatáž síla, která je příčinou, že každé těleso padá ve směru těžiště Země, udržuje Měsíc na jeho oběžné dráze kolem Země. Díky těmto vzorcům víme, že gravitační zrychlení na Měsíci je téměř šestkrát menší než na Zemi. Obrazně řečeno, člověk vážící asi 60 kg je na Měsíci éterickou bytostí, neboť váží sotva 10 kg. Víme, že úniková rychlost, činící na Zemi asi 11,2 km/s, je na Měsíci pouhých 2,4 km/s, že z hmoty vytvářející zeměkouli bychom mohli utvořit 81 Měsíců, a známe ještě mnoho jiných poučných i zajímavých věcí.

■ Kosmická rychlost

Vědci a inženýři konstruují stále dokonalejší kosmické lodě. Překážkou kosmických cest je především naše matka Země, která nás k sobě tiskne obrovskou silou – tuto sílu nazýváme silou gravitační. Člověk objevil, že gravitační sílu je možno překonat, opustíme-li Zemi v přístroji, jehož startovní rychlost není menší než 11,2 km/s.



Obr. 257

Na obr. 257 jsou ukázány dráhy, po nichž se bude pohybovat těleso v zemském gravitačním poli v závislosti na své počáteční rychlosti. Ve všech případech má rychlost v okamžiku startu vodorovný směr*). Dráha pohybu je kruhová, jestliže rychlost v tělesa v okamžiku startu je taková, že zrychlení volného pádu g je rovno dostřednému zrychlení: $v^2/R = g$. Přitom můžeme předpokládat, že poloměr dráhy R je roven zemskému poloměru, takže $v = \sqrt{Rg} \approx 7{,}93$ km/s.**)

Je-li rychlost v okamžiku startu (v bodě A) větší než 7,93 km/s (první kosmická rychlost), ale menší než 11,2 km/s, pak dráhou pohybu je elipsa, jejíž ohnisko bližší bodu startu A leží ve středu Země (na obr. 257 je taková elipsa narýsována plnou čarou). Je-li rychlost v okamžiku startu rovna 11,2 km/s (druhá kosmická rychlost), je dráhou pohybu tělesa parabola. Je-li startovní rychlost větší než 11,2 km/s, je dráhou pohybu hyperbola. V obou posledních případech těleso opustí Zemi a unikne do kosmického prostoru.

Všimněme si, že při rychlosti menší než 7,93 km/s představuje dráhu pohybu část oblouku elipsy (na obr. 257 je to čárkovaná elipsa); její ohnisko vzdálenější od bodu A leží ve středu Země. Při startovní rychlosti o mnoho menší než 7,93 km/s se těleso pohybuje po oblouku paraboly.***)

■ Člověk si podmaňuje prostor

Před osmdesáti lety zahájil člověk soustředěný útok na prostor. Tehdejší mládež s nadšením prožívala první pokusy o vzlétnutí i rekordy strojů těžších než vzduch. První let bratrů Wrightů, uskutečněný v roce 1903, trval pouhých

*) Tj. směr tečny k zemskému povrchu. (Pozn. překl.)

**) $R \approx 6\,300$ km, $g \approx 10$ m/s$^2 = \frac{1}{100}$ km/s^2.

***) V tomto případě můžeme totiž část zemského povrchu, ve skutečnosti zakřiveného, nahradit rovinou a považovat gravitační zrychlení za konstantní. Výsledek je ovšem přibližný. (Pozn. překl.)

59 sekund. Jejich „stroj“, sestavený ze dřeva a z plátna, ale se spalovacím motorem, se zvedl do výše jen několika desítek metrů a uletěl asi kilometr. S údivem přijal svět v roce 1909 zprávu o Blériotově přeletu kanálu La Manche. A první přelet Atlantického oceánu z New Yorku do Paříže Američanem Lindberghem v roce 1927 ocenilo lidstvo jako úplné vítězství nad vzdušným živlem.

Poláci stáli v prvních řadách dobyvatelů vzduchu. V roce 1926 proletěl kapitán Bolesław Orliński bez mezipřistání trať Varšava – Tokio a tímtéž letadlem se vrátil z Tokia do Varšavy. V roce 1933 přeletěl kapitán Stanislaw Skarżyński na letadle polské konstrukce RWD-5 bis sám přes Atlantický oceán ze Şaint Louis v Senegalu do Maceio v Brazílii. V letech 1932 a 1934 dobyli polští piloti Wigura, Żwirko a Bajan vítězství v mezinárodních leteckých závodech Challenge.

Dnešní mládež je svědkem ještě intenzívnějšího útoku člověka na kosmický prostor. S nesmírným obdivem a nadšením sleduje jednotlivé etapy dobývání kosmu. S úctou vyslovuje jména prvních odvážlivců – hrdinů kosmu. Pevně věří, že ještě v našem století si člověk podrobí kosmický prostor stejně dokonale, jak si podrobil prostor vzdušný. Avšak sláva kosmických hrdinů nemůže a nesmí zakrýt hrdinskou práci vědců-matematiků, kteří do nejmenších podrobností vypočetli rychlosti, dráhy a všechny ostatní parametry startu kosmických lodí, kteří bděli u elektronických strojů nad bezpečím letu, ani vědců-inženýrů, kteří tyto lodě sestrojili. Hrdinství matematiků a inženýrů je stejně podivuhodné jako hrdinství kosmonautů.

■ Úvahy nad úvahami

Velký francouzský filozof a učenec R. Descartes (1596 – 1650) píše ve svém díle „Rozprava o metodě správného usuzování a hledání pravdy ve vědách“: „...Srovnával jsem tajemství přírody se zákony matematiky. Byl jsem a jsem přesvědčen, že tentýž klíč otevírá dveře k pochopení jednoho i druhého. Když jsem vše pečlivě zvážil, došel jsem k názoru, že do matematiky patří všechny vědy, mající co dělat s poznáním řádu a míry, bez ohledu na to, zda tuto míru hledají v číslech, obrazcích, konstelacích, zvucích či v jiných objektech. Proto musí existovat univerzální věda, zkoumající vše, co se týká míry a řádu, a úplně nezávislá na tom či onom jejím použití. Tato věda je nanejvýš hodna jména matematika, neboť všechny ostatní vědy mají se k ní tak jako část k celku.“

Doplněním Descartovy myšlenky je vyznání francouzského matematika, astronoma a fyzika P. S. Laplacea (1749 – 1827): „Rozbor každého jevu vede k jedné základní podstatě – ke změnám, řídícím se zákony funkcionální závislosti. Všechny jevy, i ty, které pro své nepatrné rozměry nemají zdánlivě žádnou souvislost se zákony přírody, jsou jejich nevyhnutelnými důsledky stejně jako pohyb sluncí. Současné události souvisí s minulými na základě zásady, že nic se neděje bez příčiny. Tento princip má všeobecnou platnost. Kdyby jakýsi ideální rozum znal všechny síly, působící v daném okamžiku v přírodě, i vzájemný vztah všech částí, z nichž se skládá, a kdyby tento rozum byl schopen to vše ovládnout do té míry, aby mohl všechny tyto znalosti matematicky analyzovat, pak by mohl v jediném vzorci obsáhnout pohyby největších nebeských těles i nejmenších elektronů.“

Dovršením těchto dvou úvah o úvahách může být krátké vyznání A. Einsteina (1879 – 1955): „Matematika je produktem lidského mozku, nezávislým na zkušenosti, ale přesto nádherně odpovídá reálnému světu a překrásně jej vysvětluje.“

Různé podmínky vývoje prvotních společností vedly ke vzniku řady odlišných jazyků. S rozvojem kultury našich prapraotců se jazykové rozdíly nejen nestíraly, ale právě naopak – rostly. Prohlubovalo se vědomí národní odlišnosti a vztah k mateřské řeči. Historie sice zná doby, kdy jediný jazyk byl společnou řečí skoro všech národů obývajících „celý tehdejší svět", např. jazyk indoevropský (arijský), ale to bylo velmi dávno. Později se na dlouhá staletí stala společným jazykem evropských národů latina, hlavně ve vědě a v diplomacii. Koncem 18. století vytlačily národní jazyky latinu z jejích pozic. Neznamená to, že by neexistovali lidé chápající důležitost mezinárodního jazyka. Potřeba takového jazyka byla pociťována odedávna. Stejně dlouho trvaly pokusy utvořit neutrální umělý jazyk s jednoduchou strukturou, snadný k naučení. Tato myšlenka se zrodila již v 16. století. Vážné návrhy umělého mezinárodního jazyka vznikají však až v 17. století. Hovoří o nich ve svých dílech Caspar Schottus a Kenelm Digby. Jejich práce však nenalezly odezvy v tehdejší společnosti. Větší zájem vzbudil jazyk sestavený v roce 1879 Němcem Martinem Schleyerem, známý pod názvem „volapück", ale jeho úspěch neměl dlouhé trvání, neboť krátce po něm (v roce 1887) se objevil nový umělý jazyk – „esperanto", vytvořený polským lékařem Ludvíkem Zamenhofem. Esperanto vytlačilo „volapück" a nalezlo na celém světě mnoho přívrženců. Vedle esperanta existují ještě jiné mezinárodní jazyky: ido, ilo, interlinguo. Přes jistou popularitu esperanta se mnozí domnívají, že se tento jazyk nestane z různých důvodů jazykem skutečně mezinárodním, především proto, že je to jazyk umělý a mrtvý, tzn. nehovoří jím žádný národ. Proto se také objevují názory, zatím jako skromné vědecké návrhy, přijmout za mezinárodní jazyk jeden z nejrozšířenějších živých jazyků (angličtina, ruština, francouzština, němčina). Byla by to pro svět významná historická událost.

To je hudba daleké budoucnosti. Na druhé straně, ve věci psaného mezinárodního jazyka, používajícího mezinárodních znaků různě čtených v různých národních jazycích, je situace nadějnější. Tím spíše, že takový psaný mezinárodní jazyk již vlastně existuje, např. v matematice. Zápis

$$\left(\frac{12 . 5 - 18 : 3}{\sqrt{9}}\right)^2$$

přečte jinak Polák, jinak Číňan a jinak Španěl, ale všichni jej pochopí stejně a také stejně vypočtou: Polák, Číňan i Španěl napíší

$$\left(\frac{12 . 5 - 18 : 3}{\sqrt{9}}\right)^2 = 324$$

Vytváření psaného mezinárodního matematického jazyka není ještě ukončeno. Ve školních učebnicích i v pracích vědců-matematiků se dosud užívá mluveného jazyka; přesto je to, co již bylo vykonáno, hodno podivu a má obrovský význam. Trvalo přes dva a půl tisíce let, než byly zavedeny takové znaky (symboly), jako 1, 2, 3, ..., 0, $\%$, $‰$, $+$, $-$, $\times$, $:$, $=$, $\neq$, $\approx$, $>$, $<$, $\|$, $\perp$, ∞, ... atd. a písmena a, b, c, ..., x, y, z, ... Avšak již v 17. století tyto symboly nepostačovaly. Filozofové a matematici došli k závěru, že mezinárodní psaný jazyk je třeba rozšířit. Dějiny kultury zaznamenávají díla několika učenců 16. století, kteří se věnovali těmto otázkám: mezi jinými Johna Wilkinse (práce z roku 1668), Athanasia Kirchera (práce z roku 1669) a konečně matematika a filozofa G. W. Leibnize (1646–1716), který se nejvíce zasloužil o myšlenku vytvoření mezinárodního psaného jazyka.

Po celý svůj život se Leibniz zabýval vytvořením tzv. pazigrafie čili všeobecného psaného jazyka. V protikladu k „lingua universalis" (všeobecný jazyk) chtěl vytvořit „characteristica universalis" (všeobecné písmo), písmo k zapisování myšlenek a pojmů stejně srozumitelné každému, i když různě čtené. Narazil však na těžko překonatelnou překážku, neboť podle jeho záměru měla „characteristica universalis" obsáhnout všechny oblasti lidské mysli. K tomu by bylo nutno vytvořit velmi mnoho znaků (charakteristik), nejméně několik tisíc. Aby bylo možno počet charakteristik zmenšit, provedl Leibniz rozbor některých pojmů, které považoval za složené, a rozložil je na jednodušší.

Po Leibnizovi se k myšlence vytvoření pazigrafie vrátil v druhé polovině 19. století Španěl Don Sinibaldo de Mas, který byl španělským vyslancem v Číně. V roce 1863 vydal pod názvem „Ideographie" („Ideografie") dílo, v němž uvedl soustavu 2 600 znaků, které – podle jeho názoru – stačily k vyjádření „charakteristiky" každého pojmu. Avšak toto dílo nenalezlo ohlas a brzo upadlo v zapomenutí.

Nejvážnější chybou tvůrců pazigrafie bylo, jak jsme již poznamenali, že chtěli obsáhnout všechny oblasti lidského života a mysli, které jsou přece tak různorodé a pracují odlišnými metodami usuzování. Proto přineslo pazigrafii velký úspěch, když se omezila na jediný obor používající jediné metody, např. na matematiku nebo logiku. Zde je třeba se zmínit o italském vědci, profesoru univerzity v Toríně, Giuseppe Peanovi (zemřel 1932), který vytvořil ideografické symboly umožňující vyjádření všech úvah v oblasti matematiky. V díle „Formulario di Matematica" („Matematický formulář") ukázal Peano, že po příslušném rozboru stačí nevelký počet znaků, abychom bez použití slov, jen pomocí mezinárodních (všeobecně srozumitelných) znaků zapsali všechna matematická tvrzení i myšlenkové pochody.

Peanovy práce doplnil rozšířením jeho pazigrafie na logiku anglický vědec Bertrand Russel, který spolu s A. N. Whiteheadem vydal v roce 1910 dílo pod názvem „Principia Mathematica" („Základy matematiky").

Nakonec vzpomeňme dvou prací německého učence G. Fregeho (1848 až 1925), věnovaných ideografickému písmu: „Begriffsschrift" („Pojmové písmo") a „Grundgesetze der Arithmetik" („Základní zákony aritmetiky").

Z vysokých sfér vědy sestupme nyní do každodenního života. Kolik set tisíc dopisů se denně odesílá jen v jediné zemi a kolik ve všech zemích dohromady! Jaké množství papíru denně popíšeme! Nebylo by možno dosáhnout v této oblasti úspor? To je první otázka.

Druhá otázka: Nebylo by možno užívat k psaní dopisů takových znaků, kterým by rozuměly všechny národy; jinými slovy, neměli bychom uvažovat o vytvoření mezinárodního písma vyjadřujícího myšlenky a city obyčejného všedního dne?

Zdá se, že pro běžnou korespondenci stačí přibližně sto základních znaků, jimiž by bylo možno vyjádřit asi tisíc pojmů přidáváním teček či čárek s příslušným sestavováním základních znaků. Mezinárodní korespondenční psaný jazyk by mohl převzít všechny symboly užívané v matematice a v matematické logice a dát jim širší význam, než mají v uvedených disciplínách. Například znak + (plus) může znamenat nejen slovo „přičítat", ale také slova „a", „ano", „dohromady", „společně" apod. Podobně znak – (minus) může znamenat „ne", „zbytek", „bez" atd. Nejzávažnějším úkolem by byla volba základních symbolů, výběr co nejjednodušších ideogramů pro tyto symboly a určení významu doplňkových teček a čárek. Listy psané těmito ideogramy by adresáti četli ve svém rodném jazyku; byly by stručné a úsporné, nevyžadovaly by víc než 20 % papíru potřebného k napsání těchže dopisů v mateřském jazyku.

Čtenářům navrhujeme, aby se pro zábavu pokusili o vytvoření pazigrafického písma s použitím různých symbolů a zkratek, se kterými se setkáváme třeba ve školních učebnicích.

1. Mezi množstvím vědeckých oborů vytvořených člověkem je jeden, který se nazývá prostě věda. Touto vědou je matematika, neboť řecky matematika (mathematiké) znamená věda. Skutečný milovník matematiky vyslovuje její jméno s úctou ... a měl by vlastně klást přízvuk na třetí slabiku – mateMAtika – místo na první – MAtematika.

2. Matematika se může téměř úplně obejít beze slov. Neexistují pro ni jazykové přehrady, neboť její jazyk je jako řeč hudby – srozumitelný všem lidem na světě.

Univerzálním, zlatým klíčem matematiky je rovnice. Pomocí tohoto klíče odhalil Archimédes zpronevěru při výrobě koruny pro syrakuského krále. Tentýž klíč umožnil egyptským kněžím předpovědět zatmění Slunce i východ Siria. Používal ho Koperník, Galileo, Newton, Descartes, Einstein, ...

3. Po ovládnutí nejdůležitějších přírodních věd, fyziky a chemie, i ekonomických věd vstupuje matematika do oblastí, které se jí dříve neprodyšně uzavíraly: do oblasti humanitních věd a krásných umění, které vyzbrojuje dokonalejšími a objektivnějšími metodami poznání.

■ Mládí a matematika

Jsou lidé tvrdící, že matematika je „suchou" vědou, která se zabývá spekulacemi odtrženými od života a je vhodná jen pro dospělé. Nemůže zaujmout mládež, která se věnuje spíše takovým vědám, které nějak souvisí s přírodou nebo s cestováním (např. geografie), hovoří o osudech lidí a národů (např. historie) nebo o jevech, které nás obklopují nebo konečně se dotýkají věčných otázek existence a stavby vesmíru (biologie a astronomie). Je tomu opravdu tak? Asi ne, neboť i matematika může zajímat mládež, může se pro ni stát vzrušujícím zážitkem. Zde je několik příkladů:

B. Pascal (1623 – 1662) se zajímal o matematiku od dětství. Ve věku asi osmi let objevil a dokázal řadu Euklidových tvrzení. Když mu bylo šestnáct, napsal pojednání o kuželosečkách a ve věku dvaceti čtyř let objevil zákon o tlaku v kapalinách a vytvořil základy počtu pravděpodobnosti.

J. L. Lagrange (1736 – 1813) byl již jako osmnáctiletý profesorem na turinské univerzitě a o rok později formuloval obecnou teorii řešení perimetrických úloh.

P. S. Laplace (1749 – 1827) ve svých osmnácti letech přednášel na vojenské škole a ve dvaceti byl profesorem na vysoké škole v Paříži.

A. Cauchy (1789 – 1857) se stal inženýrem ve dvaceti jedna letech a uveřejnil znamenitou práci z oboru teorie čísel.

L. Euler (1707 – 1783), narozený ve švýcarské Basileji, byl obzvlášť zamilován do matematiky. Ve dvaceti letech byl již členem Akademie věd v Petrohradě (nynějším Leningradě), po třech letech pak profesorem fyziky a ve dvaceti šesti letech byl již profesorem matematiky na univerzitě v Petrohradě.

E. Galois (1811 – 1832) žil jen dvacet jedna let. Ve věku mezi šestnácti a osmnácti lety vypracoval základy toho odvětví algebry, jež bylo později nazváno Galoisovou teorií.

N. H. Abel (1802 – 1829), jeden z tvůrců základů teorie algebraických a eliptických funkcí, dokázal nemožnost řešení rovnic pátého a vyšších stupňů. Zemřel mlád, ve věku sotva dvaceti sedmi let.

■ Matematické úlohy

Řešení úloh není ve skutečnosti podstatou matematiky, ale těžko si dovedeme bez něho matematiku představit. A právě tím, že metoda matematického myšlení umožňuje řešit ty nejrozmanitější úlohy, stává se matematika přitažlivou. Úloha se zdá být tvrzí a dobytí této tvrze je odměnou vítězi.

Předložení a řešení některých úloh se často stalo základem důležité matematické disciplíny. Tak například úloha týkající se hry v kostky, kterou předložil Pascalovi jeden francouzský hazardní hráč, se stala základem teorie pravděpodobnosti; z úlohy nalézt velikost úhlu, který svírá tečna křivky v libovolném jejím bodě s osami souřadnic, se vyvinul diferenciální a integrální počet a použití tohoto počtu k řešení významných úloh předložených v roce 1687 J. Bernoullim (o brachystochroně čili křivce nejkratšího pádu hmotného bodu a o tzv. řetězovce) se přičinilo o uznání obou disciplín za mocné prostředky vědeckého bádání a přivedlo matematiky k jejich dalšímu rozvíjení, prohlubování a zdokonalování. Dá se říci, že matematika vznikla z úloh, které předkládal život a které bylo třeba řešit, aby lidstvo ovládlo přírodní síly.

■ Zábavné úlohy

Soutěž

Matematický kroužek na jedné škole se rozdělil na dvě družstva, která spolu soutěžila. Družstvo A předložilo družstvu B k řešení tyto dvě úlohy:

I. Podnik zahraničního obchodu poslal svému zástupci v Londýně šifrovaný dálnopis:

„Máme na skladě RUB PRÁCE krychlových metrů sosnových prken, RUDÁ PEC prken jasanových, ŘEPA dubových fošen a ČEPICE kusů překližek. Udržujte ceny. Na požádání můžeme zaslat také AEIU krychlových metrů dubových hranolů."

Zástupce PZO znal klíč k rozšifrování zpráv ředitelství. Vy jej máte nalézt z následujících údajů:

1. Klíčem je slovo o devíti písmenech.

2. Písmena toho slova nahraďte číslicemi od 1 do 9.

3. Každé písmeno znamená jinou číslici.

4. Slovo složíte z počátečních písmen slov, která musíte uhádnout z následujících výrazů:

a) Vlastnost trigonometrických funkcí.

b) To, co se nedokazuje (v řeckém znění).

c) Číslo, které je podílem dvou celých čísel. (Jak se nazývá?)

d) To, co měříme na přímce nebo na křivce.

e) Spojnice protějších vrcholů mnohoúhelníku.

f) Český matematik první poloviny XIX. století.

g) Metoda usuzování, která od speciálních, konkrétních poznatků vede k obecným závěrům, k formulaci zákonů.

h) Italský matematik z doby renesance, spoluobjevitel vzorce pro řešení jednoho typu kubické rovnice. Byl také filozof, astrolog a lékař.

i) Jedna z kuželoseček.

Z počátečních písmen rozluštění hádanek utvořte slovo, které je klíčem šifry. Napište úplný text rozšifrované zprávy. (Čárky a háčky nad písmeny nemění jejich význam.)

II. Zde je druhá úloha, kterou družstvo A předložilo družstvu B:

Z obcí M a N, ležících na téže silnici, vyšli současně dva chodci. Ten, který vyšel z M, šel průměrnou rychlostí v km/h, druhý, který vyšel z N, šel průměrnou rychlostí w km/h. Od okamžiku, kdy se setkali, šel první chodec do N ještě 25 hodin, zatímco druhý přišel do M za 16 hodin.

Kolik času potřeboval každý z nich na cestu z M do N (z N do M)?

Družstvo B pak poslalo družstvu A tyto „odvetné" úlohy:

I. Z osmi slov, jejichž význam je popsán v dalších odstavcích, vezměte první písmena a sestavte z nich slovo (cizí), jehož původ a význam máte vysvětlit. Potom ... ale nejdřív uhádněte ta slova.

1. Velký matematik, fyzik a inženýr starověku, Řek. Bojoval proti Římanům. Jak se jmenoval?

2. Znal a používal jich již Ahmes, Diofantos, Muhammad ibn Musa al-Chvárizmí. Nemůže se jim vyhnout žádný žák gymnázia. Mnoho jich nad nimi prosedí celé hodiny. Co je to?

3. Země, která je vlastí matematických znaků, používaných dnes po celém světě jak vědci, tak i prostými lidmi.

4. Italský matematik, který vedl ostrý spor se svým krajanem, matema-

tikem Cardanem, o prvenství jednoho objevu. (Jak se jmenoval?)

5. Krychle má 6 stěn, 8 vrcholů a 12 hran. Jedno z čísel 6, 8, 12 je průměrem ostatních dvou. Jak se nazývá tento průměr?

6. Část logaritmu: je vždy kladná nebo rovna nule.

7. Bod v trojúhelníku, v němž se protínají všechny tři výšky trojúhelníku. Jak se nazývá?

8. Významný polský matematik, specialista v oboru teorie množin a teorie čísel. (Jeho příjmení.)

A nyní druhá část úlohy. Odpovědi na předchozích osm otázek musíte ještě doplnit podle pokynů uvedených v následujících bodech:

1. Kdy žil onen matematik, v jaké válce bojoval a jak zemřel?

2. Kdy a kde žili Ahmes, Diofantos a Muhammad ibn Musa?

3. Kde leží ta země? Co o ní víš?

4. O jaký spor a jaký objev šlo?

5. Také z převrácených hodnot čísel 6, 8, 12 je jedna průměrem druhých dvou. Jak se ten průměr nazývá?

6. Jaké druhy logaritmů znáte a jaký je mezi nimi vztah?

7. Jaké jsou jiné významné body v trojúhelníku?

8. Kdy žil tento matematik?

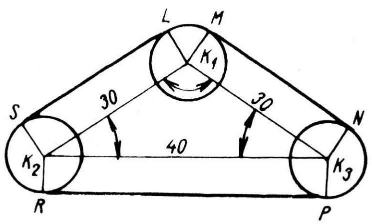
II. A zde je druhá úloha předložená družstvem B:

Čtyři chlapci, Antonín, Bedřich, Cyril a Dalibor, a čtyři děvčata, Eva, Františka, Gabriela a Hana, jsou všichni – chlapci i děvčata – zamilováni, ale (kupodivu) všichni nešťastně: jejich vyvolení (a vyvolené) jejich cit nesdílejí. Antonín miluje děvče, které miluje chlapce zamilovaného do Evy. Františku miluje chlapec, do něhož je zamilována dívka milovaná Bedřichem. Cyril miluje dívku, která miluje Dalibora.

Jestliže Bedřich není milován Gabrielou a chlapec, který je milován Hanou, není zamilován do Gabriely, určete, které děvče je zamilováno do Antonína.

Délka převodového pásu

Převodové zařízení se skládá ze tří stejných kol K_1, K_2, K_3 o obvodu 10 dm (každé z nich) a z převodového pásu, který je na kola pevně napjat (obr. 258).



Obr. 258

Vzdálenost mezi středy kol K_1 a K_2 je 30 dm a je stejná jako vzdálenost středů kol K_1 a K_3; vzdálenost mezi středy kol K_2 a K_3 je 40 dm.

Jaká je délka převodového pásu?

Lunar

V měsíčníku „Scientific American", v oddíle Matematické zábavy, byl uveřejněn tento zábavný problém:

V knížce anglického spisovatele Wellse (1886–1946) „První lidé na Měsíci" čteme, že Měsíc byl obydlen jakýmsi inteligentním hmyzem, který žil v jeskyních pod povrchem Měsíce. Tito tvorové zřejmě dovedli měřit a měli nějakou jednotku délky. Nazývejme ji třeba „lunar". Vyjádříme-li v krychlových lunarech objem Měsíce, rovná se přesně jeho povrchu vyjádřenému v týchž jednotkách (čtverečných).

Kolik metrů je lunar, jestliže poloměr Měsíce je $r = 1\,728$ km?

Bílá káva

Mám šálek černé kávy. Nejdřív vypiji šestinu kávy a doliji šálek mlékem, aby byl plný. Pak vypiji třetinu nápoje a opět doliji mlékem, aby šálek byl plný. Do třetice vypiji polovinu nápoje a po třetí doplním šálek mlékem. A konečně vypiji šálek až do dna.

Přede mnou stojí prázdný šálek a já přemýšlím, čeho jsem vlastně vypil víc: kávy či mléka? A kolik jsem vypil celkem kávy a kolik mléka?

Dva řetízky

Klenotník měl jistý počet stříbrných kroužků. Síla každého kroužku v průřezu byla 0,5 mm. Klenotník vyrobil z kroužků dva řetízky: jeden dlouhý 32 cm 6 mm a druhý 42 cm 6 mm.

Kolik kroužků měl klenotník, jestliže na delší řetízek potřeboval o 40 kroužků víc než na kratší?

■ Řešení úloh

Soutěž

I. a) Periodičnost, periodicita. b) Axióm. c) Racionální. d) Délka. e) Úhlopříčka. f) Bolzano. g) Indukce. h) Cardano. i) Elipsa.

Z počátečních písmen těchto slov dostaneme klíč šifry – Pardubice.

II. Označme t h dobu, po kterou šli oba chodci až do okamžiku setkání. Vzdálenost obcí M a N lze pak vyjádřit trojím způsobem:

$(t + 25)\,v = MN;$
$(t + 16)\,w = MN;$
$(v + w)\,t = MN.$

Z první a třetí rovnice máme

$(t + 25)\,v = (v + w)\,t;$
$tv + 25v = tv + wt;$
$25v = wt,$
odkud $t = 25v/w.$

Z druhé a třetí rovnice máme

$(t + 16)\,w = (v + w)\,t;$
$tw + 16w = tv + wt;$
$16w = tv,$ odkud $t = 16w/v.$

Porovnáme-li obě vyjádření t, dostaneme

$$\frac{25v}{w} = \frac{16w}{v}; \quad \frac{25}{16} = \frac{w^2}{v^2}; \quad \frac{w}{v} = \frac{5}{4}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do prvního vyjádření t, dostaneme

$$t = \frac{25 \cdot 4}{5} = 20.$$

První chodec došel z M do N za $25 + 20 = 45$ hodin, druhý z N do M za $16 + 20 = 36$ hodin.

I. 1. Archimédes. 2. Rovnice. 3. Indie. 4. Tartaglia. 5. Harmonický. 6. Mantisa. 7. Orthocentrum. 8. Sierpiński. Dostaneme řecké slovo „arithmos"; znamená číslo.

1. Archimédes žil asi 287–212 př. n. l., bojoval proti Římanům v Syrakusách a podle pověsti byl zabit římským vojákem, když řešil nějaký geometrický problém. 2. Ahmes žil asi 2000–1700 př. n. l., Diofantos ve 3. nebo 4. století a Muhammad ibn Musa v 9. století. 3. Indie leží v jihovýchodní Asii na Indickém poloostrově. 4. Tartaglia se dostal do sporu s Cardanem v otázce priority objevu vzorce k řešení kubické rovnice. 5. Aritmetický průměr: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}$. 6. Užívají se ještě tzv. přirozené logaritmy, jejichž základem je číslo e = 2,718 218 … . Vztahy mezi desetinnými a přirozenými logaritmy:

a) $N = 10^x$; $x = \log_{10} N$;

b) $N = e^y$; $y = \log_e N$;

$10^x = e^y$; $\log_{10}(10^x) = \log_{10}(e^y)$;

$x = y \log_{10} e$;

c) $y = \dfrac{x}{\log_{10} e} = \dfrac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$;

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}.$$

7. Střed kružnice vepsané, střed kružnice opsané, těžiště.

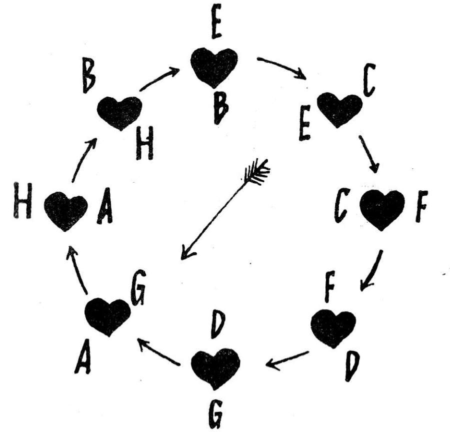
8. Václav Sierpiński se narodil v roce 1882 a zemřel 1969.

II. Nechť symbol $x \to y$ znamená „x miluje y" a symbol $x \not\to y$ znamená „x nemiluje y". Máme tedy tuto situaci:

i. $A \to ? \to ? \to E \to ?$,
ii. $B \to ? \to ? \to F \to ?$,
iii. $C \to ? \to D$,
iv. $G \not\to B$,
v. $H \to ? \not\to G$.

Podmínka, že u žádné dvojice neexistuje vzájemný milostný vztah, nás vede k závěru, že může nastat buď případ jednoho uzavřeného kruhu zahrnujícího všech osm osob, nebo dvou kruhů, z nichž každý zahrnuje čtyři osoby.*) Předpokládejme nejdřív, že nastává druhý případ. Protože C a D jsou v témž kruhu (podmínka ***iii***), musí být A i B oba v druhém kruhu. Pak $A \to F \to B \to E \to A$. Protože však G i H patří do jednoho kruhu, není možné splnit podmínku ***v***. Z toho plyne, že všech osm osob tvoří jediný uzavřený kruh. Přitom Evu nemiluje Antonín (podmínka ***i***) ani Dalibor (podmínka ***iii*** ve spojení s ***i***) ani Cyril (podmínka ***v*** ve spojení s ***iv***). Evu tedy miluje Bedřich.

Tento závěr nám umožňuje doplnit celý kruh: Antonín miluje Hanu, Hana miluje Bedřicha, Bedřich miluje Evu, Eva miluje Cyrila, Cyril miluje Františku, Františka miluje Dalibora, Dalibor miluje Gabrielu, Gabriela miluje Antonína. A to je odpověď: Antonína miluje Gabriela.



Délka převodového pásu

Z obr. 258 je vidět, že délka přímých částí pásu $MN = LS = 30$ dm, zatímco $PR = 40$ dm. Protože platí

$\measuredangle K_1 + \measuredangle K_2 + \measuredangle K_3 = 180°$,

je

$\measuredangle MK_1L + \measuredangle NK_3\dot{P} + \measuredangle SK_2R =$
$= (360° = 2 \cdot 90° - \measuredangle K_1) +$
$+ (360° - 2 \cdot 90° - \measuredangle K_2) +$
$+ (360° - 2 \cdot 90° - \measuredangle K_3) =$
$= 3 \cdot 360° - 3 \cdot 180° -$
$- (\measuredangle K_1 + \measuredangle K_2 + \measuredangle K_3) =$
$= 3 \cdot 360° - 4 \cdot 180° = 360°.$

Délka pásu je tedy
$l = (30 + 30 + 40 + 10)$ dm $=$
$= 110$ dm.

Lunar

Porovnáním vzorce pro objem koule se vzorcem pro její povrch dostaneme rovnici $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$. Dělíme-li obě strany rovnice číslem $4\pi r^2$, dostaneme $r = 3$ (měsíční jednotky) čili $r = 3$ lunary. Odtud 1 lunar = 1 728 km : 3 = = 576 km = 576 000 m.

Bílá káva

Vypil jsem šálek kávy (černé) a $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ šálek mléka.

*) Kruhy musí zahrnovat vždy sudý počet osob (musí v nich být střídavě vždy jeden chlapec a jedna dívka). Kruh skládající se jen ze dvou osob – chlapce a dívky – je podmínkami úlohy vyloučen; tím je vyloučen i kruh zahrnující šest osob. (Pozn. překl.)

Dva řetízky

Rozdíl délek řetízků je 42,6 cm − − 32,6 cm = 10 cm. Délka vnitřního průměru kroužku je tedy 10 cm : 40 = = 0,25 cm = 2,5 mm.

Odečteme-li od délky každého řetízku tloušťku prvního a posledního kroužku (0,5 mm + 0,5 mm = 1 mm), zjistíme, kolika kroužků užil klenotník na jednotlivé řetízky:

$$\frac{32\text{ cm }5\text{ mm}}{2{,}5\text{ mm}} = 130,$$

$$\frac{42\text{ cm }5\text{ mm}}{2{,}5\text{ mm}} = 170$$

kroužků. Klenotník měl celkem 300 kroužků.

Kapitola 33 **Intuice a úsudek**

Kromě matematiky neexistuje žádná spolehlivá věda až na tu, která je z matematiky odvozena.
ROBERT RECORDE (1510–1558)

Věda o přírodních zákonech se opírá o pozorování a vnímání. Z pozorování vzniká intuice, která pomáhá vytvářet hypotézy a řešit mnohé problémy. Avšak intuitivní řešení není vždy správné. Zde je příklad chybného úsudku na základě intuice, podaný americkým matematikem Morrisem Klinem v knize „Matematika a svět“; uvádíme jej v „počeštěné“ verzi:

Jistý mladý muž dostane dvě nabídky zaměstnání: závod *A* mu nabízí plat 18 000 Kčs ročně a zvýšení platu v každém dalším roce o 2 000 Kčs. Také závod *B* nabízí nástupní plat 18 000 Kčs a zvýšení o 500 Kčs v každém dalším pololetí.

Která z obou nabídek je výhodnější?

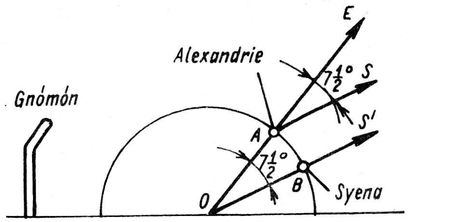
Intuice napovídá, že výhodnější je první nabídka, neboť nabízí roční zvýšení o 2 000 Kčs, zatímco druhá poskytuje pololetní zvýšení 500 Kčs, tedy ročně 1 000 Kčs. V tomto případě však intuice vede k chybnému závěru.

Podívejme se na tabulku částek, které by závody *A* a *B* vyplatily v každém pololetí svému novému zaměstnanci.

Rok	I		II		III		IV		V	
Pololetí	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
A	9 000	9 000	10 000	10 000	11 000	11 000	12 000	12 000	13 000	13 000
B	9 000	9 500	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000	12 500	13 000	13 500

Z této tabulky vidíme, že závod *B* vyplácí v každém sudém pololetí o 500 Kčs víc než závod *A*. Je tedy jeho nabídka výhodnější.

Existují problémy, v nichž můžeme použít intuice v omezené míře, ale celá váha řešení spočívá na matematickém usuzování. Uveďme velmi starý příklad matematické úvahy, kterou provedl slavný řecký učenec, astronom, geograf, historik a matematik Eratosthenes (275 – 194 př. n. l.). Patřil k těm nečetným filozofům, kteří věřili, že Země je kulatá, a rozhodl se najít obvod zeměkoule. Jako zeměpisec věděl Eratosthenes, že Alexandrie (město, v němž žil) leží na sever od Syeny (dnešní Asuán) a že vzdálenost mezi těmito městy je (v přepočtu na dnešní jednotky) 750 km.



Obr. 259

V poledne v den letního slunovratu dopadají sluneční paprsky v Syeně kolmo na povrch zemský. To znamená (podle Eratosthena), že Slunce je v tom okamžiku přesně v zenitu, na svislé přímce OBS' (obr. 259). V témže okamžiku mají sluneční paprsky v Alexandrii směr přímky AS, svírající se svislým směrem úhel EAS. Protože Slunce je od nás velmi daleko, předpokládáme, že jeho paprsky jsou rovnoběžné ($AS \parallel BS'$). Odtud plyne $\sphericalangle\, EAS = \sphericalangle\, AOB$. Pomocí gnómónu vypočetl Eratosthenes $\sphericalangle\, EAS = \left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ}$. Tedy také $\sphericalangle\, AOB = \left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ}$; tento úhel odpovídá oblouku AB. Protože celému zemskému obvodu odpovídá úhel 360°, je oblouk příslušný ke středovému úhlu $\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ roven $7\frac{1}{2} : 360 = \frac{1}{48}$ zemského obvodu. Jestliže $\frac{1}{48}$ obvodu Země měří 750 km, měří celý obvod $750\ \text{km} \cdot 48 = 36\,000\ \text{km}$. To je na tehdejší dobu velmi přesný výsledek. Dnešní měření udávají délku poledníku asi 40 000 km.

Jak vidíme z tohoto příkladu, nelze matematické myšlení nahradit ani hádáním, ani intuicí. Již citovaný Morris Kline říká o matematice:

„Hlavní příčinou rozvoje matematiky je její použití ke studiu přírody. Matematické pojmy i matematické metody poznání jsou nejúčinnějším prostředkem výzkumu a vysvětlení pohybu nebeských těles, pohybu těles na Zemi a v její blízkosti, světelných, zvukových, tepelných a elektrických jevů, elektromagnetických vln, stavby hmoty, chemických reakcí, stavby oka, ucha i jiných orgánů lidského těla a mnoha set jiných důležitých jevů.“

Je možno se ptát, proč zkoumáme přírodu. Snad jen proto, abychom měli bohatší úrodu, vyráběli stále lepší ocel, dokonaleji řídili námořní i vzdušnou dopravu, používali stále rychlejších prostředků spojení?

Nejen to!

Existují lidé, kteří hledají odpověď na otázky: Jak vznikl vesmír? Proč se rodí člověk? Jak vzniká světlo a jaká je jeho podstata? Existuje ve sluneční soustavě systém a organizace? „Jsou lidé (říká Kline), jejichž mysli jsou si vědomy zázraků přírody a kteří touží po poznání přírody stejně vášnivě, jako byznysmeni touží po majetku.“

Říká se, že matematika pracuje s abstrakcemi a že je vzdálena skutečnému světu. Tento názor je správný jen do jisté míry. Matematika nemá monopol na abstrakci. I fyzikální pojmy jsou abstraktními obrazy svých vzorů z hmotného světa. I když matematik vytváří stále složitější abstraktní pojmy, je třeba připomenout, že abstrakce, kterých matematici používají, jsou odvozeny z pozorování přírodních jevů, a proto jsou pochopitelné.

■ Hanojská věž

Hanojskou věží se nazývá hra, kterou vynalezl francouzský matematik 19. století E. Lucas. Publikoval ji pod vymyšleným jménem Claus a přikrášlil ji exotickou pověstí, která nepostrádá matematického půvabu. Snadno si domyslíme, že „Claus“ je anagramem jména Lucas, vzniklým přehozením písmen l, u, c, a, s.

Podle Lucasovy báje umístil stvořitel světa Brahma pod kupolí největší svatyně ve městě Benares nad svatou řekou Gangou bronzovou desku s připevněnými třemi diamantovými hůlkami. Na jedné hůlce jsou navlečeny 64 kroužky. Největší je dolní kroužek, nejmenší horní. Průměr kroužků se rovnoměrně zmenšuje od dolního k hornímu. Brahma přikázal kněžím, aby přemístili všechny kroužky na třetí hůlku při zachování těchto pravidel:

1. je možno přenášet vždy jen jediný kroužek;

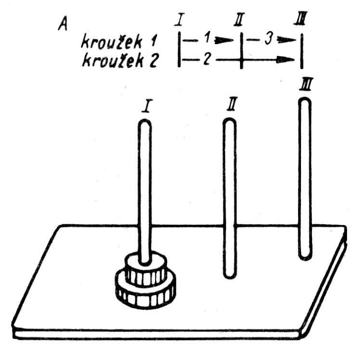
2. přenesené kroužky se smějí umístit jen tak, aby menší ležel na větším;

3. druhou hůlku je dovoleno používat jako pomocnou, ale i na ní musí vždy ležet menší kroužek na větším.

Až kněží přemístí všechny kroužky z první hůlky na třetí, nastane konec světa.

Jak dlouho bude existovat náš svět? Kolik let bude trvat přenášení kroužků?

Abychom si ujasnili, kolik času si vyžádá přenesení kroužků z první hůlky na třetí při zachování uvedených tří pravidel, použijeme metody usuzování, která se nazývá *indukce* a umožňuje dojít k obecnému závěru na základě jednotlivých faktů.



Obr. 260

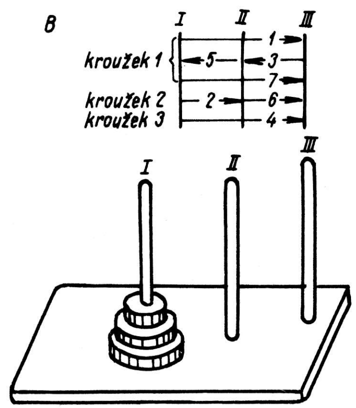
Nechť na hůlce *I* (obr. 260) jsou dva kroužky. Jejich přemístění z hůlky *I* na hůlku *III* je znázorněno na diagramu A (čísla u šipek udávají pořadí kroků).

Z diagramu A je vidět, že dva kroužky je možno přemístit z hůlky I na hůlku III třemi kroky; kroužek 1 se přenáší dvakrát, kroužek 2 jednou: zapíšeme to ve tvaru

$$2^1 + 2^0 = 2 + 1 = 3.$$

Nyní mějme na hůlce I 3 kroužky (obr. 261). Diagram B ukazuje, kolik kroků musíme vykonat, abychom přenesli 3 kroužky z hůlky I na hůlku III.

Z diagramu B je vidět, že



Obr. 261

kroužek 1 se přenáší 4krát, tj. 2^2 přemístění,
kroužek 2 se přenáší 2krát, tj. 2^1 přemístění,
kroužek 3 se přenáší 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^2 + 2^1 + 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$ přemístění.

Přemístění 4 kroužků z hůlky I na na hůlku III (obr. 262) znázorňuje diagram C:

kroužek 1 se přenáší 8krát, tj. 2^3 přemístění,
kroužek 2 se přenáší 4krát, tj. 2^2 přemístění,
kroužek 3 se přenáší 2krát, tj. 2^1 přemístění,
kroužek 4 se přenáší 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$ přemístění.

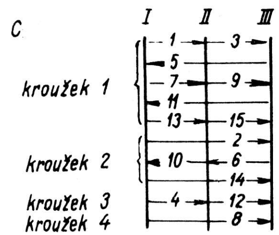
Obdobně zjistíme, že k přemístění 5 kroužků z hůlky I na hůlku III je nutno

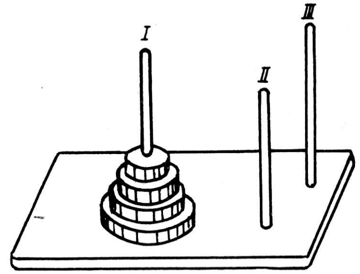
kroužek 1 přenést 16krát, tj. 2^4 přemístění,
kroužek 2 přenést 8krát, tj. 2^3 přemístění,
kroužek 3 přenést 4krát, tj. 2^2 přemístění,
kroužek 4 přenést 2krát, tj. 2^1 přemístění,
kroužek 5 přenést 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$ přemístění.

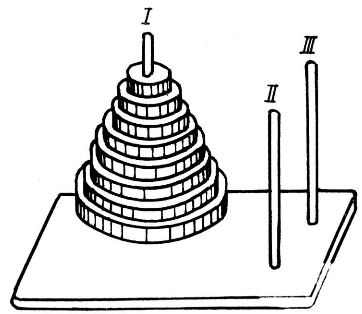
Na základě indukce můžeme usoudit, že k přenesení 64 kroužků z hůlky I na hůlku III je třeba vykonat

$$2^{63} + 2^{62} + 2^{61} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$$
$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \text{ přemístění kroužků.*)}$$





Obr. 262



Obr. 263

Kdyby každé přemístění kroužku trvalo jen jednu sekundu, bylo by na přemístění 64 kroužků třeba asi pět miliard století. Naše planeta Země existuje pravděpodobně asi 10 miliard let čili asi 0,1 miliardy století. Můžeme tedy klidně spát; soudný den je ještě velmi, velmi daleko.

Ve hře, kterou Lucas nazval Hanojskou věží, je na první hůlce jen osm kroužků (obr. 263). Pro nás je i tento počet kroužků příliš velký, neboť při osmi kroužcích je počet potřebných kroků roven $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 255$.

Na 255 tahů nemá každý čas. Omezme se tedy na šest kroužků. Kroužky nemusí být ze zlata, ale z lepenky, hůlky z tvrdého drátu, deska může být kousek překližky. Poloměry kroužků nechť

*) Jde zde o tzv. neúplnou indukci, která není matematickou metodou důkazu a může vést i k chybným závěrům, má však přesto značný heuristický (badatelský) význam. Výsledky této kapitoly lze ověřit tzv. matematickou (úplnou) indukcí, s níž se seznámíme v kap. 35. (Pozn. překl.)

jsou (odshora dolů) 2 cm, 2,5 cm, 3 cm, 3,5 cm, 4 cm a 4,5 cm. Budeme muset vykonat $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63$ přemístění.

Kroužek *1* musíme přemístit 32krát, tj. 2^5 přemístění,
kroužek *2* musíme přemístit 16krát, tj. 2^4 přemístění,
kroužek *3* musíme přemístit 8krát, tj. 2^3 přemístění,
kroužek *4* musíme přemístit 4krát, tj. 2^2 přemístění,
kroužek *5* musíme přemístit 2krát, tj. 2^1 přemístění,
kroužek *6* musíme přemístit 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63$ přemístění.

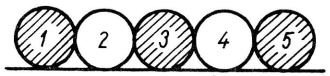
■ Zábavné úlohy

Přesouvání kotoučů

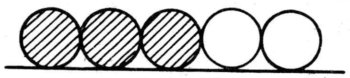
V americkém vědeckém měsíčníku „Scientific American" jsme nalezli drobnou, ale nikoli snadnou úlohu s černými a bílými kotoučky. Zde je:

Máme změnit pořadí pěti kotoučků, které jsou v poloze znázorněné na obr. 264, tak, aby se dostaly do polohy, kterou ukazuje obr. 265.

Přesouvání se musí provádět dvěma prsty, ukazovákem a prostředníkem, které položíme na dva sousední dotýkající se kotoučky, přičemž jeden z nich musí být černý a druhý bílý. Dvojici kotoučků přesuneme na jiné místo a umístíme je na čáře, která je na obrázcích. Oba kotoučky se musí stále dotýkat. Kotouček, který byl původně nalevo, musí zůstat nalevo; kotouček, který byl napravo, musí zůstat napravo. Přesouváním se mohou v řadě kotoučků tvořit mezery, které tam mohou zůstat i po dokončení některého kroku. Samozřejmě, že po posledním přesunu nemusí být kotoučky v téže poloze na narýsované čáře jako na začátku.



Obr. 264



Obr. 265

Poznámka. Kdyby bylo dovoleno přesouvat také dvojice kotoučků stejné barvy, bylo by možné hlavolam rozřešit třemi tahy. Uvažte i tento případ.

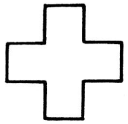
Červený kříž

Znakem Československého červeného kříže je kříž znázorněný na obr. 266. Tento kříž je současně geometrickým obrazcem, který nám poslouží k užitečné zábavě.

a) Dvěma řezy rozděl kříž na čtyři části a z nich slož čtverec.

b) Dvěma řezy rozděl kříž na čtyři shodné části a z nich slož čtverec.

c) Čtyřmi řezy rozděl kříž na pět částí a z nich slož čtverec.



Obr. 266

Neméně zajímavá je přeměna dvou křížů na jeden čtverec stejného obsahu. Obtížnější jsou změny v opačném směru: změna čtverce na kříž nebo jiný obrazec. V technice i řemesle se nejčastěji setkáme právě s takovými úlohami: vyříznout ze čtvercového plátu plechu kříž tak, aby nevznikl žádný odpad. Taková úloha je zvláště důležitá, je-li materiál drahý.

■ Řešení úloh

Přesouvání kotoučů

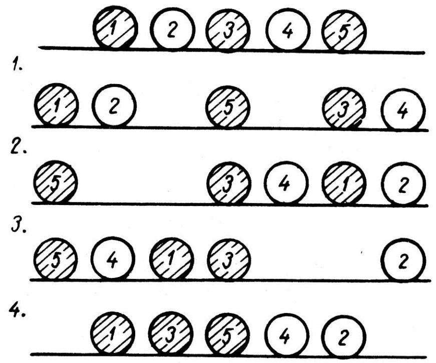
Hlavolam s bílými a černými kotoučky lze rozřešit čtyřmi tahy (obr. 267):

1. Přesuneme kotoučky 3 a 4 vpravo od 5, ale oddělíme je od kotoučku 5 mezerou, do níž se vejdou dva kotoučky.

2. Přesuneme kotoučky 1 a 2 vpravo od kotoučků 3 a 4 tak, aby se kotoučky 4 a 1 dotýkaly.

3. Přesuneme kotoučky 4 a 1 do mezery mezi kotoučky 5 a 3.

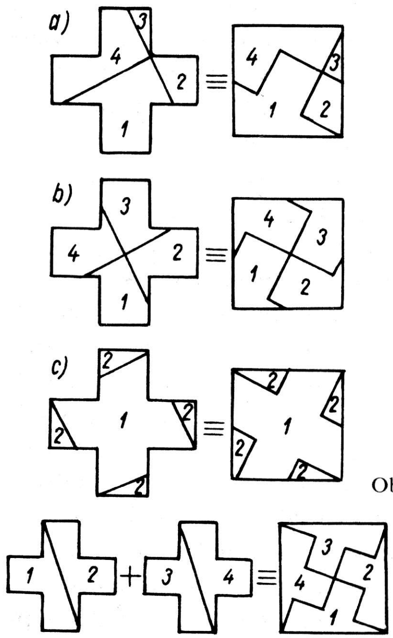
4. Přesuneme kotoučky 5 a 4 do mezery mezi kotoučky 3 a 2.



Obr. 267

Červený kříž

Řešení je na obr. 268.



Obr. 268

S abstrakcí se setkáváme již na nejnižším stupni matematické vědy, v aritmetice. Německý matematik L. Kronecker (1823–1891) řekl, že celá čísla stvořil dobrý Bůh, ale vše ostatní člověk. Když už bychom Pánu Bohu přiznali tuto zásluhu, stejně by Kroneckerův výrok nebyl úplně přesný. Pračlověk se mohl setkat jen s počty věcí – s *čísly pojmenovanými*; mohl říkat: ulovil jsem pět zajíců, snědl jsem dvě vajíčka nebo tři houby.

K abstrakci čísla od věci či předmětu došlo až mnohem později. Významný řecký filozof Platón považoval čísla za abstraktní pojmy osvobozené od jakýchkoli hmotných asociací, za ideje. Dnes je číslo v matematice abstraktním pojmem.

V každodenním životě se setkáváme ještě s jedním důležitým abstraktním pojmem: s nulou. Mnozí z nás ztotožňují nulu s pojmem „nic". Avšak nula vůbec neznamená totéž co nic. Nemá-li někdo běžný účet, nemůže jeho stav být roven nule, ale je „nic". Naproti tomu, má-li někdo běžný účet, může být stav tohoto účtu roven nule. V matematice představuje nula velmi důležitý pojem. Provádíme s ní všechny aritmetické operace s výjimkou dělení nulou. Bez nuly bychom nemohli napsat našimi číslicemi čísla větší než devět, např. 10, 102, 1 250 atd. Díky nule mohla vzniknout poziční soustava zápisu čísel a díky této poziční soustavě můžeme dokonce i pomocí jediné číslice zapsat nekonečně mnoho čísel: 5, 55, 55 555, ... atd.

Protože číslo v matematice je abstraktním pojmem, bylo možno rozšířit obor čísel celých a racionálních a zavést čísla záporná $(-1, -10, \ldots)$, iracionální $(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \ldots)$, komplexní $(2 + \mathrm{i}, 2 - \mathrm{i}, \ldots)$ a jiná.

Bylo také možno zavést označení čísel písmeny $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

■ Zábavné úlohy

Na výhybce

Na jednokolejné trati, právě u opravované vedlejší koleje, se potkaly dva vlaky tažené lokomotivami B a C (obr. 269).

Obr. 269

Jak se vlaky vyhnuly, jestliže se na vedlejší kolej, která se opravuje, dají umístit nejvýše dva vagóny s lokomotivou? (Každý vlak se skládá z lokomotivy a čtyř vagónů.)

Jak se dostali na druhou stranu?

Dva chodci přišli společně k řece. U břehu kotvila plachetnice, na níž se mohl převézt na druhý břeh jen jeden člověk. Chodci se na ní přepravili na druhý břeh, nechali loďku na původním místě a šli dál. Řeka byla široká, chodci neměli ani lano, ani jiné pomůcky.

Jakým způsobem se přepravili přes řeku?

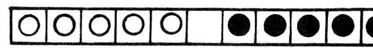
Ještě jednou na druhý břeh

Dva přátelé šli na výlet a každý z nich vzal s sebou svého syna. Cestou museli překonat řeku na přenosné loďce, která unese jen 100 kg. Každý z přátel váží i s batohem 100 kg, každý z chlapců právě polovinu.

Jak se dostali všichni přes řeku?

Lucasova úloha

Bílé a černé kameny jsou postaveny tak, jak je ukázáno na obr. 270. Bílé kameny se mají přemístit na pole černých kamenů, černé na pole bílých. Bílé kameny se smějí pohybovat jen napravo, černé jen nalevo. Přitom každý kámen se smí posunout na sousední volné pole nebo na volné pole nacházející se za nejbližším kamenem opačné barvy (tj. přeskočit sousední kámen opačné barvy, pokud je hned za ním volné pole): bílý kámen na volné pole za černým kamenem, černý na volné pole za bílým kamenem.



Obr. 270

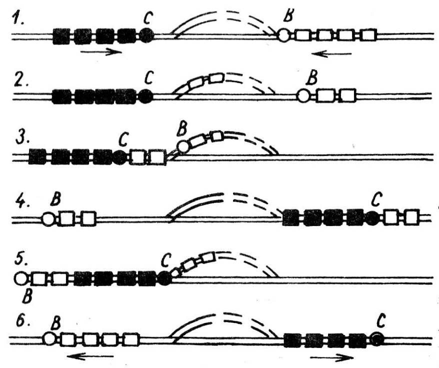
Pokuste se o to! Kolik tahů je k tomu potřeba?*)

■ Řešení úloh

Na výhybce

Řešení je ukázáno na obr. 271.

1. Lokomotiva B zajela na vedlejší kolej, nechala tam dva vagóny a vrátila se na původní místo na hlavní koleji; lokomotiva C popojela zpátky, aby lokomotivě B uvolnila místo (poloha 2).



Obr. 271

*) Jestliže se vám nepodaří úlohu rozřešit, pokuste se o jednodušší případ s osmi kameny (čtyři bílé a čtyři černé) nebo i se šesti. (Pozn. překl.)

2. Lokomotiva C vjela na vedlejší kolej, připojila dva vagóny, které tam zanechala lokomotiva B, a vrátila se ke svým vagónům; na uvolněnou vedlejší kolej vjela lokomotiva B se zbývajícími dvěma vagóny (poloha 3).

3. Lokomotiva C přesune svoje čtyři vagóny i dva vagóny druhého vlaku po uvolněné hlavní koleji vpravo. Na uvolněné místo vjede z vedlejší koleje lokomotiva B se zbývajícími vagóny (poloha 4).

4. Lokomotiva C přesune svoje čtyři vagóny i dva vagóny druhého vlaku vlevo po hlavní koleji; pak odtlačí dva vagóny druhého vlaku na vedlejší kolej (poloha 5).

5. Lokomotiva C se vrací pro svoje vagóny a odjíždí po hlavní koleji vpravo; lokomotiva B připojí na vedlejší koleji své dva vagóny a odjíždí vlevo (poloha 6).

Vlaky se vyhnuly a mohou pokračovat v jízdě.

Jak se dostali na druhou stranu?

První chodec se převezl na druhý břeh, pak vytáhl plachetnici kousek proti proudu řeky a nastavil plachtu a kormidlo tak, že plachetnice se sama vrátila na původní místo. Druhý chodec, když se převezl na druhý břeh, udělal totéž.

Ještě jednou na druhý břeh

Na druhý břeh se převezou oba chlapci, jeden z nich se s loďkou vrátí. Převeze se jeden z přátel a druhý syn vesluje zpět. Znovu se přeplaví oba chlapci a znovu se jeden z nich vrátí. Pak se převeze druhý přítel a druhý syn se vrátí s loďkou. Nakonec se na druhý břeh přeplaví oba chlapci.

Lucasova úloha

K přesunutí kamenů je potřeba 35 tahů. Jejich pořadí můžeme zapsat takto: *b, č, č, b, b, b, č, č, č, č, b, b, b, b, b, č, č, č, č, č, b, b, b, b, b, č, č, č, č, b, b, b, č, č, b.**)

*) Všimněte si, že uvedené řešení je jediné (pokud první tah uděláme bílým kamenem) v tom smyslu, že v každé situaci je uvedený tah jediný správný a každý jiný vede do „slepé uličky". (Pozn. překl.)

Indukcí rozumíme takovou metodu uvažování, kdy od zvláštního, speciálního tvrzení dospíváme k tvrzení obecnému. Uveďme příklad:

1. Kousek železa ponořený do vody ztratil na hmotnosti; váží méně, než vážil před ponořením do vody (tvrzení zvláštní).

2. Každé těleso ponořené do vody váží méně než před ponořením (tvrzení obecné).

Tvrzení 2 odvozené z tvrzení 1 je správné, ale nebývá tomu tak vždy. Příklad:

1. Sklenice, kterou držím v ruce, praskla, když jsem do ní nalil vroucí vodu.

2. Každá sklenice praskne, naplním-li ji vroucí vodou.

V tomto příkladě obecné tvrzení je nesprávné, neboť existují sklenice ze speciálního skla, které nepraskou ani při nejrychlejším naplnění vroucí vodou.

Indukce je nejobvyklejším, každodenním způsobem uvažování. Jak se vyhnout chybnému úsudku na základě indukce? V životě se učíme chybnému úsudku předcházet mnohonásobným opakováním indukčního děje, tedy životní zkušeností.

Ve vědě, kde se metody indukce používá velmi široce, se vyhneme chybným závěrům zdokonalením obyčejné indukce doplňující úvahou. Spočívá v ověření, že je-li jistý závěr správný pro 1, 2, 3, … případy, předpokládáme, že je správný pro k případů, a dokážeme, že z jeho správnosti pro k případů plyne jeho správnost pro případ $k + 1$. Tuto metodu usuzování nazýváme *úplnou* nebo *matematickou indukcí.**) Závěry, k nimž dospěli i ti nejvýznamnější matematici bez použití matematické indukce, se nejednou ukázaly jako chybné. Zde jsou příklady.

1. Význačný matematik Leonard Euler (1707–1783) tvrdil, že trojčlen $x^2 + x + 41$ nabývá prvočíselných hodnot při dosazení jakéhokoli přirozeného čísla za x. Skutečně, dosadíme-li za x po řadě 1, 2, 3, …, 10, dostaneme čísla 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, která jsou prvočísly. Avšak závěr opírající se o deset případů se ukazuje chybný, dosadíme-li za x například číslo 40; dostaneme číslo 1 681, které není prvočíslem, neboť $1\,681 = 41 \cdot 41$.

2. Pierre Fermat (1601–1665) soudil, že čísla tvaru $2^{2^n} + 1$, kde n je přirozené číslo, jsou prvočísly. Dosadíme-li za n čísla 1, 2, 3, 4, dostaneme 5, 17,

*) Matematická indukce vyžaduje tedy očíslování všech zkoumaných případů přirozenými čísly. Přesnější definici a popis této metody nalezne čtenář na str. 312. (Pozn. překl.)

257, 65 537. To jsou všechno prvočísla, ale dosadíme-li za n číslo 5, dostaneme 4 294 967 297, jehož dělitele Fermat nenalezl a usoudil, že je také prvočíslem. Teprve Euler objevil, že toto číslo je dělitelné 641, a není tedy prvočíslem. Odtud vidíme, jak je ve vědě důležité používat matematické indukce.

Důkaz prováděný metodou matematické indukce se musí nutně skládat ze dvou částí, z důkazů dvou nezávislých tvrzení.

Tvrzení I. Výrok je správný pro $n = 1$.

Tvrzení II. Je-li výrok správný pro $n = k$, kde k je libovolné přirozené číslo, je výrok pravdivý také pro $n = k + 1$.

Dokážeme-li obě tato tvrzení, pak podle principu matematické indukce je výrok správný pro každé přirozené n.

Aby čtenář získal konkrétní představu o použití metody matematické indukce, uvedeme řešení několika problémů, která jsou na ní založena.

Úloha 1. Napišme v pořadí podle velikosti kladná lichá čísla 1, 3, 5, ... Označme první z nich u_1, druhé u_2, třetí u_3 atd., takže

$u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 5, \dots .$

Nalezněte vzorec vyjadřující liché číslo u_n pomocí jeho indexu (pořadového čísla) n.

Řešení. První liché číslo u_1 můžeme napsat ve tvaru

(1) $u_1 = 2 . 1 - 1.$

Druhé liché číslo u_2 napíšeme ve tvaru

(2) $u_2 = 2 . 2 - 1,$

podobně

(3) $u_3 = 2 . 3 - 1.$

Všimneme-li si pozorně rovností (1), (2), (3), můžeme usoudit, že k vyjádření libovolného lichého čísla stačí odečíst 1 od dvojnásobku jeho indexu čili že pro n-té liché číslo platí vzorec

(4) $u_n = 2n - 1.$

Dokážeme, že tento vzorec je správný.

Na základě rovnosti (1) je zřejmé, že pro $n = 1$ platí vzorec (4) (tím je dokázáno tvrzení I).

Předpokládejme nyní, že vzorec (4) je správný pro $n = k$, tzn. že liché číslo u_k má tvar

$u_k = 2k - 1.$

Dokážeme, že vzorec (4) pak platí i pro liché číslo u_{k+1}, tj.

$$u_{k+1} = 2(k + 1) - 1$$

čili

$$u_{k+1} = 2k + 1.$$

Abychom dostali liché číslo u_{k+1}, stačí ke k-tému lichému číslu přičíst 2, tj. $u_{k+1} = u_k + 2$. Z předpokladu $u_k = 2k - 1$ tedy plyne

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2(k + 1) - 1,$$

čímž jsme dokázali tvrzení II, a tím i náš vzorec pro každé přirozené n.

Úloha 2. Dokažte, že součet čtverců prvních n přirozených čísel je roven $\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

Řešení. 1. Pro $n = 1$ je vzorec správný. Je správný i pro $n = 2$, neboť $\frac{1}{6} . 2(2 + 1)(2 . 2 + 1) = 5 = 1^2 + 2^2$.

2. Nechť pro $n = k$ platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}.$$

Potom

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 =$$
$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 =$$
$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} =$$
$$= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$$
$$= \frac{(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{6}\ ^{*}),$$

takže tvrzení je pravdivé pro $n = k + 1$.

Úloha 3. Dokažte, že součet třetích mocnin prvních n přirozených čísel je roven $\left[\frac{1}{2}n(n + 1)\right]^2$.

Řešení. 1 Pro $n = 1$ je tvrzení pravdivé.

2. Nechť pro $n = k$ platí

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{1}{2}k(k + 1)\right]^2.$$

Potom

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 =$$
$$= \frac{1}{4}k^2(k + 1)^2 + (k + 1)^3 =$$
$$= \frac{1}{4}(k + 1)^2(k^2 + 4k + 4) =$$
$$= \frac{1}{4}(k + 1)^2(k + 2)^2 =$$
$$= \left[\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)\right]^2.$$

Tvrzení tedy platí i pro $n = k + 1$.

*) $2k^2 + 7k + 6 = 0;\ k_1 = -\frac{3}{2},\ k_2 = -2;\ 2k^2 + 7k + 6 = (2k + 3)(k + 2)$.

Úloha 4. Jak víme, součin $1 . 2 . 3 \ldots n$ značíme symbolem $n!$ a čteme „n faktoriál“ (viz kap. 27).

Dokažte indukcí vzorec pro

$$S_n =$$
$$= 1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! + \ldots + n . n! .$$

Řešení.

$$S_1 = 1 . 1! = 1,$$
$$S_2 = 1 . 1! + 2 . 2! = 5,$$
$$S_3 = 1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! = 23,$$
$$S_4 = 1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! + 4 . 4 =$$
$$= 119.$$

Pozorujíce tyto výsledky, můžeme si všimnout, že platí

$$S_1 = 2! - 1, \; S_2 = 3! - 1,$$
$$S_3 = 4! - 1, \; S_4 = 5! - 1.$$

To nám dává možnost usoudit, že platí

$$S_n = (n + 1)! - 1.$$

Ověřme správnost našeho závěru.

Pro $n = 1$ a $n = 2$ je závěr správný, neboť

$$S_1 = 1 . 1! = 2! - 1,$$
$$S_2 = 1 . 1! + 2 . 2! = 5 = 3! - 1.$$

Nechť je náš závěr správný pro $n = k$:

$$S_k = 1 . 1! + 2 . 2! + \ldots + k . k! =$$
$$= (k + 1)! - 1.$$

Dokážeme, že potom

$$S_{k+1} = 1 . 1! + 2 . 2! + \ldots$$
$$\ldots + k . k! + (k + 1)(k + 1)! =$$
$$= (k + 2)! - 1.$$

Skutečně,

$$S_{k+1} = S_k + (k + 1)(k + 1)! =$$
$$= [(k + 1)! - 1] + (k + 1)(k + 1)! =$$
$$= (k + 1)! [1 + (k + 1)] - 1 =$$
$$= (k + 1)! (k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1.$$

■ Deduktivní metoda

Deduktivní úvahou nazýváme takovou úvahu, při níž z obecného tvrzení vyvozujeme tvrzení zvláštní, individuální. Zde jsou příklady:

1. Každý československý občan má právo na práci (obecné tvrzení).

2. Novák má právo na práci (individuální tvrzení).

1. V každém trojúhelníku leží těžiště v průsečíku těžnic.

2. Těžiště trojúhelníka AEC leží v průsečíku jeho těžnic.

Uveďme ještě jiný příklad deduktivní metody uvažování.

„Každé těleso ponořené do kapaliny ztrácí zdánlivě ze své hmotnosti tolik, kolik váží kapalina tělesem vytlačená.

Železo je tělesem, a tedy kousek železa ponořený do vody ztrácí na své hmotnosti tolik, kolik váží jím vytlačená voda“ – je deduktivní úvaha.

Dedukci používáme také v této úvaze:

1. Každý plyn je stlačitelný.
2. Vzduch je plyn.
3. Závěr: Vzduch je stlačitelný.

Objevili jsme novou pravdu – „vzduch je stlačitelný“ –, která není obsažena ani ve výroku „každý plyn je stlačitelný“, ani ve výroku „vzduch je plyn“. Deduktivní úvahou dostáváme nové tvrzení.

Také tento úsudek je deduktivní:

1. Všechny pravidelné mnohoúhelníky s týmž počtem vrcholů jsou podobné.
2. Dané pravidelné mnohoúhelníky mají stejný počet vrcholů.
3. Dané pravidelné mnohoúhelníky jsou podobné.

V této úvaze je první výrok obecný, druhý individuální, třetí výrok je závěr.

Abychom došli k závěru, musí první a druhý výrok obsahovat společný člen. Takovým společným členem ve výrocích 1 a 2 je v prvním případě „plyn“, v druhém „pravidelné mnohoúhelníky s týmž počtem úhlů“.

Podstata dedukce je tedy v tom, že daný zvláštní případ zahrnuje pod obecný princip.

Matematické úvahy jsou převážně deduktivní.

Deduktivní metodu poprvé rozpracoval Aristoteles (384 – 322 př. n. l.) ve své nauce o sylogismu. Induktivní metodu rozpracoval anglický filozof 17. století Francis Bacon (1561 – 1626) a v matematice ji používal již Blaise Pascal (1623 – 1662). Rozvoj věd v 18. a 19. století ukázal, že není možno oddělovat indukci od dedukce a že je třeba používat obou metod současně. Deduktivní metoda umožnila Euklidovi vybudovat celou geometrii z nevelkého počtu axiómů a postulátů. Pouhou záměnou jednoho z těchto axiómů jiným dokázal ruský matematik Lobačevskij [a maďarský matematik J. Bolyai (1775 až 1856)] vybudovat novou geometrii odlišnou od geometrie Euklidovy (srov. kap. 22).

O matematické logice

Slovo logika pochází z řeckého „logiké“, tj. věda o uvažování. Logikou se nazývá věda o zákonech a formách myšlení. Považuje se za část filozofie.

Matematická logika je věda, která zkoumá matematické důkazy. Je v jistém smyslu částí obecné logiky, ale bere zřetel na speciální potřeby matematiky.

Matematické myšlení má své charakteristické vlastnosti, podmíněné svébytností matematické abstrakce. Složitost postupů matematické abstrakce, rozmanitost jejich vzájemných vztahů a sama jejich podstata, to vše se odráží v logické systematizaci matematiky, zvláště v důkazech matematických tvrzení. Axiomatická metoda (kdy východiskem je soustava axiómů a postulátů) je jedním z nejobvyklejších způsobů logické systematizace matematiky. Klasickým příkladem axiomatické teorie je soustava geometrie vybudovaná Euklidem.

Slova nevyjadřují vždy jednoznačně a přesně myšlenky a pojmy. Odstranění nejasností a upřesnění pojmů i způsobů uvažování v některých oblastech matematiky se proto stalo nepopiratelnou nutností. Proto se také v dnešní matematice používá metody formalizace důkazů. Její podstatu nyní objasníme.

Axiómy i tvrzení zkoumané teorie se formulují ve tvaru vzorců pomocí speciálních symbolů, kterých se užívá vedle již známých symbolů matematických. Kromě toho se zavádějí pravidla vyvozování závěrů z axiómů nebo z předem známých tvrzení. Tato pravidla jsou čistě formální, což znamená, že při ověřování správnosti jejich použití není třeba se zabývat smyslem vzorců, na které je aplikujeme nebo které dostáváme jako jejich výsledek. Je třeba se jen ujistit, že tyto vzorce jsou sestaveny ze správných symbolů a odpovídajícím způsobem.

Důkaz tvrzení spočívá v odvození vzorce, který je vyjadřuje, přičemž odvozením je řada vzorců, na jejímž konci je hledaný vzorec a v které každý článek je buď axiómem, nebo může být odvozen z jednoho či několika dřívějších vzorců na základě jednoho z pravidel usuzování. Někteří matematici se snažili vyjádřit celá matematická odvětví jen pomocí symbolů a vzorců odvozených na základě formálních pravidel usuzování, aniž by užívali slovních důkazů.

Matematická logika vznikla v 19. století. Jejím zakladatelem byl G. Boole (1815 – 1864), dále ji rozvíjeli a zdokonalovali Angličané B. Peirce (1809 až 1880) a B. Russel (1872 – 1968), Frege a Schräder (Němci), Ital G. Peano (1858 – 1932), několik sovětských matematiků (Kolmogorov, Markov, Malcev) a z Poláků J. Lukasiewicz (1878 až 1956) a A. Tarski (nar. 1902).

Z našich poznámek o formalizaci matematiky vyplývá, že myšlenka vytvoření znaků nahrazujících slova, která mají někdy různé významy a tím zatemňují smysl, již dávno spočívala v myslích učenců. V 17. století se tímto problémem zabýval objevitel diferenciálního počtu G. W. Leibniz (1646 až 1716). Byl přesvědčen, že takové mezinárodní univerzální písmo je možné. Tuto Leibnizovu myšlenku uskutečnil italský matematik Peano. Napsal matematické pojednání (v roce 1895), ve kterém nepoužil ani jediného slova. Takové pojetí matematiky je neobvykle stručné, přesné a jednoznačné, ale obtížně se čte a rychle vyčerpává čtenáře (srov. kap. 31).

Zábavné úlohy

O odsouzenci na smrt (logický hlavolam)

Martin Gardner, autor fejetonů uveřejňovaných v měsíčníku „Scientific American“ pod společným názvem „Matematické hříčky“, uvádí zajímavý logický hlavolam.

Jeden americký soudce soudil nebezpečného zločince. Přelíčení skončilo v sobotu odpoledne. Po poradě soudu vyhlásil soudce následující rozsudek:

„Jste odsouzen k smrti oběšením. Rozsudek má být vykonán v poledne jednoho dne příštího týdne. O tom, kterého dne bude rozsudek vykonán, se dovíte ten den ráno. Dříve se o tom dovědět nesmíte.“

Po vyhlášení rozsudku byl odsouzenec odveden do vězeňské cely spolu se svým obhájcem.

Jakmile se octli o samotě, vybuchl obhájce v smích a řekl:

„Soudce, který vás soudil, je pověstný přísným dodržováním svých rozhodnutí, a proto nemůže být rozsudek nad vámi vykonán.“

„Proč?“

„Hned vám to vysvětlím“.

„Posledním dnem týdne, ve kterém má být proveden rozsudek, je příští sobota. Ale v sobotu nemůže být rozsudek vykonán, neboť byste o tom věděl již v pátek odpoledne, pokud byste se toho času dožil. Poprava nemůže být provedena v sobotu, neboť soudce si vyhradil podmínku, že se o tom dozvíte teprve ráno toho dne,

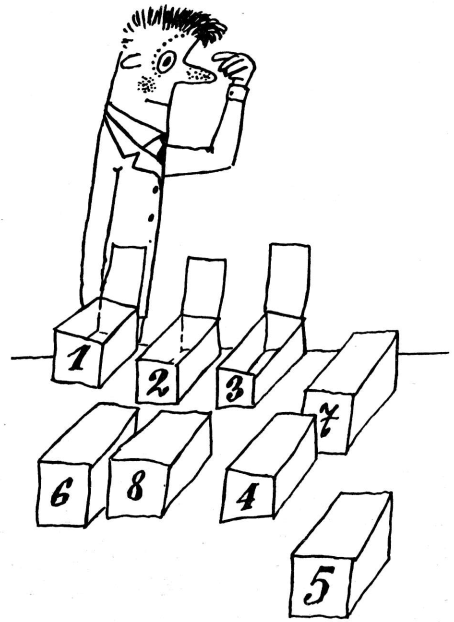
kdy má být rozsudek vykonán. Sobotu tedy musíme vyloučit. Pak ale posledním dnem, kdy může být rozsudek vykonán, je pátek. Avšak ani v pátek vás nemohou pověsit, protože ve čtvrtek po obědě (pokud se té doby dožijete) budete vědět, že vás mohou pověsit jen v pátek nebo v sobotu. Protože však sobota je vyloučena, zůstává jen pátek. Protože však soudce rozhodl, že o dnu popravy se smíte dozvědět teprve ten den ráno, nemohou vás pověsit v pátek. Musíme tedy vyloučit i pátek. A tak posledním dnem, kdy by vás mohli pověsit, je čtvrtek, ale ani ve čtvrtek nemohou vykonat popravu, protože byste o tom věděl už ve středu odpoledne. Podobnou úvahou dojdeme k závěru, že vás nemohou pověsit ve středu, v úterý ani v pondělí. Zbývá jen zítřejší den, ale ani zítra vás nemohou pověsit, protože o tom víte již dnes. Stručně řečeno, domnívám se, že rozsudek si sám odporuje."

Ačkoli v obou částech, z nichž se rozsudek skládá, není nic sporného, přece, uvažujeme-li logicky, nelze jej vykonat.

Existuje několik různých variant paradoxu o člověku odsouzeném k smrti. Jednou z nich je problém „nepředvídatelného" vajíčka. Představte si deset očíslovaných krabic.

Někdo potají vložil do jedné z nich vajíčko. Je možno předvídat, v které krabici je vajíčko? Nebo snad není v žádné?

Vajíčko nemůže být v krabici s číslem 10, neboť byste to mohli předvídat po zjištění, že krabice od 1 do 9 jsou prázdné. Nemůže být ukryto v krabici s číslem 9, neboť … atd., stejně jako v paradoxu o odsouzenci k smrti. A přece je vajíčko skutečně ukryto v jedné krabici.



Jestliže paradox o odsouzenci nebo o ukrytém vajíčku zjednodušíme na dva dny nebo dvě krabice, nevyhneme se zmatkům v logických úvahách, které, ač správné, nás dovedou k závěrům odporujícím praxi.*)

*) Zdánlivý paradox je způsoben jistou volností slovního vyjádření. Slovo „předvídat" či „vědět" je zde používáno z hlediska logiky příliš „neopatrně". Podrobný rozbor podobných paradoxů najde

Buddhistický mnich

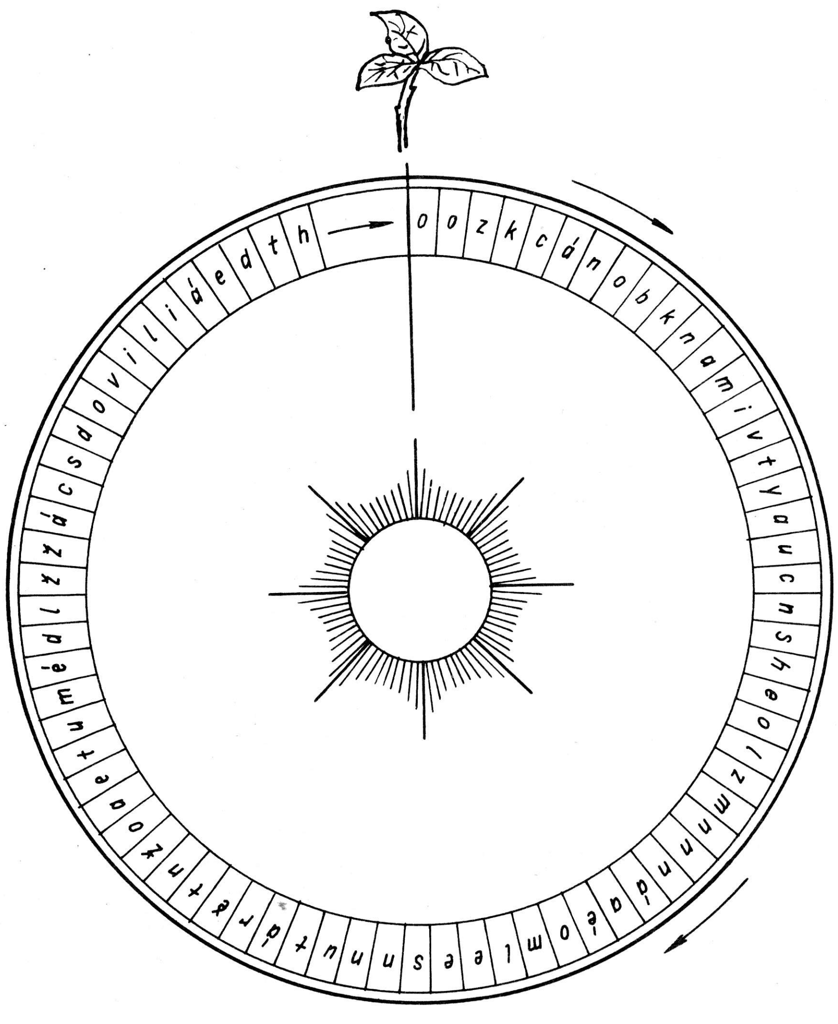
Jednoho dne přesně při východu slunce vyšel z buddhistického kláštera mnich a začal stoupat na velmi vysokou horu, na jejímž vrcholu zářila v ranním slunci Buddhova svatyně. Stezka, po níž mnich kráčel, byla velmi úzká, jen jednu stopu široká, a několikrát obíhala horu ve spirále. Mnich stoupal vzhůru nestejně rychle; několikrát se zastavil, aby si odpočinul a osvěžil se ovocem, které si vzal z kláštera na cestu. Po několika dnech půstu a meditací o marnostech tohoto světa opustil mnich přesně o východu slunce svatyni a vydal se na zpáteční cestu toutéž stezkou, opět různou rychlostí. Je pochopitelné, že průměrná rychlost, kterou mnich sestupoval s hory, byla větší než průměrná rychlost jeho výstupu na horu. Máme dokázat, aniž použijeme vzorců a výpočtů (jen logickou úvahou), že na stezce, po níž mnich šel, existuje bod, v němž byl mnich přesně v tentýž okamžik dne jak při výstupu na horu, tak i při sestupu.

Návod k řešení. Cestu jedné osoby na vrchol hory a zpět rozdělte mezi dvě osoby, které vycházejí o úsvitu téhož dne, jedna z kláštera do svatyně na vrcholu hory, druhá s vrcholu hory do kláštera.

Rozloučení s knížkou (místo doslovu)

Poslední slovo. Závěrečný akord. Čím máme tuto knížku uzavřít? Autor se rozhodl zakončit ji takovým hlavolamem, který by zdůraznil její základní charakter. Rozluštění hlavolamu není obtížné, známe-li klíč šifry. Ten najdeme, prohlédneme-li si dobře obrázek na následující stránce.

čtenář ve sbírce M. Gardnera, která je u nás dostupná v ruském překladu (viz seznam literatury). (Pozn. překl.)



Zábava neznamená totéž co lehkomyslnost. Nedává o nic méně užitku nežli chladná moudrost.

Seznam literatury

které autor použil při psaní knížky „Matematika pro volné chvíle“. I když mnohé z uvedených knížek nejsou dostupné v knihkupectvích, jistě je čtenář najde v knihovnách. Vyhledání knížky usnadňuje vedle jména autora a názvu i údaj o roku vydání a nakladatelství. V seznamu nalezne čtenář nejen výhradně matematické knížky, ale i přírodovědné, technické a dokonce i humanitní, které jen zdánlivě nesouvisí s matematikou. Jsme totiž dnes svědky stále hlubší humanizace matematiky na jedné straně a stále větší matematizace věd zdánlivě matematice velmi vzdálených na straně druhé. Domníváme se, že opravdový milovník matematiky sáhne i po těchto knížkách.*)

Aaboe, A.: Matematyka w starożytności. Warszawa, PWN 1968.
Berman, G. N.: Čislo i nauka o nem. Moskva, Gostechizdat 1954.
Bieńko, W.: Zygzakiem przez matematykę. Warszawa, PZWS 1964.
Cajori, F.: A History of Elementary Mathematics. 1910.
Colerus, E.: Od násobilky po integrál. Bratislava, Alfa 1969.
Courant, R. – Robbins, H.: Čto takoje matematika. Moskva, Prosveščenije 1967.
Cundy, H. M. – Rollett, A. P.: Modele matematyczne. Warszawa, PWN 1967.
Dianni, J.: Jan Brożek. Joannes Broscius. Warszawa, PZWS 1949.
Dianni, J. – Wachułka, A.: Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej. Warszawa, PZWS 1963.
Ducrocq, A.: Era robotów. Warszawa, PWN 1960.
Dinkin, J. – Uspenskij, V.: Matematičeskije besedy. Moskva 1967.
Ehrenfeuchtowa, A.: Ciekawy sześcian. Warszawa, PWN 1963.
Farrington, B.: Věda ve starém Řecku. Praha, Rovnost 1950.
Gardner, M.: Mathematical Games. Scientific American.
Hadamard, J.: Psychologia odkryć matematycznych. Warszawa, PWN 1964.
Hogben, L.: Matematyka dla milionów. Warszawa, KiW 1952.
Infeld, L.: Albert Einstein. Warszawa, PWN 1956.
Jaśkowski, S.: Matematyka ornamentu. Warszawa, PWN 1957.
Khan, F.: Design of the Universe. (Obraz Wszechświata.) Wszechświat, ty i ja. Warszawa, Iskry 1960.
Kolmogorov, A. N.: O matematyce. Warszawa, PWN 1955.
Komitet Olimpiady Matematycznej: Będę studiował matematykę. 1954.
Kline, M.: Matematyka a świat fizyczny. Warszawa, PWN 1964.
Kulczycki, S.: Geometria nieeuklidesowa. Warszawa, PWN 1956.

*) V seznamu jsme podle možnosti nahradili díla v polštině českými či slovenskými překlady a v některých případech také u nás dostupnější ruskou verzí. (Pozn. překl.)

Lefebvre, H.: Kartezjusz. Warszawa, PWN 1950.
Lietzman, W.: Gdě ošibka? Moskva, Gos. izd. fiz.-mat. lit. 1962.
Löffler, E.: Ziffern und Ziffernsysteme. Lipsko 1919. (2. vyd.)
Lorentz, H.: Elementy matematyki wyższej. Mathesis, 1910.
Mały słownik matematyczny. Warszawa, Wiedza Powszechna 1967.
Markuševič, A. L.: O szeregach w matematyce. Warszawa, Wiedza Powszechna 1967.
Markuševič, A. L.: Ploščadi i logarifmy. Moskva, Gostechizdat 1952.
Markuševič, A. L.: Rekurentní řady. Praha, SNTL 1954.
Matematyka w świecie współczesnym. Soubor článků měsíčníku Scientific American. Warszawa, PWN 1966.
Natanson, I. P.: Jednoduché úlohy na maxima a minima. Praha, Tech.-věd. vyd. 1952.
Natanson, I. P.: Sčítání nekonečně malých veličin. Praha, SNTL 1955.
Newson, C. V.: Istota matematyki. Warszawa, PWN 1967.
Parchomenko, A. S.: Čto takoje linija. Moskva, Gos. izd. tech.-teor. lit. 1954.
Rademacher, H. – Toeplitz, O.: O liczbach i figurach. Warszawa, PWN 1956.
Péter, R.: Hra s nekonečnem. Praha, MF 1973.
Sierpiński, W.: Czym się zajmuje teoria liczb. Warszawa, Wiedza Powszechna 1957.
Sierpiński, W.: O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste. Warszawa, PWN 1957.
Sierpiński, W.: Trójkąty pitagorejskie. Warszawa, PWN 1954.
Sluckin, W.: Mózg i maszyny. Warszawa, PWN 1957.
Sominskij, I. S.: Metoda matematické indukce. Praha, SNTL 1953.
Steinhaus, H.: Czem jest i czem nie jest matematyka. Lwów, Altenberg 1921.
Steinhaus, H.: Sto zadań. Warszawa, PWN 1958.
Steinhaus, H.: Orzel czy reszka. Warszawa, PWN 1962.
Steinhaus, H.: Matematický kaleidoskop. Praha, Přírodověd. nakl. 1953.
Struik, D. I.: Dějiny matematiky. Praha, Orbis 1963.
Sznirelman, L.: Liczby pierwsze. Warszawa, PWN 1954.
Vorobjov, N. N.: Fibonacciova čísla. Praha, SNTL 1953.
Weizsacker, C. F. – Juilfs, J.: Fizyka współczesna. Warszawa, PWN 1960.
Wesley, R. aj.: Matematika pro každého. Bratislava, Alfa 1972.
Wilkowski, R.: Elementy matematyki wyższej dla pracujących i samouków. Warszawa, Czytelnik 1947.
Wilkosz, W.: Liczę-myślę, Warszawa, PZWS 1951.

Seznam literatury k českému vydání

K českému vydání připojujeme seznam některých knížek, zejména v češtině, které mohou být pro našeho čtenáře dostupnější. Zvláště chceme upozornit na tři knihy M. Gardnera, které jsou u nás dosažitelné aspoň v některých knihovnách v ruském překladu. Kromě uvedených titulů upozorňujeme ještě na dvě knižnice, jejichž jednotlivé svazky v seznamu neuvádíme. Je to především Škola mladých matematiků, kterou vydává Mladá fronta ve spolupráci s Ústředním výborem Matematické olympiády již od roku 1961. Dosud vyšlo okolo 50 svazků (některé již v 2. vydání), které zajímavým a přístupným způsobem pojednávají o různých tématech z moderní matematiky. Druhou řadou jsou brožury o průběhu matematických olympiád, vycházející každoročně v SPN a obsahující všechny úlohy příslušného ročníku MO i jejich řešení.

Adler, I.: Čísel hra kouzelná. Horizont, Praha 1972.
Balada, F.: Z dějin elementární matematiky. Praha, SPN 1959.
Čech, E.: Co je a nač je vyšší matematika. Praha, JČMF 1942.
Čupr, K.: Aritmetické hry a zábavy. Praha, JČMF 1942.
Čupr, K.: Geometrické hry a zábavy. Praha, JČMF 1949.
Dobrovolný, B.: Matematické rekreace. Praha, Práce 1969 (2. vyd.).
Dobrovolný, B.: Nové matematické rekreace. Praha, SNTL 1967.
Gardner, M.: Matematičeskije čuděsa i tajny. Moskva, Nauka 1964.
Gardner, M.: Matematičeskije dosugi. Moskva, Mir 1972.
Gardner, M.: Matematičeskije golovolomki i razvlečenija. Moskva, Mir 1971.
Havlíček, K.: Diferenciální počet pro začátečníky. Praha, SNTL 1962.
Havlíček, K.: Integrální počet pro začátečníky. Praha, SNTL 1963.
Havlíček, K.: Kde žijeme? Praha, JČMF 1949.
Havlíček, K. aj.: Cesty moderní matematiky. Praha, Orbis 1960.
Hruša, K.: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. Praha, NČSAV 1959.
Katětov, M.: Jaká je logická výstavba matematiky. Praha, JČMF 1946.
Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku. Praha, Academia 1968.
Landau, L. D. – Rumer, J. B.: Co to je teorie relativity. Praha, Albatros 1972.
Mikan, M.: Jak se vyvinula matematika a geometrie. Praha, Orbis 1954.
Novoveský, Š.: Zábavná matematika. Bratislava, SPN 1968.
Pereľman, J. I.: Živá matematika. Bratislava, Alfa 1969.
Pospíšil, B.: Nekonečno v matematice. Praha, JČMF 1949.
Rényi, A.: Dialogy o matematice. Praha, Mladá fronta 1980.
Sedláček, J.: Nebojte se matematiky. Praha, SNTL 1960.
Sierpiński, W.: Co víme a nevíme o prvočíslech. Praha, SPN 1966.
Waerden, B. L. van: Probuždajuščajasja nauka. Moskva, GIFML 1959.

SOCIALISTICKÁ AKADEMIE
ČESKÁ VĚDECKOTECHNICKÁ SPOLEČNOST

POLYTECHNICKÁ
KNIŽNICE

I. ŘADA
VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ
SVAZEK 114

STANISLAW KOWAL

MATEMATIKA PRO VOLNÉ CHVÍLE
(ZÁBAVOU K VĚDĚ)

Z polského originálu Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne vydaného nakladatelstvím Wydawnictwo naukowo-techniczne ve Varšavě roku 1971 přeložil RNDr. Jiří Jarník, CSc.

DT 51

Vydalo SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, 113 02 Praha 1 v roce 1985 jako svou 9 699. publikaci – Redakce teoretické literatury – Odpovědná redaktorka RNDr. Jarmila Novotná, CSc. – Potah navrhl Miroslav Houska – Technická redakce Eva Endlová – Vytiskla Polygrafia, n. p., Praha 2, Svobodova 1 – 324 stran, 342 obrázků, 23 tabulek – Typové číslo L11-E1-III-41f/11913 – Vydání druhé, upravené – Náklad 13 200 výtisků – 20,73 AA, 21,63 VA

03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 24,–
Cena vázaného výtisku Kčs 29,–

505/21,856
Publikace je určena nejširšímu okruhu čtenářů.

04-006-85 b. Kčs 24,–
04-007-85 v. Kčs 29,–

POLYTECHNICKÁ KNIŽNICE

I. ŘADA – VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ – SV. 11

04 – 007 – 85
03/2 Kčs 29,–

S. KOWAL: MATEMATIKA PRO VOLNÉ CHVÍLE

POLYTECHNICKÁ KNIŽNICE

S. KOWAL

SNTL

Matematika pro volné chvíle

(zábavou k vědě)