Základy matematiky (MA-0001)

verze 2018

Břetislav Fajmon

Obsah

Úvod

Tato skripta jsou vytvářena jako podpora přednášek i cvičení do předmětů Základy matematiky (MA-0001) na PdF MU Brno. Studenti se v nich seznámí či připomenou si základní matematické pojmy a základní matematické principy.

První základní věcí v matematice jsou definice, tj. jednoznačné vymezení pojmů. Co se týká pojmů **množina, kartézský součin, relace, uspořádání, ekvivalence, zobrazení, operace, posloupnost, reálná funkce**, jejich definice si studenti musí odnést i do dalšího semestru a jejich znalost bude prověřena i v navazujícím předmětu Algebra 1 (= MA 0003), protože tyto definice jsou skutečně základní.

Druhou základní věcí tohoto předmětu jsou vlastnosti číslované (11) až (18) – tato čísla si studenti pamatovat nemusí (i když autor textu si myslí, že číslování by mohlo pomoci při jejich zapamatování), ale obsah těchto vlastností ano. Čísla (11) až (14) představují důležité vlastnosti relací, čísla (15) až (17) důležité vlastnosti uspořádaných množin, číslo (18) definici (či vlastnost) zobrazení. **Všech osm vlastností jsou vlastnosti různých relací**, protože uspořádání i zobrazení jsou speciálním případem relace.

Třetí základní věcí jsou vůbec **principy logického usuzování a metody prokazování platnosti matematických tvrzení** – v textu čtenář najde tuto problematiku v prvních třech kapitolách a v jedenácti typech důkazů. Tyto důkazy pak hrají roli při potvrzení platnosti asi dvaceti matematických vět v textu uvedených. Konec matematických důkazů, pokud jsou uvedeny, je označen symbolem $\square$. Konce některých příkladů, pokud je rozumné je v textu odlišit od následujících úvah, jsou zakončeny znakem $\star$.

Čtvrtou základní věcí v tomto textu je důraz na **stručný matematický zápis a matematické značení pomocí speciálních symbolů**. U některých pojmů v matematické literatuře toto značení není jednoznačně domluveno, nicméně označení v tomto textu je přijato ve většině literatury a studenti by si měli učit dovednosti tento stručný matematický zápis číst i psát.

Pátou základní věcí je pojem (reálné) funkce (jedné reálné proměnné), s níž souvisí dovednost nakreslit grafy některých základních funkcí a určit jejich vlastnosti. Tuto dovednost budou studenti dále rozvíjet v předmětu Matematická analýza 1 (MA-0004), ale už v předmětu Základy matematiky by si měli zopakovat či se naučit pracovat s vlastnostmi a grafy některých elementárních funkcí.

Po absolvování tohoto předmětu nebudou studenti znát o mnoho více než to, co si přinesli ze střední školy, ani nebudou mít nějaké světoborné informace o využití matematiky v praxi. Nicméně budou seznámeni s některými rysy vysokoškolského přístupu k matematice a s některými pojmy, jejichž znalost v dalším návazném matematickém vzdělání je považována za samozřejmou. A protože těch základních věcí je docela dost, pusťme se do práce a do studia.

Tento text vznikl v roce 2017, v roce 2018 byl doplněn o cvičení a v roce 2019 bude snad doplněna závěrečná kapitola o výsledky cvičení.

Břetislav Fajmon, Brno 2018

1 Podstata matematiky

1.1 Warm-up: Co je základem matematiky?

Co je podstatou matematiky? To je otázka pro studenty[1]. Přemýšlejte nejprve každý sám o dvou až třech věcech a řekněte je svému sousedovi.

Na předchozí otázku je možné reagovat řadou odpovědí. Možnou dvojicí odpovědí je 1) číslo … je podstatou počítání (aritmetiky = práce s čísly, řecky arithmos = číslo); 2) tvar či obrazec … je podstatou geometrie = zeměměřičství, pramatky geometrické teorie i praxe.

Toto hrubé dělení matematiky na dvě oblasti přetrvává i do dneška:

ad 1) místo aritmetiky bychom možná obecněji řekli diskrétní matematika (= matematika oddělených objektů a struktur, zejména čísel a rovnic, ale i konečných množin, operací sčítání, odčítání, umocňování, apod.),

ad 2) a protipólem diskrétní matematiky je spojitá matematika, která studuje geometrické obrazce, ale také reálné funkce reálné proměnné (které jsou často spojité, aspoň ty elementární z nich).

Uvedené dva typy objektů často nelze oddělit (od nepaměti v geometrii šlo i o délky objektů, tj. geometrie byla vždy spojena s čísly), naopak v posledních dvou stoletích se staly revolučními ty obory matematiky, které spojují diskrétní i spojitou matematiku dohromady – takovou je například analytická geometrie (používá rovnice k popisu rovin, přímek, ploch, tj. geometrických objektů) nebo matematická analýza (popisuje křivky a plochy v prostoru pomocí reálných funkcí a dále s nimi pracuje).

Přesto existují i další odpovědi na otázku, co je základem či podstatou matematiky, a na některé se podíváme právě během tohoto kursu.

1.2 Přednáška

Zaměřmě se nyní na následující odpověď: **podstatou matematiky je přesné a logické odvozování**.

Řecké slovo *mathéma* = nauka (věda) či poučka, platné či pravdivé tvrzení – tj. matematika je vědou založenou na přesném vyjadřování, vědou o pravdách, jejichž platnost byla prokázána. Zajímají ji výroky s pravdivostní hodnotou „pravdivý“ – ty nazývá matematickými větami (teorémami)[2]

Definice 01: Výrok je písemně zaznamenatelné tvrzení, kterému lze v daných souvislostech jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu – výroky jsou tedy taková tvrzení, která lze označit buď za pravdivá (= s pravdivostní hodnotou 1), nebo za nepravdivá (= s pravdivostní hodnotou 0).

[1] Warm-up je anglické slovo, které lze přeložit jako „zahřívátko“ – jedná se o činnost na začátku hodiny, která má příchozí zapojit do hodiny či do tématu.

[2] Slovo theóró (= vidím, zřím) je též z řečtiny, tj. teoréma = něco, co se nahlédlo a přijalo jako pravda … ovšem nikoli subjektivní pravda, ale objektivní, která nezávisí na nahlížiteli.

Poznámka: zákony logiky a filosofie.

Podstatou přesného či správného vyjadřování jsou tři zákony, na kterých stojí nejen matematika, ale i filosofie:

- **Zákon: Nemůže současně platit výrok i jeho negace**[3]. Jinými slovy, pokud při logickém usuzování dospějeme k tomu, že platí současně výrok i jeho negace, říkáme, že nastal spor = kontradikce (protiřečení, protimluv), a to znamená, že některý z předpokladů našeho usuzování má nesprávnou pravdivostní hodnotu.

- **Zákon vyloučení třetího (= princip pravdivostní dvouhodnotovosti): Buď platí výrok, nebo jeho negace, ale je vyloučena třetí možnost.** Znáte nějakou situaci, kde nastanou více než uvedené dvě možnosti? V životě někdy máme více než dvě řešení, jak se zachovat, a při výběru jedné varianty jednání tím pádem všechny ostatní vylučujeme – ovšem tento výběr z více než dvou možností je něco jiného než fakt, že při popisu reality používáme dvouhodnotovou logiku pravda/nepravda; pro každou z více než dvou možností se totiž rozhodujeme „dvouhodnotově“: buď si ji zvolíme, nebo ne.

- **Zákon negace negace: Negací negace dostáváme zase původní výrok**[4].

Příklad 1.1. Všechny tři zákony přesného vyjadřování platí u následujících dvou výroků:

výrok A : $2+2=4$; jeho negace je ¬A: $2+2\neq 4$. Negací negace dostaneme zase původní výrok A. Taktéž nemůže platit současně A i $\neg A$. A platí buď A, nebo $\neg A$ a je vyloučena třetí možnost.

výrok B : Berlín leží v Evropě; jeho negace $\neg B$: Berlín neleží v Evropě. Negací negace dostaneme zase původní výrok B. Taktéž nemůže platit současně B i $\neg B$. Platí buď B, nebo $\neg B$ a je vyloučena třetí možnost. $\star$

V dalším budeme pod výroky a matematickými tvrzeními vždy rozumět ta, která splňují uvedené tři zákonitosti.

Definice 02: Velká písmena např. A, B budeme nazývat výrokové proměnné, protože jimi lze označovat různé výroky.

Výroky, nebo i jejich schematické znázornění pomocí výrokových proměnných, lze spojovat do složených struktur pomocí tzv. (definice 03) logických spojek – tyto logické spojky lze vyjádřit slovně, nebo i symboly: Uveďme nyní základní přehled těchto logických spojek:

- výrok $\neg A$ nazveme negací[5] (definice 04) výroku A, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroku A a jeho negace $\neg A$ platí:

[3] Negaci výroku definujeme jako výrok, který popírá platnost původního výroku.
[4] Respektive: Negací negace dostaneme výrok ekvivalentní původnímu výroku.
[5] V některých učebnicích je negace výroku A označována i symbolem $\overline{A}$ nebo A'.

$p(A)$	$p(\neg A)$
1	0
0	1

. Symbol $\neg$ tedy představuje negaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze tuto negaci vyjádřit například změnou slovesa v jednoduchém výroku (rovná se … nerovná se, leží … neleží – viz předchozí příklad), nebo uvedením slovního spojení „není pravda, že“ před výrok, který negujeme.

- výrok $A \wedge B$ nazveme (definice 05) konjunkcí (spojením) výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich konjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

. Symbol $\wedge$ tedy představuje konjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze konjunkci vyjádřit spojkou „a“, „a současně“, „a přitom“, atd.

- výrok $A \vee B$ nazveme (definice 06) disjunkcí výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich disjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

. Symbol $\vee$ tedy představuje disjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze disjunkci vyjádřit spojkou „nebo“ – tato spojka je ovšem uvedena ve významu nevylučovacím (disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý aspoň jeden z dílčích výroků, tedy mohou být pravdivé současně oba dílčí výroky):

Příklad 1.2. Pozor na rozdíl u spojky „nebo“ mezi běžným významem v češtině a významem matematickým[6]: Uvažujme následující tři výroky:

(a) Zítra pojedu do Prahy, nebo nepojedu.

(b) Dnes večer možná půjdu do kina nebo do divadla.

(c) Za deště nebo mlhy zůstanu doma.

Výrok (a) vyjadřuje, že nastane právě jedna ze dvou možností (a je vyloučena třetí možnost – princip vyloučení třetího). Výrok (b) chce vyjádřit, že nastane nejvýše jedna ze dvou možností (kino nebo divadlo), v žádném případě obě, ale nemusí nastat žádná. Výrok (c) znamená, že při výskytu aspoň jedné z možností (déšť nebo mlha) zůstanu doma, ale zůstanu doma také při výskytu obou možností současně – v tomto třetím významu je spojka nebo využívána v matematice a formální logice[7].

- výrok $A \Rightarrow B$ nazveme (definice 07) implikací utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot z

[6] [2], str.31-32.
[7] Tedy češtinářské užití spojky „nebo“ má jen někdy význam disjunkce.

nich vytvořené implikace vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

. Symbol $\Rightarrow$ tedy představuje implikaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze implikaci vyjádřit: „Pokud platí A, tak z toho plyne, že B“; „když A, tak B“; apod.

V případě platnosti implikace $A \Rightarrow B$ se výrok A (definice 08) nazývá dostatečná podmínka pro platnost výroku B (protože platnost výroku A dostačuje, postačuje, aby bylo zaručeno, že platí výrok B – implikaci lze tedy slovně formulovat „Platnost podmínky A je dostatečná pro to, aby platilo B“) a výrok B se nazývá (definice 09) nutná podmínka, která nutně vyplývá z platnosti výroku A (slovní formulace: „pokud platí A, z toho nutně plyne, že platí i B“).

Příklad 1.3. Příklady implikace: a) Když půjde Ondra na ten večírek, půjdu i já; b) Když bude pršet, vezmu si deštník; c) Když je přirozené číslo dělitené šesti, tak je toto číslo dělitelné i třemi.

- výrok $A \Leftrightarrow B$ nazveme (definice 10) ekvivalencí utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B je tabulka ekvivalence vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

. Symbol $\Leftrightarrow$ tedy představuje ekvivalenci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze spojku ekvivalence vyjádřit: „A platí právě tehdy, když platí B“; „A tehdy a jen tehdy, když B“; a podobně.

Příklad 1.4. Příklad ekvivalence: Přirozené číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi současně.

Poznámka: Stručný matematický zápis.

Budeme postupně (opakovat a) učit se řadě symbolů stručného matematického zápisu – výstižně a přesně se vyjadřovat je jedním z cílů matematiky „na úrovni B2“, pokud bychom si vypůjčili na popis vysokoškolské úrovně matematiky označení zažité z evropského referenčního rámce výuky cizích jazyků.

- označení 00: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ … množina přirozených čísel; někdy také $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ … množina přirozených čísel včetně nuly;
- označení 01: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ … množina celých čísel;
- označení 02: množina racionálních čísel

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \;:\; m \in Z,\;\; n \in N \right\}.$$

- označení 03 : I ... množina iracionálních čísel, tj. $R = Q \cup I$;
- označení 04 : R ... množina reálných čísel;
- označení 05 : C ... množina komplexních čísel;
- označení 06 : $\neg A$ ... negace výroku A;
- označení 07 : $A \wedge B$ ... konjunkce výroků A, B;
- označení 08 : $A \vee B$ ... disjunkce výroků A, B;
- označení 09 : $A \Rightarrow B$ ... implikace utvořená z výroků A, B – s významem „Když platí A, tak platí i B“;
- označení 10 : $A \Leftrightarrow B$ ... ekvivalence utvořená z výroků A, B – s významem „A platí právě tehdy, když platí B“;

Matematika je věda o přesném vyjadřování, a my se nyní tento jazyk budeme učit – jinými slovy, budeme se učit a) přesně formulovat pojmy, b) přesně formulovat, ze kterých jednoduchých a platných faktů vycházíme, c) dokazovat platnost nových faktů na základě faktů samozřených nebo dokázaných už dříve.

Definice 11: (matematická) definice je přesné vymezení pojmu, z něhož je patrno, které objekty toto vymezení splňují a které ne (např. bod, úsečka, přímka, kružnice, úhel, rovnoběžka ... to vše jsou pojmy, které musíme jednoznačně definovat v tzv. Euklidovské geometrii).

Definice 12: (matematický) axiom je tvrzení o vlastnostech pojmů či o vztazích mezi pojmy, které se nedokazuje, nýbrž všeobecně přijímá jako pravdivé (např. axiomy Euklidovské geometrie).

Definice 13: (matematická) věta je tvrzení o vlastnostech pojmů či vztazích mezi pojmy, které musíme dokázat pomocí axiomů, definic a vět dokázaných již dříve[8].

Definice 14: Výroková forma je výraz složený z výrokových proměnných a logických spojek vyjádřených symboly. Například implikace $A \Rightarrow B$ nebo ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ jsou výrokové formy.

Pokud nyní budeme mluvit o pravdivosti výrokových forem, učíme se takto principy správného logického usuzování, aniž bychom znali konkrétní výroky dosazené za výrokové proměnné A a B.

[8]Např.: střed kružnice trojúhelníku vepsané leží na průsečíku os jeho úhlů ... platnost tohoto tvrzení plyne ze vztahu mezi definicí kružnice (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od svého středu) a definicí osy úhlu (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu). Z těchto dvou definic plyne, že osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, a navíc v tomto bodě musí ležet i střed hledané kružnice. Podrobněji dokazovat nebudeme, daná skutečnost slouží jen jako příklad matematické věty, která nemusí být každému zcela zřejmá a jejíž platnost je dobré podrobněji zdůvodnit na základě definic a axiomů.

Typ důkazu číslo 1: Důkaz ekvivalence výrokových forem.

Sestavíme tabulku výsledných pravdivostních hodnot obou výrokových forem. Pokud na každém řádku tabulky (jeden řádek = jedna kombinace dílčích pravdivostních hodnot) mají obě formy stejné pravdivostní hodnoty, jsou ekvivalentní.

Zajímavá pravidla logického usuzování dostáváme při kombinaci několika logických spojek, jak je vidět ze dvou následujících matematických vět:

(věta 01) Výroková forma $\neg(A \wedge B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1): sestavíme pravdivostní hodnoty složených výrokových forem pro všechny možnosti pravdivosti dílčích výroků a porovnáme je:

$\neg(A \wedge B)$:

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg(A \wedge B))$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

; dále $\neg A \vee \neg B$):

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

.

Vidíme, že pravdivostní hodnoty výrokových forem jsou stejné na každém řádku (= pro tytéž hodnoty dílčích výroků), tj. obě výrokové formy jsou logicky ekvivalentní. Jednu formu lze ekvivalentně zaměnit tou druhou a naopak. □

Příklad 1.5. Výrok $A \wedge B$ zní: Vezmu si klobouk a vezmu si i boty.

Jeho negaci lze provést velmi pragmaticky uvedením záporky „Není pravda, že“, tj. dostaneme výrok typu $\neg(A \wedge B)$: Není pravda, že si vezmu klobouk i boty.

Matematik ovšem chce pracovat precizně a vyzkoušet i další možnosti – mimo jiné proto, že často je v jeho zájmu odstranit závorky ve složených výrokových formách (podobně jako někdy pomůže odstranit závorky při početních úpravách s proměnnými výrazy). Využije věty 1 a vysloví negaci ve tvaru $\neg A \vee \neg B$): Nevezmu si klobouk, nebo si nevezmu boty, nebo si nevezmu ani klobouk, ani boty (třetí část věty musíme v češtině dodat, abychom zajistili, že se jedná o negaci v matematickém smyslu, tj. může nastat první i druhá číst věty současně).

(věta 02) Výroková forma $\neg(A \vee B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

Důkaz: provedeme pomoci tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1). Velmi podobný větě 1, vhodný pro cvičení. □

Příklad 1.6. Výrok $A \vee B$ zní: Číslo 20 je dělitelné dvěma nebo třemi. Je to mimochodem výrok pravdivý.

Jeho negaci bychom mohli provést pomocí záporky „není pravda, že“ – ovšem tuto možnost budeme mít na prověrce nejspíš zakázanou, aby vyučující zjistil, zda dokážeme odstranit závorky ve výrokové formě. Pokusíme se sestavit výrok typu $\neg A \wedge \neg B$: Číslo 20 není dělitelné dvěma, a současně toto číslo není dělitelné třemi. To je výrok nepravdivý (což se dalo čekat, protože negace pravidého výroku je nepravdivá), ale jedná se o správně vytvořenou negaci původního výroku.

Poznámka: Univerzální výroky.

Matematika se snaží o vytváření tzv. univerzálních výroků, které platí pro více hodnot z jisté množiny, například pro všechna přirozená čísla, apod. Jsou to tedy jakési výroky typu „více v jednom“ nebo „nekonečno v jednom“, jinými slovy pomocí proměnných vyjádříme výrok, který platí pro více hodnot nebo nekonečně mnoho hodnot.

(definice 15) Výroková funkce je výraz, který sám není výrokem, protože není specifikováno, jaké hodnoty nabývá proměnná x, kterou obsahuje, takže není možné stanovit pravdivostní hodnotu.

Až právě kvantifikátor (definice 16) je ta část výroku, která vymezuje, jakých hodnot může proměnná ve výrokové funkci nabývat.

Příklad 1.7. Zde je příklad na výrokovou funkci a kvantifikátor: a) Výraz

$$x > 0$$

není výrok, protože není stanoveno, čemu se rovná proměnná x – je to ovšem výroková funkce.

b) Výraz

$$\forall x \in N: \quad x > 0$$

je pravdivý výrok, protože podmínku $x > 0$ splňují všechna přirozená čísla. Část $\forall x \in N$ je právě kvantifikátor – říká se mu obecný kvantifikátor, protože upřesňuje, že výroková funkce bude platit pro každý prvek uvedené množiny (= platí obecně pro všechny prvky dané množiny).

c) Výraz

$$\forall x \in R: \quad x > 0$$

je nepravdivý výrok, protože existují reálná čísla, pro která daná nerovnost neplatí. Mohli bychom jej pozměnit do tvaru

$$\exists x \in R: \quad x > 0,$$

který už platí. Část $\exists x \in R$ je opět kvantifikátor – říká se mu existenční kvantifikátor, a dosazením před výrokovou funkci tvrdí, že existují nějaká reálná čísla, ne nutně všechna, ale může jich být i nekonečně mnoho, pro která platí $x > 0$.

- označení 11 : $V(x)$ … výroková funkce s proměnnou x;
- označení 12 : $\forall$ … pro každé, pro každou;
- označení 13 : $\exists$ … existuje; $\exists!$ … existuje právě jedno, právě jeden; $\nexists$ … neexistuje, neexistují;
- označení 14 : : (dvojtečka) … tak, že; platí
- označení 15 : $\in$ … patří do, je prvkem;

- označení 16 : $\cap$ … průnik množin;
- označení 17 : $\cup$ … sjednocení množin;

Kapitola byla vypracována na základě zdrojů [1] (str. 2-3 a str. 5) a [2] (str. 22-50).

1.3 Cvičení

Procvičení k této kapitole:

Cvičení 1.1. Dokažte větu 2 z přednášky 1, ale také věty 3,4,5 z následující přednášky 2.

Cvičení 1.2. [2] str. 26: jedná se o výroky? (nebo jiné cvičení na téma, zda daná tvrzení jsou výroky nebo ne)

Cvičení 1.3. Cvičení na základní negace výroků: Učebnice Matematika pro gymnázia (nakl. Prometheus), svazek Základní poznatky z matematiky (Bušek, Boček, Calda), str. 136-146. Velmi dobré by bylo procvičení matematického symbolického zápisu výroků a jejich negací.

Cvičení 1.4. Negujte výroky lépe než jen dodáním záporky „není pravda, že“:

4a) Každé přirozené číslo n je rovno součtu svých dělitelů.

4b) Dnes bude pršet a budeme psát písemku z matematiky.

4c) Žádný učený z nebe nespadl.

4d) Půjdu na ten večírek právě tehdy, když tam půjde Ondra.

4e) Pokud přijde Honza, řeknu mu o tom.

4f) Existují aspoň tři přirozená čísla, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů.

4g) Existují nejvýše čtyři prvočísla.

4h) Možná, že dnes večer půjdu do kina nebo si přečtu nějakou zajímavou knihu.

4i) Existují právě dvě celá čísla, která se rovnají své druhé mocnině.

Cvičení 1.5. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

5a) Pro každé přirozené číslo existuje jiné přirozené číslo, které je větší než dvojnásobek toho prvního čísla zvětšený o jedničku.

5b) Pro každé celé číslo existuje jiné celé číslo, které když zmenšíme o jedničku, stále je výsledek menší než třetí mocnina toho prvního čísla.

Cvičení 1.6. [14], str. 40-41, příklady B.1, B.4, B.6 a),c), B.8, B.9, B.10.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.1.

2 Základní typy důkazů

2.1 Warm-up: Funkce 01 – Kvadratické funkce

Studenti budou muset umět pracovat se základními reálnými funkcemi a kreslit jejich grafy. Protože toto téma je obsáhlé a není možné je na posledních dvou přednáškách stihnout, bude probíráno postupně s nějakými úlohami a úkoly. Proto se před tématem logiky dnes budeme chvíli věnovat kvadratickým funkcím a kreslení jejich grafu.

Kvadratická funkce je reálná funkce typu $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálné konstanty a x je reálná proměnná. Podrobnější probrání kvadratických funkcí viz [9], str. 56-71. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9], některé příklady jsou řešené v jejím textu, u většiny neřešených příkladů je uveden výsledek na konci knihy [9]):

- grafy kvadratických funkcí (paraboly):
  - str. 61 … graf funkce $y = a \cdot x^2$ pro různé hodnoty konstanty a;
  - str. 64 … graf funkce $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$;
  - příklad 4.9 na str. 67;
- řešení kvadratických nerovnic:
  - str. 69, př. 1: řešte v R:
  $$2x^2 + 5 \le 3x^2 + x - 1;$$
  - příklad 4.23 na str. 71.

2.2 Přednáška

Typ důkazu číslo 2: Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při přímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vyjdeme z toho, že platí výrok A; na základě A a dříve dokázaných matematických vět provedeme logicky korektní úsudek U_1; na základě A, U_1 a dříve dokázaných vět provedeme logicky korektní úsudek U_2; atd. až po k krocích logicky korektně usoudíme, že platí B, a to na základě platnosti A, U_1, …, U_k.

Příklad 2.1. Dokažte:
$$a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab.$$

Důkaz: Výrokem A budeme rozumět část $a, b \in R$ – tedy a, b jsou reálná čísla. Co o nich lze říci?

Úsudek U_1: platí vždy, že $(a-b)^2 \ge 0$ (druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná);

Úsudek U_2: z U_1 plyne rozepsáním podle vzorce: $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$;

Výrok B platí, protože vztah U_2 lze upravit do tvaru $a^2 + b^2 \ge 2aB$. Důkaz je hotov. Každý důkaz má obvykle nějaké klíčové místo či myšlenku – klíčové v tomto důkazu byl přechod od U_1 k U_2 ... všimneme si, že po umocnění $(a-b)^2$ dostaneme všechny členy v naší dokazované nerovnosti. □

(věta 03) Výrokové formy $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ jsou ekvivalentní.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot dílčích výroků, lze provést v rámci cvičení.□

Na větě 03 je založen typ důkazu 03:

Typ důkazu číslo 3: NEpřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při NEpřímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vlastně dokazujeme platnost logicky s ní ekvivalentní formy $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 17: Forma $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá obměna implikace $A \Rightarrow B$[9].

Příklad 2.2. Dokažte matematickou větu:

$$x \in R \Rightarrow \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

Důkaz: Máme dokázat implikaci typu $A \Rightarrow B$ neboli výrok

$$x \in R \quad \Rightarrow \quad \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

Budeme postupovat podle typu důkazu číslo 3, tj. budeme dokazovat obměnu $\neg B \Rightarrow \neg A$ neboli výrok

$$\sin x + \cos x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \notin R.$$

Vycházíme nyní z výroku $\neg B$: $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$;

úsudek U_1: po umocnění obou stran rovnice $\neg B$ na druhou dostaneme

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{9}{4};$$

úsudek U_2: z rovnosti U_1 a známého faktu F_1 ($\forall x \in R: \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$) dostaneme

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{4};$$

úsudek U_3: z rovnosti U_2 a dalšího známého faktu F_2 ($\forall x \in R: \quad 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$) dostaneme

$$\sin(2x) = \frac{5}{4},$$

což je zvláštní, protože z grafu funkce sinus víme, že pro reálné vstupy nabývá výstupu pouze z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$;

[9] Obměna implikace je tedy výrok s touto implikací logicky ekvivalentní, tj. nepřímý důkaz implikace = přímý důkaz její obměny.

úsudek U_4: argument $2x$ funkce sinus není reálné číslo, tj. platí $\neg A$: x není reálné číslo. Dokázali jsme tedy platnost obměny, platí tedy i původní implikace, která je s obměnou logicky ekvivalentní. □

(věta 04) Výrokové formy $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ jsou ekvivalentní.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot obou výrokových forem pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot dílčích výroků A, B. □

Na větě 04 je založen typ důkazu 04:

Typ důkazu číslo 4: důkaz ekvivalence $A \leftrightarrow B$.

Při důkazu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ vlastně musíme dokázat, že platí obě z implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Definice 18: Forma $B \Rightarrow A$ se nazývá obrácení implikace $A \Rightarrow B$.[10].

Příklad 2.3. Uvažujme nějaké podmnožiny A, B, C množiny přirozených čísel. Ať jsou tyto podmnožiny libovolné, platí pro ně rovnost

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Důkaz. Rovnost množin lze dokázat pomocí ekvivalence

$$x \in A \setminus (B \cap C) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Podle typu důkazu číslo 4 bude důkaz hotov, pokud dokážeme obě implikace:

a) Dokažme implikaci zleva doprava, tj. implikaci

$$\underbrace{x \in A \setminus (B \cap C)}_{U} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}_{V}.$$

Tuto implikaci dokážeme přímo (důkaz typu 2): Předpokládáme platnost předpokladu $x \in A \setminus (B \cap C)$ a provedeme řetězec úsudků:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \cap C) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \setminus C) \quad \Rightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

b) Dokažme implikaci zprava doleva, tj. implikaci

$$\underbrace{x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}_{V} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x \in A \setminus (B \cap C)}_{U}.$$

Tuto implikaci dokážeme přímo (důkaz typu 2): Předpokládáme platnost předpokladu $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ a provedeme řetězec úsudků:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \cap C \quad \Rightarrow \quad x \in A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

[10] Tedy při důkazu ekvivalence musíme dokázat, že současně platí příslušná implikace i její obrácení.

závěr: Z platnosti implikací $U \Rightarrow V$ a $V \Rightarrow U$ plyne platnost ekvivalence $U \Leftrightarrow V$. Důkaz je tím hotov. □

O principu vyloučení třetího (buď platí výrok, nebo jeho negace, a je vyloučena třetí možnost) už byla řeč. Nyní ve větě 5 uvedeme jeho důkaz!!!

(věta 05) (princip vyloučení třetího zapsaný jako výroková forma) Pro každý výrok A platí

$$A \vee \neg A.$$

Důkaz: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot lze ukázat, že daná výroková forma má vždy pravdivostní hodnotu 1, tedy platí vždy, ať je výrok A jakýkoli. □

V rámci cvičení lze dokázat ekvivalence některých výrokových forem, které nám pomohou při sestavování negace implikace a negace ekvivalence – podrobnější negace těchto dvou výrokových forem totiž právě využívá formy jim ekvivalentní.

(věta 06) Forma $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$.

Důkaz: Důkaz typu 1 provedeme pomocí tabulky logických hodnot. □

(věta 06 - důsledek) Forma $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s formou $A \wedge (\neg B)$.

Důkaz: Mohli bychom důkaz provést pomocí tabulky logických pravdivostních hodnot, ale lze také užít větu 06 a větu 02[11]: podle věty 06 je implikace ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$, takže negace implikace musí být ekvivalentní s formou, kterou získáme z $(\neg A) \vee B$ využitím věty 02 (která říká, že negací disjunkce dílčích výroků je konjunkce jejich dílčích negací):

$$\neg(A \Rightarrow B) \overset{v.06}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \vee B) \overset{v.02}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B. \ \square$$

Příklad 2.4: negace implikace. Uvažujme implikaci „Když bude pršet, vezmu si deštník.“ Její negace je: Bude pršet a nevezmu si deštník.

(věta 07) Forma $\neg(A \Leftrightarrow B)$ je ekvivalentní s formou

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

Důkaz: Mohli bychom provést pomocí tabulky pravdivostních hodnot, ale místo toho provedeme jen přímý důkaz úpravy výrazu na základě vět 01, 04 a 06-důsledek:

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \overset{v.04}{\Leftrightarrow} \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \overset{v.06-\text{důsl.}}{\Leftrightarrow} (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A). \ \square$$

Příklad 2.5: negace ekvivalence. Uvažujme ekvivalenci „Číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi.“ Negace tohoto výroku (mimochodem nepravdivá, protože původní výrok je pravdivý) je podle věty 07 celá dlouhá věta:

(Číslo n je dělitelné šesti a současně není dělitelné dvěma i třemi) nebo (číslo n je dělitelné dvěma i třemi a současně není dělitelné šesti).

[11] Vlastně se jedná o přímý důkaz (typ 2) pomocí úpravy výrazu na základě vět 02 a 06.

Tato kapitola byla zpracována na základě [1]. str. 4,6,10 (ale důkazy rovnosti množin ze str. 10, věty 2.1 dokazovat pomocí typu 4: důkaz ekvivalence. Ve čtvrté kapitole se naučíme (připomeneme si) schůdnější metodu důkazu rovnosti množin pomocí tzv. Vennových diagramů). Další materiál viz [2], str. 88-91, str. 100-103.

2.3 Cvičení

Cvičení 2.1. . Přímý důkaz využívající příklad 2.1 ([2], str. 92, příklad 4.2, řešení na konci knihy [2]): pro všechna kladná reálná čísla a, b platí:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Cvičení 2.2. . Nepřímý důkaz ([2], str. 100, př. 1): Pro všechna přirozená čísla a, b platí: když se nedá zkrátit zlomek $\frac{a-b}{a+b}$, pak se nedá zkrátit ani $\frac{a}{b}$.

Cvičení 2.3. . Nepřímý důkaz ([2], str.103, př. 4.14): Když n není druhá mocnina přirozeného čísla, tak $\sqrt{n}$ není racionální číslo.

Cvičení 2.4. Dokažte distributivní zákony pro sjednocení a průnik množin a) pomocí důkazu ekvivalence, b) pomocí Vennových diagramů (také viz přednáška 4, typ důkazu číslo 8):

$$X \cup (Y \cap Z) = (Z \cup Y) \cap (X \cup Z), \qquad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Cvičení 2.5. Dokažte de Morganova pravidla (viz přednáška 4, věty 09, 10) pro operace doplňku množiny, sjednocení a průniku množin a) pomocí důkazu ekvivalence, b) pomocí Vennových diagramů.

Cvičení 2.6. Zjednodušte symbolický zápis, aby ve výsledku nebyl symbol negace před žádnou závorkou, pouze u dílčích výrokových proměnných:

6a) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge C) = \dots$

6b) $\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) = \dots$

6c) $\neg((A \vee B) \wedge C) = \dots$

Cvičení 2.7. Napište obměnu výroku: Pokud n je sudé číslo, pak jeho druhá mocnina n^2 je sudé číslo.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.2.

3 Důkaz sporem, indukcí, protipříkladem

3.1 Warm-up: Funkce 02 – Lineárně lomené funkce

V opakování vlastností a grafů základnách typů funkcí se budeme nyní chvíli zabývat lineárně lomenými funkcemi, tj. funkcemi typu

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

tj. funkcemi, které vytváříme pomocí podílu dvou lineárních funkcí (proto tedy název „lineárně lomená“ funkce).

Podrobnější výklad viz [9], str. 72-84. Lineárně lomená funkce je vlastně podílem dvou lineárních funkcí, odtud její název. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- str. 77 ... graf funkce $y = \frac{k}{x}$ pro různé hodnoty konstanty k;
- str. 78-80 ... obecnější grafy lineárně lomených funkcí – příklady 1 a 2;
- str. 82, příklad 5.9 ... grafy dalších typů, je důležité všechny nakreslit;

3.2 Přednáška

Na základě věty 05 lze provádět důkazy následujícího typu:

Typ důkazu číslo 5: Důkaz sporem.

Předpokládáme platnost negace daného tvrzení a logicky správně z této negace odvozujeme další úsudky, dokud nedojdeme k nesmyslu, který neplatí. Protože jsme pracovali logicky naprosto správně, tak kořen rozporu je ve startovacím předpokladu – nyní víme, že předpoklad $\neg A$ neplatí, a tedy platí výrok A.

Příklad 3.1. Dokažte, že $\log_2 3$ není racionální číslo.

Důkaz: budeme předpokládat negaci zadaného výroku, tj. že $\log_2 3$ je racionální číslo, tj. lze tuto hodnotu vyjádřit zlomkem:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

pro $m \in Z$ a $n \in N$. Nyní budeme vyvozovat nějaké důsledky a úsudky a využijeme přitom definice logaritmu, tj. faktu F_1: Pro $\log_2 x = y$ platí $2^y = x$.

Úsudek U_1: Z rovnosti, jejíž platnost předpokládáme, a faktu F_1 plyne

$$2^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Umocněme tento vztah na n-tou, abychom se zbavili zlomku v mocnině:

$$2^m = 3^n,$$

a na obou stranách této rovnosti se přitom vyskytují přirozená čísla.

Úsudek U_2: Protože číslo 2 je dělitelem čísla 2^m a platí $2^m = 3^n$, musí být číslo 2 také dělitelem čísla 3^n – ale to je spor se známým faktem, že číslo 2 není dělitelem žádného lichého čísla (a číslo 3^n jako násobek n lichých čísel je liché).

Naprosto korektními úvahami jsme přišli k nesmyslu, tj. nesprávný byl náš výchozí předpoklad – a tedy platí jehu negace, neboli to, co jsme chtěli dokázat. Důkaz je hotov. $\square$

Typ důkazu číslo 6: Důkaz matematickou indukcí.

Při matematické indukci dokazujeme tzv. univerzální výrok, který platí většinou pro všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu n_0, tj. výroky typu

$$\forall n \geq n_0 : V(n).$$

Platnost tohoto univerzálního výroku dokazujeme ve dvou krocích:

a) Dokážeme platnost výroku $V(n_0)$.

b) Dokážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Pokud platí obě tyto věci, „dosáhne“ platnost $V(n)$ na jakékoli přirozené číslo n.

Definice 19: Indukční předpoklad se nazývá předpoklad $V(n)$ v implikaci

$$V(n) \Rightarrow V(n+1)$$

v podmínce (b), kterou dokazujeme při indukci.

Poznámka: důkaz indukcí vyplývá ze struktury množiny N:

ad a) jednička je nejmenší přirozené číslo;

ad b) každé další přirozené číslo různé od jedničky získáme zvýšením předchozího přirozeného čísla o jedničku.

Tedy nekonečným opakováním kromu (b) projdeme všechna přirozená čísla – viz [2], str. 121: „pravdivost tohoto výroku se dědí od čísla k číslu“. My ovšem při důkazu tohoto tzv. indukčního kroku = části (b) projdeme tento proces jen jednou – dokážeme, že jakékoli přirozené číslo větší než n_0 danou vlastnost „dědí“ od čísla o jedničku menšího.

Označení 18: $|$ … dělí beze zbytku = je dělitelem. Například $2|6$ (dvojka dělí šestku), $2|8$ (dvojka dělí osmičku), $3|21$ (číslo 3 je dělitelem čísla 21).

Příklad 3.2. Dokažte, že

$$\forall n \in N : \quad 9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$$

(slovně: dokažte, že číslo 9 je dělitelem výrazu v závorce, kde n je libovolné přirozené číslo)

Důkaz: Pokud máme tvrzení dokázat pro všechna přirozená n, takový úkol se typicky dokazuje indukcí = důkazem typu 6.

a) Ukažme, že rovnost platí pro $n_0 = 1$:

$$9|(1 + 2^3 + 3^3) = 27 \ldots \text{ to platí.}$$

b) Dokažmě platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, která má v našem případě tvar

$$\underbrace{9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}_{V(n)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{9|((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)}_{V(n+1)}.$$

Předpokládejme, že platí indukční předpoklad $V(n)$, tedy číslo $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)$ je dělitelné devíti.

Úsudek U_1: Vyjádřeme si náš předpoklad pomocí definice dělitelnosti[12]: existuje nějaké přirozené číslo k, že

$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = 9k.$$

Úsudek U_2: Upravujme číslo $((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)$ a snažme se jej vyjádřit jako násobek čísla 9 – pokud se nám to podaří, budeme vědět, že je dělitelné devíti a důkaz bude u konce. Tak tedy:

$$((n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3) = \underbrace{(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3}_{k} + 3n^2{\cdot}3 + 3n{\cdot}9 + 27 = 9{\cdot}(k+n^2+3n+3).$$

Použili jsme pouze vzorec $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ a označení čísla k z rovnosti předpokladu. Jsme hotovi – skutečně se dala devítka vytknout z celého výrazu, tj. $(n+1)$-ní člen posloupnosti zadané naším vzorcem „zdědí“ dělitelnost devíti od členu předchozího. Protože jsme v předpokladu vyšli od libovolného přirozeného n, platí tato vlastnost pro všechna přirozená čísla. $\square$

Typ důkazu číslo 7: Důkaz existence (typ 7A) nebo protipříklad (typ 7B)

7A: Důkaz existence uvedením příkladu či konstrukcí … Uvedeme důkaz toho, že jistá struktura existuje, prostě tak, že ji sestrojíme (popíšeme její konstrukci).

7B: Vyvrácení univerzální platnosti pomocí protipříkladu … tvrzení, že něco existuje či platí v každém případě (např. pro všechna přirozená čísla) jednoduše vyvrátíme tím, že sestavíme aspoň jeden protipříklad, kdy daná skutečnost neplatí (např. najdeme jedno přirozené číslo, které zadanou vlastnost nesplňuje).

[12] Kterou jsme sice ještě neprobrali, ale řekněme si ji za čtrnáct dní a intuitivně ze střední školy chápeme, o co se jedná

Oba typy důkazu označeny číslem 7 mají společné to, že jakmile sestavíme příklad či protipříklad splňující zadané předpoklady, důkaz je hotov. Ad 7B: důkaz typu 7B je založen na skutečnosti, že negací výroku

$$\forall x \in M : \quad V(x)$$

je výrok

$$\exists x_0 \in M : \text{ neplatí } V(x_0).$$

Příklad 3.3. (studenti samostatně) Vyvraťte následující tvrzení pomocí protipříkladu: Každé přirozené číslo $n > 1$ lze „zaplatit“ sumou pouze dvoukorunových a pětikorunových mincí předaných v jisté obálce nebo kontejneru.

Řešení je jednoduché – kromě jedničky existuje ještě jedno přirozené číslo, které nelze vyčíslit sečítáním kladných násobků dvojky a pětky – najdete ho?

Tato kapitola byla zpracována podle [1], str. 6-7, příklady byly vzaty z knihy [2].

3.3 Cvičení

Cvičení 3.1. Důkaz sporem: dokažte, že $\sqrt{3}$ není racionální číslo.

Cvičení 3.2. Důkaz indukcí:

2a) Dokažte ([2], str.124, př.4), že všechny celočíselné peněžní obnosy, které jsou větší nebo rovny 4 kč, je možné vyplatit na hromadu pouze z dvojkorun a pětikorun.

2b) Dokažte ([14],str.42, př. B11a)):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

2c) Dokažte ([14],str.42, př. B11b)):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Cvičení 3.3. Pomocí důkazu typu 7 (existence nebo protipříklad) vyřešte následující úlohy:

3a) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 12 zápalek stejné délky.

3b) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 9 zápalek stejné délky.

3c) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 6 zápalek stejné délky.

Cvičení 3.4. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

4a) Pro každé přirozené číslo platí, že když je dělitelné šesti, tak je dělitelné i třemi.

4b) Přirozené číslo je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi současně.

4c) Existuje přirozené číslo takové, že když k němu přičteme pět, výsledek je větší než deset.

4d) Pokud přirozené číslo je dělitelné dvěma i třemi současně, tak je dělitelné i šesti.

Cvičení 3.5. Uvažujme výrok: Pro každé přirozené číslo platí, že když je dělitelné šesti, tak je dělitelné i třemi.

5a) Přepište tento výrok v symbolickém zápisu bez českých slov.

5b) Negujte tento výrok z části (a) symbolicky tak, aby ve výsledku nebyly závorky.

Cvičení 3.6. Proveďte negaci následujícího tvrzení, a sice podrobněji než jen stylem „není pravda, že“ nebo uvedením znaku negace před závorku – ve výsledku nesmí být znak negace před žádnou závorkou. Tvrzení zní:

$$\forall a, b, c \in Z : \quad (a|b \wedge a|c) \quad \Leftrightarrow a|(b+c).$$

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.3.

4 Množiny a Vennovy diagramy

4.1 Warm-up: Prověrka (a)

Jako dostatečný warm-up studentů ve 4. týdnu semestru poslouží prověrka (a) znalostí na první tři týdny přednášky. Bude se prověřovat:

1. definice pojmů (nemusíte si pamatovat jejich čísla);
2. tvrzení a důkazy vět 1 až 7 (nemusíte si pamatovat číslo věty, ale musíte vědět, že negace konjunkce dvou výroků je ...; nebo: s implikací jsou ekvivaletní výrokové formy .... (věta 3 ... tento tvar se používá pro nepřímý důkaz implikace) a .... (věta 6 ... tento tvar se používá pro úpravy výrokových forem, ve kterých implikaci nahradíme pomocí disjunkce); atd.
3. probraná označení a stručný matematický zápis některých výroků;
4. vysvětlení podstaty důkazů typu 1 až 7;
5. vlastnosti a grafy kvadratické funkce a lineárně lomené funkce.

Na prověrku se lze připravit na základě pročtení přednášky a projítí warmupů 2 a 3 (o funkcích) a příkladů ze cvičení, zejména příklady, které jsou v části cvičení výslovně napsány, protože ty pocházejí z loňských prověrek. Nebudou se zkoušet důkazové příklady, pouze důkazy vět 1 až 7 a vysvětlení podstaty důkazů typu 1 až 7.

4.2 Přednáška

Po tématu logiky se nyní budeme krátce zabývat druhým základním pilířem matematiky, a to je pojem množiny a množinové operace, tj. operace sjednocení ($\cup$) a průniku ($\cap$). To jsou pojmy čtenáři známé ze střední školy, nyní jen zopakujme a mírně rozšiřme celou problematiku.

Množinou M (definice 20) rozumíme soubor navzájem rozlišitelných[13] prvků, o kterých lze jednoznačně rozhodnout, že do něj patří.

Prvky množiny budeme vypisovat do složených závorek:

- označení 19: Levá závorka { a pravá závorka } označují množinu.

Například $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu přirozených čísel, čísla 1, 2, 3 jsou prvky množiny N.

Poznámka: Zadávání množiny.

Množiny lze zadávat buď výčtem prvků jako v předchozím příkladě, nebo charakteristickou vlastností, jež splňují její prvky.

[13] Tj. jeden objekt nemůže být dvakrát prvkem téže množiny: $\{6, 6\} = \{6\}$.

Příklad 4.1. Zadání množiny charakteristickou vlastností:

$$A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$$

(čteme: A je množina všech reálných čísel x takových, že $0 \leq x \leq 2$)[14] – charakteristická vlastnost množiny následuje v tomto zápisu za dvojtečkou. ⋆

Označení operací průniku a sjednocení čtenář zná – v následující definici připomeneme definici disjunktních množin, univerzální množiny a doplňku množiny:

Množiny A, B se nazývají disjunktní (definice 21), když jejich průnikem je prázdná množina ($A \cap B = \emptyset$).

Univerzální množina[15] (definice 22a) je taková množina, která obsahuje všechny prvky, které má smysl uvažovat. Doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině (definice 22b) jsou ty prvky univerzální množiny, které neleží v množině A.

Příklad 4.2. Pokud $U = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je univerzální množina a

$$A = \{\dots, -2, -1 - 0, 1, 2\},$$

tak doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině U je množina

$$\overline{A} = \{3, 4, 5, \dots\}.$$

Označení, která čtenář musí zvládnout, jsou tedy tato:

- označení 20: $\overline{A}$ … doplněk množiny A (vzhledem k univerzální množině U);
- označení 21: „:=“ … definiční, přiřazovací rovnítko, které znamená „se definuje jako …“; například lze definovat doplněk množiny A takto:

  $$\overline{A} := \{x \in U : x \notin A\}$$

  (čteme: doplněk množiny A se definuje jako množina (či označuje množinu) těch prvků x z množiny U, které nepatří do A)
- označení 22: $\emptyset$ … prázdná množina;
- označení 23: $\subseteq$ … je podmnožinou;
- označení 24: $\subset$ … je vlastní podmnožinou, tj. je podmnožinou, ale nerovná se dané množině; v matematických symbolech $A \subset B$ tehdy, když

  $$A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B.$$

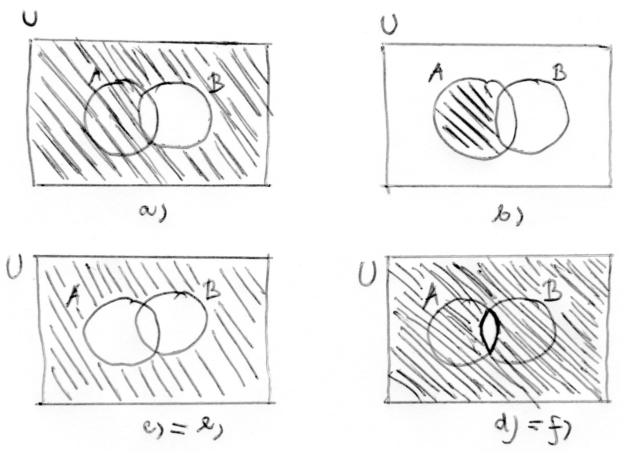
- (označení 25) rozdíl množin A a B budeme označovat sešikmeným znaménkem minus, aby bylo patrno, že se jedná o jinou operaci než odčítání reálných čísel:

  $$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\};$$

[14] Všimněte si, že dvojtečku nyní čteme „takových, že“ nebo „tak, že“.
[15] Česky: všeobecná, všeobsahující.

Vennovy diagramy (definice 23) jsou diagramy, které schematicky reprezentují množiny pomocí části roviny – část roviny označená jako M reprezentuje všechny prvky množiny M.

Příklad 4.3. Nakreslete Vennovy diagramy následujících množin[16]: a) $A\cup\overline{B}$, b) $A\cap\overline{B}$, c) $\overline{A}\cap\overline{B}$, d) $\overline{A}\cup\overline{B}$, e) $\overline{A\cup B}$, f) $\overline{A\cap B}$. Řešení najdete na obrázku 1, kde daný obdélník reprezentuje univerzální množinu U, která je nadmnožinou množin A, B.



Obrázek 1: Výsledky příkladu 4.3 (Vennovy diagramy).

Typ důkazu číslo 8: Rovnost množin Vennovými diagramy.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí Vennových diagramů – sestavíme Vennův diagram pro každou stranu rovnosti a vyšrafujeme v něm části odpovídající výsledkům daných operací; pokud pak v obou Vennových diagramech jsou vyšrafovány stejné části roviny, tvrzení o rovnosti je tím dokázáno.

(Věta 08) Pro libovolné tři množiny platí tzv. asociativní zákony vzhledem k operacím průniku a sjednocení:

$$\text{a)}\ \ (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C),\quad \text{b)}\ \ (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$$

Důkaz (typ 8) nakreslíme Vennův diagram pro každou ze stran rovnosti a porovnáme šrafované oblasti – zjistíme, že se rovnají, tj. schematický (či grafický) důkaz je hotov (vyučující na tabuli). □

Dále platí velmi zajímavé rovnosti množin, které souvisí také s operací doplňku množiny vzhledem k univerzální množině (= s definicí 22):

(věta 09) De Morganovo pravidlo (a): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}.$$

[16] Tento příklad viz [4], str. 795. Většina této kapitoly je zpracována podle [4], str. 791-800.

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

(věta 10) De Morganovo pravidlo (b): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

V dalších kapitolách budeme potřebovat pojem kartézského součinu: (definice 24) Kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$ a současně $b \in B$. Speciálně pokud $A = B$, kartézský součin $A \times A$ nazveme kartézskou mocninou neboli kartézským čtvercem. Prvky kartézského součinu se nazývají uspořádané dvojice.

- (označení 26) kartézský součin množin A a B budeme označovat jako $A \times B$, tj.

$$A \times B := \{[a; b] : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Příklad 4.4. Pro $A = \{a, b\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ lze sestavit jejich kartézský součin, který má šest prvků (= šest uspořádaných dvojic):

$$A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$$

(tedy vidíme, že u konečných množin je dán počet prvků jejich kartézského součinu součinem počtů prvků jednotlivých množin). Pozor, záleží na pořadí, protože $A \times B \neq B \times A$. Speciálně

$$B \times A = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}.$$

V uspořádaných dvojicích v hranatých závorkách tedy záleží na pořadí jednotlivých prvků.

Někdy se v úvodu do teorie množin uvádí kromě operací doplňku, sjednocení a průniku ještě operace (definice 25) symetrický rozdíl množin A, B, definovaný pomocí rovnosti

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(z obrázku Vennova diagramu 2 je patrný výsledek této operace použité na množiny A, B).

- (označení 27) Symetrický rozdíl množin A a B budeme označovat jako $A \div B$, tj.

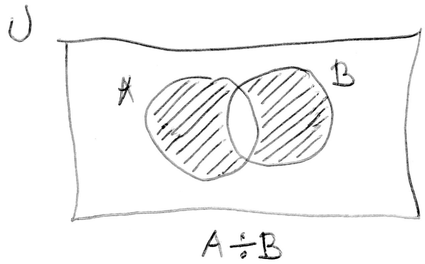
$$A \div B := \{x : x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)\}.$$

4.3 Cvičení

Cvičení 4.1. Pomocí Vennových diagramů dokažte de Morganova pravidla – věty 9 a 10.

Cvičení 4.2. Vidíte souvislost mezi větami 1 a 2 a větami 9 a 10? Z jakého důvodu tato souvislost existuje?

Cvičení 4.3. Dokažte pomocí Vennových diagramů:

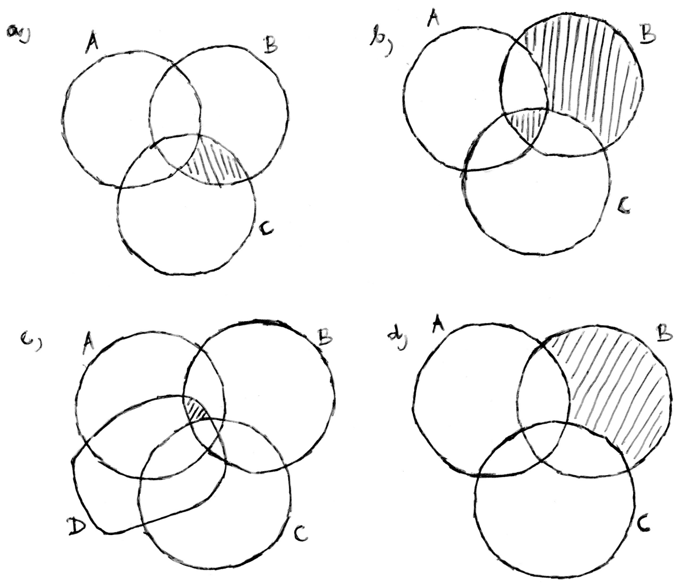


Obrázek 2: Výsledek operace symetrického rozdílu množin A, B.

3a) Pro nějaké dvě podmnožiny A, B univerzální množiny U platí: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

3b) Pro nějaké dvě podmnožiny A, B univerzální množiny U platí: $(A \cup B) \cup (A \setminus B) = A \cup B$.

Cvičení 4.4. Napište množinové výrazy, jejichž výsledkem je vyšrafovaná plocha Vennova diagramu na obrázku 3.



Obrázek 3: Ke cvičení 4.4: vyjádřete šrafovanou plochu pomocí množinových operací.

Cvičení 4.5. Prozkoumejte[17] operaci symetrického rozdílu a pomocí Vennových diagramů dokažte, že platí

5a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

5b) $A \div B = B \div A$,

5c) $A \cup B = A \div (B \div (A \cap B))$,

[17] Viz [14], str.44, př 1.2.B6.

5d) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$,

5e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

Cvičení 4.6. Vyjádřete matematickým zápisem bez jakékohokoli českého slova definice všech operací, které jsme v této kapitole prošli:

6a) $\overline{A} = \ldots$

6b) $A \setminus B = \ldots$

6c) $A \times B = \ldots$

6d) $A \cup B = \ldots$

6e) $A \cap B = \ldots$

6f) $A \div B = \ldots$

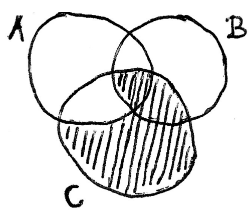
Cvičení 4.7. Uveďte de Morganova pravidla (věty 9 a 10) pouze slovně, bez jakéhokoli matematického symbolu.

Cvičení 4.8. Na univerzální množině U všech přirozených čísel jsou zadány množiny $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 10, 12, 15\}$, $C = \{3, 10, 17, 18, 19\}$. Udejte výčtem prvků množinu $(\overline{A \cup B}) \cap C$.

Cvičení 4.9.

a) Uveďte definici množiny: Množina je ...

b) Vyjádřete šrafovanou část S Vennova diagramu na obrázku 4 pomocí množin na obrázku a známých množinových operací: $S = \ldots$



Obrázek 4: Ke cvičení 4.9: vyjádřete šrafovanou plochu pomocí množinových operací.

Cvičení 4.10. Na konci jistého výrobního procesu prochází 500 součástek třemi kontrolami K_1, K_2, K_3. Zjistilo se, že 38 součástek neprošlo kontrolou K_1 (= bylo shledáno nevyhovující); 29 neprošlo K_2; 30 neprošlo K_3; 7 součástek neprošlo K_1 ani K_2; 5 neprošlo K_2 ani K_3; 8 neprošlo K_1 ani K_3; 3 součástky neprošly žádnou z kontrol. Určete, kolik součástek

a) prošlo všemi kontrolami bez vady, tj. žádná z kontrol je neshledala nevyhovujícími.

b) neprošlo právě jednou z kontrol K_1, K_2, K_3 (některou z nich).

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.4.

5 Číselné obory, dělitelnost celých čísel

5.1 Warm-up: Funkce 03 – Mocninné funkce $f(x) = x^n$ a funkce k nim inverzní

Podrobněji viz [9], str. 85-116. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Kreslení grafů mocninné funkce:
  - str. 87 … grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in N$;
  - str. 90 … grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in Z^-$;
  - str. 91, příklad 6.7;
- Hledání inverzní funkce – v každém z následujících příkladů by se hodil obrázek obou funkcí f a f^{-1} v jednom grafu, aby bylo patrno, že oba grafy jsou osově souměrné vzhledem k ose souměrnosti $y = x$:
  - str. 95 … nalezněte funkci inverzní k funkci $y = 3x - 2$ pro $D(f) = \langle -1; 2\rangle$. Včetně obou funkcí f a f^{-1} v jednom grafu.
  - nalezněte inverzní funkci k funkci $y = (x - 2)^2 + 3$ a) pro $D(f) = (-\infty, 2\rangle$; b) pro $D(f) = \langle 2, \infty)$.
  - nalezněte inverzní funkci k funkci $y = x^3$ pro $D(f) = R$.

5.2 Přednáška

Po logice a množinách je třetí odpovědí na otázku ohledně podstaty matematiky – **používání čísel různého druhu**. V tomto úvodním předmětu pouze zopakujeme základní fakta o číslech reálných a komplexních, protože přirozená čísla, celá čísla a zlomky zná každý student, který absolvoval maturitu.

Příklad 5.1. (nebo spíše otázka) Řekněte sousedovi v lavici odpovědi na následujících pět otázek:

1. Proč existuje N?
2. Proč existuje Z, nestačilo by N?
3. Proč existuje Q, nestačilo by Z?
4. Proč existuje R, nestačilo by Q?
5. Proč existuje C, nestačilo by R?

Označení daných číselných oborů N, Z, Q, R, C už bylo zmíněno v přednášce první, na tomto místě se chvíli věnujme rozdíl mezi množinami Q a R – uvedeme nyní velmi jednoduchý princip, který souvisí s důkazem typu 9, a pak pomocí tohoto principu dokážeme větu 11, která ukazuje na hlavní rozdíl mezi racionálními čísly (= čísly, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku) a iracionálními čísly (která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku).

Typ důkazu číslo 9: Dirichletův princip.

Pokud rozdělujeme $n + 1$ předmětů do n přihrádek, aspoň v jedné přihrádce najdeme po rozdělení aspoň dva předměty.

Platnost Dirichletova principu[18] je vidět „přirozeně“ = celkem s ní každý souhlasí. V tom nejhorším případě se může totiž stát, že po rozdělení n předmětů je v každé z n přihrádek jeden – ale ten poslední „n plus první“ předmět, už musíme tedy přidat do nějaké přihrádky, kde nějaký jeden předmět je ... tedy v aspoň jedné přihrádce budou po rozdělení aspoň dva předměty. Samozřejmě se může stát, že pokud předměty rozdělujeme libovolně, nikoli rovnoměrně, po rozdělení budou dva nebo tří předměty v pěti přihrádkách a řada dalších přihrádek bude prázdná – to je možné. Nás ale jen zajímá, že určitě existuje jedna přihrádka (šuplík) obsahující aspoň dva předměty – tento fakt je zaručen tím, že předmětů je více než přihrádek.

Tento velmi jednoduchý typ důkazu lze kupodivu použít při důkazu celkem důležité věty, která vystihuje rozdíl mezi číslem racionálním a číslem iracionálním.

(věta 11) Každé racionální číslo má desetinný rozvoj buď konečný, nebo periodický.

Důkaz: Uvažujme nejprve konkrétní zlomek $\frac{1}{7}$ jako vyjádření jednoho racionálního čísla a nalezněme jeho desetinný rozvoj, tj. vyjádření ve tvaru s desetinnou čárkou – všechny úvahy pak lze vztáhnout na obecné racionální číslo $\frac{m}{n}$ pro $m \in Z$, $n \in N$.
Při dělení 1 : 7 postupujeme následovně:

- $1 : 7 = 0$, zbytek 1, napíšeme desetinnou čárku do výsledku a připíšeme nulu;
- $10 : 7 = 1$, zbytek 3, ke zbytku připíšeme nulu;
- $30 : 7 = 4$, zbytek 2, ke zbytku připíšeme nulu;
- $20 : 7 = 2$, zbytek 6, let us put down another zero to the remainder;
- $60 : 7 = 8$, the remainder is 4, let us put down another zero to the remainder;
- $40 : 7 = 5$, the remainder is 5, let us put down another zero digit to the remainder;
- $50 : 7 = 7$, the remainder is 1, let us put down another zero digit to the remainder;
- Od této chvíle dělíme $10 : 7 = 1$, zbytek 3 ... ale to už tady jednou bylo, zbytky i výsledky po dělení se začínají periodicky opakovat. Proč tomu tak je?

Rozeberme si tuto situaci: Při dělení sedmi se po určité době dělenec „vyčerpá“ v tom smyslu, že neobsahuje žádné další cifry a přidáváme ke zbytku v nižších řádech pouze nuly[19]. Jediný vliv na každý další řádek písemného dělení mají tedy jen zbytky zbytky po dělení sedmi, ke kterým připisujeme stále jen nulu.

[18] Též: přihrádkový princip, anglicky – pigeonhole principle.
[19] Nám se dělenec v našem příkladu dělení vyčerpal už po prvním kroku, protože byl jednociferný.

Víme, že zbytků po dělení sedmi je sedm různých – jsou to čísla (a současně cifry) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A nyní využijeme Dirichletův (přihrádkový) princip: Stačí provést osm kroků částečného dělení po „vyčerpání“ dělence a protože možných zbytků po dělení sedmi je pouze sedm, jeden zbytek se po daných osmi krocích zopakuje dvakrát – a po zopakování daného zbytku se už periodicky opakují všechny další zbytky ve stejném pořadí, takže desetinný rozvoj našeho čísla je nekonečný, ale periodický.

Přesněji řečeno, pokud některý z dílčích zbytků je roven nule, v dělení už nepokračujeme a desetinný rozvoj takového zlomku je konečný. Tedy obecně lze říci, že při dělení $m : n$ po „vyčerpání“ dělence m (který má konečně mnoho cifer, a tak se vyčerpat někdy musí) stačí provést dalších maximálně $n + 1$ kroků a dostaneme dílčí zbytek nula (tj. desetinný rozvoj daného racionálního čísla je konečný, ukončený), nebo se některý z nenulových zbytků zopakuje (a tedy desetinný rozvoj daného čísla je nekonečný periodický). □

Poznámka: Komplexní čísla

Ke komplexním číslům[20] nyní velmi stručně, snad podle materiálu [1], str. 15,16,18:

Důvodem existence komplexních čísel je snaha najít řešení například rovnice

$$x^2 + 1 = 0,$$

která má záporný diskriminant. Z Tohoto důvodu se v matematice zavádí tzv. (označení 28) imaginární jednotka i taková, že $i^2 = -1$, a také $(-i)^2 = -1$. Pak můžeme říci, že řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ jsou i a $-i$.

Definice 26a: Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v algebraickém tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka.

Díky tomu, že každé komplexní číslo je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel $[a, b]$, lze každé komplexní číslo znázornit v tzv. Gaussově rovině (definice 26b), kde na vodorovnou osu vyneseme reálné číslo a, na svislou osu reálné číslo b a obraz komplexního čísla $z = a + bi$ je pak na průsečíků kolmice k vodorovné ose v bodě a s kolmicí ke svislé ose v bodě b – viz obr. 5.

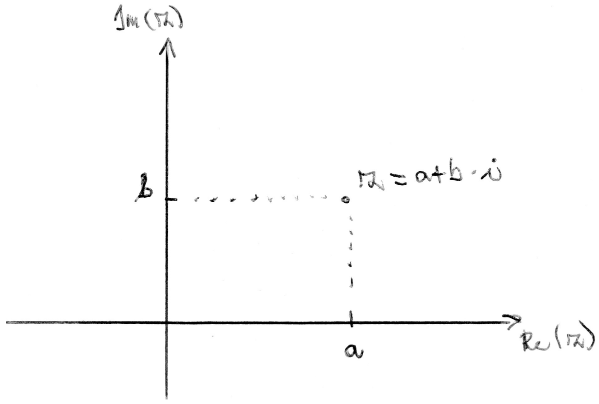
Na základě modelu komplexních čísel v Gaussově rovině lze definovat pro každé komplexní číslo kromě nuly (definice 27a) pro $z \neq 0$ tzv. argument komplexního čísla z jako úhel $\varphi = \arg z$, který svírá průvodič obrazu tohoto čísla v Gaussově rovině s kladným směrem osy $Re(z)$ (= vodorovné osy[21], na kterou vynášíme tzv. reálnou část a komplexního čísla $z = a + bi$), a (definice 27b) absolutní hodnotu neboli velikost komplexního čísla $|z|$ jako vzdálenost jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku (= jako délku tohoto průvodiče), tj. (podle Pythagorovy věty)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arg z,$$

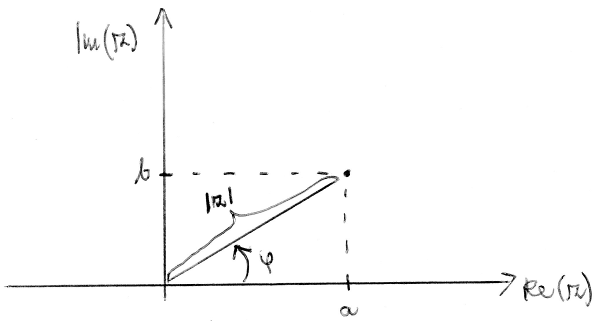
(viz obr. 6). A konečně, pokud máme definován trojůhelník a úhel, lze zavést tzv. (definice 27c) goniometrický tvar komplexního čísla z, jenž využívá délky přepony $|z|$ v

[20] Detailnějšího počítání s komplexními čísly se dotkneme v předmětu Algebra 3.

[21] Podobně $Im(z)$ označuje svislou osu, na kterou vynášíme tzv. imaginární část komplexního čísla z.



Obrázek 5: Obraz komplexního čísla $z := a + ib$ v Gaussově rovině.



Obrázek 6: Význam argumentu a velikosti komplexního čísla.

daném trojúhelníku a argumentu φ daného komplexního čísla z:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Výpočet velikosti $|z|$ komplexního čísla je patrný z Pythagorovy věty, výpočet argumentu φ plyne z téhož pravoúhlého trojúhelníku, ale pro konkrétní hodnoty a, b čísla $z = a + bi$ potřebuje přesné vyjádření pečlivější výčet:

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{rcr} 0 & \dots & a = 0,\ b = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \dots & a = 0,\ b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \dots & a = 0,\ b < 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \dots & 1.\ \text{a}\ 4.\ \text{kvadrant} \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \dots & 2.\ \text{kvadrant} \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \dots & 3.\ \text{kvadrant} \end{array} \right.$$

Příklad 5.2. Počítání s komplexními čísly:

2a) Vypočtěte součet a součin čísel $z_1 = 2 - i$ a $z_2 = 1 + 3i$.

2b) Vypočtěte podíl čísel $z_1 = 2 - i$ a $z_2 = 1 + 3i$.

2c) Vypočtěte i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, atd.

Řešení příkladu: ad 2a) Uvidíme, že součtem i součinem dvou komplexních čísel je zase komplexní číslo:

$$z_1 + z_2 = 2 - i + 1 + 3i = (2 + 1) + i(-1 + 3) = 3 + 2i;$$

dále protože $i^2 = -1$, dostaneme při násobení komplexních čísel

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - i) \cdot (1 + 3i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 2 + 5i - 3(-1) = 5 + 5i;$$

ad 2b) Aby podílem dvou komplexních čísel bylo komplexní číslo, nesmíme dělit nulou, ale jinak pro nenulové z_2 dostaneme výsledek „vynásobením zlomku vhodnou jedničkou“:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{2-i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{5+5i}{1+9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i;$$

Ve jmenovateli součinu zlomků jsme užili vzorec $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ – tímto způsobem vždy lze odstranit imaginární jednotku i ze jmenovatele daného podílu – tj. výsledkem dělení komplexního čísla nenulovým komplexním číslem je zase komplexní číslo.

ad 2c) Víme, že $i^2 = -1$; proto lze další mocniny imaginární jednotky počítat

$$\begin{aligned}
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;\\
i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1\\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;\\
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1;\\
i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;\\
i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = 1;\\
&\text{atd.}
\end{aligned}$$

Z toho je vidět, že vyšší mocniny imaginární jednotky i můžeme vždy redukovat na reálné číslo nebo na $\pm i$, a tedy i umocněním komplexního čísla dostaneme opět komplexní číslo.

Poznámka: dělení celých čísel beze zbytku a se zbytkem

Definice 28: Celé číslo a beze zbytku dělí neboli je dělitelem celého čísla b, když existuje celé číslo q tak, že platí $b = a \cdot q$. Pokud číslo $qinZ$ s touto vlastností neexistuje, říkáme, že a nedělí (není dělitelem čísla) b.

Studenti pozor, dělitelnost známou ze střední školy jsme trochu rozšířili i na záporné dělitele, a tím se počet dělitelů každého celého čísla zdvojnásobil – kromě kladného znaménka existují i dělitelé se stejnou absolutní hodnotou, jen se jedná o záporná čísla.

Definice 29: Každé celé číslo b má vždy následující čtyři dělitele: $1, -1, b, -b$ … tito dělitelé se nazývají nevlastní dělitelé čísla b. Všichni ostatní dělitelé (pokud nějací existují) se nazývají vlastní dělitelé čísla b. S tím souvisí další pojem – definice 30 – celé číslo p se nazývá prvočíslo, pokud má pouze nevlastní dělitele; pokud má i vlastní dělitele, nazývá se složené číslo.

(Věta 12) - věta o dělení se zbytkem

Pro libovolná celá čísla $a > 0$, $b \geq 0$ existuje dvojice celých čísel q, r takových[22], že $q \geq 0$, dále $0 \leq r < a$, a platí

$$b = a \cdot q + r.$$

Důkaz tohoto tvrzení je příkladem důkazu indukcí (typu 6), proto jej provedeme[23]:

Dokažme indukcí pro pevné a a měnící se b:

a)

$$\begin{array}{lcll} b = 0 & \Rightarrow & 0 = a \cdot 0 + 0, & \text{tj. } q = 0, \quad r = 0 \\ b = 1 & \Rightarrow & 1 = a \cdot 0 + 1, & \text{tj. } q = 0, \quad r = 1 \\ b = 2 & \Rightarrow & 2 = a \cdot 0 + 2, & \text{tj. } q = 0, \quad r = 2 \\ \vdots & & & \\ b = a & \Rightarrow & a = a \cdot 1 + 0, & \text{tj. } q = 1, \quad r = 0 \end{array}$$

b) Pokusme se nyní dokázat obecný krok, tj. implikaci[24]

$$V(b) \quad \Rightarrow \quad V(b+1).$$

Předpokládejme, že platí $V(b)$, tj. existují q_b, r_b tak, že

$$b = a \cdot q_b + r_b.$$

Zkusme nyní přičíst k oběma stranám rovnice jedničku – na levé straně tím dostaneme dělence $(b+1)$, který nás právě zajímá:

$$b + 1 = a \cdot q_b + r_b + 1.$$

Nyní mohou nastat dvě situace: buď $r_b + 1 < a$, a pak hledané q_{b+1}, r_{b+1} existují ve tvaru $q_{b+1} = q_b$, $r_{b+1} = r_b + 1$; nebo (při druhé možné situaci) $r_b + 1 = a$, a pak

$$b + 1 = a \cdot q_b + a = a \cdot (q_b + 1)$$

a hledané hodnoty jsou $q_{b+1} = q_b + 1$, $r_{b+1} = 0$. Tedy platí i $V(b+1)$, našli jsme podíl i zbytek pro dělení čísel $(b+1)$ a a. V obou případech jsme našli celá čísla q_{b+1}, r_{b+1} tak, aby platilo $b + 1 = a \cdot q_{b+1} + r_{b+1}$.

Následující tři matematické věty jsou důležité věty z teorie i praxe dělitelnosti celých čísel. Bylo by možné o nich mluvit více, ovšem zde jsou uvedeny jako zajímavé věty z hlediska svého důkazu – na procvičování důkazových metod (viz cvičení).

[22] Označení pramení z anglického quotient = podíl, remainder = zbytek.

[23] Tvrzení se zdá celkem zřejmé, ale musíme provést buď existenční důkaz (typ 7 … že daný podíl a zbytek sestrojíme pro jakoukoli dvojici a, b … viz [1], věta 4.2 na str. 23), nebo tvrzení univerzálně dokázat indukcí pro nekonečně mnoho dvojic (typ 6 … viz [15], str.13) – tuto druhou variantu si nyní projdeme. Důkaz je zkrácen díky nápadu Jana Pokorného.

[24] Označení: $V(b)$ … tvrzení platí pro b.

Věta 13. Pro celá čísla a, b, c platí:

$$\text{a) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c);$$
$$\text{b) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b-c)$$

(tedy pokud a dělí dvě celá čísla, dělí i jejich součet, a dělí také jejich rozdíl).

Důkaz: viz cvičení.

Věta 14. (Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele přirozených čísel a, b)[25]: Přeznačme si čísla a, b tak, aby $b \geq a$. Proveďme nyní následující posloupnost dělení se zbytkem (podle věty 12):

$$\begin{array}{rlll}
b : a = q_0, \text{ zbytek je } r_0, & \text{tedy máme vztah} & (v) & b = a \cdot q_0 + r_0; \\
a : r_0 = q_1, \text{ zbytek je } r_1, & \text{tedy máme vztah} & (iv) & a = r_0 \cdot q_1 + r_1; \\
r_0 : r_1 = q_2, \text{ zbytek je } r_2, & \text{tedy máme vztah} & (iii) & r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2; \\
 & & \vdots & \\
r_{n-2} : r_{n-1} = q_n, \text{ zbytek je } r_n, & \text{tedy máme vztah} & (ii) & r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n; \\
r_{n-1} : r_n = q_{n+1}, \text{ zbytek je } 0, & \text{tedy máme vztah} & (i) & r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1};
\end{array}$$

Pak poslední nenulový zbytek r_n v této posloupnosti dělení je roven největšímu společnému děliteli čísel a, b.

<u>Důkaz:</u> Protože $a > r_0 > r_1 > \ldots$, tak po konečném počtu kroků musí nastat $r_{n+1} = 0$. Další důkaz provedeme ve dvou krocích: a) dokážeme, že $r_n|a$, $r_n|b$; b) dokážeme, že každý jiný dělitel j, který dělí a i b, dělí i r_n.

ad a) Uvažujme vztahy $(i), (ii), \ldots, (v)$ z tvrzení věty (postupujeme nyní od spodního vztahu (i) k hornímu vztahu (v)):

$$\begin{array}{rl}
(i) \overset{v.13a}{\Rightarrow} & r_n | r_{n-1} \\
(ii) \overset{v.13a}{\Rightarrow} & r_n | (r_{n-1} \cdot q_n + r_n), \text{ tj. } r_n | r_{n-2} \\
\vdots & \\
(iii) \overset{v.13a}{\Rightarrow} & r_n | r_0 \\
(iv) \overset{v.13a}{\Rightarrow} & r_n | (r_0 \cdot q_1 + r_1), \text{ tj. } r_n | a \\
(v) \overset{v.13a}{\Rightarrow} & r_n | (a \cdot q_0 + r_0), \text{ tj. } r_n | b
\end{array}$$

Z posledních dvou řádků plyne, že r_n je společným dělitelem čísel a i b.

[25] viz [15], str. 13-14.

ad b) Uvažujme nyní jiného dělitele j čísel a i b a postupujme nyní od horního vztahu (v) ke spodnímu vztahu (i):

$$\begin{array}{rll} (v) \overset{v.13b}{\Rightarrow} & j|b \wedge j|a & \Rightarrow \quad j|r_0 \\ (iv) \overset{v.13b}{\Rightarrow} & j|a \wedge j|r_0 & \Rightarrow \quad j|r_1 \\ (iii) \overset{v.13b}{\Rightarrow} & j|r_0 \wedge j|r_1 & \Rightarrow \quad j|r_2 \\ \vdots & & \\ (ii) \overset{v.13b}{\Rightarrow} & j|r_{n-2} \wedge j|r_{n-1} & \Rightarrow \quad j|r_n \end{array}$$

Každý jiný dělitel j čísel a, b je i dělitelem čísla r_n (viz poslední řádek), tj. r_n je ze všech dělitelů čísel a, b ten největší. $\square$

Věta 15. (Bezoutova[26] rovnost) Pro libovolná celá čísla a, b existují celá čísla u, v taková, že platí:

$$a \cdot u + b \cdot v = \mathrm{NSD}(a, b),$$

kde $\mathrm{NSD}(a, b)$ je největší společný dělitel čísel a, b.

Důkaz: Podobně jako v důkazu věty 14, projdeme systém rovností věty 14 zdola nahoru:

$$r_n \overset{(ii)}{=} \underline{r_{n-2}} - \underline{r_{n-1}} \cdot q_n \overset{(...)}{=} r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1}) \cdot q_n = \underline{r_{n-3}} \cdot (-q_n) + \underline{r_{n-2}} \cdot (1 + q_{n-1} \cdot q_n) = \ldots \overset{(v)}{=} \underline{a} \cdot u + \underline{b} \cdot v.$$

5.3 Cvičení

Cvičení 5.1. Procvičte si výpočty s komplexními čísly:

1a) Pro čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$ vypočtěte jejich součet, součin, podíl a druhé mocniny;

1b) V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 + x + 1 = 0$.

Cvičení 5.2. Dokažte věty 13a a 13b důkazem přímým (typ 2) z definice číslo 28.

Cvičení 5.3. Procvičte si praktické užití věty 14: podle procesu popsaného ve větě 14 nalezněte největšího společného dělitele čísel 208 a 364. Nalezněte tohoto dělitele také druhým způsobem, a sice rozkladem čísel na součin prvočísel.

Cvičení 5.4. Pokud se vám nechce číst geniální důkaz věty 14, ve zbývajícím čase můžete dokázat (pokud jste je tedy nedělali v předmětu MA0002) následující jednoduché skutečnosti, které platí pro celá čísla. Jako první krok si ovšem všechny tři úkoly musíte přepsat pomocí symbolického matematického zápisu bez českých slov:

4a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o jedničku je dělitelná osmi;

4b) rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi;

4c) součet tří po sobě následujících celých čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.5.

[26] Čti: [bezutova]. Viz [15], str. 15.

6 Binární relace

6.1 Warm-up: Funkce 04 – Funkce exponenciální ($f(x) = a^x$) a logaritmické ($f(x) = \log_a(x)$)

Podrobněji viz [9], str. 117-150. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Str. 129, obr. 7.7: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (0; 1)$.
- Str. 129, obr. 7.6: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (1; \infty)$. Pro zapamatování si správného spárování grafů souvisejících v této a minulé odrážce platí princip, který lze snadno dokázat, že totiž **inverzní funkce k rostoucí funkci je zase rostoucí** – a analogicky **inverzní funkce ke klesající funkci je zase klesající**.
- str. 122, př. 1, př. 2 … porovnávání hodnot, které využívá znalostí o grafech funkce exponenciální;
- str. 124, př. 7.8.a) … kreslení grafu funkce exponeciální;

6.2 Přednáška

V této kapitole vyjdeme z definice kartézského součinu (definice 24) a definujeme pojem relace, který vychází z latinsko-anglického relation = příbuznost, vztah.

V běžném životě užíváme řadu relací mezi prvky dvou různých množin, např.

- „mám v rozvrhu“ je relace mezi množinou dnů v týdnu a množinou předmětů ve škole;
- „má občas snídani“ je relace mezi množinou lidí a množinou potravin (poživatin);

Příkladem relací mezi prvky jedné množiny jsou

- „je biologickým dítětem“ … relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že s každým dítětem jsou spojeni dva rodiče
- „jeho matka je“ … relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že a) jedna matka může být v relaci s více dětmi; na druhé straně, některé ženy nejsou v relaci s žádným dítětem; b) když jdeme v opačném směru, tak jedno dítě je v relaci s právě jednou matkou;
- $\leq$, $\geq$ na množině celých čísel;
- $|$ (dělí = je dělitelem) na množině přirozených čísel;
- $\subseteq$, $\supseteq$ na množině všech podmnožin dané množiny;
- atd.

Lidově řečeno, relace je množina nějakých vztahů, přičemž každý vztah spojuje dva objekty (dva prvky) buď ze dvou různých množin, nebo z jedné množiny. Platí ovšem ještě jedna věc, kterou obsahují všechny výše uvedené příklady: v tomto vztahu mezi dvěma objekty záleží na pořadí, ve kterém je uvádíme – to se rozumí samo sebou, ale zejména v relaci mezi prvky téže množiny si musíme dát pozor, který prvek uvádíme jako první a který jako druhý, aby bylo patrno, např. kdo je matka a kdo dcera; které číslo je menší než to druhé číslo, apod.

Celkem tedy shrnuto, pojem relace (což je jediný pojem, kterým se dnes budeme zabývat) je (i) množina vztahů mezi dvojicemi objektů; (ii) v těchto dvojicích většinou záleží na pořadí. Je tedy vidět, že k definici relace lze užít pojmu kartézského součinu, protože to je právě množina dvojic, ve kterých záleží na pořadí.

Definice 31a: relace mezi množinami M_1 a M_2 je nějaká podmnožina kartézského součinu $M_1 \times M_2$. Definice 31b: relace na množině M je nějaká podmnožina kartézského součinu $M \times M$.

Prvky relace jsou tedy uspořádané dvojice $[x, y]$, ve kterých záleží na pořadí. Pozor na rozdíl mezi pojmem kartézský součin a relace – kartézský součin je množina všech možných uspořádaných dvojic, které můžeme z daných dílčích množin sestavit; kdežto relace je pouze množina některých těchto dvojic. Např.

$$N \times N = \{[1;1], [2;2], [1;2], [2;1], [3;3], [1;3], [3;1], [2;3], [3;2], \ldots\},$$

ovšem např. relace „je ostře menší než“ obsahuje jen některé uspořádané dvojice přirozených čísel:

$$\text{je ostře menší než } = \{[1;2], [1;3], [2;3], \ldots\}.$$

Poznámka: Rozdíl mezi relacemi a operacemi

Kromě řady relací se v matematice používá řada operací. O operacích (např. sčítání, odčítání, průnik, sjednocení) bude ještě řeč – nyní jen zmíníme hlavní rozdíl mezi relacemi a operacemi: výsledkem operace $*$ (za hvězdičku si dosaďte např. sčítání, násobení, průnik, apod) mezi dvěma prvky a, b je obecně nějaký třetí prvek $a * b$ (např. $2 + 3 = 5$), kdežto relace jen uvádí do vztahu dané dva prvky a, b (např. $2 \leq 3$).

Poznámka: Zadávání relace

Relaci budeme buď zadávat výčtem dvojic, mezi kterými existuje vztah daného typu, například[27]

$$\rho = \{[a, b], [b, a], [b, c], [b, b]\};$$

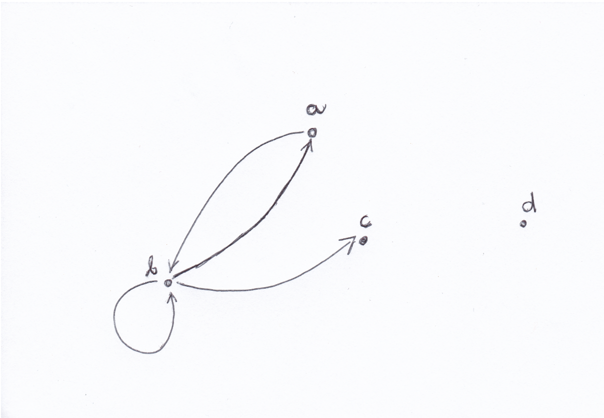
ve shodě s učebním textem [16], str.17, budeme též relaci vypisovat takovým stylem, že označení relace bude umístěno v zápise mezi danými prvky (podobně jako znak „$\leq$“ je

[27] Podle [1], str. 41-42, s tím rozdílem, že uspořádané dvojice budeme znázorňovat nikoli v kulatých závorkách, ale ve hranatých – kulaté závorky si šetříme pro výpis souřadnic vektorů v předmětu Algebra 2. Dále některé učebnice uvádějí relace označené písmenem R, i když to koliduje s označením množiny reálných čísel. Je třeba proto označení R věnovat pozornost – ale snad ze souvislostí bude vždy jasné, zda se jedná o množinu reálných čísel nebo množinu uspořádaných dvojic.

napsán mezi čísly 2 a 3, tj. v našem příkladu tatáž relace bude zapsaná pomocí vztahů

$$a\rho b,\ b\rho a,\ b\rho c,\ b\rho b.$$

Každou relaci na konečné množině můžeme též reprezentovat grafem, kde prvek $[a, b]$ znázorníme šipkou vycházející z a a směřující do b, prvek $[b, b]$ znázorníme smyčkou z b do b, atd. Tedy v našem příkaldu relace se čtyřmi prvky (= čtyřmi vztahy = čtyřmi dvojicemi)



Obrázek 7: Grafová reprezentace relace ρ – příklad.

Další způsob, jak lze reprezentovat relaci ρ, je matice relace (pro tentýž příklad):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(na průsečíku prvního řádku (= řádku prvku a) a druhého sloupce (= sloupce prvku b) matice je hodnota 1, protože uspořádaná dvojice $[a, b]$ je prvkem relace ρ; dále na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce matice je 1, protože smyčka $[b, b]$ je prvkem relace ρ; na třetím a čtvrtém řádku matice jsou samé nuly, protože c ani d není první souřadnicí žádné uspořádané dvojice z ρ, atd). Čtyřem šipkám v grafové reprezentaci odpovídají čtyři hodnoty 1 v matici relace.

U pojmu relace budeme studovat určité další definované vlastnosti a rysy, to zejména u relace typu 31b, tj. **relace na množině** M. Z historických důvodů psaní tohoto textu (a označení na obrázcích dříve skenovaných) bych rád studenty požádal, aby přijali číslování (11) až (18) těchto vlastností, i když ještě neznají vlastnosti označené (1) až (10) ... ty se dozvíte až během 2.semestru[28].

[28]Dále bych čtenáře tohoto textu rád požádal, aby si čísla vlastností (11) až (18) pokud možno zapamatoval, protože v dalším se text bude na vlastnost odkazovat jejím číslem, nikoli výpisem vlastnosti – svým způsobem by to mělo přispět k lepší orientaci mezi různými vlastnostmi a k lepšímu zapamatování. Jou to jediná čísla, která si máte pamatovat – žádná další čísla vět, definic, typů důkazu nejsou důležitá. Vlastnosti (11) až (20) budou podbarvena zeleně, podobně jako definice – jedná se o definice, ale nebudeme je do číslování definic zahrnovat.

Příklad 6.1 (vyučující – studenti) V následujících definicích řekněte,

(i) jak lze danou vlastnost poznat z grafové reprezentace relace (a z reprezentace maticí);

(ii) uveďte příklad této relace ze života nebo z matematiky.

Relace ρ na množině M se nazývá (musíte znát tyto definice slovně z poznámky pod čarou, ale i ve stručném matematickém zápisu)

reflexivní, když $\forall x \in M \ : x\rho x$ (vlastnost (11))

(Slovně: Každý prvek zadané množiny je v relaci se sebou samotným);

antireflexivní, když $\forall x \in M \ : \neg(x\rho x)$; (vlastnost (anti-11))

(Slovně: Žádný prvek zadané množiny není v relaci se sebou samotným);

symetrická, když $\forall x, y \in M \ : x\rho y \Rightarrow y\rho x$; (vlastnost (12))

(Lidově: každý vztah, který existuje, je oboustranný! Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a musí s každou dvojicí různých prvků obsahovat i dvojici těchto prvků v opačném pořadí);

antisymetrická, když $\forall x, y \in M \ : (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$; (vlastnost (anti-12))

(Lidově: žádný vztah (kromě vztahu k sobě samému) není oboustranný. Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a nesmí s žádnou dvojicí různých prvků obsahovat také dvojici prvků v opačném pořadí);

tranzitivní, když $\forall x, y, z \in M \ : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$; (vlastnost (13))

(Lidově řečeno: Relace dědičnosti, neboli prvek z automaticky zdědí od prvku y i jeho vztah k prvku x. Přesně matematicky: Pokud prvek x je v relaci s prvkem y a prvek y je v relaci s prvkem z, tak musí být i prvek x v relaci s prvkem z);

úplná, když $\forall x, y \in M \ : x\rho y \vee y\rho x$; (vlastnost (14))

(Pro každou dvojici prvků (nebo i stejné prvky) musí platit, že prvek x je v relaci s prvkem y nebo prvek y je v relaci s prvkem x).

Poznámky k úplné relaci. Z definice úplné relace je vidět, že úplná relace je automaticky reflexivní (tj. pro $x = y$ plyne, že $x\rho x$. Někdy se úplná relace definuje na základě podmínky, která platí jen pro navzájem různé prvky, tj. zhruba jako

$$\forall x, y \in M \ : x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x;$$

my se ovšem budeme držet té definice úplné relace, která zahrnuje i reflexivitu. Tato rozdílnost v definici zpravidla nehraje roli, protože většina relací, které jsou zajímavé pro naše studium a používané v praxi, jsou úplné a současně reflexivní.

A ještě jedna poznámka k úplné relaci: úplná relace stále ještě nemusí být rovna kartézskému součinu daných množin (nebo kartézské mocnině dané množiny): Například relace „$\leq$“ na množině přirozených čísel je úplná, ale neobsahuje všechny možné uspořádané dvojice z kartézského čtverce (= kartézské druhé mocniny) $N \times N$, protože například $[2; 1]$ není prvkem relace „$\leq$“.

Příklad 6.2 (v trojicích, jen studenti) Vezměte si stránku A4 a rozdělte na osm částí. V každé části nakreslete pět bodů znázorňujících pětiprvkovou množinu, označte je a, b, c, d, e. Do množiny šipkami znázorněte relaci, která

1. je reflexivní,
2. je antireflexivní,
3. není ani reflexivní, ani antireflexivní[29],
4. je symetrická,
5. je antisymetrická,
6. není ani symetrická, ani antisymetrická[30],
7. je tranzitivní,
8. není tranzitivní.

Příklad 6.3 (v trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace | (dělí, je dělitelem) na množině$(Z, \cdot)$? Relaci | definujeme normálně, jak bychom u dělitelnosti čekali:

$$\forall x, y \in Z : \quad x|y \Leftrightarrow (\exists p \in Z : y = x \cdot p)$$

Příklad 6.4 (vyučující – studenti) Jen dvě otázky, než pokročíme k vážnějším příkladům:

- Může být některá relace symetrická a antisymetrická současně? $\star$

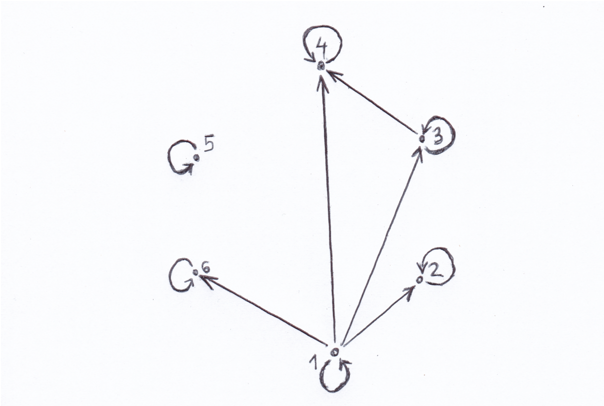
A nyní už zajímavější příklady:

Příklad 6.5 (v trojicích, jen studenti) U následujících příkladů rozhodněte, jaké vlastnosti splňují zadané relace:

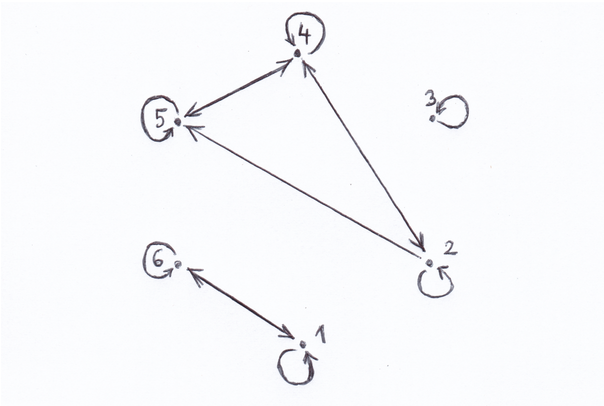
a) Relace $\leq$ na množině $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

b) relace $\|$ (být rovnoběžný) na množině přímek v rovině;

c) Relace je zadána grafovou reprezentací[31] na obrázku 8:



Obrázek 8: Příklad 6.5.c.



Obrázek 9: Příklad 6.5.d.

d) Zadání opět grafem[32], obrázek 9:

Definice 32: Inverzní relace ρ^{-1} k relaci ρ je taková relace, která obsahuje právě ty uspořádané dvojice, které byly utvořeny z prvků relace ρ přehozením pořadí prvků.

Tedy platí

$$\rho^{-1} = \{[y,x] \in M \times M \quad : \quad [x,y] \in \rho\}.$$

Inverzní relaci k zadané relaci sestrojíme velmi jednoduše v grafové reprezentaci – v inverzní relaci se všechny šipky grafové reprezentace otočí opačným směrem (a smyčky zůstanou, protože na orientaci smyčky v grafové reprezentaci prvku $[x;x]$ nezáleží). V maticové reprezentaci se matice transponuje podle hlavní diagonály, tj. pro ty, kdo ještě nerozumí, o čem je řeč: řádky maticové reprezentace relace ρ se napíší do sloupců maticové reprezentace relace ρ^{-1}.

[29] Takové relace existují, protože vlastnosti reflexivity a antireflexivity nejsou si navzájem negacemi.
[30] Takové relace existují, protože vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou si navzájem negacemi.
[31] [16], str.20, obr. 2a.
[32] [16], str.20, obr. 2b.

6.3 Cvičení

Cvičení 6.1. Nakreslete všechny relace (v grafové reprezentaci) na a) jednoprvkové možině, b) na dvouprvkové množině, c) na tříprvkové množině; d) pokuste se vyslovit větu o počtu všech relací na $n-$prvkové množině.

Cvičení 6.2. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická a současně není tranzitivní.

Cvičení 6.3. Pokud dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou obě tranzitivní, pak jejich sjednocení $\rho_1 \cup \rho_2$ je také tranzitivní. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení v předchozí větě[33].

Cvičení 6.4. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická a obsahuje mimo jiné také prvky $[3; 4]$ a $[4; 3]$.

Cvičení 6.5. a) Je relace dělitelosti $|$ antisymetrická na množině N? b) Je relace dělitelnosti $|$ antisymetrická i na množině Z?

Cvičení 6.6. Na množině Z je dána relace ρ definovaná vztahem

$$x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Určete její vlastnosti, zejména ověřte (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14).

Cvičení 6.7. Negujte vlastnost (12) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.8 Negujte vlastnost anti-(12) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost anti-(12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.9. Negujte vlastnost (13) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (13) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.10. Podmnožiny X, Y množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou v relaci ρ, když $X \cup Y = A$. Zjistěte, které z vlastností (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14) platí pro tuto relaci.

[33] Pokud si studenti neví rady, doporučte nakreslení tří obrázků: jeden obrázek pro relaci ρ_1, druhý pro relaci ρ_2 a třetí pro relaci $\rho_1 \cup \rho_2$. Dále doporučte studentům tvrzení spíše vyvracet než dokazovat.

Cvičení 6.11. Na množině přirozených čísel je dána relace ρ_1 takto: $x\rho_1 y$, když $x \cdot y$ je liché číslo. Zjistěte, jaké vlastnosti ((11), anti-(11), (12), anti-(12), atd.) má tato relace.

Cvičení 6.12. Ve fotbalové lize hraje[34] v každém ročníku každý tým s každým jiným týmem dva zápasy, z toho jeden zápas se hraje na hřišti jednoho týmu a druhý na hřišti druhého týmu. Definujme relaci $a\rho_2 b$ tehdy, když tým a hraje proti týmu b na svém hřišti v daném roce. Určete vlastnosti relace na množině všech týmů ligy v daném ligovém ročníku.

Cvičení 6.13. Co se ještě nedělalo z příkladů B1 (tento příklad obsahuje inverzní relaci), B2, B6, B8, B9, B10, B11 na stranách 48-49 sbírky [14].

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.6.

[34] Tento systém platil do roku 2018, v příštím roce v ČR v první fotbalové lize to bude jinak.

7 Ekvivalence a rozklady

7.1 Warm-up: Funkce 05 – Funkce exponenciální a logaritmické II

- definice logaritmu uvádí do souvislosti pojem logaritmické funkce jako inverzní funkce k funkci exponenciální (kde neznámá x se nachází v exponentu funkce):

$$\log_a z = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = z.$$

  Pak následující příklady:

  - str. 132, příklad 1: $\log_2 8 = \ldots$
  - str. 133, příklad 2: $\log_{10} 0{,}01 = \ldots$
  - str. 134, příklad 4: $\log_8 t = 3 \ \Rightarrow t = \ldots$
  - str. 134, příklad 5: $\log_a 100 = 2 \ \Rightarrow a = \ldots$

- str. 131, příklad 7.16 … příklad na porovnávání hodnot;
- str. 131, příklad 7.18 … logaritmické nerovnice.
- str. 134, příklady 7.23, 7.26 … výpočet hodnot, jednoduché logaritmické rovnice.
- str. 135-136 … věty o logaritmech: protože logaritmy jsou vlastně mocniny, tak z pravidel pro mocniny vyplývají i pravidla pro logaritmy:

$$\begin{aligned} \log_a(r \cdot s) &= \log_a r + \log_a s \\ \log_a\left(\frac{r}{s}\right) &= \log_a r - \log_a s \\ \log_a\left(r^s\right) &= s \cdot \log_a r \end{aligned}$$

- Str. 136, příklad 1 … úprava výrazu s logaritmy (pomocí výše uvedených vzorců);
- str. 138, př. 7.30 … další počítání s logaritmy podle vzorců;
- Mezi logaritmy různých základů existuje vztah, který převádí logaritmus jistého základu na logaritmus jiného základu. Z těchto vzorců se nám bude hodit speciálně převod všech základů na logaritmus o tzv. přirozeném základu (označení 29)

$$\ln x := \log_e x,$$

  kde $e = 2{,}718281828459\ldots$ je Eulerovo číslo, o kterém už byla řeč v kapitole 10. Převodní vzorec je tvaru

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

  (vzorec lze zapamatovat tím způsobem, že ve funkci $\log_a x$ píšeme v jistém smyslu x nad hodnotu a, respektive a je napsáno v dolním indexu – podobně ve zlomku na pravé straně se vyskytuje podíl funkcí ln a opět argument x se vyskytuje graficky nad argumentem a)[35].

- A ještě poslední označení (označení 30): pokud u funkce $\log x$ není uveden žádný základ, zpravidla se jedná o

$$\log x := \log_{10} x$$

(není to vždy pravidlem, v některých učebnicích se výrazem $\log x$ označuje přirozený logaritmus – v tom případě by to ovšem učebnice měla dát čtenáři vědět; v tomto textu $\log x$ znamená logaritmus o základu 10 a pro přirozený logaritmus budeme užívat jeho klasickou značku $\ln x$).

7.2 Přednáška

V minulých dvou kapitolách jsem se zabývali studiem relací, které splňují vlastnosti (11), (anti-12), (13) – uspořádáními. Nyní se budeme zabývat relacemi, kterých se v matematice též objevuje celá řada a které též splňují tři vlastnosti, jen druhá vlastnost je oproti minulým dvou kapitolám obměněna[36].

Definice 33: Relace ρ na množině M se nazývá ekvivalence, pokud splňuje vlastnosti (11), (12) a (13).

Příklad 7.1. Relace rovnoběžnosti na množině přímek v rovině je ekvivalence (viz příklad 6.5.b). Ověřte, že platí vlastnosti (11), (12), (13).

Příklad 7.2. Na množině všech zlomků (= všech racionálních čísel) existuje známá ekvivalence ρ mezi těmi zlomky, které všechny lze zkrátit na jeden základní tvar. Tuto relaci ekvivalence na množině Q všech zlomků lze definovat takto:

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \in \rho \text{ tehdy, když platí } ad = bc.$$

Například $\frac{3}{5}$ je číslo ekvivalentní s číslem $\frac{15}{25}$, které lze převést na $\frac{3}{5}$ vykrácením čitatele i jmenovatele pěti (platí tedy definiční podmínka $3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$).

Nebo číslo $\frac{-1}{3}$ je v ekvivalenci s číslem $\frac{-3}{9}$, které lze převést na $\frac{-1}{3}$ vykrácením třemi (protože platí $(-1) \cdot 9 = 3 \cdot (-3)$), atd.

S pojmem relace ekvivalence velmi úzce souvisí další pojem, a to rozklad množiny.

Definice 34: Řekneme, že systém podmnožin M_i množiny M tvoří rozklad množiny M, když

[35] Tento převodní vzorec budou studenti potřebovat v předmětu matematická analýza – při derivaci či integraci logaritmů různých základů obvykle převádíme na základ přirozený, Eulerovo číslo, a pak teprve provádíme integraci či derivaci. Hodí se nám přitom vědět, že $\ln a$ je konstanta, protože základ a se nemění, tak proto s $\ln a$ zacházíme při integraci či derivaci stejně jako s jakoukoli jinou konstantou. Také díky vzorci je možné si pamatovat (nebo mít tabulky) pouze logaritmy o přirozeném základu a všechny logaritmy o ostatních základech pomocí toho přirozeného základu spočítat.

[36] A vracíme se též k reprezentaci relací pomocí tzv. grafu = soustavy orientovaných šipek mezi jednotlivými prvky, tj. Hasseův diagram z minulých dvou kapitol je čistě určen k reprezentaci uspořádaných množin.

a) $M_i \neq \emptyset$;

b) $\bigcup_{i=1,\dots,n} M_i = M$;

c) $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Tj. ad a) množiny $M_i$jsou neprázdné, ad b) sjednocením množin M_i je celá množina M, a ad c) množiny M_i jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě z nich mají prázdný průnik.

Příklad 7.3. Vypište (a znázorněte graficky) všechny možné rozklady tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$. Řešení: viz příprava … takových možných rozkladů existuje pět: a) rozklad M na tři jednoprvkové podmožiny, b) rozklad M na $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c\}$; c) rozklad M na $M_1 = \{a, c\}$ a $M_2 = \{b\}$; d) rozklad M na $M_1 = \{b, c\}$ a $M_2 = \{a\}$; e) a konečně, rozklad M na jedinou tříprvkovou podmnožinu $M_1 := M$. □

Pojem rozkladu je spojen s definicí ekvivalence následujícími dvěma způsoby:

a) Konstrukce ekvivalence na základě rozkladu

Je zadán rozklad množiny M – definujeme-li relaci E vztahem

$$xEy \Leftrightarrow x, y \in M_i \quad \text{pro nějaké } i,$$

(prvky x, y jsou v relaci, když leží ve stejné třídě rozkladu), pak tato relace je ekvivalence a nazývá se relace určená (= indukovaná) rozkladem množiny M (definice 35).

Příklad 7.4. Napište relaci ekvivalence indukované (= určené) každým z rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$ v předchozím příkladu. Řešení: viz tabule.

Příklad 7.5. (jen studenti) a) Nakreslete všechny možné rozklady čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$; b) jinou barvou do diagramů těchto rozkladů vyznačte (pomocí grafové reprezentace) relaci ekvivalence indukovanou vždy daným rozkladem. Na obě části úkolu máte dohromady deset minut.

b) Konstrukce rozkladu na základě ekvivalence

Je zadána ekvivalence E na množině M – definujeme-li rozklad M způsobem „v jedné třídě rozkladu leží právě ty prvky, které jsou navzájem všechny po dvojicích ekvivalentní", dostaneme také strukturu označenou stejně jako v předchozí definici s tím rozdílem, že první nebylo vejce, ale slepice (promiňte – první nebyl rozklad, ale ekvivalence), a množina $M/_E$ se nazývá (definice 36) faktorová množina množiny M podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina[37], značíme (označení 31)

$$M/_E := \{M_1, M_2, \dots, M_n\}.$$

Pro upřesnění, které se nám bude hodit v předmětu Algebra 1, dodejme, že jednotlivé třídy M_i považujeme za prvky této faktormnožiny $M/_E$.

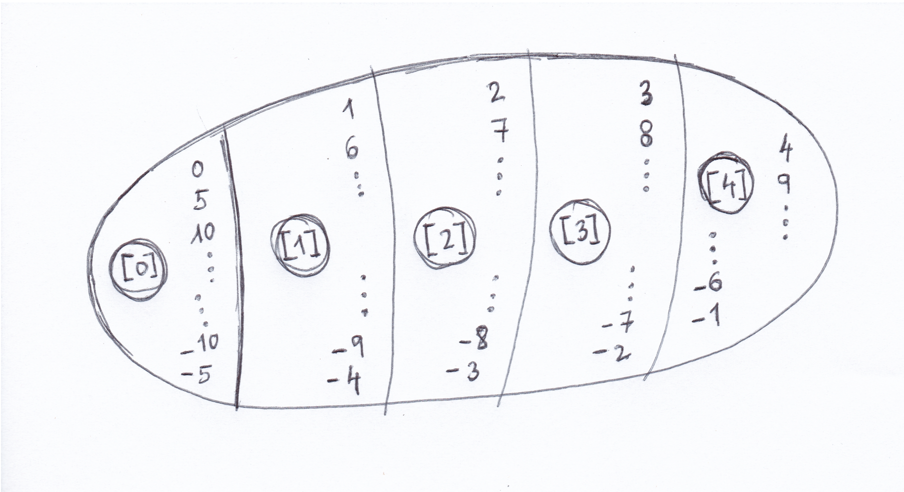
[37] Česky: rozkladová množina (ale vžil se anglický název, FACTOR (jako sloveso) znamená ROZLOŽIT).

Ad příklad 7.1. Pokud se vrátíme k relaci = (rovnost racionálních čísel), tak v jedné třídě rozkladu $Q/_=$ jsou právě ty zlomky, které lze krácením či rozšířením převést navzájem jeden na druhý.

Než přikročíme k důležitému příkladu 7.6, definujeme na množině Z relaci kongruence:

- Definice 37: celá čísla a, b jsou kongruentní podle modulu n, pokud $n|(b-a)$;
- Označení 32 vztahu z definice 37: $a \equiv b \pmod{n}$;

Příklad 7.6. Podle relace kongruence podle modulu 5 lze množinu celých čísel rozdělit do pěti podmnožin.



Obrázek 10: Množina zbytkových tříd Z_5.

V této situaci lze nyní říci:

a) Označíme-li znakem E danou relaci kongruence, můžeme psát xEy, když x, y náleží do stejné podmnožiny rozkladu … tato relace je relací ekvivalence na Z (je to relace reflexivní (např. $5 \equiv 5$), symetrická (např. $5 \equiv 10$ implikuje[38], že $10 \equiv 5$), tranzitivní ($5 \equiv 10,\ \ 10 \equiv 30 \ \ \Rightarrow 5 \equiv 30$).

b) Označíme-li tyto podmnožiny $M_0 := [0]$, $M_1 := [1]$, $M_2 := [2]$, $M_3 := [3]$, $M_4 := [4]$, tak systém podmnožin $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ tvoří rozklad množiny Z podle ekvivalence E.

c) Když se na M_i přestaneme dívat jako na množiny a začneme se na ně dívat jako na prvky, dostaneme pětiprvkovou množinu

$$Z/_E := \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\},$$

kde všechna čísla v každé množině M_i jsme ztotožnili v jedno a označili za jediný prvek. Je to faktorová množina (= rozkladová množina) množiny Z podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina. □

[38] Česky: z toho plyne, že …

Relace E kongruence podle modulu 5 a k ní příslušná faktormnožina jsou důležitým příkladem „ze života“ = ze situací matematiky na SŠ i ZŠ: v jedné třídě ekvivalence E jsou právě ta celá čísla, které mají po vydělění pěti tentýž zbytek, neboli jejich obrazy na číselné ose jsou stejně vzdáleny směrem doprava od obrazu nejbližšího násobku čísla 5.

7.3 Cvičení

Cvičení 7.1. V relaci ekvivalence E jsou navzájem ty prvky z množiny $M = \{1, 2, \dots, 20\}$, které dávají po vydělení číslem 4 stejný zbytek. Popište (nebo nakreslete) faktormnožinu $M/_E$ množiny M podle relace E.

Cvičení 7.2. Je zadán rozklad množiny M na podmnožiny $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{2, 4, 10\}$, $M_3 = \{6, 7, 8\}$,
$M_4 = \{9\}$. Popište (nebo nakreslete) relaci ekvivalence indukovanou (určenou) tímto rozkladem.

Cvičení 7.3. Na množině $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{2}{1}, \frac{8}{4}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}\}$ definujte nějakou užitečnou (tu nejznámější či nejpřirozenější) relaci ekvivalence E (řekněte, kdy jsou dva prvky ve vztahu relačním) a nakreslete obrázek faktormnožiny podle této ekvivalence.

Cvičení 7.4. Další cvičení: příklady ze sbírky [14], str. 58-59, příklady 1.7.A3, 1.7.A4, 1.7.B1, 1.7.B4, 1.7.B5, vsunout jeden příklad na relaci kongruence modulo 4, B6, B7 (geometrické ekvivalence v rovině), B8, B9 (příklad B9 je důkazový, ale dobrý).

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.7.

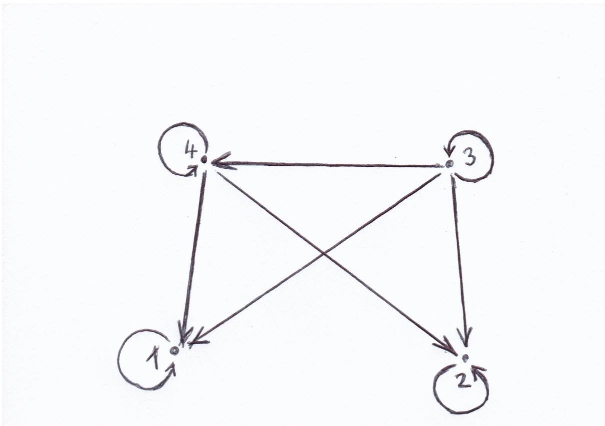
8 Uspořádané množiny

8.1 Warm-up: Prověrka (b)

Prověrka (b) shrnuje znalosti z týdnů 1 až 7, dílčí pokyny obdržíte emailem. Těžiště je zaměřeno na týdny 4 až 7, ale může se objevit i něco z prvních tří týdnů.

8.2 Přednáška

Příklad 8.1. (ve trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace na obrázku[39] číslo 11?



Obrázek 11:

Relace podobného typu, jako je ta na obrázku, jsou v matematice natolik důležité, že mají své jméno a budeme se jim věnovat téměř dva týdny naší exkurze po základních pojmech matematiky. Kupodivu si lze položit otázku: co mají společného relace $\leq$ na množině racionálních čísel, relace $\subseteq$ (být podmnožinou) na množině všech podmnožin jisté množiny a relace dělitelnosti $\mid$ na množině všech přirozených čísel. Jedná se o tři různé vztahy mezi prvky různého charakteru, a přesto mají tyto tři základní relace v matematických přístupech na základní a střední škole něco společného, co je charakterizuje. A tak dříve než v navazujících semestrech se budeme věnovat tomu, co a jak učit na základní (a střední) škole v matematice, nyní v tomto vysokoškolském úvodu do studia matematiky, se chvíli podívejme na otázku, kterou by si položili studenti v kursu „matematika pro dospělé“: co mají relace „menší nebo rovno“, „je podmnožinou“ a „je dělitelem“ společného? Ukazuje se, že tyto celkem různorodé relace mají společné celkem tři vlastnosti: (11), anti-(12) a (13). Matematicky hloubavý člověk v této situaci zbystří, odstoupí od konkrétních středoškolských operací a studuje právě jen i obecné struktury, které splňují uvedené tři vlastnosti – tyto struktury se nazývají uspořádané množiny.

Definice 38: Binární relace na množině P, která je reflexivní (11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13), se nazývá uspořádání. Množina P, na které je definovaná relace uspořádání, se nazývá částečně uspořádaná množina – v textu [16][40] je označována

[39] [16], str.24.
[40] Str.23, definice 1.6.

poněkud nezvyklým termínem poset (z anglického Partially Ordered SET)[41].

Poznámka: obecné označení relace uspořádání.

Ikdyž relace uspořádání je blízká relaci $\leq$ (respektive $\leq$ je čtenáři známým příkladem uspořádání), budeme ji označovat (v souladu s textem [16]) obecnějším symbolem $\trianglelefteq$, který zaručuje, že se ne vždy bude jednat o relaci zcela totožnou s klasickou relací $\leq$ na množině celých či reálných čísel. Obecnou uspořádanou množinu budeme tedy zapisovat zápisem $(P, \trianglelefteq)$.

Definice 39: Pro relaci uspořádání zavádíme kromě grafové reprezentace přehlednější strukturu, a sice tzv. Hasseovy diagramy, ve kterých

1. reflexivitu (= smyčky) nevyznačujeme, protože ji automaticky předpokládáme u všech prvků uspořádané množiny;

2. šipky odstraníme tak, že Hasseův diagram jednoznačně orientujeme zdola nahoru, a pak místo šipek spojujeme prvky neorientovanou úsečkou – jestliže prvek je spojen s jiným prvkem výš v diagramu, tak je s ním v relaci;

3. hranami vyznačíme jen bezprostředně následující prvky – ostatní šipky vyplývající z tranzitivity nevykreslujeme; pak pokud $x \trianglelefteq y$, tak je mezi prvky x a y řetězec spojů mezi bezprostředními předchůdci a následovníky;

4. antisymetrie bude z nákresů patrna též – ta ovšem spočívá spíše v neexistenci oboustranných šipek mezi různými prvky (a právě díky neexistenci oboustranných šipek můžeme orientaci šipek z částečně uspořádané množiny odstranit).

Příklad 8.2 – Hasseův diagram. Pro ilustraci je na obrázku 12 nakreslen Hasseův diagram pro pětiprvkovou množinu $P = \{a, b, c, d, e\}$ a relaci ρ na P definovanou výčtem uspořádaných dvojic:

$$\rho = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [a, d], [d, e], [a, e], [b, d], [d, e], [b, e]\}.$$

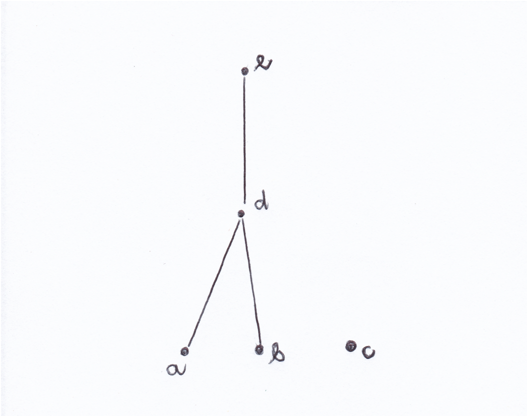
Příklad 8.3 ilustrační – Hasseův diagram: Překreslete relaci uspořádání z úvodního příkladu této kapitoly (obr. 11) do Hasseova diagramu (zde není provedeno).

Příklad 8.4. (úkol pro studenty) Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) tříprvkových posetů[42].

Označení 33: Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, označme symbolem $\trianglelefteq$ relaci uspořádání (reflexivní, antisymetrická, tranzitivní) a symbolem $\triangleleft$ relaci ostré uspořádání na množině P, pokud $\triangleleft$ je antireflexivní (anti-11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13) (ostré uspořádání je tedy uspořádání zbavené reflexivity, nemůže nastat $x \triangleleft x$ pro žádný prvek x).

[41] Je to skutečně neobvyklý termín pro češtinu, až extrémní – ale navrhuji jej autorovi, panu Kopkovi, odpustit, určitě jej použil s dobrým záměrem, aby studenti a vyučující nemuseli stále vypisovat dlouhý termín **částečně uspořádaná množina**.

[42] Jedno prvkový poset je až na přeznačení jeden, dvouprvkové posety jsou dva.



Obrázek 12: Hasseův diagram relace uspořádání.

Označení 34: Symbolem $\prec$ budeme označovat relaci bezprostředího předchůdce v množině P, když $\forall x, y \in P$:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (x \lhd y \wedge \nexists\, a \in P : x \lhd a \lhd y)$$

(jinými slovy, mezi x, y už nelze vložit další prvek a různý od y). Říkáme, že prvek x bezprostředně předchází prvku y (nebo že prvek y bezprostředně následuje za prvkem x)[43].

Definice 40: $(P, \unlhd)$ je úplně uspořádaná množina = řetězec = lineárně uspořádaná množina[44], pokud $\unlhd$ je uspořádání a současně úplná relace, tj. pokud pro ni platí vlastnosti (11), (anti-12), (13), (14). (anglicky: coset = Completely Ordered SET = úplně uspořádaná množina)

Příklad 8.5 ilustrační – coset. Na obrázku 13 vidíte příklad jednoho cosetu = úplně uspořádané množiny – je jím nekonečná množina Z.

Označení 35: Symbolem $\unrhd$ označujeme relaci inverzní k relaci $\unlhd$, symbolem $\rhd$ relaci inverzní k $\lhd$.

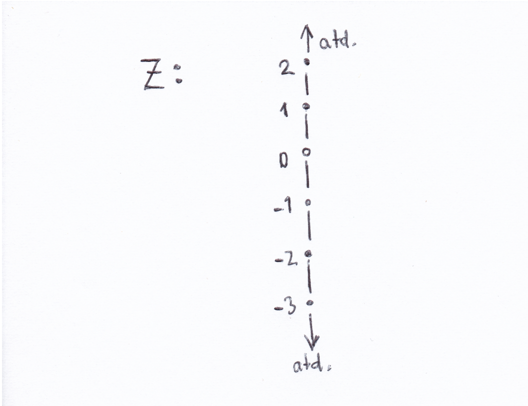
Věta 16:

$$(P, \unlhd) \text{ je poset } \Rightarrow (P, \unrhd) \text{ je také poset.}$$

Důkaz: (typ 2 – přímý důkaz, na základě definic pojmů, které se ve větě vyskytují) Vlastně stačí dokázat (ukázat), že relace $\unrhd$ je uspořádání, tj. dokázat pro ni vlastnosti (11), (anti-12), (13).

[43] Pomocí ostrého uspořádání $\lhd$ a relace bezprostředního předchůdce $\prec$ lze lépe popsat konstrukci Hasseových diagramů: vyznačujeme v nich hranami pouze relaci bezprostředního předchůdce ([16], str.30, lemma 4). Pro konečný poset $(P, \unlhd)$ a jeho prvky $a, b \in P$ tedy platí: $a \lhd b$ (ostře menší než) znamená, že v množině P existuje řetězec bezprostředních následovníků $a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n = b$.

[44] Tj. všechny prvky jsou pospojovány v jedné linii, v jednom řetězci. Tato tři označení se bohužel používají v různé literatuře, tj. názvosloví zde není jednotné. Zcela postačí termín „úplně uspořádaná“ z definice úplné relace, někteří jej považují za málo názorný a používají termín „lineárně uspořádaná“, a termín „řetězec“ je také historicky známý i názorný.



Obrázek 13: Množina Z je coset = řetězec = úplně uspořádaná množina.

ad (11) … reflexivita se zachová z původního uspořádání $\trianglelefteq$ … „inverzním prvkem“ ke smyčce je zase smyčka, mluvíme-li terminologií grafové reprezentace relace.

ad (anti-12) a (13) … antisymetrie (anti-12) a tranzitivita (13) relace $\trianglerighteq$ plynou z toho, že všechny šipky jsou přesměrovány v opačném směru vzhledem k původní relaci $\trianglelefteq$, která antisymetrická a tranzitivní je – a pouhým přesměrováním všech šipek v grafové reprezentaci relace se antisymetrie ani tranzitivita neporuší. $\square$

Je zajímavé si uvědomit, že pokud máme k dispozici Hasseův diagram relace $\trianglelefteq$ nebo $\triangleleft$, příslušný Hasseův diagram relace inverzní získáme otočením původního Hasseova diagramu o 180 stupňů, tj. směr „nahoru“ se stane směrem „dolů“. Někdy[45] se uspořádání $\trianglerighteq$ nazývá duální uspořádání k uspořádání $\trianglelefteq$, nikoli inverzní uspořádání.

Význačné prvky posetu:

Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, $M \neq \emptyset$ je podmnožina množiny P, tak prvek $a \in M$ nazveme

a) (definice 41) nejmenší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M : \quad a \trianglelefteq x;$$

b) (definice 42) minimální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M : \quad x \triangleleft a;$$

c) (definice 43) největší prvek množiny M, když

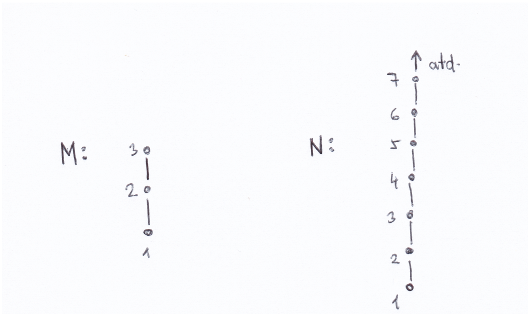
$$\forall x \in M : \quad a \trianglerighteq x;$$

d) (definice 44) maximální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M : \quad x \triangleright a.$$

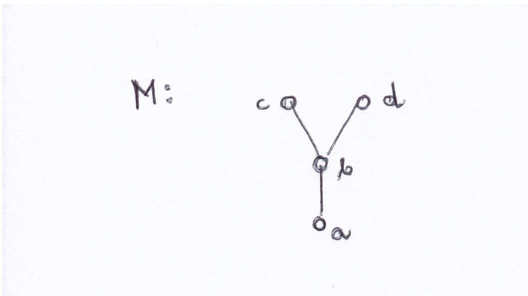
[45] Viz [16].

Příklad 8.6 ilustrační. Ad obrázek 14: V tříprvkové množině M s uspořádáním zadaným v Hasseově diagramu je 1 prvek minimální a nejmenší současně, a dále 3 je prvek maximální a největší současně. V množině N s klasickým uspořádáním $\leq$ je nejmenší prvek 1 a číslo 1 je též minimální prvek. Největší prvek množiny N neexistuje.



Obrázek 14: Dvě dobře uspořádané množiny = wosety.

Dále na obrázku 15 je množina M, ve které a je minimální i nejmenší prvek současně. Na druhé straně, největší prvek tato množina nemá – má pouze dva maximální prvky c, d.



Obrázek 15: Rozdíl mezi maximálním a největším prvkem.

Tj. maximální prvek množiny M je takový, „nad kterým“ už není v této množině žádný prvek. Na druhé straně největší prvek musí být srovnatelný (= v relaci) se všemi prvky množiny M a musí být větší nebo roven než libovolný z nich. $\star$

Pro pořádek ještě zmiňme příbuznou definici dobře uspořádané množiny. Než se k ní dostaneme, definujeme vlastnost (15):

V posetu $(P, \trianglelefteq)$ je splněna vlastnost (15), když každá jeho neprázdná podmnožina M obsahuje svůj nejmenší prvek, tj. platí

$(P, \triangleleft)$ je poset a $\forall M \neq \emptyset,\ M \subseteq P:\ M$ má nejmenší prvek. (vlastnost (15)).

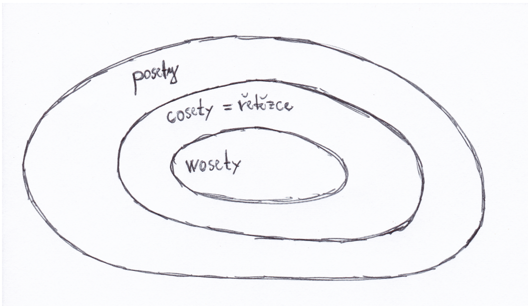
Věta 17: V posetu platí:

$$(15) \Rightarrow (14).$$

Důkaz: (typu 2 – přímý důkaz na základě vlastnosti (15) a definice nejmenšího prvku) Vlastnost (15), jejíž platnost předpokládáme na daném posetu, tvrdí, že každá dvouprvková podmnožina $\{a, b\}$ posetu musí mít nejmenší prvek. Pokud je tím nejmenším prvkem a, tak platí $a \trianglelefteq b$, pokud je jím b, tak $b \trianglelefteq a$. Jedna z těchto dvou možností musí nastat, tj. prvky a, b jsou srovnatelné, platí (14). □

Definice 45: Poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá dobře uspořádaná množina (woset … z anglického Well Ordered SET), když splňuje vlastnosti (14)[46] a (15).

Jaký je tedy rozdíl mezi wosetem a cosetem? V cosetu nemusí mít některé podmnožiny (např. ani celá daná množina samotná) nejmenší prvek, kdežto ve wosetu ano. Tedy M a N z obrázku 14 jsou dobře uspořádané množiny (wosety), kdežto Z z obrázku 13 ne, protože samotná množina Z nemá nejmenší prvek.



Obrázek 16: Vztah mezi danými pojmy poset, coset, woset.

Na obr. 16 vidíme vztah mezi danými třemi pojmy: jen některé velmi hezké řetězce jsou wosety, všechny řetězce jsou cosety (to je ekvivalentní označení), a nejvíce je posetů, protože to jsou mnohem obecnější struktury, které mohou obsahovat i dvojice navzájem nesrovnatelných prvků. Tento vztah je zřejmý, když si uvědomíme definice těchto pojmů vyjádřené pomocí našich vlastností číslovaných speciálními čísly[47]:

- poset splňuje (11), (anti-12), (13);
- coset splňuje (11), (anti-12), (13), (14);
- woset splňuje (11), (anti-12), (13), (14), (15)[48].

[46] Vlastnost (14) je do definice doplněna pro ignoranty, kteří nečetli předchozí větu – běžně se v definici wosetu uvádí jen (15), protože vlastnost (14) vyplývá z vlastnosti (15).

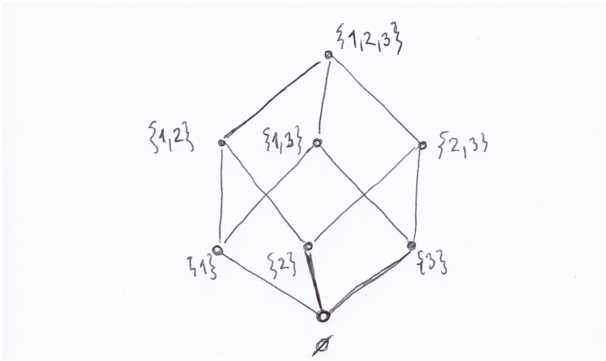
[47] Je vidět, že struktur, které splňují více vlastností (nějakou další vlastnost ve srovnání se strukturami předchozího typu), je méně – kdyby tomu tak nebylo, nemuseli bychom nový pojem zavádět, protože by popisoval přesně stejnou kategorii struktur jako pojem předchozí. Někdy se ovšem stane, jak je vidět u ekvivalentních pojmů řetězec – lineární poset – úplný poset, že existují v různé literatuře různé pojmy, nebo se definují různé pojmy, o kterých matematika později dokáže, že se jedná o totéž.

[48] Vlastnost (15) není už tak jednoduchá sama o sobě, protože má v sobě „zabaleny“ všechny předchozí vlastnosti (11), (anti-12), (13), (14) (vlastnost (15) je definována jen pro posety, tj. skrývá v sobě i platnost (11), (anti-12), (13); dále vlastnost (14) plyne z (15), jak už bylo řečeno). Ale pojem wosetu (15) hraje důležitou roli v předmětu Teorie množin ve 4. ročníku, proto byl zmíněn už nyní a porovnán s předchozími pojmy.

Označení 36: Symbol 2^A označuje množinu všech podmnožin množiny A. Například množina $A = \{1, 2, 3\}$ má osm podmnožin: prázdnou množinu, tři jednoprvkové podmnožiny, tři dvouprvkové podmnožiny a osmou podmnožinou je množina A samotná. Označení má svou logiku: pokud A má n prvků, jejích všech možných podmnožin je 2^n.

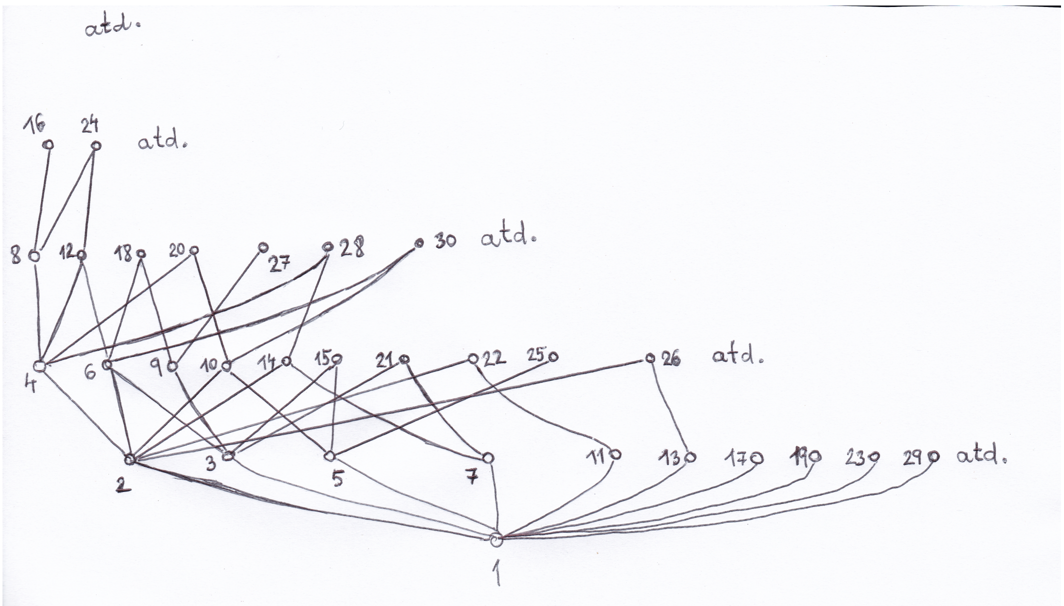
Příklad 8.7. Dva důležité příklady posetů.

a) Relace $\subseteq$ na množině 2^P všech možných podmnožin množiny $P = \{1, 2, 3\}$ je poset, jeho Hasseův diagram je na obrázku 17:



Obrázek 17: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3\}$.

b) Na množině N definujme uspořádání pomocí dělitelnosti, tj. $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow a|b$. Pak $(N, \trianglelefteq)$ je poset, který má nekonečně mnoho prvků. Na obrázku 18 je nakreslena jen jeho dolní část:



Obrázek 18: Poset $(N, |)$.

Ze struktury dělitelů vidíme, že např. číslo 24 má dělitele 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 a 24).

Příklad 8.8 – úkol pro studenty. Nakreslete Hasseovský diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 60 vzhledem k relaci $|$.

Podívejme se nyní na další význačné prvky v posetech:

Když $(P, \trianglelefteq)$ je poset a M je nějaká neprázdná podmnožina množiny P, nazýváme prvek $a \in P$ (pokud takový prvek existuje):

- (definice 46) dolní závora množiny M, pokud $a \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M$;
- (definice 47) infimum množiny M (označujeme $\inf M$), pokud je největším prvkem na množině všech dolních závor množiny M; tj. a je infimum, pokud pro všechny další dolní závory d platí
$$d \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow d \trianglelefteq a;$$
- (definice 48) horní závora množiny M, pokud $a \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M$;
- (definice 49) supremum množiny M (označujeme $\sup M$), pokud je nejmenším prvkem na množině všech horních závor množiny M. Tj. a je supremum, pokud pro všechny další holní závory h platí
$$h \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow h \trianglerighteq a;$$

Nejdůležitějším postřehem k předchozím definicím je asi to, že závory nebo infima-suprema množiny M nemusí samy být prvky množiny M!! Obecně závora, infimum či supremum je prvek množiny P, který může a nemusí ležet v dané množině M.

Příklad 8.9 ilustrační.

a) Například v posetu přirozených čísel s uspořádáním zadaným dělitelností těchto čísel (obr. 18) uvažujme množinu $M = \{12, 8, 20\}$. Dolní závorou množiny M jsou čísla 1, 2, 4 (společní dělitelé prvků v množině M), a tedy infimem je číslo 4 jako největší z těchto prvků (tj. infimem v $(N, |)$ je největší společný dělitel prvků v množině M.

Analogicky horní závorou množiny M jsou společné násobky čísel 12, 8, 20, tj. čísla 120, 240, 360, atd., a tedy supremem je nejmenší horní závora, tedy číslo 120.

b) V posetu podmnožin tříprvkové množiny (obr. 17) například platí

$$\inf\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\},$$

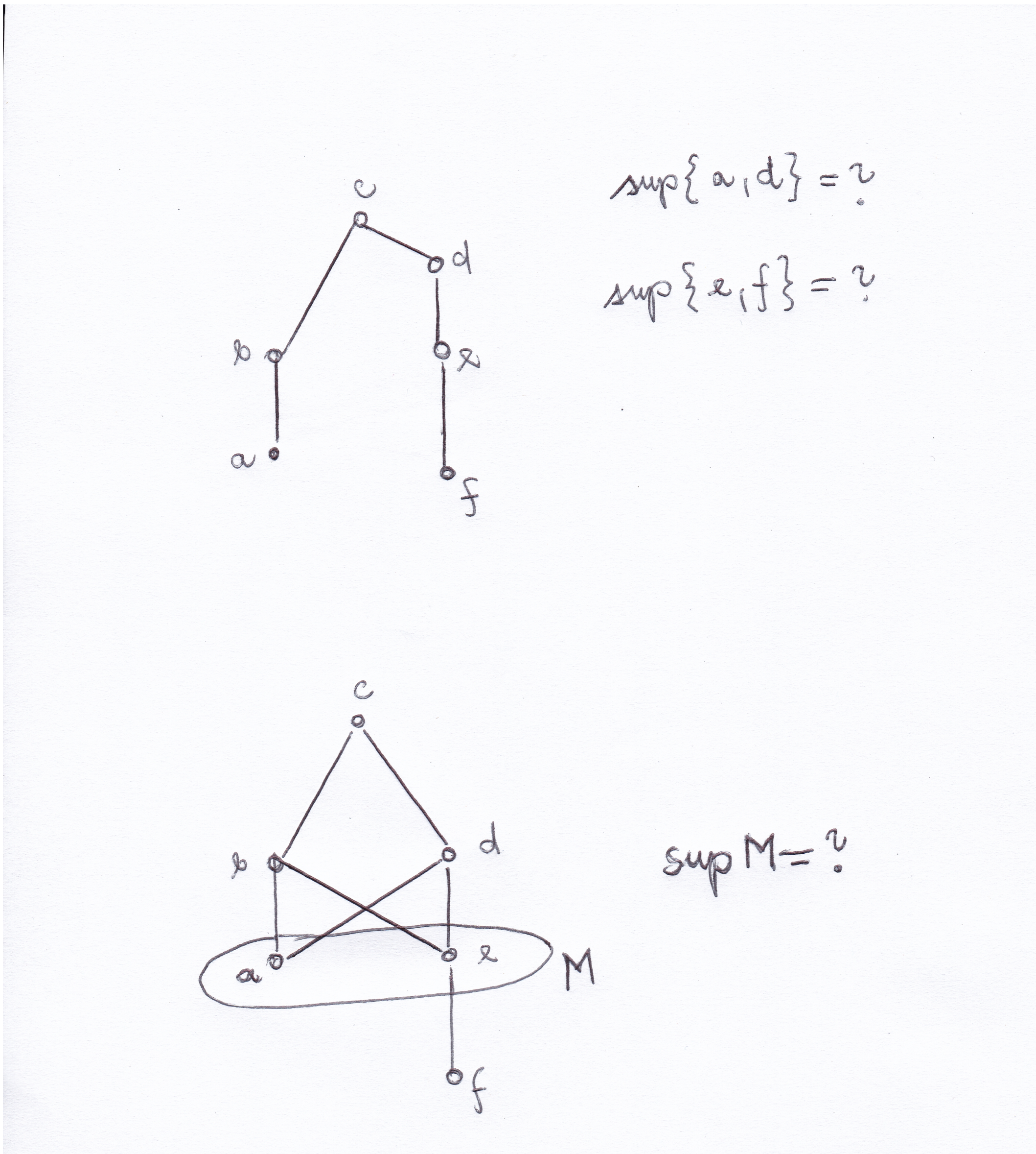
$$\inf\{\{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\}\} = \{2\},$$

tedy infimem několika množin je jejich vzájemný průnik,

$$\sup\{\{1, 2\}, \{1\}\} = \{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$$

(supremem několika množin v dané struktuře je jejich sjednocení).

Příklad 8.10. Najděte suprema množin na obrázku 19, pokud existují:



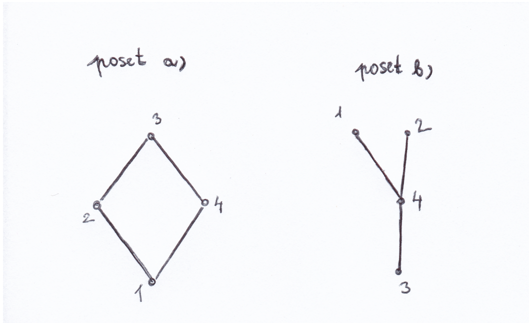
Obrázek 19: Příklad suprem dvouprvkových podmnožin posetu.

8.3 Cvičení

Cvičení 8.1.

- i) Vypište podle Hasseova diagramu relaci $\trianglelefteq$ výčtem uspořádaných dvojic na obrázku 20: a) poset (a); b) poset (b)[49];
- ii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\triangleleft$ ostrého uspořádání;
- iii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\prec$ bezprostředního předchůdce.

[49] [16], str.28, obrázky 5a,5b.



Obrázek 20: Uspořádané množiny (a) a (b).

Cvičení 8.2. Nakreslete Hasseův diagram posetu 2^P pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$ – pro zjednodušení k uzlům diagramu nevpisujte závorky a čárky, tj. množiny budou označeny jen znaky prvků: např $\emptyset$, 12, 124 jsou označení různých množin. $\star$

Cvičení 8.3. Nakreslete Hasseův diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 144 vzhledem k relaci dělitelnosti beze zbytku.

Cvičení 8.4. Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) čtyřprvkových posetů.

Cvičení 8.5. Jaký je rozdíl mezi posetem, cosetem a wosetem?

Cvičení 8.6. Jaký je rozdíl mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem množiny M?

Cvičení 8.7. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, který má právě dva prvky maximální a právě tři prvky minimální.

Cvičení 8.8. Nalezněte poset, který má maximální prvek, nemá největší prvek a nemá minimální prvek.

Cvičení 8.9. Nalezněte poset všech kladných dělitelů čísla 60 uspořádaných vzhledem k relaci dělitelnosti $|$.

Cvičení 8.10. Uveďte příklad posetu, který obsahuje nějaké dva nesrovnatelné prvky – uveďte, které to jsou.

Cvičení 8.11. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, ve kterém současně platí všechny následující podmínky:

a) v Hasseově diagramu jsou znázorněny minimálně čtyři hrany.

b) Platí $a \leq b$ a současně $b \leq c$.

c) Každý prvek je srovnatelný aspoň s jedním dalším prvkem.

d) Existují v něm tři prvky, které jsou navzájem mezi sebou nesrovnatelné.

Cvičení 8.12.

a) uveďte definici největšího prvku: x_0 z posetu $(P, \leq)$ je největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem);

b) negujte předchozí definici, tj.: x_0 z posetu $(P, \leq)$ není největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem – nestačí přitom položit znak negace před část a), proveďte tuto negaci podrobněji);

Cvičení 8.13.

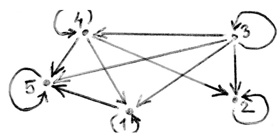
a) Vysvětlete, co je to Hasseův diagram (jak je v něm zachycen vztah $[x, y]$ relace? jaké relace pomocí Hasseova diagramu popisujeme?) a jak jsou v něm zachyceny vlastnosti (11), anti-(12) a (13).

b) Nakreslete Hasseův diagram množiny všech kladných dělitelů čísla 72 uspořádané vzhledem k relaci $|$ (= je dělitelem).

Cvičení 8.14.

a) Relace je zadána grafovou reprezentací (viz obrázek 21). Zjistěte, zda se jedná o uspořádání, a pokud ano, překreslete tuto relaci do Hasseova diagramu. Pokud ne, uveďte, která vlastnost uspořádání není splněna.

b) Uveďte příklad cosetu (= úplně uspořádané množiny), která není wosetem (= dobře uspořádanou množinou):



Obrázek 21: Ke cvičení 8.14: Relace zadaná grafovou reprezentací.

Cvičení 8.15.

a) Na posetu $(P, \trianglelefteq)$ uvažujme neprázdnou podmnožinu M. Číslo m je infimum množiny M v tomto posetu, když ... dokončete definici:

b) Na posetu $(N, |)$ přirozených čísel uspořádaných podle relace „dělí běze zbytku“, máme podmnožinu $M = \{8, 12, 30\}$. Nalezněte inf$M$ a sup$M$.

Cvičení 8.16. Dále to, co se ještě nedělalo ze sbírky [14] z příkladů 1.6.A4-str.55, 1.6.B1, 1.6.B2, 1.6.B6, 1.6.B7, 1.6.B8, 1.6.B9, 1.6.B11, pokud se ještě nedělaly.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.8.

9 Uspořádané množiny II – operace průsek a spojení

9.1 Warm-up: Jazyk R, část 01 – některé základní příkazy, příklad na úročení

Zmínění jazyka R jako vylepšené kalkulačky, instalace a některé výpočty. Prvním podstatným výpočtem bude příklad na úročení.

Jazyk R si lze nainstalovat z internetu, zadáte-li do vyhledávače „jazyk R“ nebo „R language“. Funguje jako dobrá kalkulačka offline, navíc si může uživatel prohlédnout veškeré předchozí výpočty. Základní informace: knihy [12], [13] jsou manuály k programu v češtině, nebudeme je příliš potřebovat, jen oddíly o matematických funkcích a o kreslení grafiky bude v první fázi využitelné[50]. Platí zde například:

- Pozor, desetinná čísla se zadávají s desetinnou tečkou, po americku, to je malá daň za jeho free užívání. Des. čárka slouží jako oddělovač rovnic a parametrů funkcí.
- Faktoriál zadáme příkazem (a následným stiskem klávesy ENTER)

  ```
  > factorial(n);
  ```

- Celočíselné dělení zadáme operátorem %/%, zbytek po dělení příkazem %%. Například

  ```
  > 62 %/% 5
  ```

  vede po stisku klávesy ENTER na výsledek 12 (celočíselný podíl),

  ```
  > 62 %% 5
  ```

  vede na výsledek 2 (zbytek po dělení pěti).
- Umocnění zadáme šipkou nahoru (na klávese čísla 6), například

  ```
  > 15^2
  ```

  vede na výsledek 225,

  ```
  > sqrt{144}
  ```

  vede na odmocninu[51] z čísla 144, tj. 12.

Vypočtěte příklad následující: Vypočtěte zůstatek na účtu při vkladu 100 kč a složeném úrokování po 25 letech, když úročíme

[50] Tento program studentům doporučuji kvůli předmětu Pravděpodobnost a statistika ve 4.semestru.
[51] Řídící slovo „sqrt“ je z anglického „square root“.

- a) jedenkrát ročně 4 procenta;
- b) dvakrát ročně 2 procenta;
- c) čtyřikrát ročně 1 procento;
- d) stokrát ročně $\frac{4}{100}$ procenta;

Výsledek: viz kniha [11], str. 31. Je zajímavé, že při rostoucím počtu úročení nižší částkou se výsledný zůstatek na účtu na konci stále téhož období blíží e-násobku vkladu, kde

$$e = 2{,}718281828$$

(ale dále desetinný rozvoj čísla je neperiodický, podobně jako u čísla π) je tzv. Eulerovo[52] číslo.

9.2 Přednáška

V předešlé kapitole jsme zavedli pojmy infimum (= největší dolní závora) a supremum (= nejmenší horní závora) konečné množiny. Pomocí těchto pojmů nyní definujeme na posetu P dvě operace: operaci průseku $\sqcap$ a operaci spojení $\sqcup$.

Pokud v posetu $(P, \trianglelefteq)$ má každá dvouprvková podmnožina své infimum, lze definovat operaci průsek (definice 50)

$$x \sqcap y := \inf\{x, y\}$$

a poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá průsekový polosvaz; to tedy znamená, že prokaždé dva prvky $x, y \in P$

- $x \sqcap y$ je dolní závorou množiny $\{x, y\}$, tj.

$$x \sqcap y \trianglelefteq x, \quad x \sqcap y \trianglelefteq y; \qquad\qquad \text{vlastnost (16a)}$$ [53]

- $x \sqcap y$ je největší dolní závorou množiny $\{x, y\}$, tj.

$$\forall d \in P : \quad (d \trianglelefteq x \wedge d \trianglelefteq y \Rightarrow d \trianglelefteq x \sqcap y). \qquad \text{vlastnost (16b)}$$ [54]

Pokud v posetu $(P \trianglelefteq)$ má každá dvouprvková podmnožina své supremum, lze definovat operaci spojení (definice 51)

$$x \sqcup y := \sup\{x, y\}$$

a poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá spojový polosvaz; to tedy znamená, že

- $x \sqcup y$ je horní závorou množiny $\{x, y\}$, tj.

$$x \trianglelefteq x \sqcup y, \quad y \trianglelefteq x \sqcup y; \qquad\qquad \text{vlastnost (17a)}$$ [55]

[52] Čti: [ojlerovo].

[53] (16a) … průsek dvou prvků je menší nebo roven než každý z nich

[54] (16b) … pokud nějaký prvek je menší nebo roven než jiné dva, pak je též menší nebo roven než jejich průsek

[55] (17a) … spojení dvou prvků je větší nebo rovno než každý z nich

- $x \sqcup y$ je nejmenší horní závorou množiny $\{x, y\}$, tj.

$$\forall h \in P: \quad (x \trianglelefteq h, \quad y \trianglelefteq h \Rightarrow x \sqcup y \trianglelefteq h). \qquad \text{vlastnost (17b)}$$[56]

Poznámka: průsek a spojení v Hasseově diagramu.

a) Pokud poset $(P, \trianglelefteq)$ je průsekový polosvaz, v jeho Hasseově diagramu $\forall x, y \in P\ \exists!\ z \in P$,

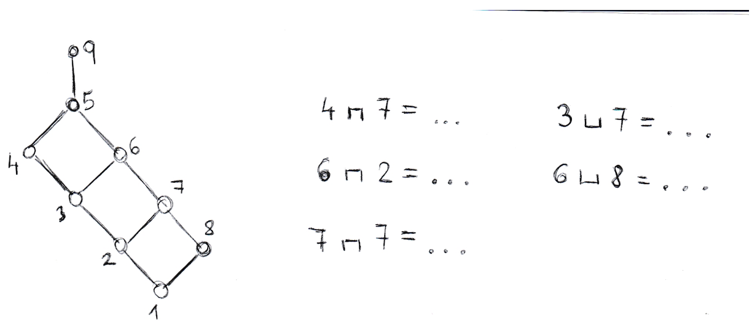
- do něhož se po hranách dostanete z x i y cestou stále dolů (z je dolní závora množiny $\{x, y\}$),
- přičemž z je ze všech takových uzlů nejvýše (je největší dolní závora množiny $\{x, y\}$).

b) Pokud poset $(P, \trianglelefteq)$ je spojový polosvaz, v jeho Hasseově diagramu $\forall x, y \in P\ \exists!\ z \in P$,

- do něhož se po hranách dostanete z x i y cestou stále vzhůru (z je horní závora množiny $\{x, y\}$),
- přičemž z je ze všech takových uzlů nejníže (je nejmenší horní závora množiny $\{x, y\}$).

Příklad 9.1. (učitel společně se studenty) Rozhodněte, zda je daný poset také průsekový polosvaz nebo spojový polosvaz, vypočtěte dané operace průseku nebo spojení:

(i) Viz poset na obrázku 22.



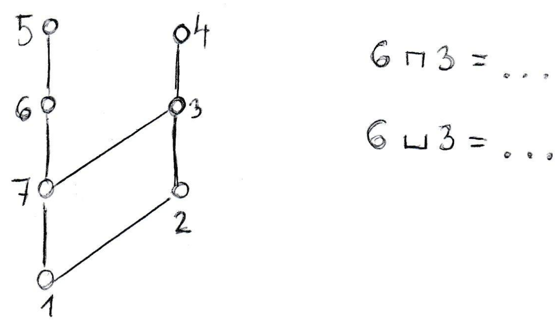
Obrázek 22: Poset P_1.

(ii) Viz poset na obrázku 23.

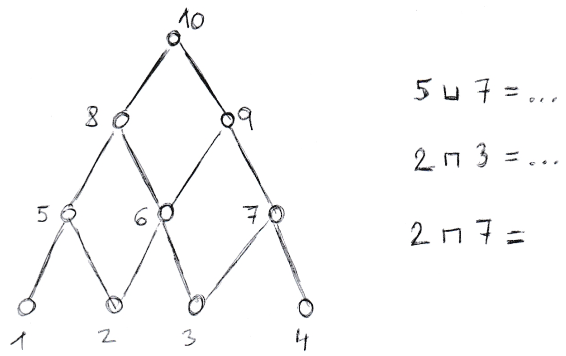
(iii) Viz poset na obrázku 24.

(iv) Viz poset na obrázku 25.

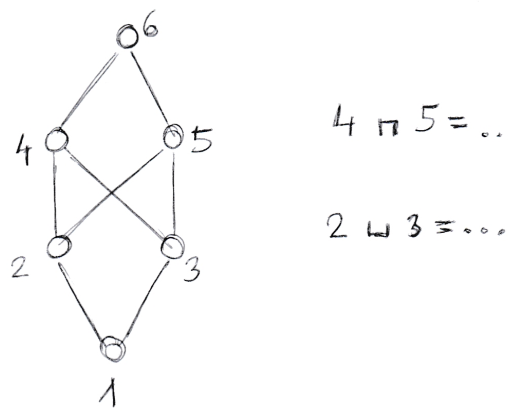
[56](17b) … pokud nějaký prvek je větší nebo roven než jiné dva, pak je též větší nebo roven než jejich spojení.



Obrázek 23: Poset P_2.



Obrázek 24: Poset P_3.



Obrázek 25: Poset P_4.

Vlastnosti operací průsek a spojení

$\sqcap$, $\sqcup$ jsou operace – lze tedy studovat bližší vlastnosti těchto operací!!!!!!!!!!! Například ve větě 08 jsme pomocí Vennových diagramů dokázali tzv. asociativní zákon pro operace průniku a sjednocení. Platí podobý asociativní zákon pro operaci průseku nebo operaci spojení? Pokud ano, tak při jeho důkazu asi bude nutné použít jiné metody než Vennovy diagramy.

(Věta 18) Asociativita operace průsek a spojení

a) V každém průsekovém polosvazu $(P, \sqcap)$ platí:

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z).$$

b) V každém spojovém polosvazu $(P, \sqcup)$ platí:

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z).$$

Důkaz. Dokažmě pouze tvrzení (a): Při odvozování důkazu je nad implikacemi nebo nerovnostmi vždy číslo vlastnosti, na základě které příslušná implikace nebo nerovnost platí.

$$(x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \sqcap y \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x$$

$$\left.\begin{array}{l} (x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \sqcap y \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \\ (x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} z \end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} (x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq y \sqcap z$$

$$\overset{(16b)}{\Rightarrow} (x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \\ x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq x \sqcap y$$

$$x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} z$$

$$\overset{(16b)}{\Rightarrow} x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap z$$

No a v této fázi důkazu zbývá už jen malý kousek, stačí si uvědomit, že relace $\trianglelefteq$ je antisymetrická, tj. platí (anti-12):

$$a \trianglelefteq b \quad \wedge \quad b \trianglelefteq a \quad \Rightarrow a = b.$$

Tedy z obou nerovností, ke kterým jsem při odvozování dospěli, plyne nakonec rovnost v daném vztahu, což je dokazované tvrzení (a):

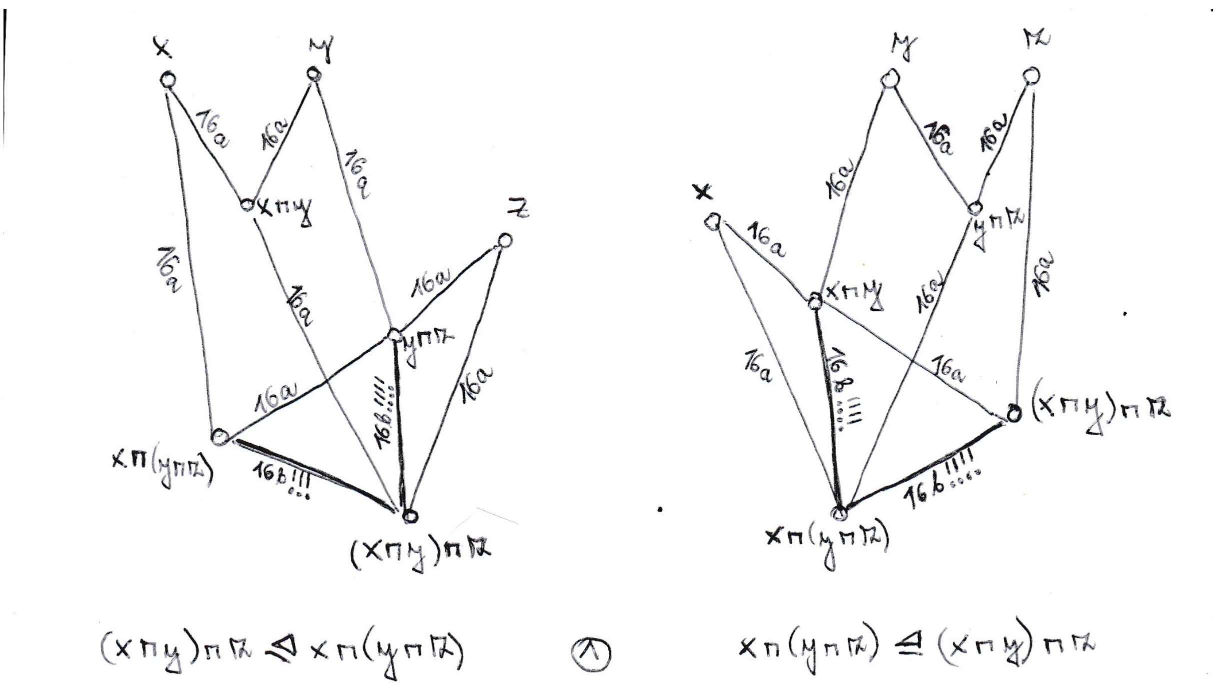
$$[(x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)] \quad \wedge \quad [x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap] z \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z).$$

Pokud byl pro čtenáře právě předvedený důkaz příliš náročný, lze jej udělat jiným způsobem: lze si obě jeho hlavní části nakreslit. Snad lze následující metodu důkazu označit jako nový typ – typ číslo 10.

Typ důkazu číslo 10: Rovnost výrazů pomocí Hasseových diagramů.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují operace průsek a spojení, lze dokázat pomocí Hasseových diagramů, do kterých kreslíme výsledky těchto operací – rovnost $a = b$ plyne při vlastnosti (anti-12) z nerovností $a \trianglelefteq b$ a $b \trianglelefteq a$, které platí současně. Důkaz rovnosti provedeme tak, že nakreslíme Hasseův diagram pro každou z nerovností.

Důkaz věty 15a pomocí Hasseových diagramů[57]: Hasseovy diagramy nerovností $(x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)$ a $x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap z$ vidíme na obrázku 26, platí tedy obě nerovnosti – a z vlastnosti (anti-12) tedy plyne rovnost obou výrazů. □



Obrázek 26: Důkaz věty 15 pomocí Hasseových diagramů.

Analogií operace $\sqcap$ s průnikem a operace $\sqcup$ se sjednocením na struktuře $(2^A, \subseteq)$ (tedy struktura 2^A je současně průsekový i spojový polosvaz) jsme si připravili půdu k následující definici, která je tedy celkem přirozená. V dalším se teď budeme zabývat otázkou: Jaké vlastnosti má poset, který je současně polosvazem obou typů?

Definice 52: Poset $(P, \trianglelefteq)$, který je současně průsekový i spojový polosvaz, se nazývá svaz[58]. Analogicky lze říci, že protože svaz je spojením vlastností průsekového polosvazu a spojového polosvazu, tak pro svaz je charakteristické, že s každou svou dvouprvkovou podmnožinou obsahuje i její infimum a supremum[59].

[58] Anglicky: lattice. Pozor, neplést s hlávkovým salátem: lettuce. Anglicky polosvaz: semilattice.

[59] Které ovšem nemusí ležet přímo v dané dvouprvkové podmnožině, jak jsme už na několika příkladech viděli.

Poznámka: Jak lze chápat svaz.

Svazem tedy rozumíme strukturu $(P, \trianglelefteq, \sqcap, \sqcup)$, kde

a) relace $\trianglelefteq$ splňuje vlastnosti (11), (anti-12), (13);

b) operace $\sqcap$ splňuje dvojici vlastností (16a),(16b);

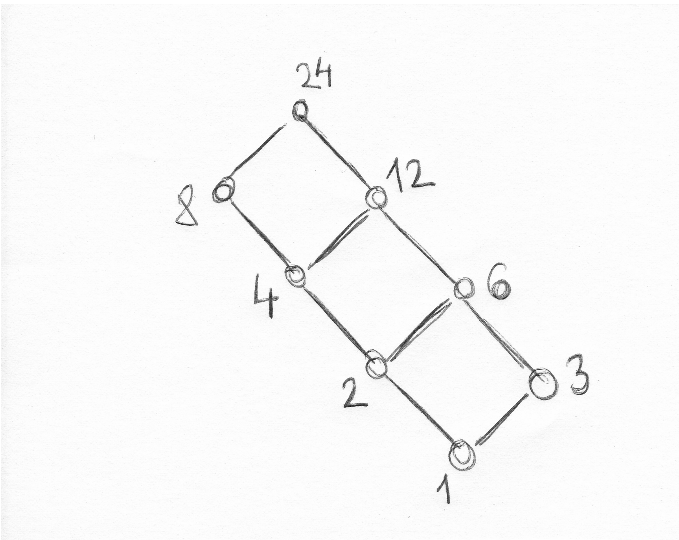
c) operace $\sqcup$ splňuje dvojici vlastností (17a),(17b).

Příklad 9.2. Důležité svazy.

9.2.a) Systém všech podmnožin vzhledem k relaci „je podmnožinou“, tedy struktura $(2^A, \subseteq)$, svaz.

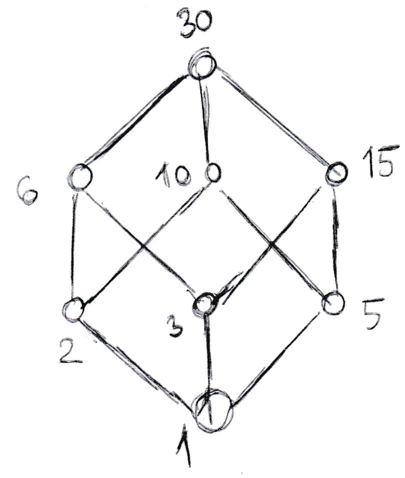
9.2.b) I druhý hlavní příklad posetu z předchozí kapitoly, množina N s relací definovanou na základě dělitelnosti, je svaz. Průsekem dvou přirozených čísel je jejich největší společný dělitel, spojením dvou čísel je jejich nejmenší společný násobek – tyto dvě charakteristiky vždy existují pro každá dvě přirozená čísla.

9.2.c) I některé podposety svazu $(N, |)$ jsou svazy, například podsvaz[60] všech dělitelů čísla 24

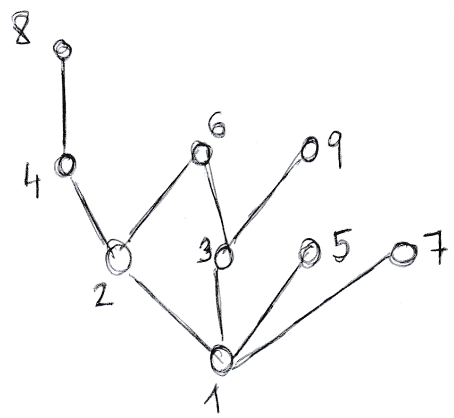


nebo podsvaz všech dělitelů čísla 30

[60] Z příkladů je vidět, že aby podmnožina svazu byla též svazem, musí být uzavřená vzhledem k operacím průsek a spojení. Takovou podmnožinu nazveme podsvaz.



Naopak řada podposetů posetu $(N, |)$ svazem není, protože nejsou uzavřené na operace průseku a spojení. Například podposet prvních devíti přirozených čísel není svazem, protože v něm neexistuje například supremum dvouprvkové množiny $\{4, 6\}$:



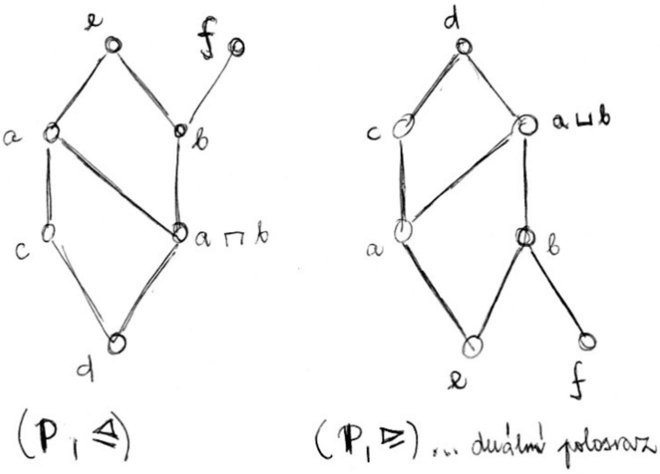
9.2.d) Každý řetězec (= coset) je svaz ... například N s klasickým uspořádáním $\leq$ je svaz, $(Z, \leq)$ je svaz.

Dříve než přistoupíme ke studiu dalších vlastností svazu (pravděpodobně se k tomu dostaneme až v příštím semestru), všimneme si ještě jedné věci, která platí i v každém polosvazu – každý polosvaz definuje tzv. duální polosvaz, jehož Hasseovský diagram je obrácen vzhůru nohama o 180 stupňů:

Definice 53 Pokud například $(P, \trianglelefteq)$ je průsekový polosvaz, tak inverzní uspořádání $\trianglerighteq$ definuje tzv. duální polosvaz a jedná se o spojový polosvaz[61].

[61] A naopak, duální polosvaz ke spojovému polosvazu je průsekový polosvaz

Příklad 9.3.



Na obrázku vidíme $\sqcap-$polosvaz $(P, \trianglelefteq)$ a vedle něj nakreslený $\sqcup-$polosvaz $(P, \trianglerighteq)$ zadaný toutéž množinou, pouze všechny šipky mají opačný směr, tj. Hasseovský diagram je oproti původnímu polosvazu „hlavou dolů“.

Ve svazech, kde jsou definovány obě operace současně, tj. existují současně infima i suprema dvouprvkových podmnožin, lze někdy využívat těchto duálních vztahů mezi pojmy a z platnosti určité vlastnosti jednoduše dokázat příslušnou duální vlastnost pouze záměnou $\sqcup$ za $\sqcap$, $\trianglerighteq$ za $\trianglelefteq$, horních závor za dolní závory, suprem za infima. To je pro matematiky velmi pomocný poznatek, protože jim usnadňuje práci s dokazováním vlastností ve svazech na polovinu.

Typ důkazu číslo 11: Důkaz pomocí polosvazové duality.

Pokud jsme už jinými prostředky dokázali rovnost či nerovnost, která platí ve svazu, tak platnost tzv. duální rovnosti nebo nerovnosti plyne ze vztahu duality mezi průsekovým a spojovým polosvazem. V tomto vztahu duality

- **znak relace $\trianglelefteq$ musíme zaměnit za znak $\trianglerighteq$;**
- **znak $\sqcap$ musíme zaměnit za znak $\sqcup$;**
- **vlastnost (16a), pojem dolní závory, musíme zaměnit za vlastnost (17a), pojem horní závory;**
- **vlastnost (16b), pojem největší dolní závory, musíme zaměnit za vlastnost (17b), pojem nejmenší horní závory.**

Důkaz věty 15b pomocí polosvazové duality. Vztah

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$$

plyne z věty 15a na základě polosvazové duality – přesně stejně zopakujeme důkaz věty 15a (buď rozepsáním, nebo graficky), pouze duálně nahradíme všechny pojmy z 15a duálními, které plynou z náhrady relace $\trianglelefteq$ inverzní relací $\trianglerighteq$. Po duálních záměnách dostaneme (sestavení negrafického důkazu):

$$\left.\begin{array}{l} (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} x \sqcup y \overset{17a}{\trianglerighteq} x \\ \left.\begin{array}{l} (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} x \sqcup y \overset{17a}{\trianglerighteq} y \\ (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} (x \sqcup y) \sqcup z \trianglerighteq y \sqcup z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} (x \sqcup y) \sqcup z \trianglerighteq x \sqcup (y \sqcup z)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} x \\ x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} y \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} y \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} x \sqcup (y \sqcup z) \trianglerighteq x \sqcup y \\ x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} y \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} x \sqcup (y \sqcup z) \trianglerighteq (x \sqcup y) \sqcup z$$

Důkaz obou nerovností je přesně stejný jako u věty 15a, jen všechny pojmy a symboly byly duálně zaměněny). Dohromady spojením obou nerovností plyne z (anti-12) rovnost[62].

9.3 Cvičení

Cvičení 9.1. Co to znamená $x \sqcap y$ na uspořádané množině $(P, \trianglelefteq)$? Uveďte, co označení znamená a jak se prakticky spočítá – uveďte příklad výpočtu $x \sqcap y$ a) pro navzájem srovnatelné prvky, b) pro nesrovnatelné prvky x, y vzhledem k relaci $\trianglelefteq$.

Cvičení 9.2. Definujte vlastnosti (16a), (16b) ve zkráceném matematickém zápisu (pokračujte bez použití českých slov):

a) $x \sqcap y$ je dolní závora množiny $\{x, y\}$, když …

b) $x \sqcap y$ je největší dolní závora množiny $\{x, y\}$, když …

Cvičení 9.3. Definujte vlastnosti (17a), (17b) ve zkráceném matematickém zápisu (pokračujte bez použití českých slov):

a) $x \sqcup y$ je horní závora množiny $\{x, y\}$, když …

b) $x \sqcup y$ je nejmenší horní závora množiny $\{x, y\}$, když …

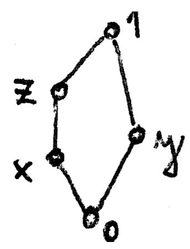
Cvičení 9.4. Negujte (každou zvlášť) vlastnosti (16a), (16b), (17a), (17b).

Cvičení 9.5. Podle posetu na obrázku 27 doplňte místo otazníků správnou relaci: $=$, $\leq$ nebo $\geq$ pro dané konkrétní prvky x, y, z, 0 ($=$ nejmenší prvek posetu P), 1 ($=$ největší prvek posetu P):

$$x \sqcap (y \sqcup z) \ \ ?? \ \ (x \sqcap y) \sqcup z.$$

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.9.

[62] Respektive pokud víme, že ve svazu platí dualita mezi operacemi $\sqcap$ a $\sqcup$, nemusíme důkaz vůbec provádět, jen napíšeme duální rovnost 15b výměnou duálních pojmů z 15a, tedy jen záměnou spojení za průsek.



Obrázek 27: K příkladu 9.5. Doplňte výsledek operace pro dané prvky posetu.

10 Zobrazení

10.1 Warm-up: Jazyk R, část 02 – kreslení grafů funkce

Přepracuj tak, aby se v první fázi kreslil jen jeden graf s pořádnými osami, s výběrem hodnot zaznamenaných na ose x, apod.

V této druhé části úvodu k jazyku R se pokusíme v daném prostředí vytvářet obrázky grafů funkcí.

Dejme tomu, že chceme nakreslit graf funkce $y = 2 \cdot \sin x + 1$ na intervalu $\langle -5; 5\rangle$. To uděláme zcela jednoduše příkazem „curve“ (křivka):

```
> curve(2*sin(x)+1,-5,5);
```

Pokud bychom chtěli nakreslit do jednoho obrázku grafy dvou funkcí, je to trošinku náročnější, protože musíme nejprve nadefinovat „hrací plochu“ pomocí intervalu $\langle -5; 5\rangle$, a pak nakreslit prázdné hřiště, do kterého přidáváme jednotlivé funkce:

1. Vytvoříme vektor x rozdělením intervalu $\langle -5; 5\rangle$ na tisíc podintervalů s krokem jedna setina[63]:

   ```
   > x<-seq(-5,5,0.01);
   ```

2. Připravíme si do vektorů $f1$, $f2$ obě funkce, například funkci $2 \cdot \sin x + 1$ a $2 \cdot \sin x$:

   ```
   > f1<- 2*sin(x)+1;
   ```

   ```
   > f2<- 2*sin(x);
   ```

3. Nyní nakreslíme hrací plán příkazem „plot“[64]:

[63] šipka vzniklá ze symbolů „menší než“ a „minus“ ... přiřazovací symbol, který jazyk R používá místo rovnítka;
seq ... z anglického sequence = posloupnost (hodnot).

[64] Z anglického „plot“ = nakreslit. Význam symbolů:
c() ... vytváří se vektor hodnot, z anglického „column“= sloupec, tedy sloupcový vektor;
xlab ... popis osy x, nyní bude prázdný, ale lze vepsat označení proměnné (podobně ylab = popis osy y);
type=”n” ... funkce se zatím nevykreslí.

```
> plot(c(x,x),c(f1,f2),xlab="",ylab="",type="n");
```

4. A nakonec přidáme příkazem „lines“ do obrázku funkce[65]:

```
> lines(x,f1,lty=1, col="red");

> lines(x,f2,lty=1, col="blue");;
```

5. Příkazem „segments“ ještě můžeme přidat souřadné osy[66]:

```
> segments(-5,0,5,0, col="black");

> segments(0,-2,0,3, col="black");
```

6. Pokud bychom chtěli vepsat popis funkcí přímo do obrázku, lze také na příslušné souřadnice napsat řetězec znaků, např:

```
> legend(-3,2,"2sin(x)+1");

> legend(-5,-1,"2sin(x)");
```

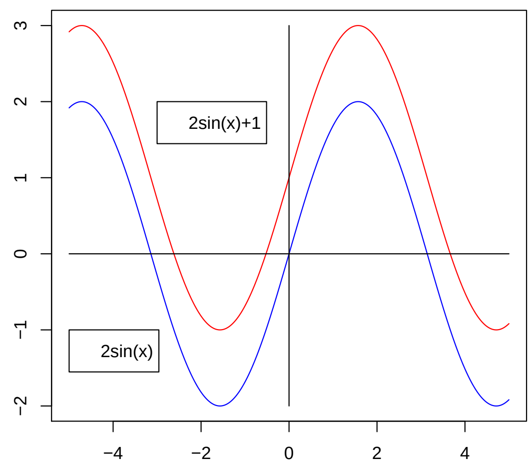
7. Celý obrázek si nyní můžeme uložit, když naň najedeme myší a klikneme levým tlačítkem – tak se zaktivní soubor obrázku; dále v levém horním rohu otevřeme volbu FILE, a pak SAVE AS a uložíme například jako PDF soubor. Vznikne obrázek, který lze vložit například do těchto skript (najdeme jej ve stejném adresáři, kde běží program R):

8. A poslední poznámka k tomuto náročnějšímu souboru příkazů: Pokud bychom nechtěli soubor několika příkazů neustále opisovat na obrazovku R, můžeme například náš soubor příkazů uložit do souboru kresleni.txt do stejného adresáře, ve kterém běží program R – pouze úvodní zobáčky každého řídícího řádku smažeme a zakončíme každý řádek středníkem:

```
x<-seq(-5,5,0.01);
f1<-2*sin(x)+1;
f2<-2*sin(x);
plot(c(x,x),c(f1,f2), xlab="",ylab="",type="n");
lines(x,f1,lty=1,col="red");
lines(x,f2,lty=1,col="blue");
segments(0,-2,0,3,col="black");
segments(-5,0,5,0,col="black");
legend(-3,2,"2sin(x)+1");
legend(-5,-1,"2sin(x)");
```

[65]lty … typ vykreslené linie: typ 1 = plná čára, typ 2 = čárkovaná čára, atd.
col … volba barvy pro danou funkci.

[66]Např. čísla $[-5, 0]$ a $[5, 0]$ znamenají souřadnice počátečního a koncového bodu úsečky, který chceme nakreslit.



Obrázek 28: Obrázek dvou funkcí posunutých o hodnotu 1 ve svislém směru.

Pak lze jen v jazyce R kdykoli později celou sekvenci příkazů vyvolat řídícím příkazem

```
> source("kresleni.txt")
```

(popřípadě můžeme pozměnit interval či funkce, které chceme nakreslit, vymazat některé příkazy a soubor uložit) – a provede se celá dávka najednou.

10.2 Přednáška

Už pátou přednášku se zabýváme pojmem relace, a tento oddíl tomu bude nejinak – podíváme se na definici jedné z relací, která je v matematice klíčová, a to je zobrazení[67], a budeme studovat některé vlastnosti tohoto pojmu.

Definice 54: Relace f na kartézském součinu $X \times Y$ se nazývá zobrazení z množiny X do množiny Y, jestliže pro ni platí podmínka

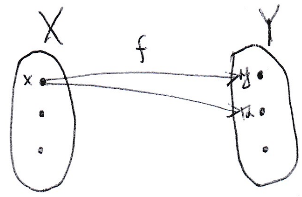
$$[x, y] \in f \ \wedge \ [x, z] \in f \ \Rightarrow \ y = z$$

(tj. v grafové reprezentaci zobrazení nemohou z prvku x vycházet orientované hrany do dvou různých prvků y, z množiny Y). Na obrázku 29 je znázorněn příklad relace, která není zobrazením.

Dále definujeme (definice 55) definiční obor zobrazení f jako množinu $D(f)$ těch prvků z X, které jsou v relaci f s některým z prvků množiny Y, neboli ve stručném matematickém zápisu

$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ [x, y] \in f\}$$

[67] V této kapitole bude využit výklad z knihy [8], kapitola 6.



Obrázek 29: Příklad relace f, která není zobrazením.

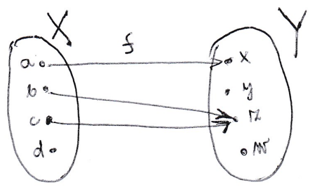
a (definice 56) obor hodnot zobrazení f jako množinu $Im(f)$ těch prvků z Y, se kterými je v relaci f aspoň jeden prvek množiny X, neboli

$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ [x, y] \in f\}.$$

Poznámka: ekvivalentní zápis zobrazení prvků.

Pokud je f zobrazení z X do Y, tak pro $[x, y] \in f$ můžeme vzhledem k jednoznačnosti prvku y psát $y = f(x)$ (a číst: prvek $y \in Y$ je obrazem prvku $x \in X$ vzhledem k zobrazení f) a v této symbolice zapisovat veškeré vlastnosti týkající se zobrazení f, tj. také i pojmy definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f:

$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ y = f(x)\}$$
$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ y = f(x)\}.$$



Obrázek 30: Příklad zobrazení f z množiny X do množiny Y.

Příklad 10.1. U zobrazení f z X do Y na obrázku 30 je $D(f) = \{a, b, c\}$ a $H(f) = \{x, z\}$. $\star$

Definice 57: Podle toho, jakou část množiny X zabírá $D(f)$, jakou část množiny Y zabírá $H(f)$a zda je zobrazení f prosté nebo ne (tato vlastnost bude hned vysvětlena), rozeznáváme šest typů zobrazení:

a) zobrazení z X do Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek 30;

b) zobrazení X do Y, pokud $D(f) = X$, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek 31;

c) zobrazení z X na Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek 32;

d) surjekce neboli zobrazení X na Y, pokud $D(f) = X$, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek 33;

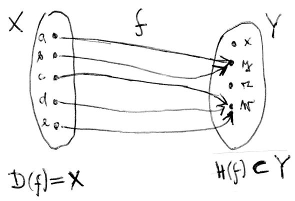
e) injekce neboli prosté zobrazení X do Y, pokud $D(f) = X$, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y a platí podmínka prostého zobrazení (= podmínka injektivity):

$$\forall x, y \in X : x \neq y \ \Rightarrow f(x) \neq f(y);$$

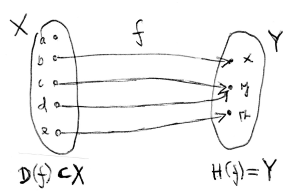
příklad viz obrázek 34 – z příkladu je vidět, že zobrazení typu (e) vzniká spojením vlastnosti typu (b) a podmínky injektivity;

f) bijekce neboli prosté zobrazení X na Y, pokud $D(f) = X$, $H(f) = Y$ a platí podmínka injektivity. Příklad viz obrázek 35. O zobrazení bijektivním lze na základě grafického názoru minimálně pro konečné množiny říci, že existuje mezi množinami, které mají stejný počet prvků. Z příkladu je vidět, že zobrazení typu (f) vzniká spojením vlastnosti typu (d) a vlastností typu (e) – respektive vlastnosti (b), vlastnosti (d) a podmínky injektivity.

Zobrazení typu b), tj. zobrazení X do Y, má speciální označení – (označení 37) $f : X \to Y$.



Obrázek 31: Příklad zobrazení X do Y.

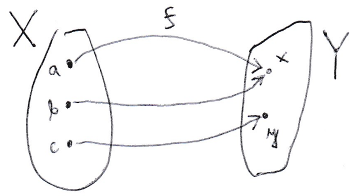


Obrázek 32: Příklad zobrazení z X na Y.

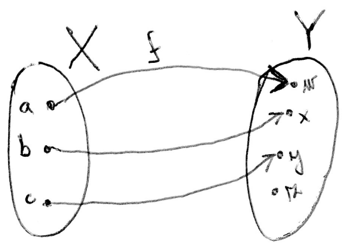
Věta 19.

Podmínce prostého zobrazení(= podmínce injektivity) je logicky ekvivalentní podmínka

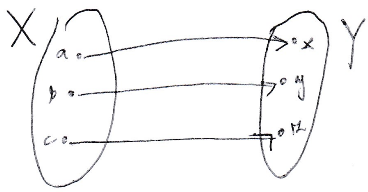
$$\forall x, y \in X : \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y$$



Obrázek 33: Příklad zobrazení X na Y (surjekce).



Obrázek 34: Příklad prostého zobrazení X do Y (injekce).



Obrázek 35: Příklad prostého zobrazení X na Y (bijekce).

(neboli pokud se dva obrazy rovnají, tj. $f(x) = f(y)$, tak se musí jednat o tentýž vzor, tj. $x = y$).

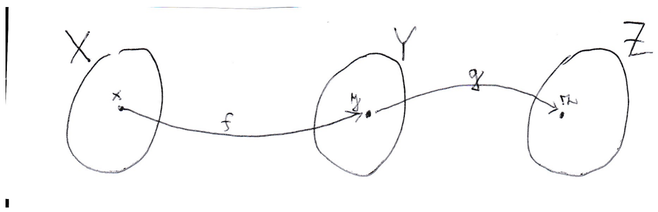
Důkaz: Plyne z platnosti věty 03: dokazovaná vlastnost je logicky ekvivalentní obměně implikace z vlastnosti (18). □

Kromě jednoho zobrazování či zobrazení lze studovat (a budeme jim věnovat čas) ty situace, kdy skládáme dvě různá zobrazení, tj. nejprve zobrazujeme prvky z X do Y, a pak z Y do Z:

Definice 58: Pokud $f : X \to Y$ je zobrazení a $g : Y \to Z$ je zobrazení, definujeme složené zobrazení $g \circ f$ (označení 38) množiny X do množiny Z takto:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

(čti „g po f“ – toto čtení také umožňuje zapamatovat si pořadí, v jakém zobrazování provádíme: nejprve na prvek x použijeme zobrazení f, a pak teprve zobrazení g)



Obrázek 36: Příklad složeného zobrazení $g \circ f$.

Příklad 10.2. Vezměme $X = Y = Z$ množinu reálných čísel a zobrazení $f : R \to R$ definované předpisem $f(x) = 2x$, podobně $g : R \to R$ definované $g(x) = x+5$. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je definované vztahem

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 5,$$

jedná se tedy opět o zobrazení $R \to R$.

Poznámka: Iverzní relace f^{-1} někdy není zobrazením.

Inverzní relaci f^{-1} netřeba zvlášť definovat, protože je to relace, v jejíž grafové reprezentaci všechny šipky změní směr na opačný vzhledem k f (a v množinové reprezentaci všechny uspořádané dvojice změní pořadí svých souřadnic). Problém je ten, že inverzní relace f^{-1} není vždy zobrazením: Uvažujme zobrazení $f : R \to R$ dané vztahem pro druhou mocninu $f(x) = x^2$. Pak např. $f(2) = 4$ a $f(-2) = 4$, tj platí $[4; 2] \in f^{-1}$ a $[4; -2] \in f^{-1}$, tj. f^{-1} není zobrazení.

Věta 20. Inverzní relace f^{-1} z Y do X je zobrazením z Y do X právě tehdy, když zobrazení $f : X \to Y$ je injekce.

Důkaz: Dokažme (typ 4) obě implikace této ekvivalence.

- Dk. implikace „⇒“:dokažme

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \Rightarrow \; f : X \to Y \text{ je injekce.}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \wedge \; f : X \to Y \text{ není injekce.}$$

  Pak existují prvky $x, y \in X$, $x \neq y$ tak, že $f(x) = z = f(y)$ pro nějaké $z \in Y$. To by ale znamenalo, že $[z, x] \in f^{-1}$, $[z, y] \in f^{-1}$, a to je spor s tím, že f^{-1} je zobrazení. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

- Dk. implikace „⇐“:dokažme

  $$f : X \to Y \text{ je injekce } \; \Rightarrow \; f^{-1} \text{ je zobrazení .}$$

Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

$$f : X \to Y \text{ je injekce } \wedge \quad f^{-1} \text{ není zobrazení} .$$

Pak existují prvky $x_1, x_2 \in X$ a $z \in Y$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $[z, x_1] \in f^{-1}$ a $[z, x_2] \in f^{-1}$. To by ale znamenalo, že $f(x_1) = z$, $f(x_2) = z$, a to je spor s tím, že f je injekce. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

Příklad 10.3. Například zobrazení $f : R \to R$ zadané vztahem $f(x) = 2x$ je prosté (injektivní), a tedy k němu existuje zobrazení inverzní $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (tedy předpis zobrazení představujícího násobení dvěma je inverzní k předpisu zobrazení představujícího dělení dvěma).

And last but not least, nyní jsme schopni si říci vysokoškolskou definici operace: (definice 59): Binární operace $\heartsuit$ na množině M je zobrazení $M \times M \to M$, tj. zobrazení, které přiřadí uspořádané dvojici $[a; b]$ z kartézského součinu $M \times M$ výsledek této operace, prvek $a \heartsuit b$.

Příkladem operací, které lze dosadit za symbol $\heartsuit$, je celá řada: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\cap$, $\cup$, $\sqcap$, $\sqcup$, atd. Jejich podrobnějšímu studiu se budeme věnovat ve druhém semestru studia.

Definice 60: Zobrazení $f : N \to R$ (tedy $D(f)$ je množina přirozených čísel, $H(f)$ je množina reálných čísel) se nazývá posloupnost reálných čísel.

Například posloupnost někdy zapisujeme ve tvaru

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

a to znamená, že přirozené číslo 1 se zobrazilo na reálné číslo označené a_1, přirozené číslo 2 se zobrazilo na reálné číslo označené a_2, atd.

Definice 61: Zobrazení f z množiny reálných čísel R do množiny reálných čísel R se nazývá (reálná) funkce (jedné) reálné proměnné.

10.3 Cvičení

Cvičení 10.1. Nakreslete příklad zobrazení $f : X \to Y$, které je injekce, ale není surjekce.

Cvičení 10.2. Nakreslete příklad zobrazení $f : X \to Y$, které je surjekce, ale není injekce.

Cvičení 10.3.

a) Uveďte definici složení dvou zobrazení f, g.

b) $f(x) = \sin x$, a dále $g(x) = \sqrt{x}$ jsou reálné funkce; zadejte vzorcem zobrazení $g \circ f$.

Cvičení 10.4.

a) Co je to zobrazení? Uveďte definici.

b) Jsou zadány reálné funkce $f(x) = 2^x$, $g(x) = (x+1)^2$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Sestavte složenou funkci $h \circ g \circ f$ proměnné x.

Cvičení 10.5.

a) Nakreslete příklady všech šesti typů zobrazení, ovšem v jiném pořadí, než zaznělo v definici – jejich popis si ale napište bokem, abyste hned neprozradili, o jaký typ se jedná.

b) Vyměňte si sešity ve dvojicích či trojicích a napište tužkou ke každému zobrazení v sešitě svého souseda jeho typ. Pak si své výsledky zkontrolujte společně.

Cvičení 10.6 Dostatečné cvičení je přístupné v knize [8], str.62-65. Další cvičení lze najít v knize [14], str. 52-54, příklady 1.5.B2, 1.5.B3, B5, B6, B7, B13.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.10.

11 Základní vlastnosti reálných funkcí

11.1 Warm-up: V tomto předmětu jsme už tak zahřátí, že už žádný warm-up nepotřebujeme.

11.2 Přednáška

Nyní shrneme trochu přesněji vlastnosti reálné funkce vlastnosti a pojem grafu.

Definice 62: Když f je reálná funkce, tak graf je množina všech bodů $[x, f(x)]$ ve zvolené rovinné soustavě souřadnic (zadané počátkem a dvěma kolmými osami reálných čísel, které se protínají v počátku), pro které $x \in D(f)$[68].

V dalším se zaměříme na přesnější vyjádření vlastnosti reálných funkcí. Studenti budou muset znát definice následujících vlastností, a také vědět, jak se daná vlastnost pozná z grafu funkce $f(x)$. Říkáme, že

- funkce f je (definice 63) rostoucí na intevalu I, když

$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y);$$

- funkce f je (definice 64) klesající na intevalu I, když

$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y);$$

- x_0 z $D(f)$ je (definice 65) lokální minimum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I;$$

- x_0 z $D(f)$ je (definice 66) lokální maximum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I;$$

- funkce f je (definice 67) sudá na svém definičním oboru, když $D(f)$ je symetrická množina na vodorovné reálné ose vzhledem k číslu 0 a

$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = f(x);$$

- funkce f je (definice 68) lichá na svém definičním oboru, když $D(f)$ je symetrická množina na vodorovné reálné ose vzhledem k číslu 0 a

$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = -f(x);$$

- funkce f není (definice 69) ani sudá, ani lichá na svém definičním oboru, když neplatí ani definice 67, ani definice 68.

[68] Bod $[x, f(x)]$ modeluje prvek relace f a v rovině jej znázorňujeme na průsečíku kolmice k vodorovné ose v bodě x s kolmicí ke svislé ose v bodě $f(x)$.

- funkce f je (definice 70) zdola ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když
$$\exists K \in R : \forall x \in D(f) : \quad K \leq f(x);$$
- funkce f je (definice 71) shora ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když
$$\exists L \in R : \forall x \in D(f) : \quad f(x) \leq L;$$
- funkce f je (definice 72) ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když je ohraničená shora i zdola, tj. když
$$\exists K, L \in R : \forall x \in D(f) : \quad K \leq f(x) \leq L;$$
- funkce f je (definice 73) periodická, když
$$\exists p \in R : p > 0 \ \wedge \ \forall x \in D(f) : \quad (x + p \in D(f) \quad \wedge \quad f(x) = f(x + p)).$$

Budeme se učit poznávat uvedené vlastnosti (včetně těch, které byly definovány v minulé kapitole, jako je $D(f)$, $H(f)$, rozeznání, zda je funkce prostá = injektivní, a následné sestavení inverzní funkce) na základě grafu funkce.

Rozeznání některých vlastností z grafu funkce:

1. Definiční obor poznáme z grafu funkce takto: kolmice z bodů grafu na vodorovnou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $D(f)$.
2. Obor funkčních hodnot: kolmice z bodů grafu na svislou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $H(f)$.
3. Lokální minimum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je klesající na } \langle a; x_0 \rangle \ \wedge f \text{ je rostoucí na } \langle x_0; b \rangle;$$
4. Lokální maximum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je rostoucí na } (a; x_0 \rangle \ \wedge f \text{ je klesající na } \langle x_0; b);$$
5. Sudou funkci poznáme tak, že její graf je osově souměrný vzhledem ke svislé ose soustavy souřadnic (osa y je osa souměrnosti).
6. Lichou funkci poznáme tak, že její graf je středově souměrný vzhledem k průsečíku souřadných os (bod $[0; 0]$ je střed souměrnosti).
7. Funkci, která není ani sudá, ani lichá, poznáme tak, že její graf není ani osově souměrný vzhledem ke svislé ose, ani středově souměrný vzhledem k počátku soustavy souřadnic[69].

[69] Aby to funkci ani sudé, ani liché nebylo líto, tak pokud je její definiční obor středově symetrický vzhledem k počátku a funkce je dostatečně slušná, tedy například spojitá, lze ji vyjádřit jako součet dvou (spojitých!) funkcí, z nichž jedna je sudá a druhá lichá – tedy z každé spojité funkce na vhodném definičním oboru lze separovat dvě hodnoty, z nichž jedna přispívá do sudosti a druhá do lichosti. Tato separace funkce na sudou a lichou část ovšem nepatří do základních dovedností, jimiž se budeme zabývat.

8. Funkci ohraničenou zdola poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = K$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$.

9. Funkci ohraničenou shora poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = L$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý pod přímkou $y = L$.

10. Funkci ohraničenou zdola i shora poznáme tak, že existují konstantní funkce $y = K$ a $y = L$ rovnoběžné s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$ a pod přímkou $y = L$.

11. To, že funkce f je prostá (injektivní), poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy nejvýše v jednom bodě.

12. To, že funkce f je surjektivní, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x vždy protnou její graf v nějakém bodě (aspoň jednom).

13. To, že funkce f je bijekce R na R, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy právě v jednom bodě.

14. Pokud je naším úkolem nakreslit funkci inverzní f^{-1} k funkci f, tak můžeme využít faktu, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné vzhledem ke grafu lineární funkce $y = x$[70].

15. To, že funkce je periodická, poznáme z jejího grafu tak, že část grafu odpovídající délce nejmenší periody na vodorovné ose se opakuje v tom smyslu, že rovnoběžky s osou x protínají graf funkce v nekonečně mnoha bodech, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna násobku této nejmenší periody.

přehled úkolů pro rozbor funkce $f(x)$:

a) Určete $D(f)$.

b) Určete $H(f)$.

c) Určete intervaly, na kterých je funkce rostoucí (klesající), nalezněte její lokální extrémy.

d) Určete, zda je funkce sudá, lichá, nebo není ani sudá, ani lichá.

e) Určete zda je funkce ohraničená (zhola nebo shora).

f) Určete, zda je funkce prostá – pokud ano, tak vyjádřete funkcí k ní inverzní.

g) Určete, zda je funkce periodická – pokud ano, najděte délku její nejmenší periody.

h) Nakreslete graf funkce f.

[70] To plyne mimo jiné z toho faktu, že při hledání inverzní funkce zaměňujeme x za y ve funkčním předpisu $y = f(x)$ a vyjadřujeme proměnnou x jako funkci proměnné y, a tedy oba grafy jsou „zaměnitelné“ = osově symetrické vzhledem k této „ose zaměnitelnosti“ $y = x$.

A) Lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$

Grafem lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$, kde a, b jsou pevně zvolené konstanty, je přímka, tj. se zde jen odkážeme na analytickou geometrii, která se přímkami podrobně zabývá[71]. Studenti by měli umět najít rovnici přímky, která prochází dvěma zadanými body.

B) Funkce s absolutními hodnotami

Těmito funkcemi se v této fázi také nebudeme zabývat, blíže lze nalézt řadu věcí v [9], str. 41-56. Zejména u funkcí, ve kterých se vyskytují absolutní hodnoty, s velkým úspěchem využijeme faktu, že některé z těchto funkcí jsou sudé – pokud například víme, že funkce f je sudá a $D(f) = R$, můžeme na základě znalosti grafu funkce na intervalu $(0; \infty)$ jedoduše dokreslit její graf pouhým překlopením v osové souměrnosti s osou y[72].

C) Další základní typy funkcí

Většina dalších základních funkcí byla procvičena během warmupů na přednáškách 2 (kvadratické funkce), 3 (lineárně lomené funkce), 5 (mocninné funkce, pojem inverzní funkce), 6 a 7 (exponenciální a logaritmické funkce). Na goniometrické funkce se podíváme speciálně příští týden.

11.3 Cvičení 11

V rámci cvičení 11 může proběhnout opakování vlastností a grafů všech dosud uvedených elementárních funkcí. Kromě funkcí goniometrických, kterým se budeme věnovat příší týden.

Cvičení 11.1. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je sudá.

Cvičení 11.2. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je lichá.

Cvičení 11.3. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$.

Cvičení 11.4. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3}$.

Cvičení 11.5. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = 2x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3} - 1$.

Cvičení 11.6. Nakreslete grafy funkcí $y = x^{-3}$ a $y = x^{-4}$. Existuje nějaký bod z definičného oboru těchto funkcí, ve kterém tyto funkce nabývají lokálního minima? Pokud

[71] Nebo na učebnici [9], str. 23-40

[72] Každá funkce, ve které se neznámá proměnná vyskytuje pouze ve tvaru $|x|$, je sudá. Například $f(x) = \frac{|x|}{|x|+2}$ je sudá, protože platí $\frac{|-x|}{|-x|+2} = \frac{|x|}{|x|+2}$. Zkuste si cvičně nakreslit její graf po absolvování opakování funkcí typu D = lineárně lomených funkcí.

ano, který? Pokud ne, proč?

Cvičení 11.7. Je dána funkce $f(x) = 3x - 2$. Najděte vzorec pro inverzní funkci f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku.

Cvičení 11.8. Je dána funkce $f(x) = (x-2)^2 + 3$ pro $D(f) = (-\infty; 2\rangle$. Najděte vzorec pro inverzní funkci f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku.

Cvičení 11.9. Je dána funkce $f(x) = 2^x$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Cvičení 11.10. Je dána funkce $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Cvičení 11.11. Je číslo $\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5}$ větší nebo menší než číslo 1? Odpovězte na základě grafu nějaké konkrétní funkce.

Cvičení 11.12. Porovnejte hodnoty $0{,}4^{1{,}6}$ a $0{,}4^{1{,}8}$ na základě grafu nějaké exponenciální funkce.

Cvičení 11.13. Nakreslete grafy funkcí (do tří různých obrázků) a) $y = 0{,}3^x$; b) $y = -0{,}3^x$; c) $y = 2 - 0{,}3^x$; k poslední uvedené funkci najděte vzorec pro funkci inverzní a nakreslete ji do obrázku c).

Cvičení 11.14.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \log_{0,5} x$, určete Df a Hf.

b) Nakreslete graf funkce f^{-1} k funkci $f(x)$ v části (a) a vyjádřete f^{-1} vzorcem.

Cvičení 11.15. Pro funkci $y = 2 \cdot \log_4 x - 1$ nalezněte vzorec funkce inverzní.

Cvičení 11.16. Porovnejte hodnoty $\log_3 5$ a $\log_3 8$ pomocí grafu jisté konkrétní funkce.

Cvičení 11.17. Porovnejte hodnoty $\log_{0,5} 7$ a $\log_{0,5} 8$ pomocí grafu jisté konkrétní funkce.

Cvičení 11.18. Porovnejte hodnoty $\log_3 10$ a $\log_{\frac{1}{3}} 10$ pomocí grafů dvou funkcí zakreslených do jednoho obrázku.

Cvičení 11.19. Porovnejte hodnoty $\log_{0,4} 7$ a $\log_{0,4} 6$ pomocí grafu jisté konkrétní funkce.

Cvičení 11.20. Vypočtěte:

a) $\log_2 8 = \dots$

b) $\log_{10} 0{,}01 = \dots$

c) $\log_8 t = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \dots$

d) $\log_a 100 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \dots$

Cvičení 11.21. Dokončete definice nebo jejich negace bez jediného českého slova, jen pomocí matematických symbolů (u negací nejprve vytvořte příslušnou pozitivní definici, a teprve pak symbolický zápis negujte):

a) Relace f je zobrazení z X do Y, když ...

b) Relace f není zobrazení z X do Y, když ...

c) Funkce f je rostoucí na intervalu I, když ...

d) Funkce f není rostoucí na intervalu I, když ...

e) Funkce f je klesající na intervalu I, když ...

f) Funkce f není klesající na intervalu I, když ...

g) Reálné číslo x_0 je lokální minimum funkce f, když ...

h) Reálné číslo x_0 není lokální minimum funkce f, když ...

i) Reálné číslo x_0 je lokální maximum funkce f, když ...

j) Reálné číslo x_0 není lokální maximum funkce f, když ...

k) Funkce f je sudá, když ...

l) Funkce f není sudá, když ...

m) Funkce f je lichá, když ...

n) Funkce f není lichá, když ...

o) Funkce f je shora ohraničená, když ...

p) Funkce f není shora ohraničená, když ...

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.11.

12 Goniometrické funkce

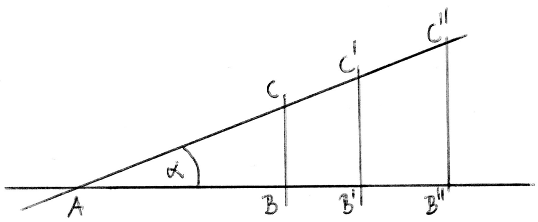
12.1 Warm-up: Poslední téma předmětu snad ani žádný warm-up nepotřebuje.

12.2 Přednáška

Odkud se vzaly goniometrické funkce? Označení pochází z řečtiny: *hé gé* … země, odtud „geometrie“ = měření země, zeměměřičství; dále *hé gónia* … úhel, roh, úhelný kámen, tj. odtud „goniometrie“ = měření úhlů, úhloměřičství.

A. Označení goniometrických funkcí

Pokud přeskočíme definici úhlu ze základní školy a podíváme se na středoškolskou definici goniometrických funkcí, mohla by se odehrávat následovně: Když se podíváme na pravoúhlé trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$, které jsou podobné díky všem třem úhlům navzájem shodným (viz obrázek 37, trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$),



Obrázek 37: Pravoúhlé trojúhelníky, které jsou podobné.

vidíme, že například poměr délky odvěsny protilehlé vrcholu A ku délce přepony se nemění a zůstává ve všech třech pravoúhlých trojúhelnících stejný – a je tedy spíše vlastností úhlu α sklonu přepony vůči vodorovné odvěsně, než vlastností délek; označme tento poměr $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha := \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|AC'|} = \frac{|B''C''|}{|AC''|}.$$

V praxi pak například lze určit z těchto vztahů $|BC| = |AC| \cdot \sin\alpha$, tj. délku jedné strany pravoúhlého trojůhelníka lze vypočítat pomocí délky jiné strany a hodnoty $\sin\alpha$.

Podobně v obrázku vidíme další poměry stran, které se nemění, pokud zachováváme všechny úhly trojúhelníka stejné, přičemž jeden z nich je pravý, a sice

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &:= \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB''|}{|AC''|},\\
\operatorname{tg}\alpha &:= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|AB'|} = \frac{|B''C''|}{|AB''|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\
\operatorname{cotg}\alpha &:= \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB''|}{|B''C''|} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}
\end{aligned}$$

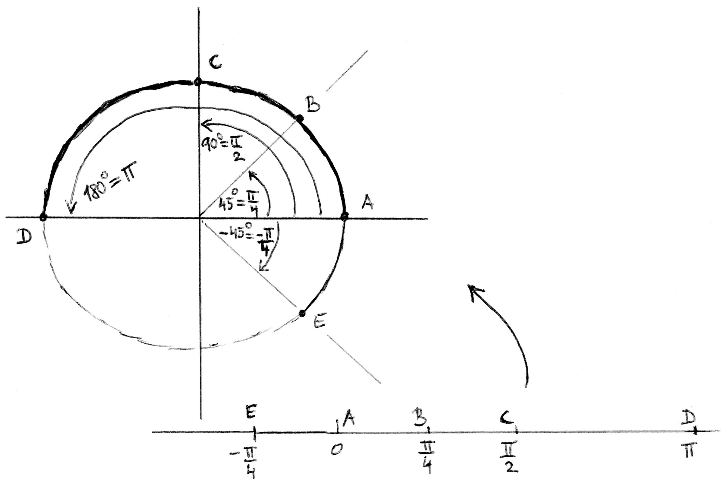
(v daných rovnostech jsou uvedeny jak definiční vztahy :=, tak z nich vyplývající vztahy mezi jednotlivými definicemi, které plynou z toho, že u funkcí tg α, cotg α dáváme funkce $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ do vzájemného poměru). Tím způsobem jsme definovali funkce popisující jistou vlastnost ostrých úhlů, tj. úhlů, které mohou vzniknout jako vnitřní úhly při vrcholu A v pravoúhlém trojůhelníku ABC.

B. Dvě metody měření úhlů

Při měření a popisu úhlů existují dvě základní metody neboli míry:

a) Stupňová míra … plnému úhlu se přisoudí velikost 360°, pravému úhlu velikost 90°, přímému úhlu velikost 180°, atd.

b) Oblouková míra = délka oblouku:



Obrázek 38: Namotání reálné osy na kružnici o poloměru 1.

Když reálnou číselnou osu „namotáme“[73] na jednotkovou kružnici se středem v počátku a poloměrem 1, na této kružnici dostáváme obrazy reálných čísel – nyní dostáváme úhly určené na jedné straně polopřímkou určenou kladným směrem vodorovné osy, na druhé straně polopřímkou vycházející z počátku, která prochází obrazem reálného čísla „namotaného“ na jednotkové kružnici. Obloukové míře se někdy říká i radiánová míra, kde jednotka jeden radián odpovídá úhlu s vrcholem v počátku a rameny procházejícími obrazy bodů 0 a 1 na jednotkové kružnici (úhel o velikosti jednoho radiánu tedy vytíná na jednotkové kružnici popsané v předchozí konstrukci oblouk délky 1).

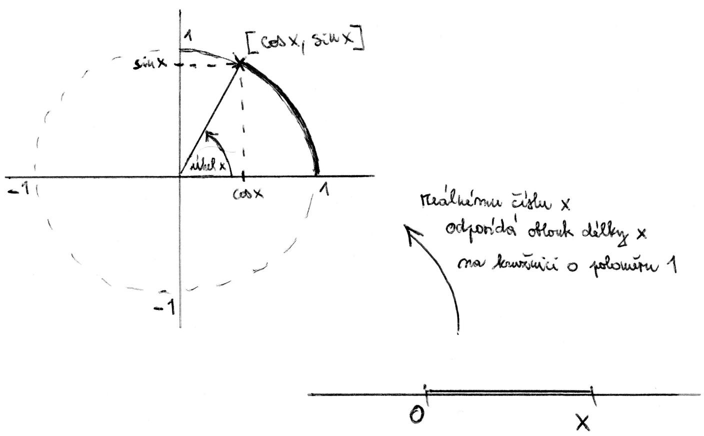
V těchto dvou mírách potom

[73]Na obě strany donekonečna, tj. to namotávání by nám zabralo hodně času – nicméně toto přibližné vyjadřování je formální, ne že bychom to nekonečné namotávání museli prakticky provést.

hodnotě 45° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{4}$ rad,
hodnotě 90° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{2}$ rad,
hodnotě 180° odpovídá oblouková délka π rad,
atd.

C. Rozšířená definice goniometrických funkcí

Tímto „namotáním“ reálné číselné osy na jednotkovou kružnici, která se dále nachází také v rovině, ve které jsme umístili kartézskou soustavu souřadnic (= vodorovnou a svislou osu) s počátkem ve středu kružnice, lze rozšířit definici goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ (a tím i tg x, cotg x) pro jakékoli reálné x následovně – viz obrázek 39 :



Obrázek 39: Rozšíření definice funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro libovolné reálné x.

Souřadnice obrazu bodu x po namotání na jednotkovou kružnici jsou v kartézské soustavě bodů v rovině, ve které se kružnice nachází, rovny $[\cos x, \sin x]$.

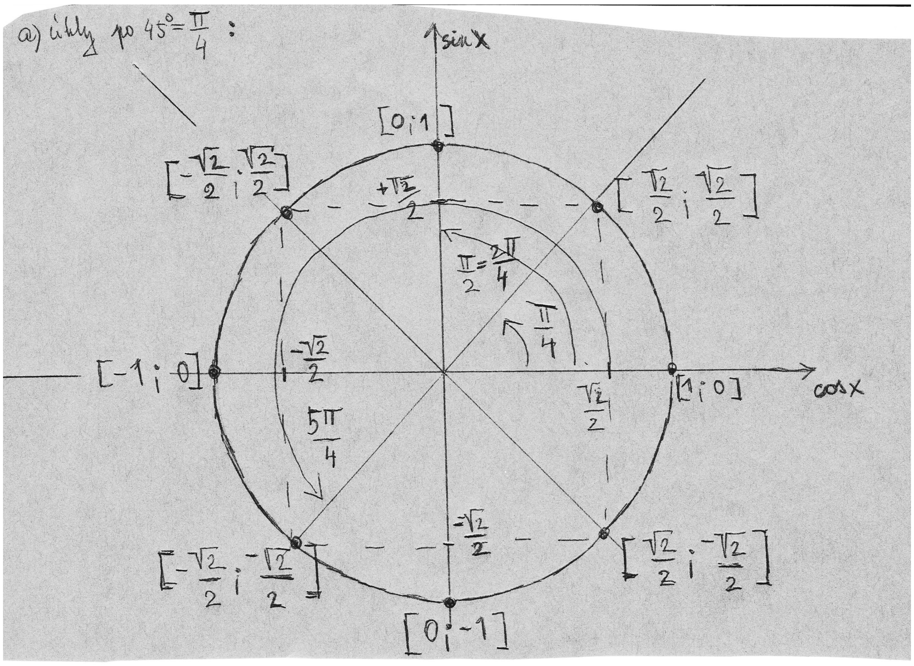
D. Význačné hodnoty goniometrických funkcí

Je důležité pamatovat si hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly x, minimálně hodnoty v tabulce:

x (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.
cotg x	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0

Zapamatování údajů z předchozí tabulky právě usnadňuje geometrický význam těchto hodnot jako souřadnic $[\cos x, \sin x]$ obrazu bodu x při namotání reálné osy na jednotkovou kružnici[74].

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$ jsou uvedeny na obrázku 40:



Obrázek 40: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$.

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$ jsou uvedeny na obrázku 41:

E. Graf a vlastnosti goniometrických funkcí

Podívejme se nyní na grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ s definičním oborem rozšířeným pro všechna $x \in R$ a z grafů se pokusíme vyčíst jejich vlastnosti.

- Vlastnosti funkce $\sin x$ vyčtené z jejího grafu:

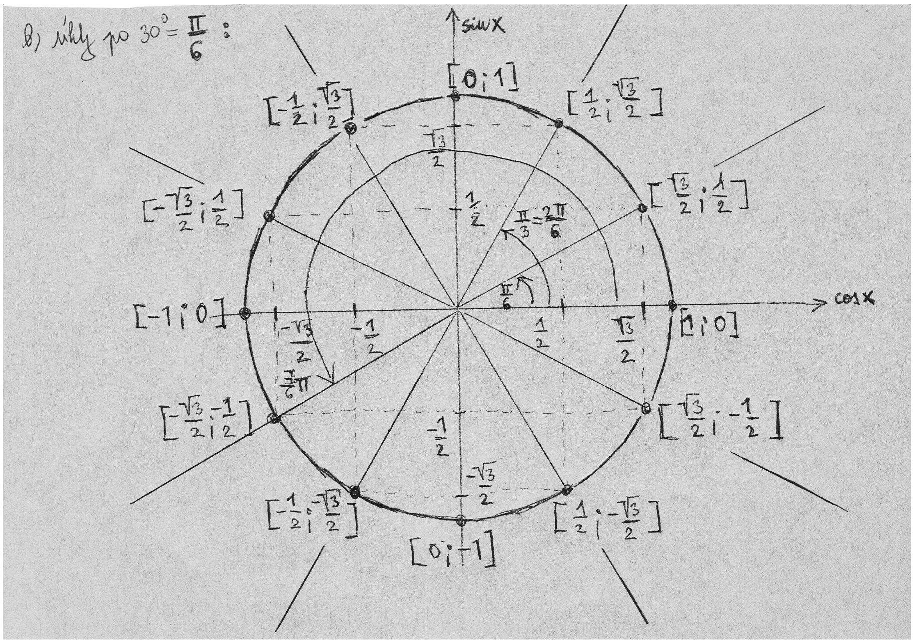
  a) Graf funkce $\sin x$ vidíme na obrázku 42.

  b) $D(f) = R$.

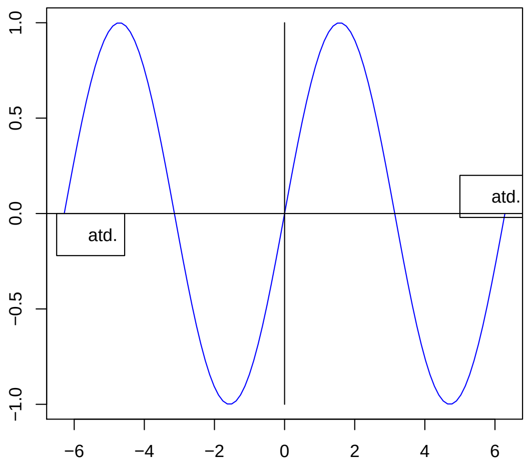
  c) $H(f) = \langle -1; 1\rangle$.

  d) Funkce $\sin x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

[74]Pozor, záleží na pořadí, první souřadnice bodů na jednotkové kružnici je rovna hodnotě $\cos x$, druhá souřadnice hodnotě $\sin x$.



Obrázek 41: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$.



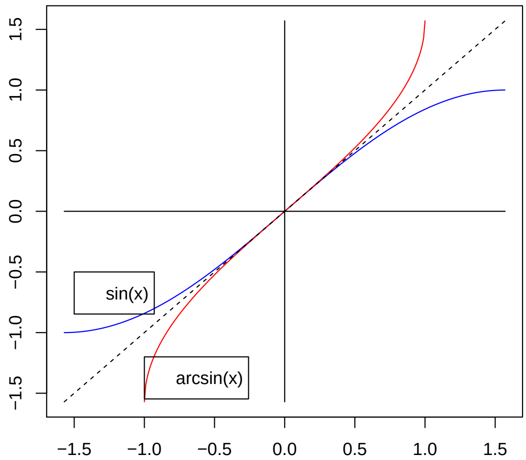
Obrázek 42: Graf funkce $f(x) = \sin x$.

e) Funkce $\sin x$ je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí $\sin(-x) = -\sin x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\sin x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

g) Funkce $\sin x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \sin x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\sin x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \sin x$ pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Grafy této funkce $\sin x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 43:



Obrázek 43: $f(x) = \sin x$ (modře) pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

- Vlastnosti funkce $\cos x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce $\cos x$ vidíme na obrázku 44.

b) $D(f) = R$.

c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

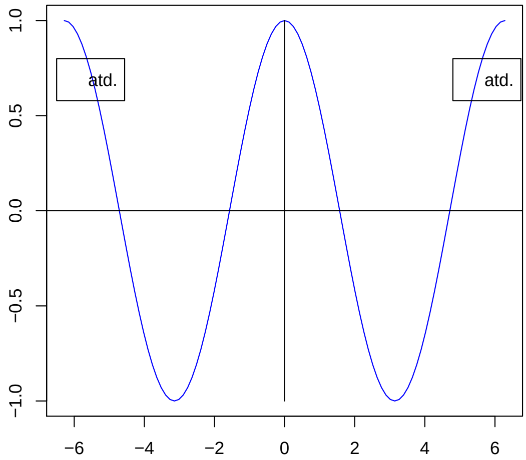
d) Funkce $\cos x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\pi + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $0 + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

e) Funkce $\cos x$ je sudá, protože její graf je osově souměrný podle svislé osy y, tj. platí $\cos(-x) = \cos x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\cos x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

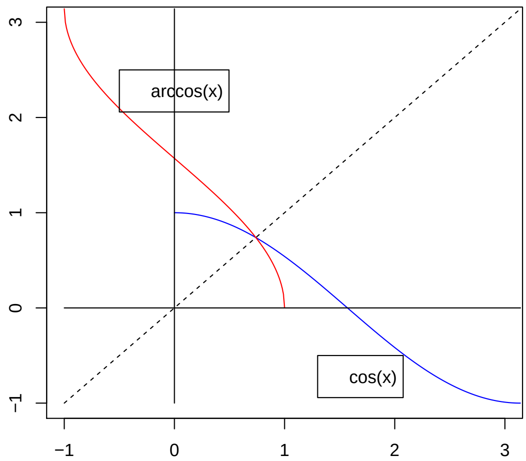
g) Funkce $\cos x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \cos x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno



Obrázek 44: Graf funkce $f(x) = \cos x$.

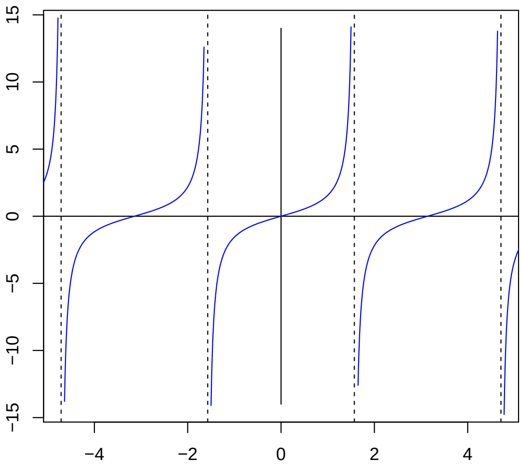
k funkci $\cos x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arccos } x$. Grafy funkce $\cos x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 45:



Obrázek 45: Graf $f(x) = \cos x$ (modře) pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arccos } x$.

- Vlastnosti funkce tg x vyčtené z jejího grafu:

  a) Graf funkce tg x vidíme na obrázku 46.



Obrázek 46: Graf funkce $f(x) = \mathrm{tg}\, x$.

b) $D(f) = R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

d) Funkce tg x je rostoucí na každém z intervalů $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a nemá lokální extrémy.

e) Funkce tg x je lichá[75], protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí tg $(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce tg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce tg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci tg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\, x$. Grafy funkce tg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 47:

- Vlastnosti funkce cotg x vyčtené z jejího grafu:

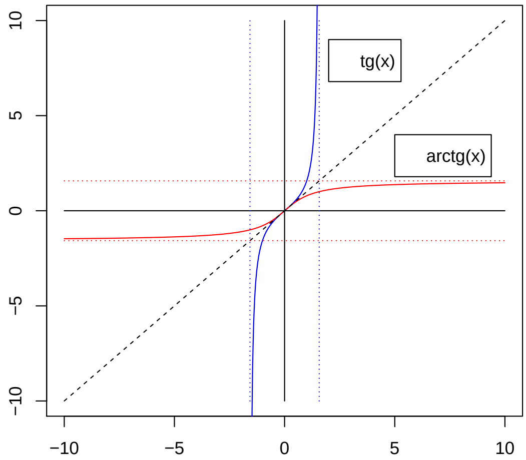
a) Graf funkce cotg x vidíme na obrázku 48.

b) $D(f) = R - \{0 + k\pi\}$.

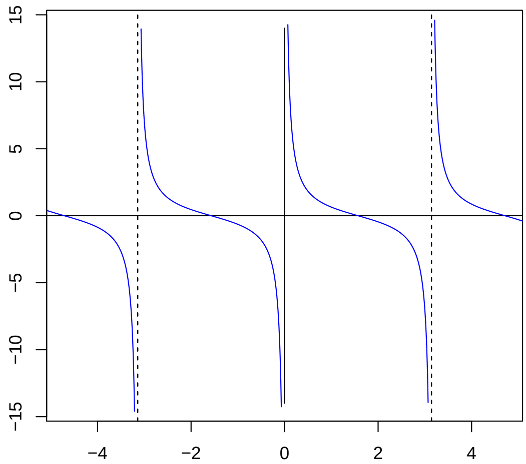
c) $H(f) = R$.

d) Funkce cotg x je klesající na každém z intervalů $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ a nemá lokální extrémy.

[75] Součin nebo podíl dvou funkcí, z nichž jedna je lichá a druhá sudá, je lichá funkce … díky této vlastnosti víme, že funkce tg x i cotg x jsou liché.



Obrázek 47: Graf fukce $f(x) = \mathrm{tg}\ x$ (modře) pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\ x$.



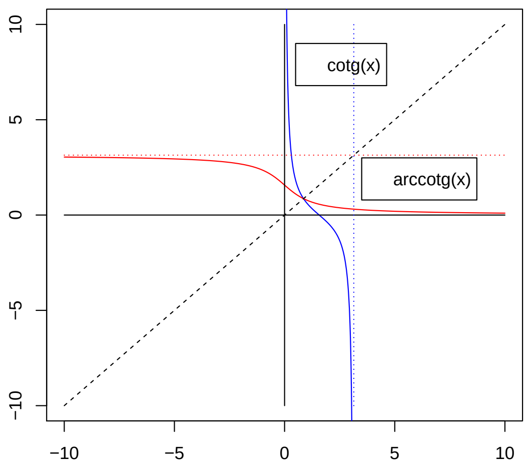
Obrázek 48: Graf funkce $f(x) = \mathrm{cotg}\ x$.

e) Funkce cotg x je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí cotg $(-x) = -$cotg x pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce cotg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce cotg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) = \mathrm{cotg}\ x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci cotg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \text{cotg } x$ pro $x \in (0;\pi)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$. Grafy funkce cotg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 49:



Obrázek 49: Graf fukce $f(x) = \text{cotg } x$ (modře) pro $x \in (0;\pi)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$.

Zapamatovat si průběh grafů zúžených goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních lze pomocí následujících dvou faktů: a) inverzní funkce k rostoucí funkci je opět rostoucí (jak je to u funkcí zúžený $\sin x$ a zúžený tg x); inverzní funkce ke klesající funkci je opět klesající (jak je to u funkcí zúžený $\cos x$ a zúžený cotg x); b) $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(F^{-1})$ ... platí pro všechny čtyři zúžené goniometrické funkce.

12.3 Cvičení

Projděme si důležité pertie cvičení ke goniometrickým funkcím podle učebnice [10] (dané učebnice se týkají i následující odkazy na strany a čísla příkladů)[76]:

1. Velikost úhlu ve stupňové a obloukové míře
   (a) Str. 21-23, řešený př. 1.
   (b) Převodní vztahy mezi stupni a radiány získáme z trojčlenky podle toho, zda se nám líbí více vzorec se 180° nebo 360°:

$$1 \text{ rad} \ldots \qquad \frac{\pi}{180} \text{ stupnů} = \frac{2\pi}{360} \text{ stupňů};$$

[76] Základní uvedení do stupňové a obloukové míry úhlů a do funkcí $\sin x$, arcsin x, $\cos x$, arccos x, tg x, arctg x, cotg x, arccotg x viz přednáška v této kapitole.

$$x \text{ rad} \ldots \qquad \alpha \text{ stupňů}.$$

Odtud získáme vzorec pro převod stupňů na radiány

$$\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi} = \frac{x \cdot 360}{2\pi}$$

nebo radiány na stupně

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}.$$

(c) Str. 24, příklady 5 a 6 … konkrétní převod míry úhlu z radiánů na stupně nebo naopak. Další příklady str. 25, př. 2.10.a), 2.11.a).

2. Orientovaný úhel a jeho vlastnosti

   (a) Str. 27-28 … základní velikost orientovaného úhlu: $0 \leq \alpha < 2\pi$ v obloukové míře, respektive $0° \leq \alpha < 360°$ v úhlové míře;

   (b) orientovaný úhel, který nemá základní velikost, lze převést na úhel se základní velikostí odečtením či přičtením vhodného násobku 2π, respektive v úhlové míře vhodného násobku $360°$;

   (c) př. 1-str. 29, další příklady: 2.19-str.32, 2.20-str.33, 2.21, 2.22.

3. Vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$

   (a) Řešené příklady 6-str.37 a 1-str.38-39;

   (b) další příklady: str.40-41, příklady 2.24 až 2.33.

4. Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$

   (a) Str. 42 … grafy; str. 43 – př. 1, str. 44 – př. 2, str. 46 – př. 3, str. 48 – př. 2.39;

   (b) další příklady: str. 49 – př. 2.40.

5. Grafy funkcí tg x, cotg x

   (a) Str. 57-58 … grafy; str. 55 – příklad 1;

   (b) str. 60 – př. 2.43 až 2.49.

6. Grafy a vlastnosti cyklometrických funkcí arcsin x, arccos x, arctg x, arccotg x[77]

   (a) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$;

   (b) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arccos(3x - 2)$;

   (c) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arccotg}\,(2x - 5) + \pi$.

7. Goniometrické rovnice

   (a) Str. 61 – příklad 1 … využití jednotkové kružnice;

[77] Následující tři příklady nejsou vzaty z učebnice [10], a tedy budou vyřešeny na přednášce, to make sure that the students know the results. Výsledky ostatních příkladů viz závěr učebnice [10].

   (b) další příklady: str.68 – př. 2.52, str. 69 – př. 2.57.

8. Úlohy k opakování – str. 69-70, příklady 2.60 až 2.68.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 13.12.

13 Výsledky některých příkladů

13.1 Výsledky ke kapitole 1.3 – podstata matematiky

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.2 Výsledky ke kapitole 2.3 – základní typy důkazů

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.3 Výsledky ke kapitole 3.3 – důkaz sporem, indukcí, protipříkladem

Ad Cvičení 3.1. Důkaz sporem: Předpokládejme, že $\sqrt{3}$ JE racionální číslo, tj. lze je vyjádřit ve tvaru zlomku. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že v tomto zlomku už nelze krátit, tj. pokud je krácení možné, provádíme je tak dlouho, až dospějeme do vztahu

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$

kde $m \in Z$, $n \in N$ a čísla m, n jsou nesoudělná (= nemají společného dělitele většího než číslo 1). Umocněním obou stran na druhou dostaneme

$$3 = \frac{m^2}{n^2},$$

a tedy

$$3n^2 = m^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že číslo m^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo m musí být dělitelné třemi, tj. $m = 3k$ pro $k \in N$. Dosazením do naší rovnosti máme

$$3n^2 = 9k^2, \quad \text{po vydělení třemi } n^2 = 3k^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že číslo n^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo n musí být dělitelné třemi, tj. $n = 3l$ pro nějaké $l \in N$ – ale to je spor s konstrukcí čísel m, n, protože jsme je sestavili tak, aby neměli žádného jiného přirozeného dělitele než číslo 1. Dospěli jsme řetězcem přesných úvah ke sporu – nesprávný je tedy původní předpoklad, tj. platí jeho opak, $\sqrt{3}$ není číslo racionální, nelze ji vyjádřit ve tvaru zlomku.

Ad Cvičení 3.2. Důkaz indukcí: 2a) První část: dokažme pro prvních několik hodnot: 4 kč lze vyplatit pomocí dvou dvoukorun, 5 kč pomocí jedné pětikoruny, 6 kč pomocí tří dvoukorun.

Druhá část: Výrok $V(n)$ má tvar: Obnos n kč lze sestavit pouze ze dvoukorun a pětikorun. Dokažme indukční implikaci

$$V(n) \quad \Rightarrow \quad V(n+1)$$

pro libovolné přirozené n počínaje hodnotou 7. Předpokládejme, že platí $V(n)$. Popišme, jak pomocí této hromady vyčíslíme hromadu o sumě $(n+1)$:

1. Pokud n je liché počínaje sedmičkou, tak tuto hodnotu lze odměřit pomocí jedné pětikoruny a zbytek dosypat pouze ze dvoukorun. Pak hodnotu $(n+1)$ odměříme tak, že vezmem z hromady pětikorunu a místo ní vrátíme tři dvoukoruny, tj. dotaneme číslo o jednu korunu větší.
2. Pokud n je sudé počínaje osmičkou, tak tuto hodnotu lze odměřit pomocí samých dvoukorun. Pak hodnotu $(n+1)$ odměříme tak, že dvě dvoukoruny odebereme a vrátíme jednu pětikorunu.

2b, 2c) podobně jako příklad dokazovaný indukcí na přednášce; obě tyto rovnosti lze dokázat i jinak než indukcí – zkuste přemýšlet, jak.

Ad Cvičení 3.3. Ve všech třech případech lze splnit příslušný úkol, tj. existenční důkaz vykonáme konstrukcí daného úkolu:

a) Ze dvanácti zápalek lze snadno sestavit čtyři samostnatné trojúhelníky.

b) Z devíti zápalek už potřebujeme šetřit – pokud sestavíme jeden větší rovnostranný trojúhelník o délce strany ze dvou zápalek, zbydou nám ještě tři zápalky na spojení středů jejich stran – tím je velký trojúhelník rozdělen na čtyři menší.

c) Zadání je zde nejednoznačné. Pokud by zadávající trval na tom, aby výsledkem byly čtyři stejně velké trojúhelníky v rovině, řešení neexistuje. Ovšem bez omezení na rovinu můžeme jeden trojůhelník ze tří zápalek postavit jako základnu čtyřstěnu, zbylé tři zápalky tvoří hrany čtyřstěnu v prostoru – a čtyřstěn, jak známo, má čtyři shodné trojůhelníky ze svých stěn.

13.4 Výsledky ke kapitole 4.3 – množiny a Vennovy diagramy

Ad cvičení 4.2. Teorie množin je vystavěna na dvouhodnotové logice, protože náš přístup je ten, že každý objekt do množiny buď patří, nebo ne. Kromě vět 1,2 a 9,10 existují další vztahy mezi logikou a teorií množin, například zákonu negace negace výroku $(\neg(\neg A) \Leftrightarrow A)$ odpovídá rovnost pro doplněk doplňku množiny $\overline{\overline{A}} = A$.

Ad cvičení 4.4. a) $(B \cap C) \setminus A$; b) $(B \setminus (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$; c) $(B \cap D) \setminus C$; d) $B \setminus (A \cup C)$.

13.5 Výsledky ke kapitole 5.3 – číselné obory, dělitelnost celých čísel

Ad cvičení 5.2. Ad 13a) Vyjdeme z předpokladu $a|b$, $a|c$ a užitím definice 28 tento předpoklad přepíšeme:

$$b = a \cdot q_1, \quad c = a \cdot q_2 \quad \text{pro nějaká čísla} \quad q_1, q_2 \in Z.$$

Pak lze číslo $(b + c)$ vyjádřit jako

$$b + c = aq_1 + aq_2 = a \cdot (q_1 + q_2),$$

tedy podle definice 28 je $(b + c)$ nějaký násobek čísla a, tj. $a|(b + c)$.

Ad 13b) Důkaz je podobný důkazu věty 13a).

13.6 Výsledky ke kapitole 6.3 – relace

Ad příklad 6.1: reflexivní relace je reprezentována smyčkami u všech prvků (jedničkami na celé hlavní diagonále), antireflexivní relace nepřítomností smyček (nepřítomností jedniček na hlavní diagonále), symetrická relace má pro každou šipku též šipku v opačném směru, antisymetrická relace nemůže mít oboustranné šípky mezi dvěma různými prvky, tranzitivní relace musí pro např. šipku od a do b a od b do c obsahovat i šipku od a do c.

Ad příklad 6.2: Studentům by mělo být jasné, že např. antireflexivní ($anti - 12$) relace není negací relace reflexivní (11), ale úplným protipólem reflexivní relace – tj. že existují relace s nějakou smyčkou, které nejsou ani reflexivní, ani antireflexivní. Podobně u tranzitivní relace nemusí být všechny možné tranzitivní spoje prvky relace, ale jen ty, které jsou vynuceny šipkami v posloupnosti tří prvků (tj. $x\rho y$ a $y\rho z$ vynucují šipku $x\rho z$).

Ad příklad 6.3: R je reflexivní (11) a tranzitivní (13). Je důležité si všimnout, že relace R není antisymetrická, protože například $3|(-3)$ a $(-3)|3$, ale odtud neplyne $3 = -3$. Není ani symetrická, protože pokud $3|6$, neplyne odtud, že $6|3$.

Ad příklad 6.4: ad a) může, ale jen relace, která je podmnožinou reflexivní relace, bez šipek mezi různými prvky;

Ad příklad 6.5: ad a) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad b) R je reflexivní (11), symetrická (12) a tranzitivní (13).
ad c) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad d) R je pouze reflexivní (11), jinak nic rozumného nelze říci.

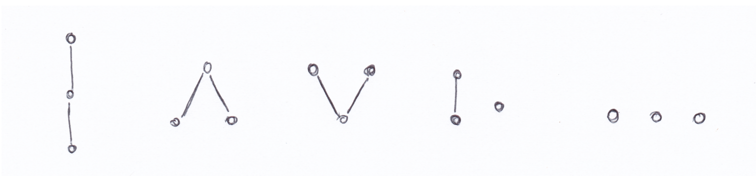
13.7 Výsledky ke kapitole 7.3 – ekvivalence a rozklady

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.8 Výsledky ke kapitole 8.3 – uspořádané množiny

Ad příklad 8.1: Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní – takže je to podle definice, která bude následovat, uspořádání!!

Ad příklad 8.4: Neizomorfních posetů na tříprvkové množině je pět – viz obrázek 50:



Obrázek 50: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) tříprvkové posety.

Ad příklad 8.10: ad a) $\sup\{a,d\} = c$, $\sup\{e,f\} = e$.
ad b) $\sup M$ neexistuje, protože množina horních závor $\{b,c,d\}$ nemá nejmenší prvek.

Ad cvičení 8.1: i)

$$\trianglelefteq_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

$$\trianglelefteq_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

ii)

$$\triangleleft_a = \{[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

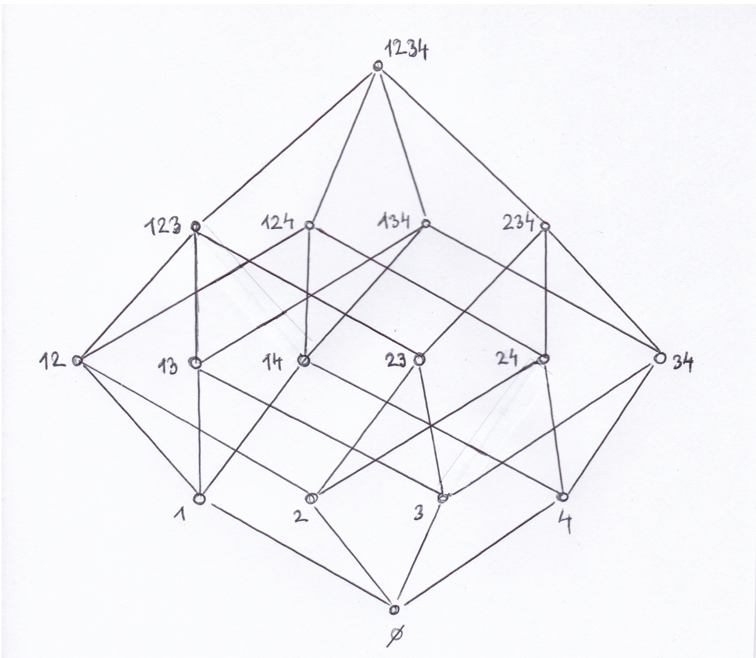
$$\triangleleft_b = \{[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

iii)

$$\prec_a = \{[1,2],[2,3],[1,4],[4,3]\};$$

$$\prec_b = \{[3,4],[4,1],[4,2]\}.$$

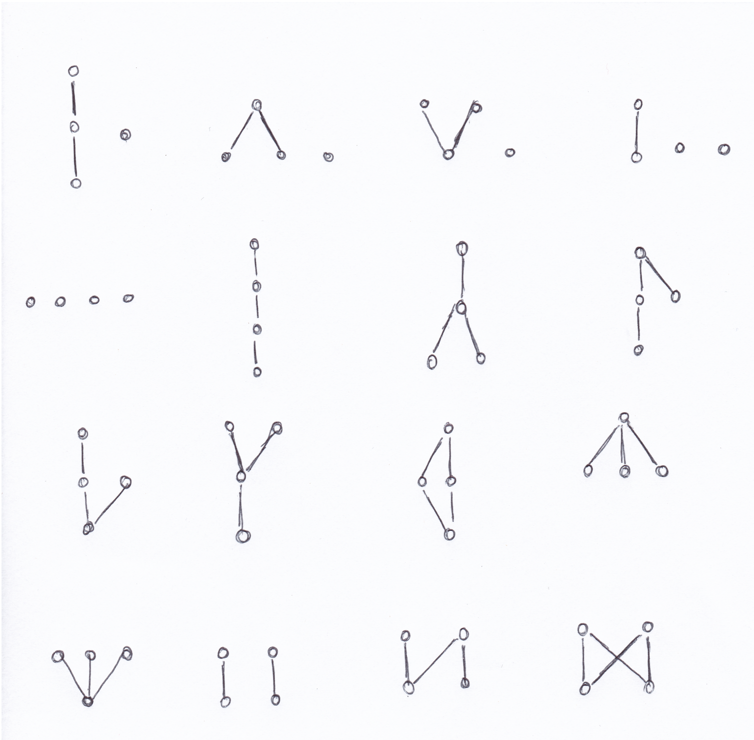
Ad cvičení 8.2: Jedná se o poset zobrazený na titulní straně textu [16]: obrázek 51.



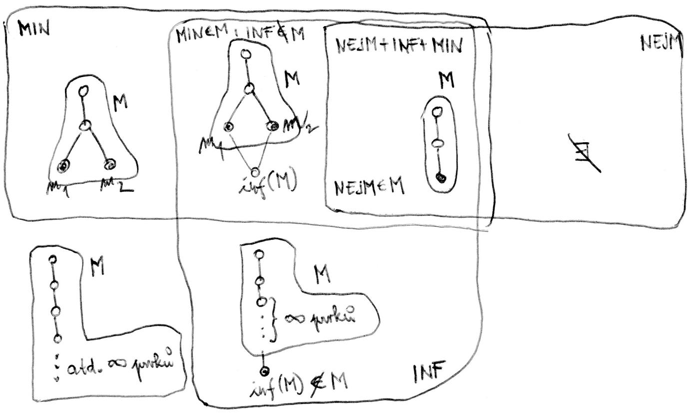
Obrázek 51: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1,2,3,4\}$.

Ad cvičení 8.4: Navzájem různých posetů (až na přeznačení prvků) na čtyřprvkové množině je šestnáct – viz obrázek 52.

Ad cvičení 8.6. Vzájemné souvislosti mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem jsou vymezeny na obrázku 53, kde jsou posety rozděleny do různých tříd (= velkých množin) podle toho, zda v nich existuje miminální prvek, nejmenší prvek či infimum.



Obrázek 52: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) čtyřprvkové posety.



Obrázek 53: Klasifikace posetů posle toho, zda obsahují nejmenší prvek, minimální prvek či infimum.

13.9 Výsledky ke kapitole 9.3 – uspořádané množiny II – operace průsek a spojení

Ad příklad 9.1: ad i) $4 \sqcap 7 = 2$, $6 \sqcap 2 = 2$, $7 \sqcap 7 = 7$, $3 \sqcup 7 = 6$, $6 \sqcup 8 = 6$; jedná se o průsekový i spojový polosvaz;

ad ii) $6 \sqcap 3 = 7$, $6 \sqcup 3$ neexistuje. Jedná se o průsekový polosvaz, který není spojovým polosvazem

ad iii) $5 \sqcup 7 = 10$, $2 \sqcap 3$ neexistuje, $2 \sqcap 7$ neexistuje. Jedná se o spojový polosvaz, který není průsekovým polosvazem.

ad iv) $4 \sqcap 5$ neexistuje, $2 \sqcup 3$ neexistuje. Tedy daný poset není ani průsekovým, ani spojovým polosvazem.

13.10 Výsledky ke kapitole 10.3 – zobrazení

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.11 Výsledky ke kapitole 11.3 – základní vlastnosti funkcí

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.12 Výsledky ke kapitole 12.3 – goniometrické funkce

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

Seznam literatury:

1 P. Horák: M 1125 Základy matematiky. Elektronický text do analogického předmětu na Přírodovědecké fakultě MU Brno. Počet stran 100 v roce 2013. Tento text pokrývá předmět M0001 Základy matematiky na Pedagogické fakultě asi z poloviny, ale i daná polovina se věnuje záležitostem odlišným od těch, na které je kladen důraz na Pedagogické fakultě.

2 Rediger Thiele: Matematické důkazy. SNTL Praha 1985. Počet stran 160. Představení zákonitostí logického usuzování a dokazování v matematice. Poněkud širší pokrytí tématu logika, kterému jsou v předmětu Základy matematiky věnovány první tři přednášky.

3 Raymond Smullyan: Jak se jmenuje tahle knížka? Zajímavé logické problémy od jednoduchých hádanek pro ZŠ až po složitější logické úlohy, které vyžadují důkladný vysokoškolský rozbor.

4 D.Jordan, P.Smith: Mathematical techniques. Oxford 2008, 4th Edition. V kontextu předmětu Základy matematiky nás z knihy zajímá zatím jen kapitolka 35 – sets (= množiny) na str. 791-800.

5 Eva Nováková: Analýza výsledků soutěže Matematický klokan, Brno 2016. Zajímavá kniha seznamující s mezinárodní soutěží Matematický klokan a rozborem výsledků této soutěže v ČR v kategorii pro 4.-5. třídy ZŠ. Tato kniha dobře uvádí do problematiky didaktiky matematiky na ZŠ: úlohy různého typu, dělení matematiky na různá odvětví, apod.

6 B.Fajmon: Algebra 1 – verze 2016. Doplnění přednášek v předmětu Algebra 1 podle starých osnov, které jsou od roku 2017 změněny, takže některé věci přebývají a některé naopak chybí. Počet stran 66.

7 Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša: Matematika pro primy – úvodní opakování. Prometheus 1997, 2.přepracované vydání. Opakování učiva 1.stupně. Nultá kniha ze série sedmnácti knih pro 2.stupeň ZŠ a nižší ročníky osmiletých gymnázií.

8 Charles Pinter: A book of Abstract Algebra, 2010. Jedná se o reprint druhého vydání z roku 1990. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF MUNI, nicméně autora přednášky Základy matematiky už částečně inspiroval. Je neobyčejně čtivě napsán. Pinter říká, že napsal svou knihu z té pozice, že algebra (a tím i diskrétní matematika) je důležitá a má důležitá uplatnění.

9 O.Odvárko: Funkce, Prometheus 1993. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 3, počet stran 160. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

10 O.Odvárko: Goniometrie, Prometheus 1994. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 7, počet stran 127. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

11 S.Kowal: Matematika pro volné chvíle. Praha 1985, druhé vydání. Kniha, která na velkém množství úloh prochází celou historii matematiky v rámci zajímavých úloh, jejichž řešení uvádí buď v textu, nebo na konci každé kapitoly. Název láká širokou veřejnost, ale řada úloh je vysokoškolské obtížnosti, i když jejich řešení je často proveditelné i na SŠ.

12 P. Drozd – základy práce se softwarem R. Manuál ke stažení z internetu o některých základních funkcích jazyka R, který lze v 1.ročníku VŠ doporučit jako lepší kalkulačku zvládající běžné matematické funkce, a současně jednoduché kreslení obrázků, které lze stáhnout v různých formátech. Program po instalaci funguje offline.

13 J. Koláček: Výuka jazyka R. Rovněž úvod do jazyka R, nyní od vysokoškolského učitele matematiky, což je vhodným doplněním předchozího textu [12].

14 P. Horák: Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I, Brno 2002. Sbírka příkladů ke staršímu vydání textu [1] na Přírodovědecké fakultě MU.

15 Jiří Rosický: Algebra – grupy a okruhy 2000, reprint textu z roku 1985. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF, nicméně jen až jako doplnění čtivější knihy [8].

16 Jan Kopka: Svazy a Booleovy algebry (Ústí nad Labem 1991, zejména str. 19-82). Kolega Kopka napsal svůj text z té pozice, že by rád přehledně a srozumitelně podal přehled pojmů algebry a diskrétní matematiky, aby byla vidět její krása. Kniha je hlubším rozvedením pojmu uspořádaná množina uvedeným v předmětu Základy matematiky.