1. Číselné soustavy

1. Převeďte čísla 9 a 25 z desítkové soustavy do dvojkové a proveďte zkoušku správnosti
2. Převeďte do desítkové soustavy tato čísla: 146_8; $A5C_{16}$; $B1F_{16}$.
3. Převeďte: a) 561 do $z = 4$
b) 12477 do $z = 16$
4. Číslo 197 zapište v číselných soustavách se základem $z = 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16$.
5. Čísla 243_6, 3102_4, 10201_3, $D3_{16}$ uspořádejte podle velikosti.
6. Určete předchůdce a následovníka čísla (početně zkontrolujte):
a) 33203_4 b) 1100101_2 c) 3517_8
d) 166_7 e) 30220_4 f) 777_8
g) ABF_{16}

Přímé převody
7. Číslo 101001_2 zapište v soustavě: a) čtyřkové, b) osmičkové.
8. Převeďte: a) 1110011101_2 do soustavy osmičkové
b) 6472_8 do soustavy dvojkové
c) 1110011101_2 do soustavy šestnáctkové
d) $6EAC_{16}$ do soustavy dvojkové
9. Zapište číslo 5326_8 v číselných soustavách se základem $z = 2, 4, 16$.

Hledání základu
10. Je dáno číslo 405. Jeho zápis v jiné číselné soustavě je 625_Z. Určete základ této soustavy.
11. Je dáno číslo 78. Jeho zápis v jiné číselné soustavě je 1032_Z. Určete základ této soustavy.
12. Je dáno číslo 519. Jeho zápis v jiné číselné soustavě je 207_Z. Určete základ této soustavy.

13. Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné výměně číslic zvětší o 37?
14. Trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li ji na první místo (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 81 menší než původní číslo. Určete původní číslo.
15. Určete základ z, jestliže platí: a) $123_Z + 132_Z = 321_Z$
b) $17_Z \cdot 32_Z = 606_Z$
c) $(12_Z)^2 = 144_Z$
16. Je dáno čtyřciferné číslo *abba*, výměnou cifer na *baab* dostaneme o 5346 menší číslo. Určete čtyřciferné číslo.
17. Je dáno šesticiferné číslo *ababab*, vyměníme-li cifry na *bababa*, vzniklé číslo bude o 727272 větší než původní číslo. Určete původní číslo.
18. Je dáno šesticiferné číslo *aaabbb*, po záměně cifer na *bbbaaa*, vznikne číslo, které je o 221778 menší než původní číslo. Určete původní číslo.
19. Je dáno trojciferné číslo *xy6*, po záměně cifer na *6xy* vznikne číslo o 54 menší než původní číslo. Určete původní číslo.
20. Je dáno trojciferné číslo *x8y*, po záměně cifer na *y8x* vznikne číslo o 693 větší než původní číslo. Určete původní číslo.

Početní výkony v číselných soustavách
21. Sečtěte a proveďte zkoušku správnosti:
a) $5274_8 + 756_8$ b) $231_5 + 423_5$
c) $425_7 + 562_7$ d) $BDF_{16} + BCA_{16}$
e) $A1B2_{16} + F3E4_{16}$

22. Odečtěte a proveďte zkoušku správnosti:
a) $254_7 - 135_7$ b) $3412_6 - 543_6$
c) $9267_{16} - 36D_{16}$ d) $10010_2 - 1111_2$
23. Vynásobte a proveďte zkoušku správnosti:
a) $42_7 * 23_7$ b) $203_4 * 22_4$
c) $356_8 * 47_8$ d) $20A5_{16} * 3B_{16}$
24. Vydělte a proveďte zkoušku správnosti:
a) $56021_8 : 7_8$ b) $3203_4 : 3_4$
c) $19813_{16} : B_{16}$
25. Převeďte racionální čísla:
a) 0,5 do $z = 3$ b) 0,7 do $z = 16$
c) 7,65 do $z = 4$ d) $\frac{2}{3}$ do $z = 8$
e) $\frac{8975}{3}$ do $z = 16$

2. Dělitelnost celých čísel

1. Rozhodněte, zda čísla a) 4356, b) 8724 jsou dělitelná čísly 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. Pokud nejsou dělitelná uvažovaným číslem, určete zbytek, který vznikne při dělení tímto číslem.
2. O pěticiferném čísle 448**, jehož poslední dvě cifry neznáme, víme, že je dělitelné 3 a 25. Doplňte chybějící cifry.
3. V číslech 437*, 32*, 4*54 nahraďte *, pokud je to možné, takovou cifrou, aby vzniklé číslo bylo dělitelné: a) čtyřmi, b) osmi, c) devíti, d) jedenácti.
4. Dokažte:
a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.
b) Rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi.
c) Součet tří po sobě následujících čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.
5. Jsou dána čísla *a*, *b*, žádné z nich není dělitelné třemi. Pak alespoň jedno z čísel $a + b$ nebo $a - b$ je dělitelné třemi.
6. Dokažte, že součet dvou čísel, z nichž žádné není dělitelné třemi a jejichž rozdíl je 2, je dělitelný 6.
7. Zjistěte, která z čísel 1007, 2487, 2771 jsou prvočísla.
8. Určete všechny společné dělitele čísel: a) 60, 36
b) 48, 72, 0
c) 24, -132, 54
9. Vypočítejte: a) D(42, 48, 72, 108)
b) D (252, 132)
10. Určete oběma způsoby: a) D(455, 273)
b) D(360, 504)
c) D(90, 108, 84)
d) D(568, 426, 355)
11. Najděte všechny dělitele čísla 90.
12. Určete všechny přirozené dělitele čísel 68, 360, 504.
13. Určete počet všech přirozených dělitelů čísel 420, 824, 2047
14. Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 24. Jedno z nich je dvojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?
15. Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 15. Jedno z nich je trojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?
16. K číslu a = 51 najděte číslo b tak, aby platilo D(a,b) = 17.
17. Najděte dvě přirozená čísla, jejichž součet je 432 a největší společný dělitel je 36.

18. Napište libovolné tři společné násobky čísel: a) 5, 12
b) 17, 0
c) -6, 8, 17

19. Určete různými způsoby: a) n(222, 185)
b) n(360, 504)
c) n (90, 108, 84)
d) n(156, 182, 208)

20. Zjistěte, zda platí: $n[64, D(60,42)] = D[n(30,64), n(42,64)]$

21. Najděte přirozená čísla a, b, je-li: a) D(a,b) = 2, n(a,b) = 12
b) D(a,b) = 7, n(a,b) = 22

22. Určete nejmenší nenulové přirozené číslo, kterým je třeba násobit
a) číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla
b) číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přirozeného čísla

23. Připíšeme-li k libovolnému trojcifernému číslu totéž číslo zprava, dostaneme šesticiferné číslo, které je dělitelné sedmi, jedenácti a třinácti. Dokažte.

24. Dokažte, že čísla 353 535, 424 242, 666 666, tj. čísla tvaru *aba bab*, jsou dělitelná čísly 3, 7, 13 a 37.

25. Obdélník o rozměrech 56 cm a 98 cm se má rozdělit příčkami rovnoběžnými se stranami obdélníku na čtverce co možná největší. Kolik bude čtverců a jak velká bude jejich strana?

26. V krabici jsou tužky. Víme, že jich je více než 200 a méně než 300 a že se dají svázat do svazků po 10 a po 12. Kolik je tužek v krabici?

3. Kongruence, rozklad na zbytkové třídy

1. Určete, zda jsou čísla a, b kongruentní podle modulu m.
a) $a = 5,\ b = 15,\ m = 4$
b) $a = 3,\ b = 1,\ m = 2$
c) $a = 7,\ b = 25,\ m = 3$
d) $a = 7,\ b = 25,\ m = 4$

2. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

3. Nalezněte zbytek po dělení čísla 3^{123} číslem 17.

4. Dokažte, že mezi 82 libovolně zvolenými přirozenými čísly existují dvě, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 81.

5. Dokažte, že každé prvočíslo větší než tři lze zapsat ve tvaru 6k + 1 nebo 6k + 5.

6. Dokažte, že $13/(2^{60} + 7^{30})$.

7. Dokažte, že $112/(835^5 + 6)^{18} - 1$.

8. Dokažte, že platí: $\forall n \in N : 7/(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n)$.

9. Dokažte, že některý násobek čísla 21 končí na 241.

10. Nalezněte poslední dvě číslice čísla 3^{1234}.

11. Nalezněte zbytek po dělení čísla 12^{144} číslem 65.

12. Pomocí kongruencí dokažte, že $65/(12^{136} + 47^2)$.

13. Nalezněte zbytek po dělení čísla 2^{10^5} číslem 31.

14. Nalezněte zbytek po dělení čísla 7^{51} číslem 144.

15. Určete poslední číslici v dekadickém zápisu čísla $13^{13^{12}}$.

16. Určete poslední číslici v dekadickém zápisu čísla 8^{7^6}.

17. Řešte kongruenci:
a) $12x \equiv 7 \pmod{17}$
b) $14x \equiv 23 \pmod{31}$
c) $72x \equiv 2 \pmod{10}$
d) $29x \equiv 31 \pmod{37}$

4. Neurčité rovnice

1. Řešte neurčité rovnice:
a) $-3x + 7y = 4$ b) $6x - 22y = 12$
c) $-14x - 3y = 10$ d) $5x - 3y = 15$

2. Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

3. Alena má 50 Kč a chce je utratit za lízátko a čokoládové tyčinky. Lízátko stojí 4 Kč a tyčinka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik tyčinek si může Alenka koupit za 50 Kč?

4. Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

5. Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

6. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě (ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30)?

7. Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

5. Polynomy

Rozklad polynomů

1. Rozložte polynomy v **R**:
a) $f(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$
b) $f(x) = 2x^4 - x^3 + x - 2$

2. Rozložte kvadratický polynom v **Z**:
a) $f(x) = x^2 + 10x + 24$
b) $f(x) = x^2 - x - 6$
c) $f(x) = x^2 - 2x + 6$

3. Rozložte polynom na součin kořenových činitelů:
a) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2$
b) $f(x) = x^6 + 7x^3 - 8$
c) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 2$
d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

4. Určete rozklad polynomu $f(x) = x^6 - 1$ v **N, Z, Q, R**.

Největší společný dělitel

5. Najděte největší společný dělitel polynomů $f(x)$ **a** $g(x)$**:**
a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6;\ g(x) = x^4 - 1$
b) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6;\ g(x) = x^4 - 1$
c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;\ g(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18;\ g(x) = x^3 - 9x$

e) $f(x)=x^4+5x^3+7x^2+5x+6$; $g(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$
f) $f(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$; $g(x)=x^3+2x^2-9x-18$
g) $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$; $g(x)=x^4-6x^3+7x^2-12x+10$
h) $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$; $g(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

Taylorův rozvoj polynomu

6. Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$ v $c=-3$.
7. Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$ v $c=-1$.

Užití Hornerova schématu

- dělení polynomu lineárním normovaným polynomem

8. Vypočítejte $(x^4-1):(x-1)$.

- výpočet koeficientů Taylorova rozvoje
- zjištění hodnoty polynomu v daném bodě

9. Vypočítejte hodnotu polynomu $f(x)=3x^3-5x^2+6x+1$ v bodě -1.

- zjištění, zda dané číslo je kořenem polynomu

10. Rozhodněte, zda číslo -2 je kořenem polynomu $f(x)=3x^3+x^2-8x+4$.

Lagrangeův interpolační polynom

11. Najděte polynom procházející body $[-1;9]$, $[1;1]$, $[2;6]$.
12. Najděte polynom procházející body $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;1]$.
13. Najděte polynom procházející body $[-1;1]$, $[3;2]$, $[4;8]$.

Viétovy vztahy

14. Nalezněte polynom, jehož kořeny jsou dvojnásobky kořenů polynomu $f(x)=x^2-x-6$.
15. Nalezněte kvadratický polynom o kořenech, jejichž součet je -1 a jejichž převrácené hodnoty mají součet 0,5.
16. V polynomu $f(x)=4x^2-8x+a_0$ určete a_0 tak, aby pro kořeny c_1, c_2 daného polynomu platilo $c_1=c_2+1$.
17. V polynomu $f(x)=a_2x^2-8x+4$ určete a_2 tak, aby jedním kořenem bylo číslo $\frac{2}{3}$.
18. Najděte alespoň jeden kubický polynom, který má kořeny 1, 2 a 3.
19. Jeden kořen kubického polynomu $f(x)=x^3+4x^2+5x+2$ je -2, najděte další kořeny.
20. Víme, že polynom $f(x)=x^3-15x^2+66x-80$ má tři přirozené kořeny takové, že se první od druhého a druhý od třetího liší o 3. Najděte tyto kořeny.
21. Je dán polynom $f(x)=15x^3-23x^2+8x-14$ s kořeny c_1, c_2, c_3. Čemu je roven součin $(c_1+1)(c_2+1)(c_3+1)$?

6. Algebraické rovnice a nerovnice

1. Řešte v **R** rovnice pomocí vytýkání:
   a) $x^3-x^2-x+1=0$
   b) $10x^3-5x^2+2x-1=0$
   c) $x^3+2\sqrt{5}x^2+5x=0$
2. Řešte v **R** rovnice a nerovnice:
   a) $x^3-x^2-x+1=0$, $x^3-x^2-x+1\ge 0$
   b) $10x^3-5x^2+2x-1=0$, $10x^3-5x^2+2x-1<0$
   c) $6x^3-7x^2-x+2=0$, $6x^3-7x^2-x+2\le 0$
   d) $x^4-6x^3+8x^2+6x-9=0$, $x^4-6x^3+8x^2+6x-9>0$
3. Řešte v **C** rovnici a nerovnici:
   $x^3-x^2+3x-10=0$, $x^3-x^2+3x-10>0$
4. Řešte v **R** rovnice:
   a) $x^3+3x^2+x-2=0$
   b) $6x^3-7x^2-x+2=0$
   c) $x^4-6x^3+8x^2+6x-9=0$
   d) $2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=0$
   e) $12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=0$
5. Řešte v C rovnice:
   a) $3x^2+2x+4=0$
   b) $x^7+x^4=0$
   c) $x^5+x^4-x-1=0$
   d) $x^4-16=0$
   e) $x^6+2x^4-4x^2-8=0$
   f) $x^3-x^2+3x-10=0$
   g) $4x^5+19x^4+12x^3+4x^2+19x+12=0$
   h) $x^5+6x^4+9x^3-3x^2-10x-3=0$

Reciproké rovnice

6. Řešte v **R** rovnice:
   a) $x^5+19x^4+76x^3+76x^2+19x+1=0$
   b) $x^5-11x^4+17x^3+17x^2-11x+1=0$
   c) $6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6=0$
   d) $5x^4-12x^3+12x-5=0$
   e) $7x^3+57x^2+57x+7=0$
   f) $8x^4-54x^3+101x^2-54x+8=0$

7. Řešte v **R** rovnici: $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$

7. Mocniny a odmocniny

1. Vypočítejte: $3\sqrt{1600+81}-3\left(\sqrt{1600}+\sqrt{81}\right)+\sqrt{0{,}08}\cdot\sqrt{75}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$

2. Vypočítejte: $\sqrt{27}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-5\sqrt{12}+1$

3. Vypočítejte: $\sqrt{256}\cdot\sqrt{0{,}04}\cdot\sqrt{1{,}96}+\sqrt{27}-\sqrt{75}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

4. Vypočítejte: $\dfrac{5^{-5}\cdot 0{,}1^{-4}+\left(\frac{1}{7}\right)^0-5^{-1}}{(-2)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

5. Vypočítejte: $\dfrac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{\left(\frac{3}{2^3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}}$

6. Upravte zlomek (výsledek zapište pomocí mocnin prvočísel): $\left(\frac{128\cdot 3^5}{81\cdot 8}\right)^3 : \frac{(16\cdot 3^5)^2}{9^4}$

7. Zjednodušte: $\sqrt[6]{\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}} : \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}}$

8. Zjednodušte: $\sqrt[5]{\left[\frac{(\sqrt{6})^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{6^{-1}}}{\sqrt{\sqrt[3]{6}}}\right]^{-4}} - 2\sqrt[3]{6}$

9. Zjednodušte: $\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{5^0\cdot\sqrt{5}}\right)^{-\frac{5}{2}} : \left(\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}\cdot 5^{-1}}\right)^{-1}$

8. Komplexní čísla

1. V C řešte rovnice a jejich kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

a) $x^3 + 8 = 0$
b) $x^4 + 1 = 0$
c) $x^3 = i$
d) $x^4 + 2 - 2i = 0$
e) $x^3 + 27 = 0$
f) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

2. V množině C řešte rovnice:

a) $x^2 - 6ix - 8 = 0$
b) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$
c) $ix^2 + 2x - 5i = 0$
d) $(1-i)x^2 - (5-i)x + 6 - 4i = 0$
e) $x^4 + 2ix^2 + 8 = 0$
f) $x^2 - 1 - i = 0$