Algebra 3 – řešení příkladů do cvičení

Kapitola 1 – číselné soustavy

Př.1: $9_{10}=1001_2$, $25_{10}=11001_2$, jiný způsob výpočtu: pomocí neustálým dělením základem a sledováním zbytku = zobecněný Euklidův algoritmus

Př. 2: $146_8=102_{10}$, $A5C_{16}=2652_{10}$, $B1F_{16}= 2847_{10}$

Př.3: $561_{10}=20301_4$, $12477_{10}=30BD_{16}$

Př.4: $197_{10}=11000101_2=21022_3=3011_4=305_8=238_9=145_{12}=C5_{16}$

Př.5: (99) $243_6 <$ (100) $10201_3 <$ (210) $3102_4 <$ (211) $D3_{16}$

Př.6: $33202_4+1= 33203_4$, $33203_4+1=33210_4$

$1100100_2+1=1100101_2$, $1100101_2+1=1100110_2$

$3516_8+1=3517_8$, $3517_8+1=3520_8$,

$165_7+1=166_7$, $166_7+1=200_7$

$30213_4+1=30220_4$, $30220_4+1=30221_4$

$776_8+1=777_8$, $777_8+1=1000_8$,

$ABE_{16}+1=ABF_{16}$, $ABF_{16}+1=AC0_{16}$

Př.7: $101001_2=221_4$ (párování cifer ve dvojkové soustavě po dvou)$=51_8$ (spojení cifer ve dvojkové soustavě po třech)

Př. 8: a) $1\ 110\ 011\ 101_2=1635_8$

b) $6472_8 = 110\ 100\ 111\ 010_2$ (cifry v osmičkové soustavě překládány do trojčíslí ve dvojkové)

c) $0011\ 1001\ 1101_2= 39D_{16}$ (cifry ve dvojkové soustavě složeny po čtyřech)

d) $6EAC_{16}= 0110\ 1110\ 1010\ 1100_2$

Př. 9: $5326_8=101\ 011\ 010\ 110_2=223112_4=AD6_{16}$

Př. 10: $405_{10}=625_z$ … víme, že z je minimálně 7, protože v zápise je cifra 6; lze zkusit 7 a 8 a 9 a zjistit, že z=8, nebo sestavíme rovnici 405= 6 $*z_2+2*z+5$, která je kvadratická a jen jedno její řešení je kladné: z=8.

Př. 11: postup obdobně jako v příkladu 10, z=4.

Př.12: výsledek: z=16, zde je lepší nezkoušet a vyčíslit pomocí řešení kvadratické rovnice.

Př. 13: pro cifry má platit 10x+y=10y+x+37, tj. 9(x-y)=37 … protože 9 nedělí 37, takové cifry x,y neexistují.

Př. 14: jedná se o číslo 534

Př. 15: a) základ je 4, protože 2+3 překročilo daný základ o jedničku;

b) 2*7=16, tedy dvě jednociferná čísla v první desítce chybí, tj. základ je 10-2=8;

c) není zde žádné omezení, tj. základ by mohl být 5, ale také jakékoli jiné číslo než 5.

Př.16: a=9, b=3 nebo a=8, b=2 nebo a=7, b=1

Př. 17: původní číslo je 191919

Př. 18: 999777, 888666, 777555, 666444, 555333, 444222, 333111

Př. 19: číslo je 726

Př. 20: číslo je 188 nebo 289.

Operace v pozičních číselných soustavách:

Př. 21: a) $5274_8 + 756_8 = 6252_8$

b) $231_5+423_5 = 1204_5$

c) $425_7+562_7 = 1320_7$

d) $BDF_{16}+BCA_{16}= 17A9_{16}$, e) $A1B2_{16}+F3E4_{16}=19596_{16}$

Př. 22: a) $254_7 – 135_7 = 116_7$

b) $3412_6 – 543_6 = 2425_6$

c) $9267_{16} – 36D_{16} = 8EFA_{16}$

d) $10010_2 – 1111_2 = 0011_2$

Př. 23: a) $42_7*23_7 = 1326_7$

b) $203_4*22_4 = 11132_4$

c) $356_8*47_8=22102_8$

d) $20A5_{16}*3B_{16}= 78607_{16}$

Př. 24: a) $56021_8 : 7_8 = 6447_8$

b) $3203_4 : 3_4 = 1023_4$

c) $19813_{16}:B_{16} = 2519_{16}$

Př.25: Převeďte racionální čísla z desítkové soustavy do dané soustavy:

a) 0,5 do z=3: $0{,}5_{10}=0{,}11111\ldots_3$ = 0,1 periodických v soustavě 3
b) 0,7 do z=16: $0{,}7_{10} = 0{,}B333333\ldots_{16}$
c) 7,65 do z=4: $7{,}65_{10} = 7_{10} + 0{,}65_{10} = 13_4 + 0{,}221212121\ldots_4 = 13{,}22121212121\ldots_4$
d) 2/3 do z=8: $0{,}66666666\ldots_{10} =$
e) 8975/3 do z=16: $8975/3 = 2991 + 2/3 = BAF_{16}+0{,}AAAAAA\ldots_{16} = BAF{,}AAAAAAAAA\ldots_{16}$

Kapitola 2 – dělitelnost čísel

Př.1: a) 4356 je dělitelné dvěma, třemi, jedenácti, není dělitelné pěti ani osmi

b) 8724 je dělitelné 2 a 3, není dělitelné čísly 5 ani 8 ani 11

Př.2: vyhovuje pouze číslo 44850

Příkl. 3: číslo 437* …. a) cifra 2 nebo 6, b) cifra 2 c) cifra 4, d) cifra 8

Číslo 32* … a) cifry 4 nebo 8 nebo 0; b) cifry 0 a 8; c) cifra 4; d) nelze

Číslo 4*54 … a) nelze, b) nelze, c) cifra 5, d) cifra 5

Př. 4. důkaz a) vyjádříme liché číslo jako 2k+1 a umocníme na druhou a odečteme jedničku, zbylý výraz lze upravit na 4k(k+1), tj. násobek čtyř …. A násobek čtyř je dělitelný čtyřmi, to dá rozum

Důkaz b) dvě lichá čísla vyjádříme jako 2k+1 a 2r+1, rozdíl jejich čtverců upravíme a vychází 4*(k(k+1)-r(r+1)) … to je čtyřnásobek rozdílu dvou sudých čísel, tj. čtyřnásobek sudého čísla, tj. osminásobek nějakého čísla – a to je číslo dělitelné (beze zbytku) osmi

Důkaz c) (2k-1) + 2k + (2k+1) = 6k … číslo dělitelné šesti!!!!!!

Př. 5. Důkaz se provede označením a=3k+1 nebo a= 3k+2, dále b= 3l+1 nebo b=3l+2, teď máme vlastně kombinaci čtyř možností, u každé se zvlášť podíváme na rozdíl (a-b) nebo součet (a+b) a vidíme, že aspoň jeden z těchto výrazů je dělitelný třemi.

Př. 6. ze zadání vyplývá, že a=3k+1, b=3k-1 … jsou to čísla, která se liší o 2, a přitom nejsou dělitelná třemi; nyní (a-b) = … = 6k po dosazení, tj. (a-b) je dělitelný šesti.

Př. 7. 1007 … není prvočíslo, 2487 … není prvočíslo, 2771 … není prvočíslo

Př. 8. a) NSD = 12, b) NSD = 24, c) NSD = 6

Př. 9 … a) D = 6, b) D=12,

Př. 10 … a) 91, b) 72, c) 6, d) 71

Př. 11: nejlépe z rozkladu na prvočinitele 2 krát 3 na druhou krát 5 určíme nyní různé dělitele: 1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90

Př. 12 … 68 … 1,2,4,17,34,68

360 … dvacet čtyři dělitelů:
1,2,4,8,3,3*2,3*4,3*8,9,9*2,9*4,9*8,5,5*2,5*3,5*4,5*8,45,30,60,120,90,180,360

504 … také dvacet čtyři dělitelů:
1,3,9,2,4,8,7,2*3=6,7*3=21,2*9=18,7*9=63,2*7=14,4*7=28,8*7=56,4*3=12,8*3=24,3*2*7=42,9*2*7=126,9*4*7=252,9*8*7=504, 4*9=36, 8*9=72,3*4*7=84,3*8*7=168

Př. 13 … řeší se podobně, vypsáním všech přirozených dělitelů jako v předchozím příkladu

Př. 14 … a=48, b=24

Př. 15 … a=45, b=15

Př. 16 … b=17

Př. 17 … a=36k, b=36l, pak z rovnice a+b=432 vypočteme k+l=12, a protože k,l jsou nesoudělná (jinak by NSD byl ještě větší než 36), musí to být dvě malá přirozená čísla, která dají součet 12, tj. vyhovuje jen 1 a 11 … a=36,b=396

A dále 5 a 7 … a=180, b=252

Úloha má tedy dvě řešení

Př. 18. a) sn= 60,120,180, … násobky nejmenšího společného násobku

b) n=0, jiné násobky neexistují, c) sn=408, 816, 1224, atd.

Př. 19. a) nsn = 1110, b) nsn = 2520, c) nsn = 3780, d) sami

Př. 20 … ano, platí, rozpisem přes prvočísla dostaneme na obou stranách číslo 3 krát (2 na šestou)

Př. 21 … a=6, b=4 nebo naopak b) taková čísla neexistují, protože žádný z dělitelů čísla 22 není dělitelný sedmi.

Př. 22. a) 34, b) 45

Př. 23. plyne z dělitelnosti číslem 11 … tatáž z prvních tří cifer se odečítá ve druhých třech cifrách, tj. ciferný součet se střídavými znaménky = 0, a nula je dělitelem 11

Př. 24. dělitelnost 11 je jasná – viz předchozí příklad; dělitelnost dalšími čísly dostaneme rozpisem do mocnin čísla 10 = rozpisem do pozic jednotlivých čísel: „abcabc“ =300 000 a + 50 000 b + 3 000 a + 500 b + 30 a + 5 b = 303030 a + 50505 b = 3* 101010 a + 5 * 10101 *b= … = 3*7*13*37(10a+b), je tedy vidět, že dané číslo je dělitelné 3, 7, 13, 37.

Př. 25. výsledkem je 28 čtverců o straně 14 cm … hledali jsme NSD

Př. 26. nsn je 60, tj. násobek nejmenšího společného násobku z intervalu (200; 300) je číslo 240.

Kapitola 3 – kongruence

Př.1: a) ne, b) ano, c) ano, d) ne

Př. 2: 5 na 20 = (5 na 2) na desátou = 25 na desátou je kongruentní s (-1) na desátou = 1 (mod 26),

Tj. zbytek po dělení 26 je 1.

Př. 3.: 3 na 123 = 3 na 3 krát (3 na 4) na 30 = 27 krát 81 na 30 je kongruentní s 27 krát (-4) na 30

= 27 * 4 na 2 na 15 je kongruentní s (27 * (-1) na 15 je konguentní s -10 je kongruentní s 7, tj. zbytek po dělení je 7

Př. 4: Zbytků po dělení číslem 81 je 81 různých: 0,1,2,3,…,80. Tj. podle Dirichletova (= přihrádkového) principu určitě mezi 82 čísly musí existovat dvě, která mají po dělení 81 stejný zbytek … a tato dvě čísla jsou v kongruenci modulo 81.

Př. 5: uvažujme zbytkové třídy modulo 6 … je jich šest, protože Z je podle zbytku po dělení šesti rozdělena na šest podmnožin: a) čísla typu 6k, b) čísla typu 6k+1, c) čísla typu 6k+2, d) čísla typu 6k+3, e) čísla typu 6k+4, f) čísla typu 6k+5

Pokud se podíváme na vyjádření těchto čísel lépe, vidíme, že

Ad a) typ 6k není prvočíslo, protože jsou to čísla dělitelná šesti

Ad c) typ c) a e) není prvočíslo, protože to jsou čísla dělitelná dvěma

Ad d) typ d) není prvočíslo, protože to jsou čísla dělitelná třemi

Zbývají typy 6k+1 a 6k+5 … taková přirozená čísla jsou tedy jedinými adepty na případné prvočíslo (i když mnohá z nich prvočísla nejsou, např. 25 = 6*4+1, pokud nějaká prvočísla existují, jsou jednoho z těchto dvou typů.

Př. 6.:

2 na 60 = (2 na 6) na 10 = 65 na 10 je kongruentní s (-1) na 10 modulo 13, a to je kongruentní s 1 (modulo 13)

Dále 7 na 30 = (7 na 3) na 10 = 343 na 10 (343 děleno 13 je 26, zbytek je 5), to je kongruentní s 5 na 10 = 25 na 5 je kongruentní s (-1) na 5 = (-1) modulo 13

Dohromady 2 na 60 + 7 na 30 je kongruentní s (1-1)=0 … tedy 13 je dělitelem čísla (2 na 60 + 7 na 30)

Př. 7: Jinými slovy, máme dokázat, že (835 na 5 + 6) na 18 je kongruentní s 1 (modulo 112)

Rozklad čísla 112 na prvočinitele: 112=7*(2 na 4)

Tento rozklad se bude hodit, protože platí věta (skripta doc. Beránek, str.48, věta 10.68):

(A je kongruentní s b, modulo m1, a je kongruentní s b, modulo m2) z toho plyne

A je kongruentní s b, modulo nsn(m1*m2).

V našem případě jsou 16 a 7 nesoudělná, tj. nsn (16,7) je 112. Dokážeme tedy kongruneci podle modulu 16 a podle modulu 7, a podle této věty platí i kongruence podle jejich součinu:

(835 na 5 +6) na 18 je kongruentní s (protože 835 je kongruentní s 3, modulo 16) číslem (3 na 5 +6)na 18, a to je kongruentní s (3+6) na 18 = 9 na 18 = 81 na 9 je kongruentní s 1 na 9 = 1 (modulo 16)

(835 na 5 +6)na 18 je kongruentní s (835 mod 7 = 2 … zbytek po dělení čísla 835 číslem 7 je 2) číslem (2 na 5 + 6) na 18, a to je kongruentní s (4+6) na 18 = 10 na 18 je kongruentní s 3 na 18 = (3 na 2) na 9 je kongruentní s 2 na 9 = (2 na 3) na 3 je kongruentní s 1 na 3 = 1 (modulo 7)

Dohromady (835 na 5 +6) na 18 je kongruentní s 1 (modulo 16 * 7 = modulo 112) … platí.

Př. 8.: 37 na (n+2) + 16 na (n+1) + 23 na n je kongruentní s 2 na (n+2) + 2 na (n+1) + 2 na n (modulo 7),

Vytkneme (2 na n)*(4+2+1) = 7* (2 na n) je kongruentní s 0 (modulo 7),

Tj. původní číslo je kongruentní s nulou modulo 7, tj. má po vydělení sedmi zbytek 0, tj. je dělitelné sedmi.

Př. 9.: zadání znamená to, že 21n je kongruentní s číslem 241 (modulo 1000)

K jedné straně kongruentní rovnosti lze přičítat násobky tisíce, např. přičtením 2000 k pravé straně (abychom napravo dostali číslo dělitelné třemi) máme:

21n je kongruentní s 2241 (modulo 1000) … vydělíme třemi, což je číslo nesoudělné s 1000

7n je kongruentní s 747 (mod 1000) … přičteme 5000 na pravou stranu, abychom dostali číslo dělitelné sedmi:

7n je kongruentní s 5747 (mod 1000) … vydělíme sedmi, což je nesoudělné s modulem 1000

N je kongruentní s 821 (mod 1000) … tedy n=821+1000*k … pro k=0,1,2,3 atd. zkoušíme, kdy 21-násobek čísla n končí na -241 … dostaneme pro k=4 … n=4821 … n krát 21 = 101 241 … našli jsme takové číslo!!!!!! (podobně např. pro k=29 … n= 29 821 … 21 krát 29821 = 626 241 … další řešení, atd.

Našli jsme nějaké řešení pomocí kongruencí a jejich vlastností.

Př. 10.: řešíme rovnici 3 na 1234 je kongruentní s x (modulo 100), protože zbytek po dělení stem nám vytvoří poslední dvojčíslí. Levou stranu rovnosti upravujeme:

3 na 1234 = (3 na 34) krát (3 na 6) na 200 je kongruentní (upravíme první i druhý činitel v součinu) s

((3 na 17) na 2) krát (29 na 200) =

Za a) 3 na 17 umocňujeme, všímáme si jen násobení posledních dvou cifer s dalším číslem, protože poslední dvě cifry jsou ovlivněny jen posledním dvoučíslím:

3 na 17 = (3 na 4)*(3 na 4)*(3 na 4)*(3 na 4)*3 = 81*81*81*81*3 … je kongruentní s 63

Pak (3 na 17) na druhou je … vynásobíme jen 63*63 a poslední dvoučíslí je 69, tj. výsledek je kongruentní s 69 (modulo 100)

Za b) 29 na 200 = (29 na 2) na 100 =

- Písemně násobíme 29*29, výsledek je 841, vezmeme jen poslední dvě cifry tj. 41,

… to je kongruetní s 41 na 100

- Písemně násobíme 41*41, výsledek je 1681, vezmeme jen poslední dvě cifry, tj. 81;

… to je kongruentní s 81 na 50

- Písemně násobíme 81*81, výsledek je 6561, vezmeme jen dvě poslední cifry, tj. 61;

… to je kongruentní s 61 na 25 to se rovná (61 na 5) na 5

- Násobíme 61 na pátou, ale stačí jen brát poslední dvě cifry dílčích výsledků, dostaneme nakonec poslední dvě cifry 01,

… to je kongruetní s 1 na pátou = 1 (modulo 100)

DOHROMADY podle věty: A je kongruentní s B, C je kongruentní s D, odtud plyne AC je kongruentní s BD … dostaneme že (a) krát (b) je kongruentní s 69*1=69 (mod 100) … zbytek po dělení číslem 100 je 69.

Př. 11: 12 na 144 je (12 na 2) na 72 = 144 na 72, to je kongruentní s 14 na 72 (modulo 65) =

= (14 na 2) krát (14 na 70) = (14 na 2) krát (14 na 5) na 14

Po spočítání 14 na 5 vydělíme výsledek číslem 65 a vememe zbytek, ten je shodou okolností také 14, tj.

A to je kongruentní s (14 na 2)krát (14 na 14)= 14 na 16 = (14 na 2) na 8 je kongruetní s 1 na 8 =1 (modulo 65) … tj. zbytek je roven číslu 1.

Př. 12.: 12 na 136 + 47 na 2 je kongruentní s (12 na 4) na 34 + 64 (protože 64 je zbytek po dělení 47 na 2 číslem 65)

A to je kongruentní s (1 na 34) + 64 = 65 a to je kongruentní s nulou, tj. přesně dělitelné (beze zbytku) číslem 65!!!!!

Př. 13.: na tento příklad se vykašlete

Př. 14: (7 na 51) má po dělení číslem 144 zbytek …

(7 na 51) = (7 na 3) na 17 = 343 na 17 je kongruentní s 55 na 17 = (55 na 16)*55 = ((55 na 2)na 8)*55,

(a protože 55 na druhou je kongruentní s 1 – modulo 144) to je kongruentní s 1*55, a to je kongruentní s 55 (modulo 144)g

Př. 15: na tento příklad se vykašlete

ř.16: na tento příklad se vykašlete

Př. 17: řešte kongruenční rovnice

a) 12 x je kongruentní se 7 (mod 17)
   12x je kongruentní s (-10) (modulo 17) / krát ½
   6x je kongruentní s (-5) (mod 17)
   6x je kongruentní s 12 (mod 17) / krát 1/6
   X je kongruetní s 2 (mod 17), tj. <u>x=17k+2</u>

b) 14 x je kongruentní s 23 (mod 31)
   14x je kongruentní s (-8) (mod 31)/ krát ½
   7x je kongruentní s (-4) (mod 31)
   7x je kongruentní s 27 (mod 31) / + 5 krát 31
   7x je kongruentní s 182 (mod 31) / krát 1/7
   X je kongruentní s 26 (mod 31), tj. <u>x=31k+26</u>

c) 72x je kongruentní s 2 (mod 10) / krát ½ … i modul je dělitelný dvěma, tj. musíme vydělit i modul!!!!!
   36x je kongruentní s 1 (mod 5)
   36x je kongruentní s (-4) modulo 5 / krát ¼
   9x je kongruentní s (-1) modulo 5
   9 x je kongruentní s 9 (mod 5)
   X je kongruentní s 1 (mod 5), tj. <u>x=5k+1</u>

d) 29 x je kongruentní s 31 (mod 37) / + 37*7
   29x je kongruentní s 290 (mod 37) krát 1/29
   X je kongruentní s 10 (mod 37), tj. <u>x= 37k + 10</u>

Kapitola 4 – Neurčité rovnice = Diofantovské rovnice (= hledání celočíselného řešení)

1a) x=1+7t, y=1+3t pro t celočíselné

1b) x=2+11k, y=0+3k pro k celočíselné

1c) x=1+3t, y=-8-14t pro t celočíselné

1d) x=3t, y=5t-5 pro t celočíselné

Př. 2. řešení je sedm, získají se z řešení kongruenční rovnice 2x je v kongruenci s 69 (modulo 5),

Dostanem x=37+5t, y=-1-2t pro t celočíselné, ale bereme jen ty situace, kdy y i x jsou kladné a 2x+5y=69, a takových řešení je sedm:

Pro t=-1: y=1, x = 32

Pro t=-2: y=3, x=27

Pro t=-3: y=5, t=22; pro t=-4: y=7, x=17; pro t=-5: y=9, x=12; pro t=-6: y=11, x=7; pro t=-7: y=13, x=2

Př,. 3: řešíme kongruenční rovnici 25 je v konguenci s 2x (modulo 3), dostaneme

Řešení x=14+3t, y=-1-2t pro t celočíselné, ale zadání úlohy vyhovují jen čtyři řešení:

Pro t=-1: y=1, x=11; Pro t=-2: y=3, x=8; Pro t=-3: y=5, x=5; Pro t=-4: y=7, x=2;

Př. 4: x je v konguenci s 2 (modulo 3) a současně x je v kongruenci s 5 (modulo 7)

Zápis řešení těchto rovnic dává: x=2+3t, a současně x=5+7s, dohromady

2+3t=5+7s, tj. 3t-7s=3 … řešením této rovnice zase podle kongruencí dostaneme s=(1/7)*(3t-3), tj. řešíme kongruenční rovnici 3t je v kongruenci s 3 (modulo 7), tj. t je v kongruenci s 1 (modulo 7), tj. t=1+7k, odtud s=(1/7)*(3*(1+7t)-3)=3k

Nyní pro k=4: t=29, s=12 a platí: 3t+2=89; pro k=5: t=36, s=15 a platí: 3t+2=110; atd. až pro k=47: t=330, s=141, tj. 3t+2=992 je ta situace, o kterou jde v zadání, tj. 992 je výsledek

Př. 5: řešíme 91=5x+9y, dostaneme kongruenční rovnici 91 je v kongruenci s 5x (modulo 9), řešením je x=2+9t, y=9-5t, ovšem zadání je splněno jen pro dvě hodnoty t, a sice t=1: y=4, x=11, a t=0: y=9, x=2

Př. 6: podobný příkladu 4: počet žáků ve třídě dvá při dělení 4 zbytek 1 a při dělení 3 zbytek 2 tj. platí

1+4v=2+3u … řešíme tuto Diofantovskou rovnici (= hledáme celočíselná řešení) pomocí kongruncí, tj. u=1+4t, v=1+3t;

Pro t=1: u=5, v=4, tj. dopočítáme x=17 je málo,

Pro t=2 dostaneme jediné řešení: u=9, v=7, dopočteme x=29

Př. 7: x=y=1, ale x=23u a y=29v, tedy po dosazení máme 23u-29v=1, řešíme tedy kongruenční rovnici 23u je v kongruenci s 1 (modulo 29) … k jedné straně rovnice přičítáme násobky 29, dokud nelze výsledek zkrátit s číslem 23, vyjde to až při přičtení 19-násobku čísla 29:

23u je v kongruenci s 1+19*29 =552 (modulo 29)

u je v kongruenci s 24 (modulo 29) … u=24+k*29, v=19+23k … nejmenší taková kladná čísla dostaneme pro k=0, a sice u=24, v=19 … odtud x=552, y=551.

(tato úloha vlastně hledala odpověď na otázku: kdy se 23 u a 29 v liší o jedničku? Je to dost pracný příkald, ale pro kalkulačku je to malina)

Kapitola 5 – polynomy

1a) f(x) = (x-1) na druhou * (x+1) * (x na druhou + x +1) … to je rozklad v R;

Pokud bychom chtěli rozklad v C, mohli bychom (x na druhou + x +1) rozložit podle vzorce pro řešení kvadratické rovnice a dostali bychom

f(x) = (x-1) na druhou * (x+1)*(x-((1/2)*(-1+i*odmocnina ze 3)* (x-((1/2)*(-1-i*odmocnina ze 3)

1b) f(x)=(x-1)*(x+1)*(2x na druhou –x+2) … posední závorka má už komplexní kořeny, tj. rozklad v R už je hotov.

2a) rozložte v Z: (x+6)*(x+4)

2b] (x+2)*(x-3)

2c] x na druhou -2x+6 je už sám svým rozkladem v R, protože má jen komplexní kořeny

3a] x na druhou *(x-1)*(x na druhou +2) … rozklad v R

3b] POKUD SE VÁM TENTO PŘÍKALD NEDAŘÍ, NEZOUFEJTE A VĚNUJTE SE JINÝM, MYŠLENKOU ZDE BYLO VYTKNOUT (x na třetí -1) z prvních dvou členů i z třetího a čtvrtého člene: dostaneme

(x+2)*(x na druhou -2x+4)*(x+1)*(x na druhou –x +1) … druhá i čtvrtá závorka mají komplexní kořeny, tj. rozklad v R už je hotov

3c) na tento příklad se vyklašlete, neztrácejte čas, řešením je upravit do tvaru

X^5 + 4x^4 + 6 x^3+4x^2+x+odrobinky, z prvnich peti clenu vytknout x a v závorce bude (x+1)^4, atd.

Vyjde rozklad (x+1)^2*(x+2)*(x+i)*(x-i)

Př. 4: v N rozklad neexistuje, v Z,Q,R je rozklad stejný (x-1)*(x^2+x+1)*(x+1)*(x^2-x+1), a nakonec rozklad na kořenové činitele je možný jen v C, protože C je algebraicky uzavřené, tj. druhá a čtvrtá závorka je rozložitelná na součin kořenových činitelů s komplexními kořeny:

(x-1)*(x+1)*(x-(1/2)*(-1+i*odmocnina ze 3))*(x-(1/2)*(-1-i*odmocnina ze 3))*(x-(1/2)*(1+i*odmocnina ze 3))*(x-(1/2)*(1-i*odmocnina ze 3))

Př. 5a]-5d] … viz cviceni

Př. 5e) NSD=(x+2)*(x+3)=x^2+5x+6

5f] NSD je stejny jako v 5e

5g] NSD=(x-1)*(x-5)-x^2-6x+5

5h] NSD=(x-1)*(x+3)=x^2+2x-3

Priklady 6,7 nebudeme delat

Pr. 8. POZOR, při chybějích koeficientech u třetí, druhé a první mocniny x musíme napsat koeficienty 0,výsledek dělení je polynom (x^3+x^2+x+1)

Výpočet koeficientů Taylorova rozvoje nebudeme dělat

Priklad 9:

Funkcni hodnota v bode -1 je -13

Priklad 10. ANO,JE!!!!

Priklady 11,12,13 nebudeme delat

Vietovy vztahy: priklad 14: x^2-2x-24 … vysvetleni viz cviceni (Vietovy vzorce)

Priklad 15. F(x)=x^2+x-2

Priklad 16: a nula = 3

Priklad 17. A dva = 3.

Priklad 18: (x-1)*(x-2)*(x-3) … a jeho reálné násobky

Priklad 19. Dalsim korenem je dvojnasobny koren 1

Priklad 20: z prvního Vietova vztahu plyne:

$X_1+x_2+x_3=-a_2/a_3=15/1=15$

Dále víme, že $x_2=x_1+3$ a $X_3=x_2+3=x_1+6$, tj. dosadíme za tyto dvě proměnné do Vietovy rovnice a máme: $15 = 3x_1+9$, tj. $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$

Př. 21: napišme Vietovy rovnice:

$C_1+c_2+c_3=23/15$

$C_1*c_2+c_1*c_3+c_2*c_3=8/15$

$C_1*c_2*c_3= 14/15$

Tyto hodnoty dosazujeme do upravovaného vztahu

$(c_1+1)*(c_2+1)+(c_3+1)=c_1*c_2*c_3+1+c_1*c_2+c_1*c_3+c_2*c_3+c_1+c_2+c_3=$

$14/15 + 1 + 8/15+23/15 =4$ … součin je roven 4.

Kapitola 6 – algebraické rovnice a nerovnice

1a) $x=1$ … dvojnásobný kořen, ale jedno řešení

$X=-1$ … druhé řešení

1b) $x=0{,}5$ … jedno řešení; v reálném oboru jediné

1c) $x_1=0$, $x_{2,3}=$ minus odmocnina z pěti je dvojnásobný kořen

2a) rovnice má stejné řešení jako příklad 1a)

Nerovnice platí pro x větší nebo rovno MINUS 1

2b) rovnice … stejně jako 1b)

Nerovnice: platí pro x menší než ½

2c) polynom lze rozložit na $6*(x-1)*(x-2/3)*(x+1/2)$, tj. Rovnice má řešení pro $x_1=1$, $x_2=2/3$, $x_3=$ MINUS ½

Nerovnice platí pro sjednocení intervalů

Minus nekonečno, minus ½ … zprava uzavřený

A

<2/3; 1>

2d] polynom lze rozložit na součin (x-1)*(x+1)*(x-3)^2, tj. Rovnice má řešení x_1=1, x_2=-1, x_3,4=3;

Nerovnice platí pro sjednocení otevřených inteervalů

(MINUS nekonečno; MINUS 1), (1;3), (3;nekonečno)

Priklad 3. Polynom lze rozložit na součin (x-2)*(x-(1/2)*(-1-i* odmocnina z 19))*(x-(1/2)*(-1+i* odmocnina z 19)). Pak rovnice má řešení

X_1=2, x_2=(1/2)*(-1-i*odmocnina z 19), x_3=(1/2)*(-1+i*odmocnina z 19),

Nerovnice platí pro x na intevalu (2;nekonečno).

4a) x_1=-2; x_2,3=(1/2)*(-1 PLUS MINUS odmocnina z 5)

4b) stejné jako 2c)

4c) stejné jako 2d)

4d) x1=1, x2=2, x3,4 = -1/2 plus minus (1/2)* odmocnina ze 3 …. Pomocí Hornerova schematu a snizeni stupne polynomu

4e) x1=1, x2=-1, x3=7/4, x4=1/3 … pomoci Hornerova schématu, všechny koreny jsou zlomky

5a] x1,2= -1/3 plus minus (1/3)*i*odmocnina z 11

5b] x1,2,3,4=0, x5=-1, x6,7=(1/2)*(1 plus minus i*odmocnina ze 3)

5c] x1=1, x2,3= -1, x4,5 = plus minus i

5d] x1=2, x2= -1, x3,4 = plus minus 2i

5e] x1,2 = plus minus odmocnina ze dvou

X3,4= i*odmocnina ze 2

X5,6= - i*odmocnina ze 2

5f] x1=2, x2,3=-1/2 plus minus (1/2)*odmocnina z 10

5g] x1= -1, x2= -4, x3 = -3/4, x4,5 = (1/2)*(1 plus minus odmocnina ze 3)

5h] x1=1, x2= -1, x3= -3, x4,5 =(1/2)*(-3 plud minus odmocnina z 5)

P5. 6 … reciproké rovnice … nedělejte zatím – buď stihneme na posledním cvičení, nebo nebudeme dělat; případně řešení:

6a) koeficienty jsou symetrické (19 x na čtvrtou je symetrické s 19x, 76 x na třetí je symetrické se 76 x na druhou) … pokud je stupeň polynomu na levé straně lichý, x1= -1 je vždy řešením takové rovnice, tj. pomocí Hornerova schématu snížíme její stupeň na sudý stupeň (vydělením polynomem (x+1))

Dostaneme také rovnici se symetrickými koeficienty, ale na levé straně je polynom sudého stupně:

X na čtvrtou +18*(x na treti)+58*(x na druhou)+18x+1=0 … tuto rovnici vydelime clenem (x na polovinu stupne daného polynomu, tj. v našem případě x na druhou)), dostaneme

X na druhou + 1/(x na druhou)+18x+18/x+58=0

Nyní zavedeme substituci (x+1/x=t), umocněním na druhou dostaneme x na druhou +1/(x na druhou)= t na druhou minus 2 … po této náhradě dostaneme kvadratickou rovnici

t na druhou minus 2 +18t+56=0, kterou vyresime: t1= -4, t2= -14

nyní se vrátíme v substituci zase k x a řešíme nejprve rovnici x+1/x=-4 … dostaneme x2,3= 2 plus minus odmocnina ze tří

a pak rovnici x+1/x= -14, dostaneme x4,5= 7 plus minus 4*(odmocnina ze 3)

6b) koeficienty jsou symetrické, stupeň polynomu je lichý … řešením je x1= -1, snížíme stupeň pomocí Hornerova schématu (vydělením polynomem (x+1)):

Dostaneme také rovnici se symetrickými koeficienty, ale na levé straně je polynom sudého stupně:

X na čtvrtou – 12*(x na třetí)+29*(x na druhou)-12x+1=0 … (x na polovinu stupne daného polynomu, tj. v našem případě x na druhou)), dostaneme

X na druhou + 1/(x na druhou) -12x-12/x +29 =0

Nyní zavedeme substituci (x+1/x=t), umocněním na druhou dostaneme x na druhou +1/(x na druhou)= t na druhou minus 2 … po této náhradě dostaneme kvadratickou rovnici

t na druhou minus 2 -12t+29=0, kterou vyresime: t1= 3, t2= 9

nyní se vrátíme v substituci zase k x a řešíme nejprve rovnici x+1/x= 3 … dostaneme x2,3= (1/2)*(3 plus minus odmocnina z 5),

a pak rovnici x+1/x= 9, dostaneme x4,5=(1/2)*(9 plus minus odmocnina ze 77)

6d] rovnice sice nemá symetrické koeficienty, ale má koeficienty, které se liší o znaménko, tj. x1=1 je řešením takové rovnice: pomocí Hornerova schématu snížíme stupeň (vydělením polynomem (x-1)), dostaneme

5*(x na třetí) -7*(x na druhou)-7x+5 … opět reciproká rovnice, tj. má řešení x2 = -1, vydělením pomocí Hornerova schématu dostaneme rovnici

5x na druhou -12x+5=0 … kvadratická rovnice, kterou vyřešíme: x3,4=(1/5)*(6 plus minus odmocnina z 11).

Za domácí úkol můžete spočítat

6c) x1= -1; x2= -1/2, x3= -2, x4= 3, x5 = 1/3

6e) x1= -1, x2= -1/7, x3= -7

6f) po vydělení rovnice (x na druhou) a substituci x+1/x=t dostaneme …

X1=4, x2=1/4, x3=2, x4=1/2

Příklad 7) sice koeficienty u sudé mocniny a absolutního členu se rovnají a koeficienty u lichých mocnin se liší o znaménko, ale vydělení rovnice dělitelem (x na druhou) a následná substituce x-1/x=t vede k cíli: u liché mocniny tato substituce ctí znaménko, u sudé mocniny mají členy s proměnnou x obě znaménka po umocnění kladná, tj.

Dostaneme rovnici 6*(t na druhou)-25t+24=0, a pak x1=3, x2=-1/3, x3=2, x4= -1/2.