ALG3 - opakovací otázky - každá je hodnocena 3 body

Otázka 1: Peanova množina

Peanova množina splňuje axiomy:

A1, $\forall x \in P\ \exists$ následník $x' \in P$

A2, $\exists e \in P$: není následníkem

A3, $x \neq y \Rightarrow x' \neq y'$

A4, jestliže pro $M \subseteq P$ platí:

a) $e \in M$

b) $\forall x \in P: x \in M \Rightarrow x' \in M$

tak $M = P$

na místě N:

ad1, $n' = n+1$

ad2) 1

ad3) $n \neq m \Rightarrow n+1 \neq m+1$

ad4) procházíme prvky v N:

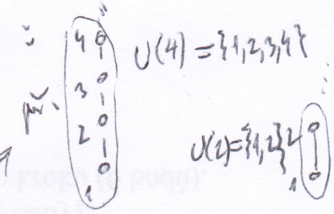
a) $1 \in N$

b) $(n \in N \Rightarrow n+1 \in N)\ \forall n$

pak jsme prošli celou N

N je jediným modelem P až na izomorfismus

Otázka 2: uspořádání a operace na N jako modelu Peanovy množiny:



Věta: $x \neq e \Rightarrow \exists u \in P: x = u'$

Def. u ... předchůdce prvku x, ozn. $'x$

Def. $U(a)$ ... úsek Peanovy množiny příslušný prvku a $\Rightarrow$ 1, $a \in U(a)$; 2, $x \in U(a) \Rightarrow {}'x \in U(a)$, pokud $'x$ existuje

Uspořádání pak definujeme $\boxed{a \leq b, \text{ když } a \in U(b)}$

Věta: mezi a, a' $\nexists x$: $a < x < a'$ ($<$ je zkratkou pro $\leq$, když $\leq$, ale $\neq$)

(+) Věta: Na P $\exists!$ operace $+$:

1) $x + e = x'$

2) $x + y' = (x+y)'$

| $+$ ... má standardní vl. na P (viz algebra 1) ...

(+) Věta: Na P $\exists!$ operace $\cdot$:

1) $x \cdot e = x$

2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$

| $\cdot$ má standardní vlastnosti na P (viz algebra 1)

+ operace $+, \cdot$ na P jsou svázány distributivním zákonem

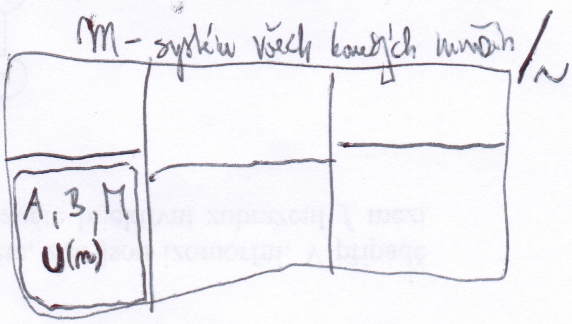
Otázka 3: přirozená čísla jako kardinální čísla konečných množin

Alternativní definice přirozených čísel mimo otázky 1-2:

relace $\sim$ je ekvivalence: $A \sim B$, když $\exists$ bijekce $A \to B$

kardinální číslo M třída rozkladu $\mathfrak{M}/\sim$, která obsahuje množinu M

konečné množiny



(+) lze definovat operace (+):

$$\mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B = \mathrm{card}(A \cup B) \quad \text{pouze pro } A \cap B = \emptyset$$

$$\mathrm{card}\,A \cdot \mathrm{card}\,B = \mathrm{card}(A \times B)$$

$\to$ množiny A, B jsou vybrané reprezentanti dané třídy = daného kardinálního čísla

(+) uspořádání lze dodefinovat podobně jako v Peanově množině pomocí úseku $U(b)$:

$U(b)$ je konečné $\Rightarrow$ nalezne nejmenší kardinální číslo rozkladu $\mathfrak{M}/\sim$, a má to prvek

tj. $a \leq b$, když $a \in U(b)$

Otázka 4: Vytváření grupy z pologrupy (ať už $\boxed{\text{rozdílové}}$ grupy, nebo $\boxed{\text{podílové}}$ grupy):

G je pologrupa s operací $*$ $\xrightarrow{\quad}$ $G\times G/_\sim$ je grupa s operací $\circledast$ takto:

injektivní homomorfismus

$\Psi(g) = \{[g*x, x]\}$

a) vytvoříme rozklad $G\times G$ podle relace $\sim$ následovně:

$[a,b] \sim [c,d]$, když $a*d = b*c$

b) definujeme operaci $\circledast$ na $G\times G/_\sim$ takto (po složkách):

$\{[a,b]\} \circledast \{[c,d]\} = \{[a*c, b*d]\}$

(třída obsahující prvek $[a,b]$) $\circledast$ (třída obs. prvek $[c,d]$) := třída obs. prvek $[a*c, b*d]$

c) $\circledast$ na $G\times G/_\sim$ splňuje vlastnosti ①–④, tj. $G\times G/_\sim$ je grupa

$\circledast = \oplus$ ... $G\times G/_\sim$ je rozdílová grupa (s inverzními prvky vzhledem k $\oplus$)

$\circledast = \odot$ ... $G\times G/_\sim$ je podílová grupa (s inverzními prvky vzhledem k $\odot$)

Otázka 5: Rozšíření N na $N\times N/_\sim =: Z$

N je aditivní (sčítací) pologrupa s operací $+$ $\xrightarrow{\quad}$ $N\times N/_\sim$ je grupa s operací $\oplus$ takto:

injektivní homomorfismus

a) vytvoříme rozklad $N\times N$ podle relace ekvivalence $\sim$ takto

$[a,b] \sim [c,d]$, když $a+d = b+c$

$\Psi(n) = \{[n+1, 1]\}$ b) definujeme sčítání tříd $\oplus$ takto

$\{[a,b]\} \oplus \{[c,d]\} := \{[a+c, b+d]\}$

c) $\oplus$ na $N\times N/_\sim$ splňuje vlastnosti ①–④, tj. $N\times N/_\sim$ je grupa, || rozdílová grupa

① $\{[a,b]\}\oplus\{[c,d]\}$ je opět nějaká třída rozkladu

② asociativita $\oplus$ plyne z asociativity $+$ na N

③ neutrální prvek: $\{[a,b]\}\oplus\{[x,x]\} = \{[a,b]\}$

④ inverzní prvky: $\{[a,b]\}\oplus\{[b,a]\} = \{[x,x]\}$

Otázka 7: rozšíření $(Z, +, \cdot)$ na $Z\times Z/_\sim =: Q$

$(Z,+,\cdot)$ je komutativní okruh $\xrightarrow{\quad}$ $Z\times(Z-\{0\})/_\sim =: Q$ je těleso s operacemi $\oplus, \odot$ vytvořené takto:

injektivní homomorfismus

a) vytvoříme rozklad $Z\times(Z-\{0\})$ podle relace ekvivalence $\sim$ takto:

$\Psi(z) = \{[z\cdot 1, 1]\}$

$[a,b] \sim [c,d]$, když $a\cdot d = b\cdot c$

b) definujeme $\oplus$, $\odot$ na $Z\times(Z-\{0\})/_\sim$: $\{[a,b]\}\oplus\{[c,d]\} = \{[ad+bc, bd]\}$

$\{[a,b]\}\odot\{[c,d]\} = \{[a\cdot c, b\cdot d]\}$

NOVĚ, MIMO OTÁZKU 5

c) $(Z\times(Z-\{0\}), \oplus)$ je komut. grupa $\oplus$ ... splňuje ①–⑤

$(Z\times(Z-\{0\}), \odot)$ je komut. grupa: $\odot$ splňuje ①–⑤

$(Z\times(Z-\{0\}) - \{[0;1]\}, \odot)$ $\oplus\odot$ jsou svázány distribut. zákonem

Otázka 6: uspořádání a operace v okruhu celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

a) uspořádání: $\{[a,b]\} \in N\times N/_\sim$ je kladné (>0), když $a > b$ ← uspořádání v N

$\{[1,1]\}$ nula, když $a=b$

záporné (<0), když $a<b$

definice: $\{[a,b]\} \leq \{[c,d]\}$, když $\{[a,b]\} - \{[c,d]\} < 0$ (je záporné)

b) $\oplus$ ... máme definováno v otázce 5 (pomocí sčítání v N po složkách)

$\odot$ ... musíme ještě nově dodefinovat na $N\times N/_\sim$:

NOVĚ (mimo otázku 5)

$$\{[a,b]\} \odot \{[c,d]\} = \{[ac+bd, ad+bc]\}$$

c) $\oplus, \odot$ splňují stejné vlastnosti (viz Z algebra 1), tj. $(N\times N/_\sim, \oplus, \odot)$ je komutativní okruh

Otázka 7 pokračování: Operace a uspořádání v $(\mathbb{Q}, +, \cdot) := (\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/_\sim, \oplus, \odot)$

pokud naučte se to vnoření, a k této části se pravděpodobně nedostanete; ano, stačí mluvit o uspořádání na množině $\mathbb{Q}$:

$A \in \mathbb{Q}$, $A = \{[a,b]\}$ $:= 0$, když $a=0$ (rovnost v $\mathbb{Z}$)

$:>0$, když $a>0, b>0$ (relace v $\mathbb{Z}$) nebo $a<0, b<0$ (relace v $\mathbb{Z}$)

$:<0$ jinak

„4. bod pro tuto otázku"

Pak $A, B \in \mathbb{Q}$, tj. $A = \{[a,b]\}$, $B = \{[c,d]\}$

$A < B$, když $A - B < 0$

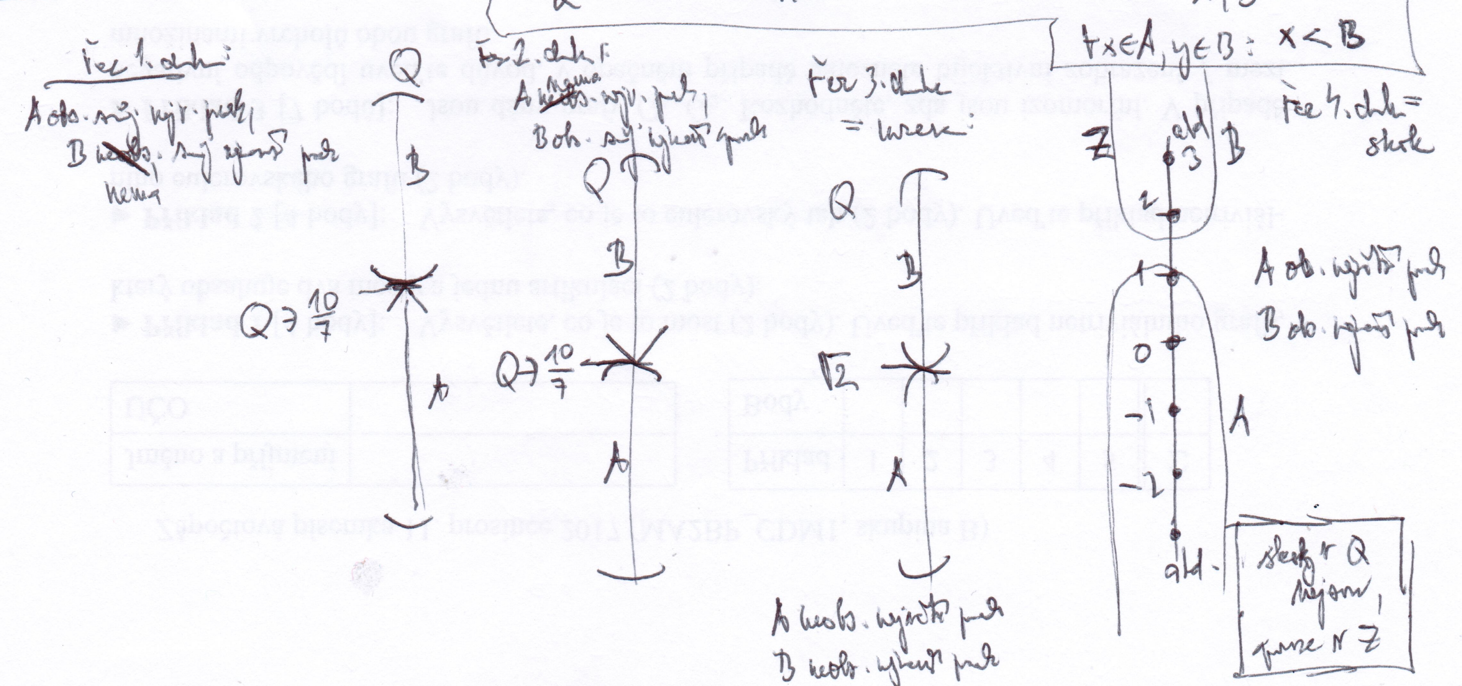
$= B$ $\quad = 0$

$>$ $\quad > 0$

Celkem $A \leq B$, když $A<B$ nebo $A=B$, ... uspořádání $\leq$ má běžné vlastnosti (viz Algebra 1)

Otázka 8: řezy v uspořádaných množinách

řez = rozklad množiny α na dvě disjunktní podmnožiny A, B: $\forall x\in A, y\in B: x<B$



otázka 9: konstrukce množiny reálných čísel : $R = \{$ řezů α v Q : α je 1. druhu $\vee$ α je 3. druhu$\}$

$\alpha = (A, B)$ — 1. bod

2. bod

odpovídá rac. číslům — odpovídá irac. číslům

3. bod

otázka 10: uspořádání a operace v $\mathbb{R}$:

Uspořádání na R definujeme: řez $\alpha \leq$ řez β, když $A \subseteq C$

$\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$

tj. pomocí podmnožin Q (tj. relace inkluze $\subseteq$ N_2^Q)

$0 := (Q - Q^+, Q^+)$

$\alpha > 0$, když $\alpha \geq 0 \wedge \alpha \neq 0$ ... α je kladné

$\alpha < 0$, když $\alpha \leq 0 \wedge \alpha \neq 0$ ... α je záporné

Operace + na R definujeme: $\alpha + \beta :=$ řez $(Q - C_2, C_2 := \{x+y : x \in B, y \in D\})$

$\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$

tato operace má vlastnosti (algebra 1)

Operaci $\cdot$ na R definujeme: $\alpha \cdot \beta :=$ řez $(Q - C_2, C_2 := \{x \cdot y : x \in B, y \in D\})$

tato operace má tutéž vlastnosti (algebra 1)

$\boxed{(R, +, \cdot) \text{ je komutativní těleso}}$

otázka 11: věta unořice Dom Bezšluk (kapitola komplexní čísla)

otázka 12: věta Algebra 1

otázka 13: viz Rosický – Algebra, str. 13–15