Kapitola 1

Neurčitý integrál

1.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

V kurzu Matematická analýza 1 jsme se seznámili s pojmem derivace, naučili se derivovat některé elementární funkce a řekli si též některé aplikace derivací. Jednou z nich byla i aplikace fyzikální, a to $v(t) = s'(t)$—slovy okamžitá rychlost je první derivací dráhy podle času. Je-li nám známo jak se mění dráha pohybujícího se tělesa v závislosti na čase, snadno spočítáme, jakou rychlostí se hmotný bod v daném čase pohybuje. Co když však známe závislost okamžité rychlosti na čase a neznáme dráhu? Z fyziky víme, že u pohybu rovnoměrně zrychleného platí pro rychlost vztah $v = at$, kde a je zrychlení; pro tento typ pohybu se jedná o konstantu. Víme, že dráha pohybu rovnoměrně zrychleného je dána vztahem $s = \frac{1}{2}at^2 + s_0$, kde s_0 je konstanta, jejíž fyzikální význam je dráha v čase $t = 0$. Snadno se přesvědčíme, že $s'(t) = v(t) = at$.

Vím, že vám aplikace moc pod fousy nelezou, proto se abstrouhám od pohybu a problém postavím čistě matematicky. Otázka zní, zda např. funkce $f: \ y = x$ není derivací nějaké funkce. Bez velkých problémů zjistíme, že kýžené x obdržíme derivací funkce $F: \ y = \frac{1}{2}x^2$. Je zřejmé, že tato nalezená funkce není jediná možná, problém řeší jakákoliv funkce $F: \ y = \frac{1}{2}x^2 + c$, kde c je konstanta. Zeptám-li se, kterou funkci musím zderivovat, abych dostal $\cos x$, tak mi asi každý řekne, že je to $y = \sin x + c$. Avšak ruku na srdce, kdo je mi schopen během jedné minuty říci, že potřebuji derivovat funkci $F: \ y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$, abych obdržel poměrně jednoduchou složenou funkce $f: \ y = \sin^4 x$? Tušíme, že tyto výpočty budou složitější než derivování, které v jednodušších případech zvládá i medvěd Brumla mého přítele RK, takto domptéra v jednom nejmenovaném cirkuse.

My se však nenecháme odradit a jsouce povzbuzeni slovy básníka Jana Nerudy že malý ten kdo má jen malý cíl shrneme dosavadní poznatky do první definice.

Def. 1.1 *Nechť $F(x)$ a $f(x)$ jsou funkce definované v otevřeném intervalu I. Funkci $F(x)$ nazýváme funkcí primitivní k funkci $f(x)$, jestliže pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.*

Z úvodních poznámek nám plyne rovněž naše první věta, kterou si jistě sami dokážete coby cvičení.

Věta 1.1 *Nechť $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Pak i libovolná funkce $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je funkcí primitivní k funkci $f(x)$.*

K této větě uvedu dvě poznámky. Graf primitivní funkce $G(x)$ vznikne posunutím grafu funkce $F(x)$ o c ve směru osy x. Mezi množinou všech primitivních funkcí k $f(x)$ a množinou $\mathbb{R}$ existuje bijekce. V předdmětu Teorie množin se pak dozvíte, že tyto množiny mají stejnou mohutnost, ale to poněkud předbíhám.

Je namístě situaci z předchozí věty nějak pojmenovat.

Def. 1.2 *Množinu všech funkcí primitivních k funkci $f(x)$ nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ v intervalu I. Píšeme*

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad x \in I$$

Funkci $f(x)$ nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem. Celý proces budeme nazývat integrováním (integrací) funkce $f(x)$.

Záhadný symbol dx tam zatím pište a nepřemýšlejte o něm. Jakmile se probojujeme k integrálu určitému, tak jeho význam ozřejmíme.

Otázku, zda uvedený proces má smysl řeší následující věta.

Věta 1.2 *Ke každé funkci spojité na intervalu I existuje v tomto intervalu funkce primitivní.*

Pusťme se tedy chutě do hledání funkcí primitivních, tedy do integrování. Někteří národové čtou zprava doleva, vezmeme-li si z nich příklad a přečteme-li vzorce pro derivování tímto směrem, dostaneme sadu základních vzorců pro neurčitý integrál.

1.1. $\int 0.dx = c$

1.2. $\int dx = x + c$

1.3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$

1.4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

1.5. $\int e^x dx = e^x + c$

1.6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a \geq 1, \qquad a \neq 1$

1.7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

1.8. $\int \cos x dx = \sin x + c$

1.9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$

1.10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$

1.11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

1.12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$

U všech vzorců předpokládáme, že platí pro všechna přípustná x.

Sami cítíme, že podle uvedených vzorců bychom moc integrálů nevyřešili. Zkusíme tedy pátrat, zda bychom nemohli obrátit i jiné vzorce a věty z derivací. V případě lineární kombinace funkcí budeme úspěšní, neb ta se integruje na stejném principu jako se i derivuje, jak nám to říká následující věta.

Věta 1.3 *Nechť v intervalu I existují neurčité integrály funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ a nechť $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty. Pak existuje i neurčitý integrál funkce*

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

a platí

$$\int c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \cdots + c_n \int f_n(x) dx$$

Některé integrály můžeme jednoduchou úpravou převést na tzv. integrály tabulkové, jak se o tom přesvědčíme v následujícím příkladu.

Příklad 1.1

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

Nyní s využitím vzorce 1. 9. a věty 1. 3. máme

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

Bohužel výše uvedená je věta je naším posledním úspěchem v tomto směru. Na rozdíl od derivací neexistují vzorce pro derivaci součinu a podílu. Malou útěchou nám budiž skutečnost, že ze vzorce pro derivaci součinu lze odvodit vzorec pro tzv. derivaci *per partes*, po česku *po částech*. Toto pro snadnost ponecháváme jako domácí cvičení a budeme pokračovat patřičnou větou.

Věta 1.4 *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojité v intervalu (a, b) (může být i $a = -\infty$ či $b = \infty$) a nechť mají v tomto intervalu spojité derivace. Pak zde platí*

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

či stručněji

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

Použití této metody si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1.2 *Vypočtěte integrál $\int xe^x dx$. Jelikož máme integrovat součin funkcí, můžeme to zkusit metodou per partes. Nadějné je i to, že oba součinitele umíme derivovat a integrovat. Jelikož se e^x nemění ani při integraci ani při derivaci, zaměříme svou pozornost na druhého činitele. Zatímco $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$, tak derivace $x' = 1$. Volba je tedy jasná— $u = x$, $u' = 1$, $v' = e^x$, $v = e^x$. Podle vzorce je*

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Metodu per partes lze použít i opakovaně, musíme však vidět světlo na konci tunelu, nikov však od protijedoucího vlaku.

Příklad 1.3 *Vypočtěte integrál $\int x^2 \sin x dx$. Volíme $u = x^2$, $u' = 2x$, $v' = \sin x$, $v = -\cos x$. Podle vzorce je*

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

Na integrál $\int x \cos x dx$ použijeme opět metodu per partes s volbou $u = x$, $u' = 1$, $v' = \cos x$, $v = \sin x$ a obdržíme

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x.$$

Je tedy

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + c$$

Další způsob použití metody per partes ukazuje následující příklad.

Příklad 1.4 *Vypočtěte integrál $\int \ln x dx$. Zpočátku nás asi zarazí, že zde není žádný součin. To nás však nesmí odradit, podle Palackého věty si ho prostě vytvoříme—$1.x$. Pak už je volba jednoznačná, a to $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$, $v' = 1$ a $v = x$. Aplikací metody per partes máme*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x}.x = x \ln x - x + c.$$

Obdobným způsobem můžeme integrovat i funkce cyklometrické, jejichž integrály jste v přehledu základních vzorců jistě postrádali. Závěrem ještě jeden způsob, jak lze využit tuto metodu.

Příklad 1.5 *Vypočtěte integrál $\int e^x \sin x dx$. Zde součin máme, obě funkce lze snadno derivovat i integrovat, tady je těžké si vybrat. Po delším přemýšlení zvolíme následující možnost: $u = \sin x$, $u' = \sin x$, $v' = v = e^x$. Aplikujeme patřičný vzorec a máme*

$$\int e^x \sin x dx = e^x - \int e^x \cos x dx.$$

Z výsledku jsme trochu rozpačití, máme však pevnou vůli a z nastoupené cesty nesejdeme. Volba bude $u = \cos x$, $u' = -\sin x$ a $v' = v = e^x$. Výsledkem pak bude

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right).$$

Ocitli jsme se ve stejné situaci, v jaké byl jistý Australan, který na dotaz svého kamaráda, proč má na hlavě bouli, odpověděl: Ale koupil jsem si nový bumerang a ten starý jsem odhodil. Nám tato rána do hlavy ale nevadí, naopak se nám v ní rozsvítí, protože si všimneme, že po odstranění závorek mají integrály opačná znaménka. Výše uvedený vztah můžeme tedy chápat tak, že se jedná o rovnici, v níž je neznámou zadaný integrál, či chcete-li zavedeme substituci $\int e^x \sin x dx = t$. *Po vyřešení rovnice zjistíme, že je*

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c.$$

Podobně neexistuje univerzální vzorec pro integraci funkce složené, na základě věty o derivaci složené funkce však můžeme odvodit větu o *substituci* v integrálu.

Věta 1.5 *Nechť funkce* $F(t)$ *je primitivní funkcí k funkci* $f(t)$ *v intervalu* (α, β). *Nechť funkce* $t = \varphi(x)$ *má derivaci* $\varphi'(x)$ *v intervalu* (a, b) *(intervaly mohou být i nekonečné). Pro každé* $x \in (a, b)$ *nechť je číslo* $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. *Pak v intervalu* (a, b) *je funkce* $F(\varphi(x))$ *primitivní funkcí k funkci* $f(\varphi(x))$, *tedy platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$$

či obvykleji

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c,$$

kde $t = \varphi(x)$

Metodu substituční můžeme používat v dvojí podobě. Vy byste měli zvládnout situaci, kdy je v integrandu nějaká složená funkce vynásobena derivací její vnitřní složky, jak je to ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 1.6 *Vypočtěte integrál* $\int \sin^8 x \cos x dx$. *Zvolme substituci* $t = \sin x$, *potom je* $dt = \cos x dx$. *Tyto údaje dosadíme do integrandu, čímž jsme postaveni před nový problém spočítat integrál* $\int t^8 dt$. *Toto jest tzv. integrál tabulkový, který spočítáme podle vzorce 1. 3. U neurčitého integrálu je slušnost vrátit se k původním proměnnným, takže máme*

$$\int \sin^8 x \cos x dx = \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + c = \frac{\sin^9 x}{9} + c.$$

Někdy v integrandu nemáme přímo derivaci vnitřní složky, avšak po úpravě ji tam dostaneme. V následujícím příkladu je úkol pro děti v mateřské škole.

Příklad 1.7 *Vypočtěte integrál* $\int x^2 e^{x^3} dx$. *Vnitřní složka je* x^3. *Zvolíme substituci* $x^3 = t$, $dt = 3x^2 dx$. *Jak vidíme, v integrandu chybí číslo 3, proto je tam dodáme známou fintou ve formě vynásobení jedničkou tvaru* $3 \cdot \frac{1}{3}$. *Máme tedy*

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} e^{x^3} + c.$$

Ne vždy je úprava takto snadná a je třeba trochu invence jak si ukážeme v dalším příkladu.

Příklad 1.8 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$. *Než se pustíme do hledání literatury abychom tento ošemetný integrál spočítali, tak se trochu zamyslíme. Určitě si všimneme, že se exponenty liší o dvojku a dáme-li si to do souvislosti s faktem, že v derivaci funkcí tangens či kotangens se funkce z integrandu vyskytují ve jmenovateli právě v druhé mocnině. Zkusíme tedy následující úpravu.*

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \operatorname{tg}^6 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Substituce $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$ *je nabíledni a můžeme pokračovat.*

$$\int \operatorname{tg}^6 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + c.$$

Důležité jsou integrály typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$. Tento typ integrálu řešíme substitucí $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$, která vede na integrál $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$. Do vašeho vzorcovníčku si tedy můžete připsat další vzorec.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Když už jste v tom připisování, tak si dodejte další dva.

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c$$

a

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln|\sin x| + c$$

Na tento vzorec si dáme ještě tři příklady, kdy integrand musíme nejdříve upravit.

Příklad 1.9 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{1}{\sin x \cos x}dx$. *Integrand upravíme následujícím způsobem.*

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}dx = \ln|\operatorname{tg} x| + c$$

Příklad 1.10 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{1}{\sin x}dx$. *Využitím známého vzorce integrand upravíme následujícím způsobem.*

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{dx}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

Příklad 1.11 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{1}{\cos x}dx$. *Příklad je podobný jako předchozí, proto si vzpomeneme, že chce-li matematik vařit čaj, musí být čajník prázdný a v kredenci. No a my dostaneme čajník do kredence za pomoci vzorce* $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. *Je tedy*

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + c$$

Připomínáme, že jsme vložili substituci $x + \frac{\pi}{2} = t$, $dx = dt$.

Vraťme se ještě k předchozí substituci a proveďme obecnou úvahu. V integrálu $\int f(ax+b)dx$ provedeme substituci $ax+b=t$, $adx=dt$ či $dx=\frac{1}{a}dt$. Proces integrace proběhne jako v případě integrace funkce $f(x)$, jen nesmíme zapomenout výsledek podělit číslem a. Připište si další vzorec

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

Při použití tohoto vzorce jakož při neurčitém integrování vůbec je třeba fištrón, jako je tomu v dalším příkladu.

Příklad 1.12 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{1}{x\ln x \cdot \ln lnx}dx$, $x\in(e,\infty)$. *Ten interval jsem tam dal proto, abych nemusel používat absolutní hodnotu v již tak složitém výrazu. Integrand má smysl i pro jiná* x*, podumejte. Po delší úvaze jsem se rozhodl pro substituci* $t=\ln x$, $dt=\frac{dx}{x}$. *Máme tedy*

$$\int \frac{1}{x\ln x\cdot \ln lnx}dx = \int \frac{dt}{t\ln t}dt = \int \frac{\frac{dt}{t}}{\ln t} = \ln\ln t + c = \ln\ln\ln x + c$$

Pokud se však odvážeme a zavedeme substituci $t=\ln\ln x$, $dt=\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx$, *je*

$$\int \frac{1}{x\ln x\cdot \ln lnx}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c = \ln\ln\ln x + c$$

Substituci můžeme používat i v "opačném směru", návod nám k tomu poskytne následující věta.

Věta 1.6 *Nechť funkce* $f(x)$ *má v intervalu* (a,b) *primitivní funkce* $F(x)$. *Nechť dále funkce* $x=g(t)$ *má v intervalu* (α,β) *derivaci* $g'(t)$ *a nechť k této funkci existuje v* (α,β) *funkce inverzní* $t=\psi(x)$, $x\in(a,b)$. *Pak platí*

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt = \Phi(t)+C = F\{g[\psi(x)]\}+c$$

Použití této věty si ukážeme na příkladech.

Příklad 1.13 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{\sqrt{x}dx}{6(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}$, $x\in(a,b)$. *Daný integrand je v intervalu* $(0,1)$ *spojitý. Abychom odstranili druhou a třetí mocninu současně, položíme* $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. *Tato funkce je spojitá v intervalu* $(0,1)$, *má zde i spojitou derivaci, je v něm rostoucí a zobrazuje tento interval na interval* $(0,1)$ *pro proměnnou* x. *Příslušná inverzní funkce je zřejmě* $t=\sqrt[6]{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{6(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{t^3}{6(t^3-t^2)\cdot 6t^5dt} = \int \frac{t^6}{t-1}dt$$

Provedeme-li naznačené dělení v integrandu, obdržíme

$$\int \frac{t^6}{t-1}dt = \int (t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt = = \frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+c$$

Jak jsme již říkali, slušné vychování nám velí vrátit se k původní proměnné x, *v konečném důsledku tedy je*

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{6(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}dx = \frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt[2]{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|+c$$

Zkusme ještě jeden.

Příklad 1.14 *Vypočtěte integrál* $\int \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, $x \in (-a, a)$. *Zde použijeme substituci* $x = a \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $dx = a \cos t dt$. *Dosadíme do integrandu a upravíme.*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

K výpočtu tohoto interálu můžeme použít více způsobů, nejlepší a nejkratší cesta k výsledku vede přes vzorec pro poloviční úhel.

$$a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) + c$$

Abychom ukázali, že se nám dostalo slušného vychování, vzpomeneme si na vzorec pro dvojnásobný úhel a tzv. goniometricou jedničku. Výsledek upravíme na tvar

$$\frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t})$$

Ze substituční rovnice $x = a \sin t$ *máme* $t = \arcsin \frac{x}{a}$, *po dosazení a drobné úpravě, kterou jistě odhalíte sami máme*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

1.2 Integrace racionální lomené funkce

Velice často jsme postaveni před úkol integrovat racionální lomenou funkci, proto se této problematice budeme věnovat podrobněji. Nejprve si vezměte vaše poznámky z algebry a zopakujte si vše, co víte o polynomu a racionální lomené funkci. Definice a věty budu zmiňovat, jen někdy je však budu uvádět v jejich klasické podobě. Začnu připomínkou skutečnosti, že každá neryze lomená racionální funkce může být vyjádřena jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Jelikož integrace polynomu je brnkačka, budeme se věnovat pouze integraci ryze lomené racionální funkce.

Již staří Egypťané používali tzv. kmenové zlomky, tedy zlomky typu $\frac{1}{n}$. ostatní zlomky vyjadřovali právě pomocí těchto kmenových, tedy například $\frac{11}{15} = 2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{3}$. U ryze lomené racionální funkce platí něco obdobného. Zopakujte si pojem kořen polynomu a vězte, že každý polynom lze rozložit na součin polynomů stupně nejvýš dva. Pak lze formulovat následující větu.

Věta 1.7 *Nechť je dána ryze lomená racionální lomená funkce* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *a nechť platí*

$$Q(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_n x + q_n)^{l_n},$$

přitom α_i *je kořen polynomu* $Q(x)$ *násobnosti* k_i *a kvadratické polynomy odpovídají komplexně sdruženým kořenům násobnosti* l_i. *Pak existují jednoznačně určená reálná čísla označená velkými písmeny tak, že platí*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \cdots \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \cdots$$

$$+\frac{B_1}{x-\alpha_m}+\frac{B_2}{(x-\alpha_m)^2}+\cdots\frac{B_{k_m}}{(x-\alpha_m)^{k_m}}$$
$$+\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{K_2x+L_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{K_{l_1}x+L_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\cdots$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_nx+q_n}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_nx+q_n)^2}+\cdots+\frac{M_{l_n}x+N_{l_n}}{(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}}$$

Uznávám, že ta věta je strašná a dokáže odpudit většinu lidí od studia matematiky. Leč neházejte flintu do žita, mohl by ji tam někdo najít a vy byste měli problémy. Na následujících příkladech uvidíte, že je to věta velmi jednoduchá a porozumí jí každý z vás. Než se pustíme do vlastního rozkladu, uvedu ještě dvě věty.

Věta 1.8 *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou mnohočleny stupně n a nechť se shodují pro $n+1$ hodnot proměnné x. Pak jsou tyto mnohočleny totožné.*

Věta 1.9 *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou mnohočleny stupně n a nechť se shodují všechny koeficienty u týchž mocnin Pak jsou tyto mnohočleny totožné.*

Nyní se s optimismem pustíme do řešení příkladů. Budeme hned řešit integrál.

Příklad 1.15 *Vypočtěte integrál $\int\frac{5x^2-39x+64}{x^3-11x^2+34x-24}dx$. Je to integrál ryze lomené racionální funkce, nejdříve rozložíme jmenovatel na součin polynomů stupně nejvýš dva. Po jistém úsilí, například pomocí Hornerova schématu zjistíme, že polynom má tři reálné kořeny $x=1$, $x=4$ a $x=6$. Věřím, že jste začali hledat kořeny jen mezi děliteli čísla 24. Patřičný rozklad bude*

$$\frac{5x^2-39x+64}{x^3-11x^2+34x-24}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-6}$$

Zatím neurčité koeficienty A, B a C určíme následujícím způsobem. Rovnici vynásobíme společným jmenovatelem a obdržíme

$$5x^2-39x+64=A(x-4)(x-6)+B(x-1)(x-6)+C(x-1)(x-4)$$

Vzpomeneme si na větu 1. 8. a přinutíme polynomy na levé a na pravé se rovnnaly dosazením tří různých hodnot x . Samozřejmě můžeme dosadit libovolné hodnoty, ale podíváme-li se na pravou stranu, mělo by nás trknout, že bude velmi výhodné dosadit právě kořeny.

$$x=1\Rightarrow 30=15A\Rightarrow A=2$$
$$x=4\Rightarrow -12=-6B\Rightarrow B=2$$

a konečně

$$x=6\Rightarrow 10=10C\Rightarrow C=1$$

Je tedy

$$\int\left(\frac{5x^2-39x+64}{x^3-11x^2+34x-24}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-4}+\frac{1}{x-6}\right)dx=\ln|(x-1)^2(x-4)^2(x-6)|+c$$

Pokud koukáte na výsledek poněkud nedůvěřivě, zopakujte si pravidla pro logaritmování.

Příklad 1.16 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{-x^2+27x-32}{(x-1)^2(x-7)}dx$. *Zde jsou kořeny již naznačeny, příslušný rozklad bude*

$$\frac{-x^2+27x-32}{(x-1)^2(x-7} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-7}$$

Volba $x = 1$ *dává* $-6 = -6A \Rightarrow A = 1$, *volba* $x = 7$ *dává* $136 = 36C \Rightarrow C = 3$. *Jelikož nám kořeny došly, zvolíme ještě* $x = 0$ *a s využitím již spočítaných koeficientů máme* $-32 = -7 + 7B + 3$, *tedy* $B = -4$. *Je tedy*

$$\int \frac{-x^2+27x-32}{(x-1)^2(x-7)}dx = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x-7}\right) dx =$$

$$\frac{-1}{x-1} + \ln\frac{(x-7)^3}{(x-1)^4} + c$$

S případem, kdy polynom má pouze reálné kořeny jsme se již popasovali, hodíme nyní čučku na případ, kdy ve jmenovateli je nerozložitelný (ireducibilní) polynom stupně dva. Budeme se pro začátek zabývat jen patřičným parciálním zlomkem.

Příklad 1.17 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx$. *Diskriminant je roven číslu -4, trojčlen nelze dál rozložit. Máme však štěstí, v čitateli je skoro derivace jmenovatele, jen je ten výraz poněkud malý. Tak si ho zvětšíme známým trikem, když ho vynásobíme jedničkou tvaru* $2 \cdot \frac{1}{2}$. *Máme tedy*

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+10\right)+c = \ln\sqrt{x^2+6x+10}+c$$

Jistě víte, proč místo absolutní hodnoty tam vyskočily jen závorky a kde se nakonec vzala ta odmocnina.

Příklad 1.18 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{1}{x^2+16}dx$. *Tady nám zase vadí ta šestnáctka, kdyby tam byla jednička, tak je to jasný arkus tangens. Tož si ji tam podle Palackého věty vytvořme.*

$$\int \frac{1}{x^2+16}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\frac{x^2}{16}+1}dx = \frac{1}{16}\int \frac{4tdt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + c$$

Příklad 1.19 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{x+6}{x^2+4x+5}dx$. *Spojíme-li poznatky z předchozích dvou integrálů, můžeme psát*

$$\int \frac{x+6}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+12}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{4}{x^2+4x+5}dx$$

Jednotlivé sčítance budeme integrovat zvlášť.

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \ln\left(x^2+4x+5\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{4}{(x+2)^2+1}dx = 4\operatorname{arctg}(x+2) + c$$

Doufám, že jste si vzpomněli na úpravu zvanou doplnění na čtverec. Zadaný integrál je tedy

$$\int \frac{x+6}{x^2+4x+5}dx = \ln\left(x^2+4x+5\right) + 4\operatorname{arctg}(x+2) + c$$

Na závěr ještě jeden příklad.

Příklad 1.20 *Vypočtěte integrál* $\int \frac{2x^2+13x-25}{(x+1)(x^2+2x+10)}dx$. *Nejprve rozložíme na parciální zlomky*

$$\frac{2x^2+13x-25}{(x+1)(x^2+2x+10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+10}$$

Známou úpravou obdržíme

$$2x^2+13x-25 = A(x^2+2x+10)+(Bx+C)(x+1)$$

a po roznásobení

$$2x^2+13x-25 = Ax^2+2Ax+10A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

Koeficienty spočítáme porovnáním součinitelů u odpovídajících si mocnin, čímž obdržíme soustavu tří rovnic o tří neznámých.

$$\begin{array}{rcrrr} 2 & = & 2A & & +C \\ 13 & = & 2A & +B & +C \\ -25 & = & 10A & & +C \end{array}$$

Řešením jsou čísla $A=-4$, $B=6$, $C=15$. *Využitím výše uvedených poznatků máme*

$$\int \frac{2x^2+13x-25}{(x+1)(x^2+2x+10)}dx = \int \frac{-4dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+9} =$$

$$= -4\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln\left(x^2+2x+10\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c$$

Takto jsouce vybaveni, můžeme konečně přistoupit k výpočtu integrálu, bude hodně záležet na tom, kolik úloh spočítáte. Mám pro vás ještě dvě zprávy, jedna z nich je dobrá a druhá špatná, já je uvedu v opačném pořadí než jak je obvyklé u vtipů. Špatnou zprávou je to, že přes všechnu uvedenou teorii se nám nepodaří vždy najít analytické vyjádření neurčitého integrálu. Například $\int \frac{\sin x}{x}dx = ?$. To je rozdíl oproti derivování, kdy umíme zderivovat každou elementární funkci. Dobrou zprávou je skutečnost, že existuje mnoho knížek, kde jsou různé integrály tabelovány, ty pořádné správočníky obsahují stovky vzorců a tím se vyhneme často mnoha složitým výpočtům. Dřinu strojům, pardon tabulkám. Závěrem této kapitolky vám ještě řeknu, že zatímco derivace představuje jednosměrnou ulici, k integrálu můžeme dojít mnoha cestami, jde o to vybrat tu nejpohodlnější.

Kapitola 2

Určitý integrál a jeho užití

2.1 Definice a metody výpočtu

Nyní se pustíme do integrálu určitého, nemohu jinak, než začít problémem z fyziky. Naším úkolem je vypočítat práci, kterou vykoná plyn při ději izotermickém, změní-li se jeho objem z hodnoty $V_1 = 1\text{m}^3$ na hodnotu $V_2 = 1\text{m}^3$. My sice máme k dispozici poměrně jednoduchý vzorec $W = p\Delta V$, leč tento platí jen pro děj izobarický, kdy je tlak konstantní, kdežto při ději izotermickém se tlak mění v závislosti na objemu podle Boyle-Mariotova zákona $pV = konst.$. My pro jednoduchost položíme tuto konstantu rovnu jedné, prostě si vybereme tu teplotu, při níž to tak je. Je tedy $p = \frac{1}{V}$. Tato funkce je na intervalu $[1; 2]$ spojitá, dokonce je zde klesající.

Jelikož je to problém technický, nepotřebujeme výsledek přesný na miliony desetinných míst. Proto budeme uvažovat takto: Jelikož tlak během celého děje klesá, nemáme k dispozici žádný vzorec. Rozdělme tedy děj na několik fází, kdy se tlak sice změní, ale ne zase tak moc, abychom ho s přimhouřením obou očí nemohli považovat za konstantní. Pak můžeme použít vzorec pro děj izobarický a celkovou práci určíme tak, že sečteme jednotlivé dílčí výsledky. Řekněme, že budeme objem brát po 0,2, dostaneme následující hodnoty.

V	$1,0$	$1,2$	$1,4$	$1,6$	$1,8$	$2,0$
p	$1,00$	$0,83$	$0,71$	$0,63$	$0,56$	$0,50$

Pesimista si řekne, že vezme nejmenší hodnotu z každého intervalu a vyjde mu $\underline{W} = (0,83 + 0,71 + 0,63 + 0,56 + 0,5).0,2 \doteq 0,65$. To optimista ví, že parní stroj je úžasné síly zdroj a vezme si naopak ty hodnoty největší, čímž získá $\overline{W} = (1 + 0,83 + 0,71 + 0,63 + 0,56).0,2 \doteq 0,75$. Je jasné, že pesimista to podcenil a že skutečně vykonaná práce bude větší, zatímco u optimisty je tomu naopak. Řekněme, že půjdeme zlatou střední cestou a prohlásíme, že plyn vykonal práci $W = 0,70J$. Také víme, že kdybych nebyl líný a rozdělil interval na více dílků, byl by výsledek přesnější. Také jsem mohl zvolit jiný způsob dělení a to takto. Zpočátku klesá tlak poměrně rychle, intervaly budou kratší. Ke konci pak mohu volit úseky delší, neboť tlak již tak prudce neklesá. K tomuto příkladu se ještě vrátíme.

Zkusme ještě jeden příklad, a to výpočet obsahu obrazce omezeného křivkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$. Uděláme-li si obrázek, jedná se o lichoběžník, jehož jedna strana se nám poněkud pokřivila. Zopakujeme-li postup z předchozího příkladu, tak zjistíme, že dělíme-li po 0,2, obdrží pesimista hodnotu $s = 0,24$ a optimista $S = 0,44$. Tentokrát nebudeme líní a dělení zjemníme na polovinu, tedy délka úsečky na ose x bude 0,1. Pesimista získá hodnotu $s = 0,285$, optimista pak $S = 0,385$. Již od dob Archimédových víme, že správná hodnota je $\frac{1}{3}$. K této hodnotě se oba přibližují, jeden odspodu a druhý od vrchu. Z hlediska konstrukce je zřejmé, že ji ani jeden z nich nemůže překročit.

Nyní již můžeme definovat určitý integrál.

Def. 2.1 *Nechť je v intervalu $[a, b]$ dána spojitá funkce $f(x)$. Zvolme v tomto intervalu $n - 1$ bodů $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, které vyhovují nerovnostem*

$$a = x_0 < x < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Interval $[x_{k-1}, x_k]$ nazveme $k-$tým podintervalem, jeho délka je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Nechť $f_{mink}(x)$, respektive $f_{max_k}(x)$ je minimální, resp. maximální hodnota funkce v daném intervalu. Dolní součet příslušný tomuto dělení je

$$s = \sum_{k=1}^{n} f_{mink}(x)\Delta x_k.$$

Množina dolních součtů je ohraničená shora, má tedy suprémum, které nazveme dolní integrál funkce $f(x)$. Analogicky definujeme horní součet

$$S = \sum_{k=1}^{n} f_{max_k}(x)\Delta x_k.$$

Množina všech horních součtů je omezená zdola, má tedy infimum, které nazveme horní integrál. Jsou-li tyto hodnoty stejné, nazveme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ a píšeme $\int_a^b f(x)dx$.

Zamysleme se nad tím, co by se stalo, kdybychom vypreparovali jednu funkční hodnotu $f(x_i)$. Matematický čuch nám napovídá, že by hodnota integrálu byla stejná, jeho definici bychom museli pozměnit. Zmírníme požadavek na funkci, bude nám stačit když bude na intervalu $[a, b]$ ohraničená. Rovněž nemůžeme uvažovat v jednotlivých podintervalech maxima či minima funkce, ale vzhledem k ohraničenosti mají funkční hodnoty v každém podintervalu infimum a suprémum. Upravíme-li v tomto smyslu výše uvedenou definici, pak dostaneme opět Riemannův integrál. Tento postup jsem zvolil proto, že v otázce ke státnicím budete mít Riemannův integrál zmíněn. Uvědomte si ještě, že Riemannův integrál z ohraničené funkce nemusí existovat. Například $\int_0^1 D(x)dx$ neexistuje, protože horní integrál je roven jedné, kdežto dolní je roven nule. $D(x)$ je v mém pojetí označení *Dirichletovy funkce*, která je definována pro všechna reálná čísla a má hodnotu $D(x) = 1$, x racionální a $D(x) = 0$ pro x iracionální.

My však budeme pracovat většinou s funkcemi spojitými. Pokud se omezíme výhradně na ně, můžeme definici integrálu zjednodušit následujícím způsobem. Vraťme se k rozdělení intervalu $[a, b]$ tak, jak je uvedeno v definici (2.1).

Def. 2.2 *Norma dělení d intervalu $[a, b]$ je dána vztahem $\nu(d) = \max \Delta x_k$.*

Def. 2.3 *Integrálním součtem rozumíme výraz*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

kde ξ_k je libovolné číslo z intervalu Δx_k.

Jinak řečeno místo součtu dolního a horního máme jeden součet integrální. Další důležitý pojem je *limita integrálních součtů.*

Def. 2.4 *Číslo I nazveme limitou integrálních součtů S_n, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost*

$$|S_n - I| < \varepsilon$$

je splněna pro každé dělení d daného intervalu, pro které platí $\nu(d) < \delta$, a to nezávisle na volbě bodů ξ_k. Píšeme

$$I = \lim_{\nu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Zdůrazňuji, že tato limita je reálné číslo závislé na funkci a intervalu, nikoliv však na dělení intervalu či volbě bodů ξ_k. Konečně následuje pointa celého procesu.

Věta 2.1 *Nechť $f(x)$ je spojitá v intervalu $[a, b]$. Pak limita integrálních součtů existuje a platí*

$$I = \lim_{\nu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Této větě se říká základní věta integrálního počtu.

V dnešní době výkonných počítačů lze určitý integrál snadno spočítat například tak, že budeme zjemňovat dělení intervalu tak dlouho až se horní a dolní součet nebudou v rámci požadované přesnosti lišit. Integruje se vesele více než tři sta let a naši pradědové neměli co se týče výpočetní techniky takové možnosti jako my. Jak si tedy počínali? To naznačí následující definice.

Def. 2.5 *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu I a nechť $F(x)$ je libovolná funkce k ní primitivní. Pak je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Takto definovaný určitý integrál se nazývá Newtonův.

Nyní máme integrály dva, matematici v rozmachu tvůrčí činnosti definovali integrály další (Lebesque, Stielts,...). Jestli si myslíte, že tím vnesli do matematiky pěkný nepořádek, tak jste na velkém omylu, neboť platí věta:

Věta 2.2 *Nechť k funkci $f(x)$ existuje více určitých integrálů. pak jsou si rovny.*

Tedy žádný zmatek, naopak výhoda, že výpočet nějakého integrálu můžeme nahradit výpočtem jiného, kdy je postup snazší.

Vraťme se k úvodním příkladům. Práce plynu je počítána podle vzorce

$$\int_1^2 \frac{dV}{V} = [\ln V]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \doteq 0,69$$

V tomto případě jsme se skoro trefili, a to je dělení po 0,2 hodně hrubé.

Podobně je

$$\int x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Archimédes měl pravdu a my jsme se tím to postupem taky moc nezmýlili, vždyť kdybychom vzali průměrnou hodnot, tak bychom měli 0,335.

Nyní si ukážeme výpočet určitého integrálu, jsme-li nuceni při hledání primitivní funkce použít metodu per partes. Postup je jednoduchý:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)dx$$

No a jeden příklad.

Příklad 2.1

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi$$

S metodou substituční je to poněkud složitější, ale zvládneme to.

Věta 2.3 *Nechť je v uzavřeném intervalu I s krajními body a, b integrand tvaru $f[g(x)]g'(x)$, kde funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ jsou spojité funkce v I a zároveň $f(t)$ je spojitá funkce pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in I$. Pak platí*

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Příklad 2.2 *Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx$. Samozřejmě že bychom se mohli po substituci navrátit k původním proměnným, ale byla by to zbytečná oklika. Nejvodnější substitucí se jeví $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Přetransformujeme meze $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Potom je*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx = \int_0^1 t^6 dt = \left[\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

Věta 2.4 *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu I_1 s krajními body a, b, funkce $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ nechť jsou spojité v uzavřeném intervalu I_2 s krajními body α a β, přičemž platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$ a $\varphi(t)$ je v I_2 ryze monotónní. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Následuje jeden příklad.

Příklad 2.3 *Vypočtěte integrál* $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$. *Integrovaná funkce je v intervalu* $[0;2]$ *spojitá. Použijeme substituce* $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$. *Nové meze určíme ze vztahů* $0 = 2\sin\alpha$ *a* $2 = 2\sin\beta$. *Máme mnoho možností, nejjednodušší je* $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. *Funkce* $\varphi(t) 2\sin t$ *a* $\varphi'(t) = 2\cos t$ *jsou v intervalu* $[0; \frac{\pi}{2}]$ *spojité a* $\varphi(t)$ *je zde rostoucí. Máme tedy*

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Využijeme vzorec pro poloviční úhel a máme

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Jestli pak jste si uvědomili, že jsme vypočítali obsah čtvrtkruhu s poloměrem $r = 2$

2.2 Vlastnosti určitého integrálu

Zatímco ve cvičení trénujete výpočet určitého integrálu, my si dáme trochu teorie a uvedeme si některé vlastnosti určitého integrálu.

Věta 2.5 *Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko.*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Určitý integrál je aditivní, jak nám praví následující věta.

Věta 2.6 *Nechť* $f(x)$ *je spojitá v intervalu* I, *obsahujícím libovolně položeneé body* $a < c < b$. *Pak je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Zobecnění této věty si laskavě udělejte jako domácí cvičení.

Také v případě určitého integrálu máme větu o střední hodnotě.

Věta 2.7 *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá v intervalu* $[a;b]$. *Pak existuje aspoň jeden bod* $c \in (a;b)$ *takový, že platí*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Def. 2.6 *Funkční hodnotu* $f(c)$ *danou rovnicí*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

nazveme střední hodnotou funkce $f(x)$ *v intervalu* $[a;b]$.

Abychom si udělali názornou přestavu, vraťme se k rovnici v předchozí větě. Je-li $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $[a;b]$, je výraz na pravé straně roven obsahu křivočarého lichoběžníka ohraničeném úsečkami $|AB| = b-a$, $x=a$, $x=b$ a funkcí $f(x)$ v intervalu $[a;b]$. Tento obsah je stejný jako obsah obdélníka se základnou $|AB| = b-a$ a výšce rovné $f(c)$.

Příklad 2.4 *Určete střední a efektivní hodnotu střídavého proudu, je-li $i(t) = I_0 \sin \omega t = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Jen tak pro zajímavost uvádím, že I_0 je amplituda, $i(t)$ je okamžitá hodnota proudu a $\omega = \frac{2\pi}{T}$, je úhlová frekvence, T je perioda. Střední hodnotu budeme počítat pro poloviční periodu.*

$$i_s = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Efektivní hodnota je pak odmocnina ze střední hodnoty $i^2(t)$. Tož se do toho pusťme.

$$i_{ef} = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2(1-\cos 2\omega t)dt = \frac{I_0^2}{2} \doteq 0,707.$$

Efektivní hodnota střídavého proudu je $i_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707$. Jen pro vysvětlení nefyzikům. Efektivní hodnota střídavého proudu je hodnota intenzity proudu stejnosměrného, který má na témže odporu stejný výkon jako proud střídavý. Za domácí cvičení si totéž proveďte pro napětí. V našich končinách je efektivní napětí 230 V.

Další věty jsou zřejmé.

Věta 2.8 *Je-li $f(x)$ spojitá a nezáporná funkce v intervalu $[a;b]$, platí*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

přičemž rovnost platí pouze v případě, je-li funkce na tomto intervalu rovna nule.

Věta 2.9 *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na intervalu $[a;b]$ a nechť pro všechny body tohoto intervalu platí $f(x) \leq g(x)$. Pak je*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Věta 2.10 *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $[a;b]$ a nechť pro všechny body tohoto intervalu platí $m \leq^3 f(x) \leq M$. Pak platí*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Tato věta se nazývá první věta o střední hodnotě a používí se k odhadu hodnoty určitého integrálu v případě, že se nám nedaří najít primitivní funkci. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 2.5 *Odhadněte hodnotu integrálu*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{10 + x^3 - 0,5\cos^{10} x + \sqrt{7x^4 + 9}} dx$$

Funkci ve jmenovateli si označíme $\varphi(x)$. Tato funkce je rostoucí v intervalu $[0; 1]$, bo všechny sčítance jsou funkce rostoucí. Je $12,5 \leq \varphi(x) < 15$. Ostrá nerovnost je proto, že odečítáme kvůli kosinu malou hdonotu, kterou neznáme. Je tedy $\frac{1}{15} < I \leq \frac{1}{12,5}$. Délka intervalu je jedna, proto jsem ji tam nepsal.

Věta 2.11 *Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a; b]$. Pak platí*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Nu a ještě druhou větu o střední hodnotě.

Věta 2.12 *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité v intervalu $[a; b]$ a nechť $g(x)$ je v tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Pak existuje aspoň jeden bod $c \in [a; b]$ takový, že platí*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx.$$

Obdobnou větu lze formulovat i pro případ, že $g(x)$ je v tomto intervalu nezáporná a neklesající. Jen meze integrálu budou od c do b.

její použití si opět ukážeme na příkladu.

Příklad 2.6 *Odhadněte hodnotu integrálu*

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou v uvažovaném intervalu spojité, funkce $g(x)$ je zde kladná a klesající. je tedy

$$\int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{c} \sin x dx = \frac{1}{100\pi}(1 - \cos c)$$

c je jisté číslo z uvedeného intervalu, musí pro ně platit $0 \leq 1 - \cos c \leq 2$. Je tedy

$$0 \leq \int_{100\pi}^{1000\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{50\pi}.$$

Závěrem tohoto odstavce si uvedeme dvě věty, které nám mohou značně zjednodušit výpočet některých integrálů.

Věta 2.13 *Nechť $f(x)$ je funkce sudá. Pak platí*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Věta 2.14 *Nechť $f(x)$ je funkce lichá. Pak platí*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

2.3 Užití určitého integrálu

V této části si ukážeme užití určitého integrálu v praxi, zejména v matematice a fyzice. Z definice integrálu je patrná první aplikace. Je-li $f(x) \geq 0$ v intervalu $[a;b]$ je $\int_a^b f(x)dx$ roven obshu křivočarého rovnoběžníka ohraničeného osou x, funkcí $f(x)$ a přímkami o rovnicích $x = a$ a $x = b$. Výpočet si ukážeme na příkladech. Je-li obrazec ohraničen křivkami $f(x)$ a $g(x)$, přičemž pro všechna $x \in [a;b]$ je $f(x) \geq g(x)$, spočítáme jeho obsah podle vzorce

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

V tomto případě není nutné, aby funkční hodnoty obou funkcí byly nezáporné, vzpomeňte si na Cavalieriho princip.

Příklad 2.7 *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí* $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ *a* $g(x) = x^2$*. Grafy obou funkcí mají dva společné body* $A[-1;1]$ *a* $B[1;1]$*. Obsah tohoto obrazce je*

$$P = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right) dx = 2\left[2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \pi - \frac{2}{3}.$$

Příklad 2.8 *Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami* $y = 2x - x^2$ *a* $y = -x$*. Grafem první funkce je parabola, která má vrchol* $V[1;1]$ *a je čumákem nahoru. Grafem druhé funkce je osa druhého a čtvrtého kvadrantu. Musíme spočítat* $x-$*ové souřadnice průsečíků těchto dvou křivek, budeme tedy řešit rovnici* $2x - x^2 = -x$*. Tato rovnice má dvě řešení, totiž* $x_1 = 0$ *a* $x_2 = 3$*, což jsou současně meze integrálu.*

$$P = \int_0^3 [2x - x^2 - (-x)]dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Objem tělesa, které vznikne rotací nezáporné funkce $f(x)$ v intervalu $[a;b]$ se spočítá podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Těleso jednoduše rozřežeme kráječem na salám na tenké plátky, které můžeme považovat za válec, jehož objem je $\pi f^2(x_0)dx$. Potom jednotlivé plátky zase složíme dohromady, to je ten integrál.

Jako příklad si odvodíme vzorec pro objem rotačního kužele.

Příklad 2.9 *Odvoďte vzorec pro objem rotačního kužele. Toto těleso vznikne rotací přímky* $y = \frac{r}{v}x$ *kolem osy* x*. Je tedy*

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2}x^2 dx = \left[\pi \frac{r^2}{v^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

A ještě jeden.

Příklad 2.10 *Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami, které vzniknou rotací parabol $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$ a přímek $x = -1$ a $x = 1$ kolem osy x. Obrázky neumím, ale je zřejmé, že v daném intervalu je parabola číslo dva vždy nad parabolou číslo jedna, můžeme použít stejný trik jako při výpočtu obsahu křivočarého lichoběžníka.*

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(x^2+2)^2 - (1-x^2)^2]dx = 2\pi \int_0^1 (6x^2+3)dx = 2\pi \left[2x^3+3x\right]_0^1 = 10\pi.$$

Pro výpočet délky křivky je důležitá následující věta.

Věta 2.15 *Nechť křivka je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Mají-li tyto funkce v tomto intervalu spojité derivace (v krajních bodech zprava či zleva), pak je tato křivka schopna rektifikace.*

Slova rektifikace se nelekejte, matematici tím jen vyjadřují skutečnost, že má konečnou délku. Tuto délku spočítáme na základě následujících vět.

Věta 2.16 *Jsou-li funkce $\varphi'(t)$ a $\psi'(t)$ spojité v intervalu $[\alpha; \beta]$, pak délka l křivky dané parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ je dána vzorcem*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

Jestliže si uvědomíme, že i funkce $y = f(x)$ představuje vlastně parametrické rovnice, kde $x = t$ a $y = f(t)$, lze snadno formulovat následující větu.

Věta 2.17 *Délka oblouku grafu funkce $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ je dána vzorcem*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Příklad 2.11 *Zkusme si nejprve odvodit vzorec pro délku kružnice. Zde nám přijdou vhod její parametrické rovnice, které jsou $x = r\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Derivace jsou $x' = -r\sin t$ a $y' = \cos t$. Obvod (délka) kružnice je tedy*

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}dt = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

A příklad na druhý vzorec.

Příklad 2.12 *Vypočtěte délku grafu funkce $y = \ln\cos x$, $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$.*

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \doteq 1,317.$$

Jednu fyzikální aplikaci jsme si uvedli v motivačním příkladu, podobně řešíme i další problémy, jako příklad mohu uvést výpočet polohy těžiště a statických momentů. Toto je však poměrně složité a jelikož jste většinou nefyzici, tak to ke kolokviu konkrétně vyžadovat nebudu. Závěrem vám odvodím vzorec pro potenciální energii pružiny.

Příklad 2.13 *Je-li deformace pružná, je působící síla přímo úměrná výchylce, platí $F = Kx$, K je tuhost pružiny (Hookeův zákon). Koncový bod pružiny umístíme do počátku a pružinu potáhneme o d vpravo. Vypočítáme-li vynaloženou práci, máme i potenciální energii pružiny.*

$$W = \int_0^d F dx = \int_0^d Kx dx = \left[\frac{Kx^2}{2}\right]_0^d = \frac{1}{2}Kx^2.$$

Jak již bylo řečeno, v mnoha případech se nám nepodaří nalézt primitivní funkci, ačkoliv určitý integrál zcela jistě existuje. Jak bylo ukázáno, umíme aspoň odhadnout jeho hodnotu, ne vždy se s tím však můžeme spokojit. Z definice můžeme integrál spočítat alespoň přibližně, my si ukážeme tři metody.

Metoda obdélníková spočívá v tom, že interval $[a;b]$ rozdělíme na n stejných dílků, jejichž délka je $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,to bude jedna strana obdélníka. Druhou bude funkční hodnota v bodě x_i. Vypočítáme obsah každého z obdélníků a výsledky sečteme. Obdržíme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

Za předpokladu, že funkce má v tomto intervalu spojitou derivaci, umíme odhadnout i chybu R_n.

$$R_n \leq \frac{D_1(b-a)^2}{n}, \qquad D_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Interval opět rozdělíme na n stejných dílků, jenže místo obdélníků sestrojíme lichoběžníky. Potom je

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Má-li funkce $f(x)$ v intervalu $[a;b]$ ohraničenou druhou derivaci $|f''(x)| \leq D_2$, je chyba

$$R_n \leq \frac{(a-b)^3 D_2}{12n^2}$$

Simpsonova metoda spočívá v tom, že interval $[a;b]$ rozdělíme na $2n$ dílků. Obrázek opět neumím vložit, ale v původním rozdělení nahradíme oblouk křivky parabolou. Jelikož parabola je určena třemi body, tak ten třetí získáme rozpůlením původního intervalu. Pak je

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(b)]$$

s chybou

$$R_{2n} \leq \frac{D_4(b-a)^5}{180.(2n)^4} \qquad |f^{(4)}(x)| \leq D_4$$

2.3.1 Nevlastní integrál

Nyní vám zadám zdánlivě nesmyslný problém, a sice spočítat integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Tak dobře, respektuji vaše ťukání si na čelo a změním zadání, spočítáme integrál $\int_1^{10} \frac{1}{x^2}dx$.

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Mírně pozměníme zadání a vypočítáme další integrál.

$$\int_{10}^{100} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{100} = -\frac{1}{100} + \frac{1}{10} = \frac{9}{100} = 0,09.$$

jak již víme, je integrál aditivní, takže je

$$\int_1^{100} \frac{1}{x^2}dx = 0,9 + 0,09 = 0,99.$$

Snadno se přesvědčíme, že $\int_{100}^{1000} \frac{1}{x^2}dx$=0,009, tedy

$$\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}dx = 0,999.$$

Tušíme, že když budeme horní mez zvyšovat nehorázným způsobem, hodnota integrálu se sice bude zvětšovat, ale růst nebude nic moc, za desetinou čárkou budou jen přibývat devítky, ale jedničky se nikdy nedobereme, natož abychom ji překročili.

Zkusme podobnou úvahou rozebrat $\int_1^e \frac{1}{x}dx$. Vzhledem k tomu, že již víme, jaká bude funkce primitivní, bude výhodné brát meze v řadě $1, e, e^2, e^3, \ldots$.

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_e^{e^2} = 2 - 1 = 1$$

Vzhledem k aditivitě integrálu máme

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{e^2} = 1 + 1 = 2$$

Výsledek nás asi překvapí. Nechť kdokoliv řekne jakkoliv velké (přirozené) číslo, tak tímto způsobem po určitém počtu kroků toto číslo překročíme. Přitom grafy funkcí $\frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{x}$ jsou podobné, obě mají za asymptotu osu x, i když pravda ta první se k ní přimyká rychleji. Přesto obsah křivočarého lichoběžníku ohraničeném první funkci je tam v dáli tam za těmi lesy prakticky stejný, zatímco ten ohraničený funkcí druhou překračuje myslitelné hodnoty.

A do třetice vám předvedu jednu záhadu. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ neexistuje, neboť integrovaná funkce není v intervalu $[0; 1]$ spojitá, ba ani ohraničená, abychom se mohli pokusit o integrál dle Riemanna. K integrované funkci však funkce primitivní existuje (až na tu nešťastnou nulu), ale $\arcsin x$ je pro ni definován. Je tedy následující výpočet správný nebo ne?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Nejdříve uvedeme jednu definici.

Def. 2.7 *Každou funkci $F(x)$ spojitou v intervalu I, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ v každém bodě intervalu I nejvýše s výjimkou konečného počtu bodů, nazýváme zobecněnou primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I. V případě uzavření intervalu rozumíme derivaci zprava či zleva v krajních bodech.*

Z definice plyne, že $F(x)$ je v I spojitá, nemusí však mít v konečném počtu bodů derivaci. Funkce $f(x)$ nemusí být v konečném počtu bodů definována. Nyní se můžeme vrátit k prvním dvěma příkladům a definovat nevlastní integrál s nekonečnými mezemi.

Def. 2.8 *Nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ se nazývá konvergentní, jestliže má funkce $f(x)$ v intervalu $[a;\infty)$ zobecněnou primitivní funkci $F(x)$ a existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} F(x) = B$. Hodnota tohoto integrálu je*

$$\int_a^\infty f(x)dx = B - F(a).$$

Je-li limita nevlastní či neexistuje, říkáme, že integrál diverguje.

První dva příkladu z úvodu této části máme vyřešené.

Příklad 2.14

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Integrál skutečně konverguje a jeho hodnota je rovna jedné.

Příklad 2.15

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - 0 = \infty.$$

Tento integrál diverguje, jeho hodnota roste nade všechny meze.

Zbývá nám vyřešit záhadu třetího příkladu z úvodu k této části. K tomu nám poslouží následující věta.

Věta 2.18 *Funkce $f(x)$, která je spojitá v intervalu $[a;b)$ a neohraničená v okolí bodu b, je integrovatelná v intervalu $[a;b]$ tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = B$$

Za zobecněnou primitivní funkci k funkce $f(x)$ lze v tomto případě zvolit funkce

$$\begin{cases} \int_a^x f(t)dt & x \in [a;b) \\ B & x = b \end{cases}$$

Jelikož $F(a) = 0$, je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = B = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$

Pokud by funkce nebyla ohraničená v pravém okolí bodu a, budeme postupovat obdobně, příslušnou větu si laskavě odvoďte sami.

Def. 2.9 *Existuje-li vlastní limita* $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = B$*, říkáme, že nevlastní integrál vlivem funkce konverguje. Pokud limita neexistuje či je nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál vlivem funkce diverguje. Obdobně definujeme nevlastní integrál vlivem funkce je-li* $f(x)$ *neohraničená v bodě* a

Jelikož je $\lim\limits_{t\to 1^-}\arcsin t = \frac{\pi}{2}$, je záhada třetího příkladu vyřešena. Dodáme-li do jeho výpočtu limitu, je vše v pořádku, integrál konverguje k $\frac{\pi}{2}$.

Výpočet limity je často velmi složitý, někdy nám však stačí znát, zda nevlastní integrál konverguje a pak ho se pokusíme vypočítat alespoň přibližně. Vět o konvergenci je více, my si uvedeme jen některé.

Věta 2.19 *Nechť funkce* $f(x)$ *a* $g(x)$ *jsou spojité v intervalu* I *a nechť zde platí* $0 \le f(x) \le g(x)$*. Konverguje-li integrál funkce* $\int_I g(x)dx$*, konverguje i* $\int_I f(x)dx$*. Diverguje-li* $\int_I f(x)dx$*, pak diverguje i* $\int_I g(x)dx$*. Interval* I *zahrnuje všechny výše uvedené případy.*

Příklad 2.16 *Integrál* $\int_0^4 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x}}dx$ *je konvergentní. V intervalu* $[0;4)$ *zřejmě platí*

$$0 \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x}}.$$

Obě funkce jsou v tomto intervalu spojité. Dále je

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx = \left[-2\sqrt{4-x}\right]_0^4 = \lim_{x\to 4}\sqrt{4-4} - 2 = 0 + 2 = 2.$$

Integrál větší funkce konverguje, konverguje tedy i zadaný integrál.

Příklad 2.17 *Integrál* $\int_0^1 \frac{3^x}{x}dx$ *diverguje. V intervalu* $(0;1]$ *zřejmě platí*

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{3^x}{x}$$

a obě funkce jsou zde spojité.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_0^1 = 0 - \lim_{x\to 0}\ln x = +\infty$$

Zadaný integrál musí tedy divergovat také.

Věta 2.20 *Nechť funkce* $f(x)$*,* $g(x)$ *a* $h(x)$ *jsou spojité v intervalu* I *a nechť pro všechna* $x \in I$ *platí*

$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Konvergují-li integrály $\int_I f(x)dx$ *a* $\int_I h(x)dx$*, konverguje i* $\int_I g(x)dx$*. Interval* I *zahrnuje všechny možné případy.*

Závěrem několik slov o integrálu jako funkci horní meze. Zafixujeme-li v integrálu $\int_a^b f(x)dx$ dolní mez a horní mez budeme měnit, dostaneme pro každou hodnotu b jiné číslo. Každé hodnotě b_i je přiřazeno číslo I_i. je tedy definována funkce

$$U(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Základní vlastnost tohot integrálu udává následující věta.

Věta 2.21 *Je-li funkce $f(t)dt$ spojitá v intervalu I, pak derivace určitého integrálu*

$$U(x) = \int_a^x f(t)dt$$

podle proměnné horní meze se v každém bodě $x \in I$ rovná hodnotě integrované funkce v tomto bodě, tedy je $U'(x) = f(x)$. Je-li interval I někde uzavřen, jedná se o derivaci zprava či zleva.

Kapitola 3

Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme věnovat funkcím více proměnných. Kdo se dobře učil v minulém semestru, bude mít úlohu značně usnadněnou, neboť řada věcí je stejných či alespoň hodně podobných. Některé věci jsou však zněně odlišné, tak si na to dávejte pozor čili bacha. Budu se snažit na to upozorňovat. Na druhé straně vám to zjednoduším tím, že se budeme skoro výhradně bavit o funkci dvou proměnných.

3.1 Limita a spojitost

Def. 3.1 *Reálná funkce dvou reálných proměnných je zobrazení $M \to R$, kde $M \subseteq \mathbb{R}x\mathbb{R}$. Jinými slovy každé uspořádané dvojici $[x; y] \in M$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$. Množina M se nazývá definiční obor, množina všech z, které jsou přiřazeny k nějaké uspořádané dvojici $[x; y]$ se nazývá obor hodnot funkce. Píšeme $z = f(x, y)$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit stručně o funkci dvou proměnných.*

Příklad 3.1 *Určete definiční obor funkce $z = \arcsin y + \ln(4 - x^2 - y^2)$. Budeme vycházet ze znalosti funkcí jedné proměnné a vzpomeneme si na definiční obory funkcí arkussinus a přirozený logaritmus. Obě mají jistá omezení, která musí platit současně, je tedy*

$$-1 \leq y \leq 1 \cap 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Zatímco první podmínce vyhoví pás mezi přímkami $y = -1$ a $y = 1$, druhé podmínce vyhoví všechny body uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem $r = 2$, v prvním případě včetně hranice. Definiční obor je samozřejmě průnik obou oblastí, leč obrázek zatím neumím.

Def. 3.2 *Grafem funkce dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde body $[x, y]$ patří do definičního oboru funkce. Jinými slovy je to plocha o rovnici $z = f(x, y)$. Vrstevnice je křivka o rovnici $f(x, y) = c$.*

Takovým nejběžnějším příkladem grafu funkce dvou proměnných je obyčejná plastická mapa. Proměnné představují zeměpisná šířka a délka, funkční hodnotu pak nadmořská výška. Patří sem i ona původně normální mapa, která se nacházela v kanceláři 91. pěšího pluku a kterou učinil plastickou až kocour chovaný písaři. Jen připomínám, že prvním, kdo se o této změně dotykem přesvědčil byl oberst Schröder a že to mělo pro písaře nepříjemné následky. Pojem vrstevnice je převzat z geografie a má stejný význam—zlepšit představu o grafu funkce v dvourozměrném modelu.

Uvedeme několik příkladů.

3.1. Z analytické geomtrie víte, že grafem funkce $z = ax + by + c$ je rovina v $\mathbb{R}_3$.

3.2. Grafem funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem $r = 3$ nad podstavnou rovinou os x a y.

3.3. Grafem funkce $z = x^2 + y^2$ je rotační paraboloid s vrcholem v počátku, jehož osou je osa z. Vrstevnice tvoří soustředné kružnice o rovnicích $x^2 + y^2 = c$.

Nyní přistoupíme k definici pojmů limita a spojitost. Začneme definicí okolí.

Def. 3.3 *Vzdálenost dvou bodů $A[x_1; y_1]$ a $B[x_2; y_2]$ rozumíme číslo*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vzdálenost bodů ve vícerozměrném prostoru si jistě odvodíte sami.

Def. 3.4 *δ-okolím bodu P nazýváme množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu P je menší než δ. Vyjmeme-li z této množiny samotný bod P, mluvíme o ryzím okolí.*

Def. 3.5 *Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro pro všechny body z ryzího δ okolí bodu M platí*

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Píšeme $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = L$.

Definice pojmu limity je po formální stránce stejná, její výpočet je však někdy notně komplikovaný, kolikrát spíše dokazujeme, že daná funkce limitu nemá. Uvidíte záhy. Teď na uklidnění uvedeme větu pro výpočet limity vzhledem k aritmetickým operacím. Tato věta je shodná s tou, kterou znáte pro funkci jedné proměnné.

Věta 3.1 *Nechť* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = A$ *a* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x, y) = B$. *Pak platí:*

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \pm g(x, y)) = A \pm B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = A \cdot B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{(f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \qquad B \neq 0$$

Pro funkce dvou proměnných je definován pojem spojitost analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Def. 3.6 *Řekneme, že funkce je v bodě $M[x_0; y_0]$ je $f(x_0; y_0) = \lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y)$. Řekneme, že funkce je spojitá v oblasti O, jestliže je spojitá v každém bodě této oblasti.*

Poznámka 3.1 *Pojem spojitosti v bodě lze samozřejmě definovat i bez pojmu limita, a to tak, že definici limity opíšeme a číslo L nahradíme $f(x_0; y_0)$.*

Poznámka 3.2 *Jestliže jsme zkoumali spojitost funkce na uzavřeném intervalu, tak jsme v krajních bodech tohoto intervalu definovali spojitost zleva (zprava). U funkce dvou proměnných toto postrádá smysl, přesto můžeme uvažovat i o pojmu spojitost na uzavřené oblasti. Pro hraniční body budeme prostě ignorovat ty body z jeho okolí, které nespadají do dané oblasti.*

Nyní si ukážeme několik příkladů na výpočet limity. Zatímco u funkce jedné proměnné je situace podobná ražbě tunelu z obou stran, kdy se buď trefíme přesně nebo máme dva tunely, zde musíme vyzkoušet všechny možné cesty, a že jich je.

Příklad 3.2 *Určete limitu $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y}$. Tato funkce v bodě $[0; 0]$ není definována, pokusíme se tedy spočítat limity pro různé cesty. Začněmě přímkami $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k}$$

Limity pro různé směry jsou různé, limita neexistuje. Tato situace paradoxně nenastane, pokud bychom se přibližovali po parabolách $y = kx^2$.

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+kx}{1-kx} = 1$$

Příklad 3.3 *Zjistěte, zda existuje $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. Zkusme se nejdřív přibližovat po přímkách $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{kx^2+2x-kx} = 0,$$

ovšem s výjimkou $k = 2$, to je

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x+2-2} = 2$$

Tato limita tedy neexistuje.

K bodu $P_0[x_0; y_0]$ se z bodu $P[x; y]$ můžeme rovněž přibližovat po dvou kolmých přímkách $x = p$ a $y = q$, kde p a q jsou konstanty, a to dvojím způsobem. Pak lze limitu funkce vypočítat postupným limitním přechodem funkce jedné proměnné, jak uvádí následující věta.

Věta 3.2 *Označme*

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1 \qquad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Uvědomte si, že tato věta je implikací a představuje pouze podmínku nutnou, což značí, že bude sloužit k důkazu neexistence limity.

Příklad 3.4 *Rozhodněte, zda existuje limita*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x-2y}{3x+y}$$

Určíme postupné limity.

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y} = -2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3y} = \frac{1}{3}.$$

Tato limita neexistuje.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí následující věta.

Věta 3.3 *Nechť pro všechny body $x \in O$ s výjimkou bodu $M[x_0;y_0]$ platí $f(x,y) = g(x,y)$ a nechť je $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L$. Pak je i $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x,y) = L$.*

Příklad 3.5

$$\lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

Tato funkce je v okolí bodu $[1;-1]$ shodná s funkcí

$$z = \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

Její limita je v tomto bodě rovna funkční hodnotě, tedy je

$$\lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2} = \frac{3}{8}$$

Při výpočtu limity můžeme použít i některé triky známé z funkce jedné proměnné, jeden příklad následuje.

Příklad 3.6

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Vynásobíme-li funkci jedničkou ve tvaru

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}$$

a upravíme-li, počítáme limitu

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12$$

Závěrem této části vám uvedu tři limity, které vám určitě něco připomenou.

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\operatorname{tg} f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \left(1+\frac{1}{f(x,y)}\right)^{f(x,y)} = e$$

3.2 Parciální derivace

Už problémy s limitou nám naznačují, že to s derivacemi vůbec nebude snadné. Pokud bychom chtěli udělat nějakou analogii s funkcí jedné proměnné, bylo by to značně obtížné. Proto půjdeme jinou cestou. Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Pokud však plochu řízneme nějakou rovinou, tak řezem je křivka, křivku umíme popsat funkcí jedné proměnné—čajník je v kredenci. My budeme řezat rovinami kolmými k osám x a y.

Def. 3.7 *Nechť existuje limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle x v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ či $f'_x(x_0,y_0)$. Analogicky definujeme parciální derivaci podle y. Nechť existuje limita

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle y v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ či $f'_y(x_0,y_0)$. Má-li funkce parciální derivaci podle nějaké proměnné v každém bodě nějaké oblasti M, potom říkáme, že zde má parciální derivaci. Jinými slovy vznikne na této oblasti nová funkce, to je stejné jako u funkce jedné proměnné.

Protože jsme parciální derivace definovali jako derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně všechna pravidla tak jak je znáte z kurzu MA1, nebudu je tedy uvádět. Stejně tak nebudu řešit derivace vyšších řádů, tam ovšem jeden problém přece jen vyvstane. Záleží na pořádí proměnných podle kterých derivujeme nebo nezáleží, to je oč tu běží. Odpověď nám dává Schwarzova věta.

Věta 3.4 *Nechť jsou derivace $f''_{xy}(x,y)$ a $f''_{yx}(x,y)$ jsou v bodě $M[x_0;y_0]$ spojité. Pak jsou si rovny.*

Obdobnou větu bychom mohli zformulovat i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů. Jak vidíme, u spojitých funkcí je to s parciálními derivacemi jako s mušketýry, je jich o jednu víc než je jejich řád. Stejně jako tři mušketýři byli čtyři, tak i třetí parciální derivace jsou čtyři: f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyy} a f'''_{yyy}. Tak je tomu u parciálních derivací jakéhokoliv řádu.

Příklad 3.7 *Je-li $z = u(x) + v(y)$, je $z'_x = u'(x)$, $z'_y = v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)$, $z''_{yy} = v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$. Tak je-li $z = 3x^2 - 5y^3 + 1$, máme $z'_x = 6x$ a $z'_y = -15y^2$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 6$, $z''_{yy} = -30y$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.*

Příklad 3.8 *Je-li $z = u(x)v(y)$, je $z'_x = u'(x)v(y)$, $z'_y = u(x)v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)v(x)$, $z''_{yy} = u(x)v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = u'(x)v'(y)$. Tak je-li $z = 5x^2y^4$, máme $z'_x = 10xy^4$ a $z'_y = 20x^2y^3$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 10y^4$, $z''_{yy} = 60x^2y^2$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 40xy^3$.*

Příklad 3.9 *Je-li $z = \frac{u(x)}{v(y)}$, je $z'_x = \frac{u'(x)}{v(y)}$, $z'_y = -\frac{u(x)v'(y)}{v^2(y)}$, $z''_{xx} = \frac{u''(x)}{v(y)}$, $z''_{yx} = z''_{yx} = -\frac{u'(x)v'(y)}{v^2(y)}$ a $z''_{yy} = -u(x)\frac{v''(y)v(y)-2(v'(y))^2}{v^3(x)}$. Konkrétní příklad dáme tento: $z = \frac{x}{y^2}$. Potom je $z'_x = \frac{1}{y^2}$, $z'_y = \frac{-2x}{y^3}$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}$ a $z'' = \frac{-2}{y^3}$.*

Pkud nejsou proměnné separovány, postupujeme standardně.

Příklad 3.10 *Určete první a druhé derivace funkce $z = \sin(x^2+y^2)$. Máme $z'_x = 2x\cos(x^2+y^2)$, $z'_y = 2y\cos(x^2+y^2)$. Derivujeme jako součin a máme $z''_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)$ a $z''_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)$. Při smíšené vyjdeme z y'_x a derivujeme podle y, x je konstanta. Obdržíme $z''_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2$*

3.3 Totální diferenciál

Podobně jako u funkce jedné proměnné zavedeme pojem diferenciál. Samozřejmě, že můžeme pro parciální derivace definovat parciální diferenciály naprosto stejným způsobem jako u funkce jedné proměnné. Jenže probíráme funkci dvou proměnných, takže není dobré, aby si jednotlivé proměnné hrály na svém písečku. Chápu, že slovo totální nemá dnes nejlepší pověst, leč matematika je na politické situaci nezávislá. Kdo by s tím měl problém, nechť si místo slova totální myslí ekvivalentní výrazy (úplný, celkový).

Def. 3.8 *Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná (má zde totální diferenciál), je-li*

$$\Delta z = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varrho\tau(h,k),$$

kde A, B jsou konstanty, $\varrho = \sqrt{h^2+k^2}$ a $\lim\limits_{[h;k]\to[0;0]} \tau(h,k) = 0$.

Na otázku kdy to nastane nám dá odpověď následující věta.

Věta 3.5 *Je-li $f(x_0,y_0)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0).$$

Poznámka 3.3 *Dále budeme používat běžné označení $h = dx$, $k = dy$.*

Def. 3.9 *Je-li funkce $f(x,y)$ v boděM$[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak výraz*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)dy$$

nazýváme totální diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$

Věta 3.6 *Nechť $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak je zde spojitá.*

Věta 3.7 *Jsou-li první parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ spojité, pak je zde diferencovatelná.*

Hlavní význam diferenciálu funkce jedné proměnné spočíval v tom, že jsme mohli (skutečný) přírůstek funkce v bodě nahradit s jistou chybou diferenciálem, čili graf funkce nahradit v okolí tohoto bodu tečnou. Obdobně lze postupovat i u funkce dvou proměnných, jen tečnu nahradíme tečnou rovinnou. Jak stanovit její rovnici nám ukáže další věta.

Věta 3.8 *Je-li $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má plocha $z = f(x,y)$ v bodě $M_p[x_0;y_0;z_0]$ tečnou rovinu, jejíž rovnice má tvar*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)(y-y_0)$$

Menší zádrhel spočívá v tom, že tak jako neumíme (neurčitě) integrovat libovolnou funkci, ne každý výraz tvaru $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je diferenciálem nějaké funkce. Kdy tomu tak je nám odpoví následující věta.

Věta 3.9 *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité v oblasti O a stejně tak jsou zde spojité i jejich parciální derivace. Pak výraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je totálním diferenciálem jisté funkce $f(x,y)$ právě tehdy, když platí*

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y).$$

Užití diferenciálu si ukážeme na příkladu.

Příklad 3.11 *Válec má poloměr 2 dm a výšku 10 dm. Jak se změní jeho objem, jestliže se při deformaci poloměr zvětší na 2,05 dm a výška naopak zmenší na 9,8 dm? Objem válce je $V = \pi r^2 v$, což lze chápat jako funkce dvou proměnných r a v. Totální diferenciál má tvar*

$$dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv$$

Zde je $dr = +0,05$ a $dv = -0,2$. Po dosazení do diferenciálu máme $dV = 1,2\pi \doteq 3,77\mathrm{dm}^3$.

Příklad 3.12 *Ověřte, zda výraz $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$ je totálním diferenciálem této funkce. V případě že ano, nalezněte tuto funkci. Ověření nebude těžké, neboť $P'_y = -2xy = Q'_x$. Na nalezení funkce, jejíž totální diferenciál jsme právě objevili, vám poradím jednu inženýrskou fintu. Zintegrujeme obě části dle patřičné proměnné, přičemž tu druhou budeme považovat za konstantu.*

$$\int (2x^3 - xy^2)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$\int (2y^3 - x^2y)dy = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

Do hledané funkce $z = f(x, y)$ vezmeme první integrál celý, z druhého pak vezmeme pouze ty sčítance, které se v prvním nevyskytují. Je tedy

$$z = \frac{1}{2}(x^4 - x^2y^2 + y^4) + c$$

Totální diferenciál je velmi důležitý pojem ve fyzice. Je-li výraz $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ totální diferenciál, pak ho lze integrovat, přičemž hodnota tohoto integrálu nezávisí na integrační cestě z bodu A do bodu B, nýbrž pouze na hodnotách funkce $z = f(x, y)$ v těchto bodech (je to jakoby klasický Newtonův integrál). Funkce z pak reprezentuje veličinu stavovou.

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat totální diferenciál řádu n.

Def. 3.10 *Totální diferenciál řádu n funkce dvou proměnných je výraz*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)$$

Jak postupovat si ukážeme na příkladě.

Příklad 3.13 *Určete totální diferenciály druhého a třetího řádu funkce $z = y \ln x$. Nejdříve si určíme všechny parciální derivace až do řádu 3. $z'_x = \frac{y}{x}$, $z'_y = \ln x$, $z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$, $z''_{xy} = \frac{1}{x}$, $z''_{yy} = 0$, $z'''_{xxx} = \frac{2y}{x^3}$, $z'''_{xxy} = -\frac{1}{x^2}$, $z'''_{xyy} = z'''_{yyy} = 0$. Totální diferenciál druhého řádu je*

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2 = -\frac{y}{x^2}(dx)^2 + \frac{2}{x}dxdy(dy)^2$$

Totální diferenciál třetího řádu je pak

$$d^3z = z'''xxx(dx)^3 + 3z'''_{xxy}(dx)^2dy + 3z'''_{xyy}dx(dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3 = \frac{2y}{x^3}(dx)^3 - \frac{3}{x^2}(dx)^2dy$$

3.3.1 Extrémy funkce dvou proměnných

Def. 3.11 *Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ lokální maximum (minimum), existuje-li okolí O bodu M takové, že pro všechna $x \in O$ platí $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).*

Postup při stanovení extrémů je obdobný jako u funkce jedné proměnné.

Věta 3.10 *Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ lokální extrém a nechť existují v bodě M parciální derivace prvního řádu. Pak je $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Poznámka 3.4 *Tak jako u funkce jedné proměnné budeme bod M nazývat bodem stacionárním.*

Stacionární (podezřelé z extrému) body budeme vyšetřovat pomocí následující věty.

Věta 3.11 *Nechť M je stacionární bod a nechť v jeho okolí existují spojité parciální derivace prvního a druhého řádu. Vypočtěme výraz*

$$D = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Je-li $D > 0$, pak pro $f''_{xx} > 0$ je v bodě M lokální minimum a pro $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ je v bodě M lokální minimum. Je-li $D < 0$, pak v bodě M extrém není, je-li $D = 0$, nemůžeme o extrému rozhodnout (extrém tady být může, ale nemusí).

Poznámka 3.5 *Označení D jsme nezvolili náhodou, D je de facto determinant druhého řádu, přičemž v hlavní diagonále jsou derivace podle xx a yy a ve vedlejší diagonále jsou derivace smíšené (ty jsou si samozřejmě rovny).*

Nyní ukážeme několik příkladů.

Příklad 3.14 *Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$. Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu.*

$$f'_x = 3x^2 + y^2 + 12x, \qquad f'_y = 2xy + 2y$$

. Položíme-li tyto derivace rovny nule, získáme čtyři stacionární body $S_1[-1; 3]$, $S_2[-1; -3]$, $S_3[0; 0]$ a $S_4[-4; 0]$. Spočteme tedy parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx} = 6x + 12, \qquad f''_{xy} = 2y, \qquad f''_{yy} = 2x + 2.$$

Budeme postupně dosazovat jednotlivé stacionární body a počítat číslo D. V prvních dvou případech je $D(S_1) = -36$, $D(S_2) = -36$, extrém nenastává. $D(S_3) = 24$ a protože je $f''_{xx}(0, 0) = 12$, je v počátku minimum. Naproti tomu je $D(S_4) = 24$, ale tentokrát je $f''_{xx}(-4, 0) = -12$, v bodě S_4 je tedy maximum.

Příklad 3.15 *Určete lokální extrémy funkce* $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$. *Začneme prvními parciálními derivacemi.*

$$z'_x = 2x + 4y - 2 \qquad z'_y = 4x + 12y + 8$$

Opět položíme obě derivace rovny nule, po vyřešení soustavy dvou lineárních rovnic získáme jediný stacionární bod $S[7; -3]$. *Druhé parciální derivace jsou* $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 4$ *a* $z''_{yy} = 12$. *Všechny jsou konstantní, není kam dosazovat a determinant má univerzální hodnotu* $D = 8 > 0$. *Jelikož je* $z''_{xx} = 2 > 0$, *je v bodě* S *lokální minimum. Jen pro zajímavost, jeho hodnota je* $z(7, -3) = -24$.

Příklad 3.16 *Určete lokální extrémy funkce* $z = -3x^4 - 5y^4$. *Spočteme první derivace* $z'_x = -12x^3$, $z'_y = -20y^3$. *Jediným stacionárním bodem je počátek. Jdeme na druhé derivace.* $z''_{xx} = -36x^2$, $z''_{yy} = -60y^2$, $z''_{xy} = 0$. *Zřejmě je* $D = 0$, *o extrému nemůžeme tímto způsobem rozhodnout. My si ale všimneme, že funkční hodnoty jsou mimo počátek záporné, je zřejmé, že v počátku bude maximum.*

Tak jako u funkce jedné proměnné můžeme určovat i extrémy absolutní, a to v případě, že je funkce definovaná na uzavřené oblasti. Ty pak mohou nastat buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici oblasti. Ukážeme si to na příkladu, nejdříve trochu teorie.

Def. 3.12 *Řekneme, že funkce* $f(x, y)$ *má v bodě* $[x_0; y_0]$ *absolutní maximum (minimum), jestliže pro všechny body* $[x; y] \in M$ *platí* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Def. 3.13 *Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnitřním bodem množiny* M, *existuje-li okolí* O *tohoto bodu takové, že* $O \subset M$. *Množina, která obsahuje pouze vnitřní body, se nazývá otevřená. Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnějším bodem množiny* M, *jestliže každé jeho obsahuje jak body množiny* M, *tak i body, které do ní nepatří. Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí. Množina, která obsahuje všechny své hraniční body, se nazývá uzavřená.*

Def. 3.14 *Množina* M *se nazývá omezená, existuje-li kruh* K *se středem v počátku tak, že* $M \subseteq K$.

Věta 3.12 *Nechť* $f(x, y)$ *je spojitá funkce definovaná na omezené uzavřené množině. Pak zde nabývá své nejmenší a největší hodnoty.*

Příklad 3.17 *Stanovte absolutní extrémy funkce* $z = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$. *Po doplnění na čtverec zjistíme, že definičním oborem jsou vnitřní a hraniční body elipsý* $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$. *Stacionární body určíme řešením soustavy rovnic*

$$z'_x = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0 \qquad z'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0$$

Existuje jediný stacionární bod $S[1; 0]$. *Je* $f(1, 0) = 1$. *Stanovení extrémů na hranici je obecně velmi obtížné, vezmeme-li rozum do hrsti, tak vidím,e že funkce je na hranici rovna nule a jinak je kladná. Absolutní maximum je tedy ve středu elipsy a minimun na její hranici.*

3.4 Přehled látky

3.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

3.2. Základní integrační metody

3.3. Integrace per partes

3.4. Substituční metoda

3.5. Integrace racionální lomené funkce

3.6. Určitý integrál (newtonův, Riemannův)

3.7. Vlastnosti určitého integrálu

3.8. Numerické metody výpočtu určitého integrálu

3.9. Užití určitého integrálu

3.10. Nevlastní integrál

3.11. Funkce dvou proměnných, definice, graf

3.12. Limita a spojitost funkce dvou proměnných

3.13. Parciální derivace

3.14. Totální diferenciál

3.15. Extrémy funkce dvou proměnných