Řešené příklady - geometrie

Př 1: Určete souřadnice bodu $M = [-2, 0, 0, 2]$ v soustavě souřadnic S dané repérem $\langle P;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\rangle$, kde $P = [-2, 0, 0, 2]$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{e}_2 = (3, 1, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (-2, 0, 0, 1)$, $\vec{e}_4 = (-1, 1 - 2, 1)$.

Řešení: Hledáme souřadnice (m_1, m_2, m_3, m_4) vektoru $\overrightarrow{PM}$

$$M - P = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3 + m_4\vec{e}_4$$

Po rozepsání do souřadnic poté dostáváme čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Řešením této soustavy pak dostáváme $m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = 1, m_4 = -1$. Tedy souřadnice bodu M jsou

$$M' = [1, -1, 1, -1].$$

Př 2 (samostatně): V afinní rovině A_2 je dán repér $R = \langle P, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$. Pro bod A platí $A = P - \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$. Určete jeho souřadnice vzhledem k R.

Řešení: Souřadnice bodu A vzhledem k repéru R jsou $A = [-1; 2]$.

Př 3: V afinní rovině A_2 jsou dány body $P = [-1,3], P' = [2,-3]$ a vektory $\vec{u} = (1,4), \vec{v} = (5,2), \overrightarrow{v'} = (-3,6)$, $\overrightarrow{u'} = (6,6)$. Určete transformační rovnice přechodu od soustavy souřadnic $S = \langle P;\ \vec{u}, \vec{v}\rangle$ k soustavě souřadnic $S' = \langle P';\ \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\rangle$. Rozhodněte, zdali jsou obě soustavy souhlasně nebo nesouhlasně orientované.

Řešení: Stejným postupem, jako v příkladu 1 určíme souřadnice bodu P' a vektorů $\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}$ v soustavě souřadnic dané repérem $\langle P;\ \vec{u}, \vec{v}\rangle$. Obdržíme

$$P' = [-2, 1], \vec{u}' = (1, 1), \vec{v}' = (2, -1)$$

Transformační vztahy tedy nabývají tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orientaci souřadnic nám určuje znaménko determinantu matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Jedná se o nesouhlasně orientované soustavy souřadnic.

Př 4: Ve afinním prostoru A_3 jsou dány afinní repéry $R = \langle P;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$ a $R' = \langle P';\ \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\rangle$. Transformační rovnice pro souřadnice bodů při přechodu z R do R' jsou

$$x = 3x' - 4y' + 5z' + 2$$

$$y = 2x' - 3y' + z'$$

$$z = 3x' - 5y' - z' - 1$$

Napište transformační rovnice pro souřadnice bodů a transformační rovnice pro souřadnice vektorů při přechodu od repéru R' do R.

Řešení: Matice přechodu má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Pro přechod od repéru R' do R nyní potřebujeme matici inverzní

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, odtud dostáváme $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Výsledné transformační rovnice jsou pro souřadnice bodů a souřadnice vektorů

$x' = -8x + 29y - 11z + 5$ $\qquad$ $u_1' = -8u_1 + 29u_2 - 11u_3$

$y' = -5x + 18y - 7z + 3$ $\qquad$ $u_2' = -5u_1 + 18u_2 - 7u_3$

$z' = x - 3y + z - 1$ $\qquad$ $u_3' = u_1 - 2u_2 + u_3$

Př 5: Určete parametrické vyjádření podprostoru B, která je dán rovnicemi

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 - x_5 = 4$$

Řešení:

Řešíme soustavu dvou rovnic a pěti neznámých. Na tuto soustavu použijeme Gaussovu eliminační metodu a dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Podprostor B můžeme vyjádřit parametricky tak, že si postupně volíme parametry například na 2., 4. a 5. místě. Parametry volíme tím způsobem, aby nám vyšlo „hezké" řešení. Tedy pro 2., 4. a 5. místo $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$.

$$B = [2,0,1,0,0] + L\langle(1,0,5,0,2), (-1,0,-1,2,0), (-2,1,0,0,0)\rangle$$

Př 6: Určete parametrické rovnice podprostoru Mzadaného rovnicemi

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do maticového tvaru, a upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Po úpravě matice zvolíme vhodné členy za parametry. V našem případě x_3 a x_4 a neznámé x_1 a x_2 pomocí nich vyjádříme. Označíme $x_3 = s$ a $x_4 = t$, potom $x_2 = 6 - t$ a $x_1 = 3$. Parametrická rovnice našeho podprostoru má tvar

$$M = [3,6,0,0] + L\langle(0,-1,1,0), (0,1,0,1)\rangle$$

Př 7: Nalezněte obecné rovnice afinního podprostoru M vektorového prostoru $\mathbf{R^4}$, kde

$$M = [1,0,2,2] + t_1(1,-1,0,0) + t_2(1,2,0,-1).$$

Řešení: Parametrické rovnice $x = P + \propto t$ přepíšeme do tvaru $Ex = \propto t + P$, kde $P = [1, 0, 2, 2]$ je bod a $\propto = \langle(1,-1,0,0), (1,2,0,\_1)\rangle$ vektory, které tvoří afinní podprostor M. Soustavu rovnic $Ex = \propto t + P$ přepíšeme do tvaru $(E|\propto|P)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Matici upravujeme tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Obecné rovnice podprostor M určují koeficienty levého a pravého bloku, a to v řádcích, ve kterých jsou v prostředním bloku samé nuly. Tedy

$$x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 = 7$$

Dosazením se přesvědčíme, že bod P této soustavě skutečně vyhovuje.

Př 8: Určete vzájemnou polohu přímek

a) $p: 2x - 3y + 4 = 0, q: 3x + 2y - 7 = 0$

Řešení: Vzájemnou polohu přímek v rovině určíme pomocí jejich průniku. To znamená určit body, splňující obě rovnice přímek.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

Řešením je $x = 1, y = 2$.

Průnikem je tedy jeden bod, jedná se tedy o různoběžky.

b) $p: (x, y) = [1, -1] + t(1, -2), q: 2x + y - 1 = 0$

Řešení: Dosadíme do rovnice přímky q za x, y z parametrického popisu p. Dostáváme

$2(1 + t) + (-1 - 2t) - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$

Rovnice je tedy splněna pro všechna $t \in \mathbf{R}$**,** jde tedy o shodné přímky.

Př 9: Určete vzájemnou polohu rovin

a) $\propto: (x, y, z) = [1, -2, 3] + t(-1, 0, 1) + s(2, 1, 0)$

$\beta: (x, y, z) = [-1, 0, 1] + t'(1, 1, 2) + s'(-1, 3, 1)$

Řešení: Řešíme soustavu rovnic

$$[1, -2, 3] + t(-1, 0, 1) + s(2, 1, 0) = [-1, 0, 1] + t'(1, 1, 2) + s'(-1, 3, 1)$$

pro neznáme t, s, t', s'. Soustavu přepíšeme do rozšířené matice a převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -8 \end{array}\right)$$

Vidíme, že průnikem je jednorozměrný vektorový prostor, tedy přímka. Roviny jsou tedy různoběžné.

b) $\propto: 2x - y + z - 9 = 0, \beta: x + y - z = 0$

Průnik tentokrát řešíme jako soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Prostor řešení této rovnice má dimenzi 1, tedy je průnikem přímka, rodinou jsou různoběžné.

Př 10: V prostoru **R**[4] určete vzájemnou polohu podprostorů

$$\rho\colon x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$p\colon [3, -1, 0,0] + t(-3,2,1,1).$$

Řešení:Hledáme společný bod obou podprostorů. Vezměme si bod $Q \in p, Q = [3 - 3t, -1 + 2t, t, t], t \in \mathbf{R}$. Zajímá nás, zda-li bod Q náleží i rovině ρ,to znamená, že jeho souřadnice musí splňovat rovnice roviny ρ. A tedy:

$$3 - 3t + 2(-1 + 2t) + (-t) = 1$$

$$3 - 3t + t + 2t = 3$$

Pomocí ekvivalentních úprav pak dostáváme

$0 \cdot t = t$, pro každé $t \in \mathbf{R}$. Tedy každý bod přímky p je zároveň bodem roviny ρ. Přímka leží v rovině.

Př 11: Určete, zda jsou podprostory $\mathrm{B} = B + W, \mathrm{B}' = B' + W'$ rovnoběžné

$$B = [1,2,3] + L\langle(1, 0, 4)\rangle, B' = [3,0,1] + L\langle(1, 4, 3), (2, 4, 2)\rangle$$

Řešení: Zřejmě $\dim(W) = 1$. Nyní určíme $\dim(W')$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \dim(W') = 2$$

Pro vzájemnou polohu podprostorů nyní musíme určit $\dim(W \cap W')$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dim(W \cap W') = 2$$

Tedy $W \subseteq W'$ a podprostory jsou rovnoběžné.

Př 12: V názorném afinním prostoru jsou dány podprostory $\mathrm{B} = B + W, C = \langle K, L, M\rangle$.

Kde $K = [3,4,2], L = [3,4,-1], M = [3,4,5]$, $B = [2,2,1]$ a $W = \{(x_1, x_2, x_3),\ \ x_3 = 0\}$.

a) Zjistěte, zda jsou body K, L, M , v obecné poloze.
b) Určete vzájemnou polohu podprostorů B, C, případně jejich průnik.
c) Určete součet podprostorů $B + C$.

Řešení:

a) Zřejmě $\dim(C) = \dim\ L(\ \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM}\ ) = 1$, neboť $\overrightarrow{KL} = (0,0,-3)$, $\overrightarrow{KM} = (0,03)$.

Body K, L, M leží na přímce, nejsou v obecné poloze.

b) $Z(B) = L\left(\overrightarrow{KL}\right) = L\ ((0,0,1))$ je zaměření podprostoru *B*, $Z(C) = L\langle(1, 0, 0), (0,1,0)\rangle$ je zaměření podprostoru *C.* Dimenze součtu zaměření je tedy 3 a vektor $\overrightarrow{KB}$ je tedy lineární kombinací vektorů ze $Z(B) + Z(C)$.

Podprostory se protínají a snadno lze nahlédnout (případně dopočítat), že jejich průnikem je bod $P = [3,4,1]$. **(Nakreslete si celou situaci na obrázku – v souřadném systému s osami $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$, je podprostor B zřejmě rovina rovnoběžná s osami $\boldsymbol{x_1, x_2}$ procházející bodem $\boldsymbol{B = [2, 2, 1]}$, resp. $\boldsymbol{[0, 0, 1]}$ na ose $\boldsymbol{x_3}$, a podprostor C je zřejmě přímka kolmá k této rovině (rovnoběžná s osou $\boldsymbol{x_3}$) procházející uvedenými body $\boldsymbol{K, L, M}$, P... .)**

c) Součet podprostorů, v případě, že se protínají je $B + C\ = B\ +\ Z(B + C)$ tj. lze vyjádřit např. takto:

$$B + C = [2,2,1] +\ L\langle(1, 0, 0), (0,1,0), (0,0,1)\rangle$$

Př 13: V prostoru $\mathbf{R}^3$ najděte příčku mimoběžek p: $[1,2-1]+s(1,-1,1), q$: $[0,9,-2]+t(1,0,0)$ rovnoběžnou s vektorem (1,2,0).

Řešení: Protože vektory (1,-1,1), (1,0,0), (1,2,0) jsou lineárně nezávislé, taková přímka existuje. Stačí nalézt průsečík přímky q s rovinou ρ: $[1,2,-1]+\ s(1,-1,1)+\ r(1,2,0)$.

Abychom nalezli průsečík, musíme řešit rovnici

$$[0,9,-2]+t(1,0,0)=[1,2-1]+s(1,-1,1)+r(1,2,0)$$

přičemž nám stačí znát hodnotu parametru t. Rozepsáním do složek dostaneme nehomogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$t-s-r=1$$

$$s-2r=-7$$

$$-s=1$$

Odtud již získáváme parametr $t=3$ $(s=-1, r=3)$ a bod $[3,9,-2]$ je průsečíkem přímky q s rovinou ρ. Parametrická rovnice hledané příčka je pak

$$[3,9,-2]+r(1,2,0).$$

Př 14: Nalezněte příčku o mimoběžek p, qprocházející bodem M. Je dáno

$$M=[7,0,4], p(x,y,z)=[2,-1,1]+t(1,2,1), q(x,y,z)=[1,1,1]+k(2,-1,1).$$

Řešení: Nejprve určíme roviny $\propto=\langle M,p\rangle$ a $\beta=\langle M,q\rangle$

$$\propto: (x,y,z)=[2,-1,1]+t(1,2,1)+s(5,1,3)$$

$$\beta: (x,y,z)=[1,1,1]+t'(2,-1,1)+s'(6,-1,3)$$

Příčka mimoběžek je dána průnikem rovin $\propto\cap\beta$. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$[2,-1,1]+t(1,2,1)+s(5,1,3)=[1,1,1]+t'(2,-1,1)+s'(6,-1,3)$$

pro neznáme t, s, t', s'. Rozšířená matice této soustavy je ve tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením je $[0,1,0,1]+\langle(-2,2,1,1)\rangle$. Po dosazení t', s' dostáváme

$$o=[(1,1,1)+0(2,-1,1)+1(6,-1,3)]+\langle 1(2,-1,1)+1(6,-1,3)\rangle$$

Tedy parametrická rovnice příčky mimoběžek p, q je

$$o: [7,0,4]+t(8,-2,4)$$