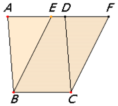
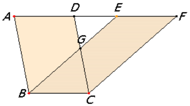
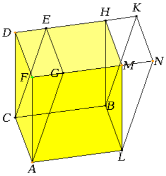
Opakování

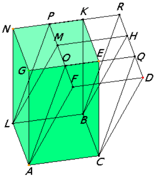
- Rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





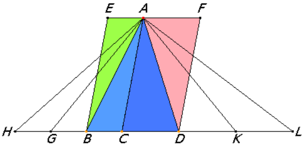
- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.



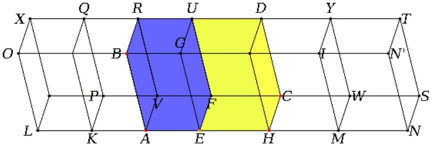


Opakování

- Poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.

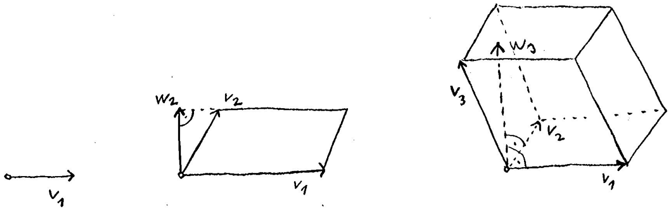


Opakování

Odtud:

- $S = a \cdot v$,
  kde S = obsah rovnoběžníku, a = velikost strany, v = velikost odp. výšky,
- $V = S \cdot w$,
  kde V = objem rovnoběžnostěnu, S = obsah stěny, w = velikost odp. výšky.

Obecně pomocí vektorů



Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd...

Počítání

- Pro $k = 2$ např.:

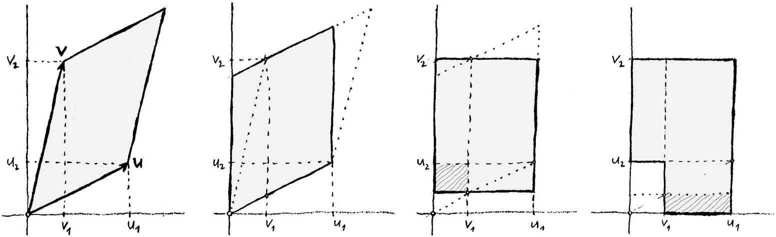
$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha,$$

  kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme)

- Pro obecné k např.:
  – podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu,
  – podle vlastností, tj. pomocí **determinantu**, vektorového součinu, apod. ...
  (naučíme)

Úvod (naivně)

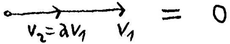
Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...



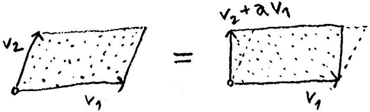
... je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

Úvod (koncepčně)

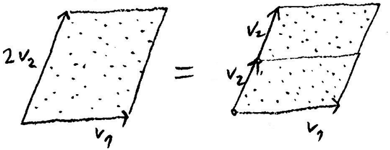
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:



$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) =$$
$$= V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Determinant

Determinant chápeme

buď $\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}$ nebo $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, kde $V = \mathbb{R}^n$.

Definice ....[1]

Vlastnosti základní:

- **anti-symetrické**

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots)$$

- **multi-lineární**

$$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$$

Vlastnosti odvozené:

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé}$$

[1] viz algebra (DÚ)

Vnější součin

$\det : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ závisí na souřadnicovém vyjádření vektorů, tj. na zvolené bázi. . . [2]

Pro ortonormální báze je výsledek tentýž:

Vnějším součinem ***n***-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ v ***n***-rozměrném eukleidovském prostoru je determinant matice tvořené souřadnicemi těchto vektorů vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Z předchozího plyne, že

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

[2] viz matice přechodu a Cauchyova věta (o součinu determinantů)

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

přičemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase determinant, ...

Kouzlo (obecně)

…tzv. *Gramův determinant*, ozn.

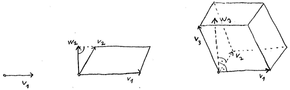
$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \mathbin{\cdot} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \mathbin{\cdot} \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \mathbin{\cdot} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \mathbin{\cdot} \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Kouzlo (důkaz)



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^2.$$

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$:

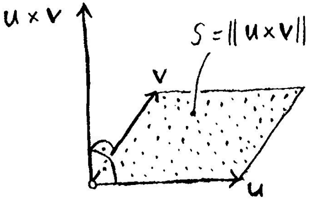
$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3). \quad \square$$

Vektorový součin ($n = 3$)

Ze SŠ známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi...



Sice nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3 .$$

Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{x},$$ [3]

Obecná definice:

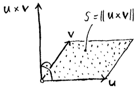
Vektorovým součinem $(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

[3] nalevo vnější součin, napravo tzv. smíšený součin

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

- *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.
- $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*
- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*
- $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.
- $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Důkaz.

Všechno plyne z definující rovnosti a vlastností determinantu… $\square$

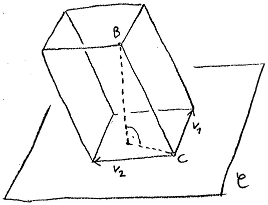
Poznámky

K vektorovému součinu pro $n = 3$:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

K aplikacím: vzdálenosti podprostorů bez řešení soustav rovnic. . .



$$v(B, C) = \frac{\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{BC})}{\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$$