ČESKÁ VĚDECKOTECHNICKÁ SPOLEČNOST
SOCIALISTICKÁ AKADEMIE

Matematické důkazy

RÜDIGER THIELE

Přeložili

doc. RNDr. Alois Kufner, DrSc.
a RNDr. Štefan Schwabik, CSc.

POLYTECHNICKÁ
KNIŽNICE
127. SVAZEK
I. ŘADY
VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ

PRAHA 1985

Knížka obsahuje úvod do formální logiky a přehled různých typů důkazů používaných v matematice. Je psána čtivě. Obsahuje četné příklady, vtipné poznámky a cvičení, které text vhodně doplňují. Příklady jsou voleny vesměs z elementární školské matematiky, takže text by měl být přístupný středoškolákům. Se zájmem si jej však přečtou zcela jistě i fundovaní odborníci a široká technická veřejnost.

Redakce teoretické literatury –
hlavní redaktorka RNDr. Blanka Kutinová, CSc.
Odpovědná redaktorka RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Obsah

Předmluva k českému vydání

Německý autor Rüdiger Thiele se touto knížkou pokusil přiblížit čtenáři práci matematika. Chtěl by mu v ní ukázat, jak matematik uvažuje, jak matematické nápady vznikají a jak jsou realizovány, zkrátka jak matematik vlastně postupuje, když něco dokazuje. Sáhl přitom k popularizujícímu způsobu výkladu, neváhal proložit své úvahy exkurzemi do „přilehlých" odvětví či anekdotickými příběhy. Současně však svůj záměr pojal velmi široce: dotýká se i některých podstatných otázek základů matematiky a problémů metodické povahy.

Úvahy o tom, co je a co není matematický důkaz, souvisejí úzce s matematickou logikou a mají i výrazné filozofické rysy. A právě tyto „filozofující" partie mohou někdy připouštět různý subjektivní výklad, leckterý matematik by asi to či ono řekl nebo vyložil jinak než autor (nebo překladatelé). Proto zde zdůrazněme jen to, co autor sám říká už v návodu k četbě: Knížka není a nechce být učebnicí, chce ve čtenáři vzbudit zájem o matematikovu práci a o matematiku vůbec a poskytnout mu vedle poučení i jisté minimum zábavy.

Překlad byl pořízen podle druhého německého vydání s přihlédnutím k úpravám, které autor připravil pro chystané třetí vydání. Původní seznam literatury, který obsahoval převážně publikace českému čtenáři nepříliš dostupné, byl nahrazen seznamem literatury obsahujícím knížky vyšlé u nás a tematicky s touto publikací související.

Praha, září 1982

Překladatelé

Obr. 1.1. M. C. Escher (1898–1972): *Belvedere*. Litografie (1958) – viz str. 13.

Jak číst tuto knihu?

Jen proto matematikům tak mnohá věc se daří,
že vždycky závěry se vyvozovat snaží.
I tehdy, když se zdá, že užitek v tom není,
činí tak v naději, že najdou uplatnění.
A náhle vidí: bezcenné tu přec svou cenu má
a největší se o nejmenší pevně opírá.

F. Rückert

Romantický básník Novalis (1772–1802), jemuž byl život bohů totéž co matematika, se vyjádřil takto: „Kdo k matematické knize nepřistupuje ve zbožném rozjímání..., ten jí nerozumí.“ Za všech časů však matematici četli důkazy nikoliv se zbožným rozjímáním, nýbrž se snahou o pochopení, za pomoci tužky a papíru, a totéž doporučuji i čtenáři této knížky.

Tato knížka je věnována úloze důkazů v matematice, jednotlivým důkazovým postupům, tomu, čeho lze důkazy dosáhnout a jak je provádět. Spěchající čtenář, kterého speciální důkazové metody zajímají více než teoretické zdůvodnění, může začít článkem 4, aniž by měl potíže s pochopením obsahu. Hlubší pochopení toho, co je důkaz, získá čtenář, když se seznámí s axiomatickou metodou, tj. když si učiní představu o soustavě axiómů a o zvolené logice. Jistý náhled umožňují články 2 a 3; odstavce 3.5 až 3.7 obsahují zajímavé výsledky, jež tuto problematiku rozšiřují, a lze je při prvním čtení vynechat.

Výklad je doplněn příklady a citáty, přičemž jsem usiloval o mnohotvárnost, pestrost a originalitu a pokoušel se přitom zabrousit i do jiných oblastí. Kniha nemá v žádném případě být elementární učebnicí teorie důkazů a ani nemá takovou učebnici nahrazovat; jejím cílem je podnítit zájem o tento předmět.

Kniha obsahuje asi 80 úloh a čtenář by se měl pokusit alespoň u části z nich o řešení. Řešení jsou uvedena na konci knihy, čtenář by se tam však měl podívat teprve tehdy, když se úlohou již přiměřenou dobu zabýval. To platí i o obtížnějších úlohách.

Halle, květen 1980

Rüdiger Thiele

1. Úvod

1.1. Čím lze matematiku charakterizovat?

Ars mathematica damnabilis et interdicta est.
(Umění matematiky je zavržení hodné a zakázané.)

Římské právo

Kdo kárá vznešenou moudrost matematiky,
živí se bludem.

L. da Vinci

Matematika je jednou z nejstarších věd. V průběhu její historie, dlouhé asi dva a půl tisíce let, bylo dáno mnoho odpovědí na otázku, co matematika je. Tyto odpovědi sahají od zjištění, že matematika pojednává o tom, co se rozumí samo sebou, až k výkladu, že v matematice se neví, ani o čem se mluví, a neví se ani, zda řečené je pravdivé (srov. str. 73). Slovo *matematika* pochází z řečtiny a znamená tam asi tolik co věda ve vlastním slova smyslu (μάϑησιζ κατ᾽ ἐξοχήν). Toto pojímání matematiky jako vzoru každé vědy, která spočívá na bezpodmínečné platnosti matematických výroků, se táhne dějinami. Tak je pro filozofa I. Kanta (1742–1804) – abychom uvedli příklad z doby pozdější – matematika vědou, která od starověku jednou provždy vzorovým způsobem nastoupila bezpečnou cestu vědecké disciplíny.

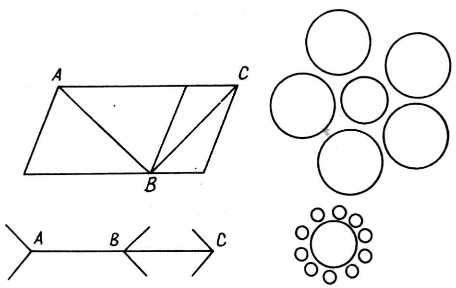
Máme-li se pokusit o charakteristiku matematiky takto zdůrazněné a vyzdvižené, můžeme to učinit výčtem oborů, jimiž se matematika zabývá. To bylo až do 19. století poměrně jednoduchou záležitostí, neboť matematika byla v podstatě vědou o veličinách (prostor a číslo). Pak se oblast matematického bádání rozšířila (abstraktní algebra, teorie množin, teorie her a mnoho jiných), takže dnes už se výčtem jednotlivých disciplín podstatě matematiky příliš nepřiblížíme. A protože konec rozvoje matematiky není v dohlednu, bude mít každá charakterizace tohoto druhu v nejlepším případě pouze dočasnou platnost. To platí i o charakterizaci matematiky jako vědy o strukturách, která je běžná právě v současné době. Oproti obsahové charakterizaci matematiky se však od vzniku řecké matematiky (asi za dob Euklidových, tj. okolo roku 300 př. n. l.) nezměnilo nic na názorech na matematickou metodu: Každý výrok je třeba dokázat (*princip důkazu*). Jako poznatek se v matematice uznává – resp. zařazuje do nějaké teorie – jen to, co bylo dokázáno. Z tohoto důvodu také považujeme každý matematický poznatek za pravdivý za všech okolností.

1.2. Jsou důkazy nutné?

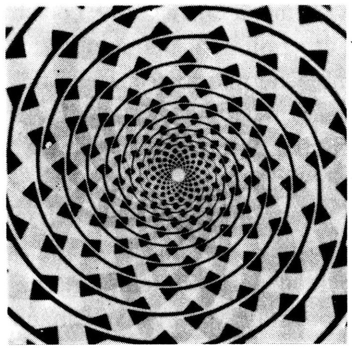
> Matematika se mi líbila obzvláště pro zřejmou jistotu svých důkazových argumentů.
>
> R. Descartes

Právě jsme poukázali na požadavek, že v matematice je třeba každý výrok dokázat. Položme si však otázku, zda jsou důkazy ve formě někdy velmi dlouhých řetězců matematických formulí a logických závěrů opravdu nutné, zda nestačí zdravý lidský rozum, názornost a naše zkušenost už samy k tomu, aby bylo možno vyslovit správné matematické tvrzení.

Na základě názoru budeme úsečku AB na obr. 1.2 považovat za delší než úsečku BC, ačkoliv jsou obě stejně dlouhé. Podobně je tomu u vnitřních kruhů na témže obrázku: máme dojem, že jsou různě velké, ačkoliv mají stejný obsah.



Obr. 1.2. Sanderův rovnoběžník, Müllerův-Lyerův klam se šipkami, Ebbinghausův klam s kružnicemi



Obr. 1.3. Fraserova spirála

U francouzské vlajky z roku 1789 (podélně pruhované trikolory v barvách modré, bílé a červené) musí být šířky pruhů v poměru 30 : 33 : 37, abychom měli dojem, že pruhy jsou stejně široké. A existuje ještě celá řada dalších tzv. optických klamů, které nás – pokud jde o názornost – nabádají k opatrnosti.

Jedním z nejrafinovanějších optických klamů je tzv. Fraserova spirála, znázorněná na obr. 1.3 (viz též obálka knihy). Zde naše vnímání přehodnocuje reálnou skutečnost v takové míře, že byste se měli v klidu pomocí kružítka sami přesvědčit o tom, zda se skutečně jedná o spirálu! Tohoto klamu si všimli psychologové, když asi před 50 lety splétali bílé a černé provázky a uvědomili si fascinující působení tohoto výtvoru na vhodném pokladě.

Holandský umělec M. V. Escher (1898–1972) vytvořil v roce 1958 litografii Belvedere (tj. krásná vyhlídka, viz str. 8), která představuje fantastický svět. Na pravém konci spodní a horní sloupové síně vidíme muže a ženu, hledící do krajiny dvěma přímo nad sebou umístěnými oblouky; přesto k nám muž stojí zády, zatímco žena se dívá šikmo na nás. Escher poznamenává ke svému obrazu: „Chlapec, sedící na lavici, má v rukou jakousi … krychlovitou absurditu. Přemýšlivě si prohlíží tento iracionální předmět a není si zřejmě vědom toho, že Belvedere za jeho zády byl postaven stejně nemožným způsobem. Na podlaze nejnižší plošiny, tedy uvnitř domu, stojí žebřík, po němž lezou nahoru dvě osoby. Jakmile však dosáhnou dalšího podlaží, stojí opět venku a musí znovu vstoupit do budovy. Lze se pak divit tomu, že se nikdo z těch lidí nestará o osud vězně ve sklepení, který s bědováním prostrkuje hlavu mříží?“ [1])

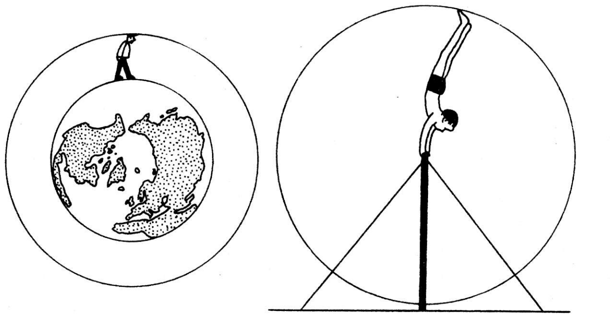
Ke standardním úlohám na výpočet maxim a minim v diferenciálním počtu patří problém, jak dopravit kmen stromu (jehož tloušťku zanedbáváme) ve vodorovné poloze z jedné ulice šířky a do druhé ulice šířky b, která ústí do první ulice kolmo. Jak dlouhý může být kmen, abychom s ním mohli ještě zahnout za roh? Je třeba jistého počítání, aby se zjistilo, že maximální délka kmene je dána číslem

$$\sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}\,.$$

Básník A. Strindberg (1849–1912) převádí tuto úlohu do následující experimentální roviny: „Je to půvabná hádanka; ale žádný chytrý dělník se nezastaví a nebude to vypočítávat. On to prostě zkusí!“ A se sebejistotou diletanta činí tento závěr: „Ale právě tohle je matematika! Půvabná hříčka pro lidi, kteří nemají co na práci. Řešit hlavolamy, hádanky a šarády, a to vyumělkovaným způsobem. Jednoduchý postup neplatí, ačkoliv je lepší a hezčí; není totiž způsobem. Jednoduchý postup neplatí, ačkoliv je lepší a hezčí; není totiž vědecký!“ Bylo by zajímavé nechat Strindberga stejným způsobem řešit i tzv. problém obchodního cestujícího. Při tomto problému jde o to, že cestující má navštívit n měst, přičemž dráha, kterou urazí, má být minimální. I elektronický počítač potřebuje k nalezení řešení pro 20 měst více času než činí jeden lidský život (srov. odst. 4.4). Experimentální matematika zde samozřejmě jako důkazový prostředek selhává.

[1]) „Pochopitelně jsou takové světy fantastické; jsou však fantastičtější než neeuklidovské prostory nebo $\sqrt{(-1)}$?“ pravil k tomuto obrazu známý současný anglický geometr H. S. M. Coxeter.

Předpokládejme, že člověk výšky h ($= 1{,}80$ m) obejde jednou zeměkouli kolem rovníku. Totéž nechť pak učiní podél kružnice na válcovém tělese vesmírné lodi. Při které z těchto „procházek" je rozdíl drah, které urazí hlava



Obr. 1.4

a které urazí nohy, větší? Hlava i nohy se pohybují po kružnicích, jejichž obvody je třeba spočítat a porovnat (obr. 1.4). Obejde-li náš člověk Zemi, urazí hlava (při průměru Země $d_Z = 12\,756\,776$ m) o

$$(d_Z + 2h)\pi - d_Z\pi = 2h\pi \quad (= 3{,}60\,\pi \text{ m} \doteq 11{,}31 \text{ m})$$

více než nohy. Podíváme-li se na tento výsledek, zjistíme s překvapením, že dráha, kterou hlava urazí navíc, nezávisí na průměru Země a obecněji nezávisí vůbec na kružnici, po níž se pohybují nohy. Rozdíl drah závisí pouze na výšce těla h. Je tedy stejný při cestě kolem Země jako při chůzi kolem vesmírné lodi nebo kolem obrovské planety Neptun, jakož i tehdy, když se nohy otáčejí kolem pevné osy (pak se jedná o kružnici o poloměru $d = 0$; srovnatelný podobný případ je znázorněn na obr. 1.4 vpravo, ovšem s tím, že roli nohou hrají ruce a roli hlavy naopak nohy).

Všimněme si jedné úlohy, která bez použití formulek může vést k nesprávnému řešení. Láhev L s vínem V stojí dohromady 22 korun. Přitom víno stojí o dvacet korun víc než láhev. Kolik stojí víno bez láhve? Odpověď dvacet korun je nesprávná! Zapíšeme-li údaje naší úlohy, bude

$$L + V = 22, \qquad V = L + 20\,.$$

Dosadíme-li výraz pro V z druhé formule do první, dostaneme $2L + 20 = 22$, a tedy $L = 1$. Víno bez láhve stojí 21 Kčs.

Už tyto jednoduché příklady dokumentují jednu zvláštnost matematiky. Otázky byly formulovány v řeči hovorové, následující úvahy a výpočty zčásti využívaly jistou „umělou řeč", řeč symbolů a formulí. Tato umělá řeč matematiky je mocným a účinným prostředkem, jakým se jiné přírodní vědy nemohou pochlubit; dokonce i chemie se svým aparátem chemických vzorců zde zaostává. Jak je výkonný formalismus výhodný, to zřetelně ukazuje univerzální použití algebraického zápisu ve všech odvětvích matematiky nebo poziční zápis čísel. Běžné úlohy s násobením, které dnes umí řešit každý žák čtvrté třídy, představovaly ještě pro Římany s jejich číselnou soustavou obtížný problém, s nímž si dovedli poradit jen obzvláště vyškolení Římané. Řeč formulí umožňuje matematice větší přesnost a vylučuje omyly, nedorozumění a předsudky.

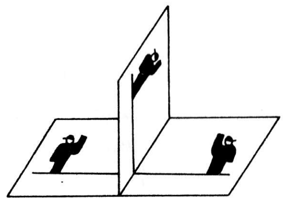
V hovorové řeči se například slovo *být* používá ve třech zásadně odlišných významech: Jednou ve větách jako *Jsem* k vyjádření toho, že něco existuje (reálná existence), jindy ve větách jako *Je velký*, kde se jedná o popis vlastnosti, a konečně ve větách jako 2 + 2 = 4, kde popisuje rovnost.

Další výhodou používání formulí je to, že tytéž vzorce popisují situace s rozdílným věcným obsahem. Tak např. vzorec

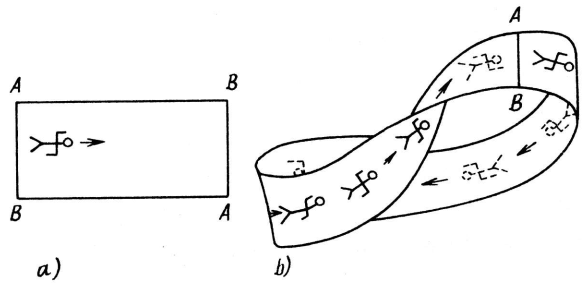
$$a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

udává jak součet přirozených čísel $1, 2, 3, \ldots, n-1$, tak počet spojnic mezi n body, jakož i počet možností, jimiž lze n předmětů uspořádat do dvojic.

Vedle těchto jednoduchých příkladů bychom chtěli na závěr uvést několik překvapivých matematických výroků, jejichž důkazy jsou poněkud komplikovanější; tyto výroky by měly otřást slepou vírou v názor, zkušenost a myšlení. Kolik místa (tj. kolik vyšrafované plochy) je třeba, aby se v rovině mohla jehla otočit jednou o 360°? Odpověď je překvapující. Ke každé vyšrafované ploše, vzniklé pohybem jehly tak, že se v rovině otočí o 360°, lze udat jiný pohyb jehly, jenž ji otočí opět o 360° a při němž bude mít vyšrafovaná plocha menší obsah než plocha původní. Uvedené pohyby se přitom skládají jen z posunutí a otáčení, jsou tedy velmi jednoduché, při zmenšující se vyšrafované ploše však jejich



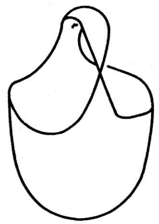
Obr. 1.5



Obr. 1.6

počet enormně roste. Důkaz toho, že u tohoto problému neexistuje žádná vyšrafovaná plocha s nejmenším obsahem, podal S. Besicovich v roce 1927.

H. G. Wells (1866–1946) nechal v jednom ze svých fantastických vyprávění přejít učitele Plattnera z našeho trojrozměrného prostoru do prostoru čtyřrozměrného, přičemž se Plattner vrátil do našeho světa jako svůj zrcadlový obraz. Tento jev si nemůžeme znázornit přímo, lze si jej však ozřejmit, provedeme-li analogické úvahy se zredukovanými dimenzemi. K tomuto účelu si představme plochého Mr. Plattnera. Překlopíme-li ten kus roviny, v němž se Plattner nachází, v trojrozměrném prostoru v souladu s obrázkem 1.5, dostaneme Plattnerův zrcadlový obraz. Je vůbec možné dostat zrcadlový obraz Mr. Plattnera v dvourozměrném prostoru (tj. na nějaké ploše), aniž bychom museli „odbočit" do prostoru trojrozměrného? I když to vypadá neuvěřitelně, možné to je. Použijeme k tomu pásu znázorněného na obr. 1.6a, který slepíme křížem na kratších stranách (tj. slepíme pás stočený o 180°).[2] Takto upravenému pásu se říká *Möbiův list* (obr. 1.6b). Necháme nyní Mr. Plattnera absolvovat po tomto listu okružní jízdu, aniž by překročil okraj. Vzhledem k tomu, že list nemá žádnou tloušťku, považujeme okružní jízdu za skončenou, jakmile Plattner dorazí na druhé straně listu do výchozího bodu. Ačkoliv během své cesty nespustil zdviženou pravou ruku, přijíždí k těm, kteří zde zůstali, se spuštěnou pravicí, zatímco původně spuštěná levá ruka je nyní zdvižena. Píše teď zrcadlovým písmem a má srdce na „pravém místě". Spolu s Plattnerem se zrcadlově



Obr. 1.7

zobrazily i jeho hodinky, tj. jejich ručičky se teď pohybují v opačném směru než při odjezdu. Na Möbiově listu tedy nelze rozlišit mezi levým a pravým, list není orientovaný. Okraj listu je tvořen jedinou uzavřenou křivkou, podobně jako tomu je u nafukovacího balónku. Není možné natřít celý balónek jednou barvou, aniž bychom překročili okraj (náústek). Naproti tomu není možné natřít Möbiův list dvěma barvami, které by byly odděleny okrajem. Tato vlastnost Möbiova listu, totiž to, že má jen jednu stranu, nachází i technické uplatnění, je-li žádoucí, aby se např. transportní pás opotřebovával stejnoměrně po obou stranách. Je dokonce možné vytvořit tašku, u níž nelze odlišit vnitřek od vnějšku (obr. 1.7).

[2] K tomuto stočení ovšem opět potřebujeme trojrozměrný prostor.

Ačkoliv se v řadě záležitostí nepovažujeme za kompetentní, tvoří logika jistou výjimku, neboť myslet nelogicky by asi nechtěl nikdo. Je sice pravda, že si nelze myslet nic, co by si odporovalo, ale přesto se dopouštíme při přemýšlení chyb častěji, než je nám milo. Považujme třeba za pravdivé tyto předpoklady:

(1) *Když neprší, tak zalévám,*

(2) Tvrzení *Prší* a *Zem je suchá* se navzájem vylučují

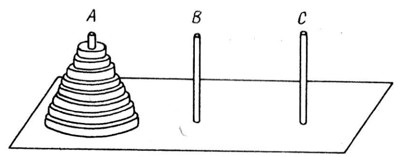
a položme si otázku, zda závěr

(3) *Když zalévám, prší a zem je mokrá*

lze logicky vyvodit z (1) a (2). Bezpochyby je přitom závěr

(4) *Když zalévám, pak neprší*

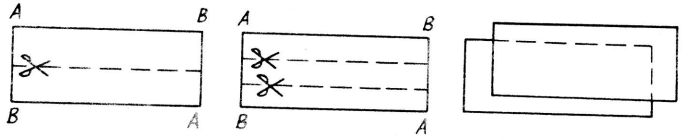
zřejmým důsledkem tvrzení (1). Je tomu však právě naopak. Z (1) plyne jen to, že zalévám, když neprší. Zda při dešti zcela zbytečně zalévám či nikoliv, o tom věta (1) neříká nic, to jsou dodatečné předpoklady, které zpravidla dodáváme podvědomě. Teprve za pomoci tohoto nevysloveného předpokladu (*Při dešti nezalévám*) je tvrzení (4) možné – z (1) je čistě logickými prostředky nelze odvodit (srov. 2.3.5). Věta (3) naproti tomu představuje logicky možný důsledek předpokladů (1) a (2). Předpokládejme, že prší. Pak z (2) plyne věta *Prší a zem je mokrá* (= *není suchá*). Z (1) neplyne – pokud jde o zalévání – nic, neboť podle (1) se cosi tvrdí jen tehdy, když neprší. Je tedy možné, že zalévám, a je možné i to, že nezalévám. Když však zalévám, je splněna první část věty (3). Naproti tomu (a nezávisle na tom) platí i druhá část věty (3), a tedy je v tomto případě pravdivá celá věta (3). Důvod omylů je v tom, že jsme vedle předpokladů použili při vyvozování závěrů i nevyslovené zkušenosti, neboť kdo by také při dešti zaléval?



Obr. 1.8

Legenda praví, že bůh Brahma přinesl do chrámu ve městě Benares věž, tvořenou 64 kulatými, nad sebou umístěnými a směrem nahoru se zmenšujícími zlatými destičkami, přičemž jsou tyto destičky uprostřed provrtány a navlečeny na kolíku. Vedle kolíku, na němž je umístěna věž, jsou ještě dva prázdné kolíky (obr. 1.8). Brahma poručil kněžím, aby vybudovali věž na některém z volných kolíků, a to tak, že lze pohnout vždy jen jednou deštičkou a že tuto destičku lze umístit jen na volný kolík nebo na větší destičku. Brahmovi kněží se prý po tisíciletí pokoušejí o vyřešení této úlohy, a jakmile se jim podaří přemístit onu asi centimetr vysokou věž, přijde prý konec všech věcí. Je-li na přenesení jedné destičky třeba pěti sekund, lze za jeden den provést 17 280 přesunů. Bude mít čtenář ještě čas, aby se věnoval matematickému rozboru této kosmogonie v článku 6 nebo četbě této knížky?

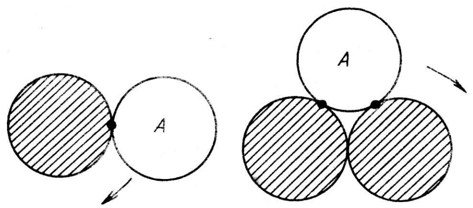
Cvičení



Obr. 1.9

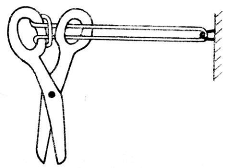
1.1. Slepme pás, znázorněný na obr. 1.9, tak, jak je popsáno v textu (a případně jej před slepením zkruťme ještě víc). Co se stane, rozstřihneme-li pás podél přerušovaně zakreslených čar?

1.2. Dvojitý pás, znázorněný na obr. 1.9, je třeba stočit o 180° a slepit. Jak to souvisí s úlohou 1.1? Jaké těleso vznikne, spojíme-li delší rovnoběžné strany (lepicí páskou)? Jak vypadají na tomto tělese křivky, tvořené spojenými delšími hranami?



Obr. 1.10

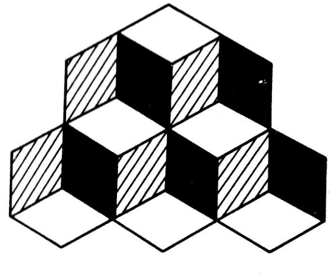
1.3. Mince na obr. 1.10 jsou všechny stejně velké. Kolikrát se otočí mince označená A kolem své osy, když se odvaluje (ale neklouže) po ostatních mincích, než dojde opět do výchozího bodu?


Obr. 1.11

1.4. Na obr. 1.11 jsou znázorněny nůžky, připevněné ke stěně dostatečně dlouhou šňůrou. Je možné nůžky uvolnit, aniž by bylo třeba nit přestřihnout?

1.5. Všechny knafy mají stejný tvar a velikost. Také všechny zelené hunky mají stejný tvar a velikost. Do jednoho plauce se vejde právě 20 knafů. Všechny hemputy obsahují zelené hunky. Zelený hunk je o 10 % větší než knaf. Hemput je menší než plauc. Je-li obsah všech plauců a hemputů převážně červený, kolik zelených hunků může být nejvýše v jednom hemputu?

1.6. V lodním kufru zesnulého kapitána našel Legrand plán úkrytu pirátského pokladu. Obsahoval toto vysvětlení: „Poklad je ukryt na Ostrově pokladů. Jdi od dubu D ke zřícenému majáku M, odtud ujdi stejnou vzdálenost napravo v pravém úhlu a místo, do něhož dojdeš, označ písmenem R. Pak jdi od dubu k prameni P, odtud ujdi vlevo v pravém úhlu stejnou vzdálenost jako od dubu k prameni a dojdeš do bodu, který označíš písmenem S. Poklad leží na středu spojnice RS.“ Legrand našel na ostrově maják i pramen, ale dub zmizel. Po jistých úvahách poklad našel. Jak?


Obr. 1.12

1.7. Kolik kostek vidí čtenář na obr. 1.12?

1.3. Přísnost důkazů

> Marně by nám Euklides předkládal nejkrásnější geometrické pravdy, kdyby nebyl dodal důkazy potřebné k tomu, aby nás přesvědčil. Na jeho pouhé slovo bychom mu ony pravdy nikdy neuvěřili.
>
> L. Euler

Nyní je jasné, že korektní důkazy jsou nutné, neboť v mnoha případech může jak zdravý rozum, tak i názorná představa padnout do léčky. Fundované odvození výsledků je žádoucí, má-li být zaručena pravdivost výroků. Ostatně i matematici občas přehlédli tyto „pasti“ a došli k nesprávným nebo unáhleným závěrům (srov. odst. 7.4).

Důkazy je proniknuta nejen celá věda, důkazy mají své místo i v denním životě, neboť se domníváme, že prokázat, doložit atd. můžeme nejen to, co tvrdíme ve vědě, ale i to, co denně sdělujeme jiným. A zde se objevují už jisté odlišnosti v chápání toho, co důkaz je. Extrémy možných pojetí lze najít v obratu *Čísla dokazují*, který pochází od fyzika J. F. Benzenberga (1777–1846), v aforismu O. Wilda (1856–1900) *Dokonce i věci, které jsou pravdivé, lze dokázat* (Dorian Gray) nebo v následujícím židovském vtipu, který útočí na dogmatickou učenost talmudu: Rabín je požádán, aby vysvětlil vznik deště. Učiní tak tím, že oblaka považuje za nasáklé houby, z nichž po vzájemném nárazu prýští voda. Pochybující žák se ptá: „Jaký důkaz máte pro to, že tomu skutečně tak je?" „Vždyť to přece vidíš: Prší!" Malé dítě přijímá výroky svých rodičů zpravidla nekriticky jako dokázané, zprávu přátel nebo známých o nějaké události považujeme za hodnověrnou, zprávu o počasí za výstižnou atd. Přírodovědec bude zákonitost, kterou tuší, považovat za platnou, jestliže ji bude dokazovat dostatečný počet měření, i když ani zdaleka nevyšetřil všechny možné případy a není ani s to to učinit.

Slovo *důkaz* bylo používáno v různých významech, lišících se mírou logické přísnosti. Matematický důkaz je deduktivní, tj. vychází z tvrzení pravdivých nebo za pravdivá považovaných a vede *pouze* pomocí logických pravidel zákonitě k tvrzení, které pak platí nutně a za všech okolností.

O důvěře, kterou matematici vkládají v důkaz, nás může poučit následující událost. Komplexní čísla, která vznikají jako nutné rozšíření oboru čísel reálných – např. proto, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá žádná reálná řešení –, byla pro matematiky dlouhou dobu „tajemná": Neměla totiž řadu důležitých vlastností, spojených s tehdy známým pojmem čísla, například je nebylo možno uspořádat podle velikosti. G. W. Leibniz (1646–1716) o nich hovořil jako o křížencích mezi bytím a nebytím a teprve C. F. Gauss (1777–1855) jim v roce 1830 zajistil místo v matematice tím, že jim dal geometrický význam. Formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

která byla známa už L. Eulerovi (1707–1783), spojuje pozoruhodným způsobem a v nejjednodušší formě reálné a komplexní veličiny. B. Peirce (1809–1880), profesor matematiky na harvardské univerzitě a otec známého logika C. Peirce, tuto formuli jednoho dne objevil a poznamenal ke svým studentům: „Pánové, tato formule je vskutku správná, je absolutně paradoxní, nemůžeme jí porozumět a nevíme, co znamená; dokázali jsme ji však, a proto víme, že musí být pravdivá!"

Při dnešním pojetí a s novější interpretací komplexních čísel není na této formuli, která je v matematice jednou z nejslavnějších, nic nesrozumitelného nebo záhadného. Důvěra v její odvození je proto pro nás snazší záležitostí, než to před více než 100 lety bylo pro Peirce, který důkazu zcela důvěřoval – přes mlhavost smyslu a významu této formule. Zde je též na místě připomenout poznámku D. Hilberta (1862–1943): „Krom toho je omylem domnívat se, že rigoróznost při dokazování je nepřítelem jednoduchosti."

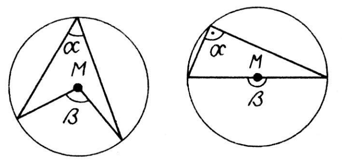
Matematické důkazy nejsou založeny na názorech a míněních, která lze běžně měnit, nebo na zkušenostech (experimentech), které lze běžně zlepšovat nebo vyvracet. To vyzdvihuje A. Einstein (1879–1955): „Matematika požívá oproti všem jiným vědám mimořádné vážnosti; její věty jsou absolutně jisté a nepopiratelné, zatímco ve všech ostatních vědách jsou důkazy do jisté míry

sporné a jsou vždy vystaveny nebezpečí, že nově odhalené skutečnosti je vyvrátí." Einstein uvádí také cenu, kterou je třeba platit za překvapivou dlouhověkost matematických poznatků, když říká: „... pokud se matematické věty vztahují ke skutečnosti, nejsou zaručené, a pokud jsou zaručené, nevztahují se ke skutečnosti."

2. Collegium logicum

2.1. Role formální logiky v matematice

Podívejme se blíže na některé matematické věty. V učebnici elementární geometrie můžeme nalézt následující výrok: *Každý obvodový úhel na kružnici má poloviční velikost středového úhlu nad stejným obloukem* (obr. 2.1). Zvolíme-li středový úhel tak, aby jeho velikost byla 180°, dostaneme zřejmě výrok: *Každý obvodový úhel na půlkružnici je pravý.* Chceme-li právě použitý pojem kružnice definovat jako množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu (středu) stejnou vzdálenost, potřebujeme čtyři dosud nedefinované pojmy, totiž pojmy bodu, roviny, vzdálenosti a množiny.



Obr. 2.1

Když si prohlédneme nějaký matematický text, bude nám už z vnějšího pohledu ihned patrná skutečnost, kterou jsme právě doložili příklady. Výroky a pojmy se odvozují z jiných výroků a pojmů. Aby matematici zdůraznili závažnost odvozování, používají slov jako „odtud, v důsledku toho, jelikož, proto, vzhledem k“ aj. Výroky a pojmy nestojí vedle sebe bez souvislosti, jsou řazeny za sebou pomocí logických závěrů. Výroky se vyznačují tím, že jsou důsledkem jiných výroků. Do jejich vzájemných vztahů dává nahlédnout důkaz. Logika je lešení, kterého je třeba k vybudování celku (nějaké teorie).

Když porovnáme výroky v knize o geometrii s výroky v učebnici teorie čísel, shledáme, že se u matematických výroků používají vždy příslušné geometrické pojmy jako bod, úhel, kružnice nebo příslušné číselně teoretické pojmy jako číslo, dělitel, součet, ale také slova či vazby jako *nebo, platí pro všechna.* Použití těchto vazeb není omezeno jen na geometrii nebo teorii čísel, tyto výrazy se objevují ve výrocích všech matematických teorií. Tak jak se geometrie zabývá body, úhly nebo kružnicemi a teorie čísel čísly, děliteli, součty, tak se *formální logika* věnuje vazebným součástem matematických výroků; přesněji řečeno: předmětem zkoumání formální logiky jsou právě matematické výroky jako takové. Formální logika zkoumá souvislost mezi výroky jisté teorie, např. jaké výroky lze odvodit z jiných nebo zda jsou odvozeny korektně. Přitom stojíme stále před otázkou, jakým právem můžeme z platných nebo za platné považovaných výroků odvozovat jiné, opět platné výroky. Stručněji řečeno – jak se s výroky vlastně zachází?

Zjištění, že logickému usuzování, tedy správnému zacházení s výroky, jsme se naučili a používáme je podvědomě právě tak jak gramatiku mateřského jazyka, vystihuje celkem situaci v oblasti každodenních zkušeností. Když se ale odpoutáme od konkrétních názorných zkušeností tak, jak je to nakonec nutné v každé vědě, pak logické usuzování nespočívá už „v oněch duchovních operacích, které už od mládí děláme v největším pohodlí“ (J. W. Goethe). Spíše musíme dát za pravdu B. Engelsovi (1825–1895), který poznamenává: „Zdravý lidský rozum, i když je to ve čtyřech stěnách svého domáckého prostředí úctyhodný chlapík, zažije podivuhodná dobrodružství, když se odváží vykročit do širokého světa bádání.“ Proto se v této části knihy chceme seznámit s důležitými základními pojmy formální logiky.

Když se z hlediska logiky znovu podíváme na matematické výroky, bude nám nápadné, že se vyskytují dva druhy výroků. Abychom např. nahlédli platnost výroku *Číslo* $2^{(2^5)} - 1$ *dává při dělení číslem* 641 *zbytek* 639, potřebujeme speciální znalosti z teorie čísel. Naproti tomu lze bez jakýchkoli znalostí o tom, jaký je zbytek při dělení čísla $2^{(2^5)} - 1$ číslem 641, tvrdit, že platí výrok *Zbytek čísla* $2^{(2^5)} - 1$ *při dělení číslem* 641 *buď je, nebo není číslo* 639. Pochopení obsahové správnosti prvního výroku vyžaduje číselně teoretické úvahy, zatímco platnost druhého výroku lze nahlédnout jednoduše, bez bližšího vyšetřování uváděných souvislostí, už ze samotné formy výroku, která popisuje tu skutečnost, že buď nastane daný jev, nebo nastane jeho opak. Nezávisle na charakteru každého jednotlivého jevu nastane buď on sám, nebo jeho opak, protože se jedná o logický zákon (zákon o vyloučeném třetím). Logický zákon se nevztahuje na pravdivost obsahu nějakého výroku, vztahuje se pouze na platnost formy výroku, ať už se přitom jedná o jev geometrický, číselně teoretický či jiný (třeba biologický). Zákony formální logiky, které umožňují převést pravdivé výroky bez ohledu na jejich obsah na jiné pravdivé výroky, jsou přirozeně také základem důkazových postupů.

Formální logika je nástrojem k přezkoušení důkazů z hlediska přesnosti, úplnosti a spolehlivosti a k nahlédnutí do formálně logických souvislostí. Závěr, který vede od výroků *Někteří Řekové jsou filozofové* a *Všichni filozofové jsou mudrci* k tvrzení *Někteří Řekové jsou mudrci*, je známý školský příklad formálně logického úsudku. Samotný závěr – tj. jeho platnost – závisí pouze na jeho tvaru, nikoliv na obsahu, a zejména nezávisí na pravdivosti použitých výroků. *Řeky* bychom mohli nahradit *Eskymáky* nebo *zelenými hunky*, aniž bychom narušili formální platnost závěru.

Dalším formálním úsudkem by bylo odvození závěru *Někteří filozofové jsou Řekové* z výroku *Někteří Řekové jsou filozofové*. Když nahradíme Řeky a filozofy písmeny *Ř* a *F*, pak z výroku *Některá Ř jsou F* plyne formálně též *Některá F jsou Ř*. Tento závěr je ovšem formálně správný jen z logického pohledu, protože formální závěr, kterým z výroku *Některá řešení jsou fantastická* získáme výrok *Některá fantastická jsou řešení*, je v češtině nesmyslný, tj. v našem jazyce není formální pravidlo, které by určilo, kterými slovy můžeme nahradit *Ř* a *F*. Naproti tomu v matematice lze logické odvozování provádět formálně velmi dobře.

Za svoji účinnost v matematice vděčí formální logika svému úzce vymezenému účelu. Vzájemný vztah hovorového jazyka a formální logiky porovnal významný logik G. Frege (1848–1925) se vztahem oka a mikroskopu. Zatímco oko je pohyblivé, avšak pro vědecké požadavky, vyžadující ostré rozlišování, opticky nedokonalé, je mikroskop těmto účelům dokonale přizpůsoben, na základě této specializace je však pro jiné účely nevhodný. Celé bohatství (přirozeného) jazyka nelze pohledem skrze mikroskop formální logiky obsáhnout. Zatímco se nám ozřejmí trojí způsob použití slovesa *být* (srov. str. 15), unikne nám smysl sebevědomé řádky *Jsem ten, který jsem ...* (*I am as I am and so I will be ...*) z renesanční básně Sira Thomase Wyatta, která – vzato formálně logicky – představuje zřejmý identický výrok.

2.2. Výroky

Představy, které každý z nás spojuje se slovy hovorového jazyka, jsou zpravidla příliš různorodé, než aby bylo možné určit obsah slova či pojmu jednoznačně. To vlastně není vůbec možné, protože hovorový jazyk se neustále přizpůsobuje našim požadavkům, neustále se mění a přihlíží k novým skutečnostem. Dříve než vyložíme něco z formální logiky, musíme vyjasnit, co se má rozumět výrazem *výrok*, který jsme doposud používali zcela nezávazným způsobem; používání slov a pojmů v matematice či logice totiž musí být stanoveno přesně, abychom vyloučili nedorozumění.

Výrokem[3]) budeme rozumět nějakou skutečnost, kterou lze zachytit písemně a o níž má smysl se ptát, zda nastane či nenastane. Výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý[4]) (*princip dvouhodnotovosti*), tj. neplatí oboje současně (*věta o vyloučeném sporu*), ale platí alespoň jedna z obou možností (*věta o vyloučeném třetím*). Výroky v tomto smyslu by byly

Berlín leží v Evropě,

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O ,$$

[3]) Doslova znamená výrok něco, co bylo řečeno, vysloveno.

[4]) Někdy říkáme též *správný* nebo *nesprávný*. (Pozn. překl.)

Sníh je černý,

$$3 + 2 = 6 .$$

První dva výroky jsou pravdivé, zatímco poslední dva jsou nepravdivé. Výroky jsou odrazem jistého obsahu. Tvrdí se, že věci mají jistou vlastnost (7 *je prvočíslo*) nebo že mezi nimi existují jisté souvislosti a vztahy (3 *je menší než* 7).

Výroky nejsou např. *Klid!*, *Dobrý den!*, *Kolik je hodin?*, *Odbočení vpravo je zakázáno!* anebo $y = x^2$.

Při zásadním rozhodování, zda jistá skutečnost má pravdivostní hodnotu *pravdivá* nebo pravdivostní hodnotu *nepravdivá*, tedy zda se skutečně jedná o výrok, nehraje roli způsob, jímž jsme k takovému úsudku dospěli.[5]) Tak můžeme větu *V roce* 1991 *bude na Havajských ostrovech pozorováno zatmění Slunce* považovat za výrok, protože nejenom důvěřujeme astronomům, ale v roce 1991 budeme dokonce schopni pravdivost výroku ověřit. Pravdivostní hodnota Goldbachovy domněnky, která zůstává nerozřešena od roku 1742 a která tvrdí, že každé sudé číslo větší než dvě lze rozložit na součet dvou prvočísel, není zatím známa; jsme však přesvědčeni, že uvedená skutečnost pro všechna sudá čísla větší než dvě buďto platí, anebo neplatí. Pravdivostní hodnota výroku je objektivní fakt, je tedy nezávislá na osobě, která výrok vyslovuje, nezávisí na místě ani na čase, na kterém byl výrok učiněn. Proto není věta *Všichni Kréťané lžou* výrokem, poněvadž když ji vysloví Kréťan, vede k rozporům, které nepřipouštějí rozhodnutí o pravdivosti nebo nepravdivosti věty (srov. odst. 7.4). Někdy se může zdát, že požadavek objektivní platnosti je porušen, když budeme pohlížet jako na výrok třeba na větu *Prší.* Zde se ale jedná o hovorově nedostatečně formulovanou větu, která je srozumitelná v použitých souvislostech (kontextu). U čtenáře se předpokládá, že si v myšlenkách doplní místo a čas deště, a tím se věta stane výrokem.[6]) Nastává i opačná situace, totiž slovní přeurčení jako např. *Černý vraník* nebo *Oba ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku.* Oba způsoby formulace na skutečnosti nic nemění, poukazují pouze zesíleně na jisté vlastnosti (tendence výroku) anebo pro stručnost některé zřejmé předpoklady vynechávají. Stylistické změny obsah výroku neovlivňují. Tak mají věty *Všichni lidé jsou smrtelní* a *Každý člověk je smrtelný* tentýž význam. Básníkovo *Od ledu*

[5]) Pravdivostní hodnota výroku *Dnes je pěkné počasí* je velmi subjektivní, protože nelze přesně vymezit pojem *pěkný*. Obtíže tohoto druhu se v matematice nevyskytují, protože ta používá pouze přesně vymezené pojmy.

[6]) Přísně vzato máme zde před sebou výrokovou funkci (srov. odst. 2.8).

osvobozen je tok i řeky spanile oživujícím jara pohledem (J. W. Goethe) zní ve zprávě o stavu vodních toků jednoduše *Tok je bez ledu.*

Přechod od výroků k jejich pravdivostním hodnotám považoval G. Frege za rozhodující abstrahující krok ve formální logice.

Výroky s pravdivostní hodnotou *pravdivý* se v matematice nazývají zpravidla *věty* (též poučky) nebo *teorémy* (řecky *τὸ μάθημα*), zatímco výroky, jejichž pravdivostní hodnota dosud známa není, se nazývají *domněnky*. Věta ve smyslu matematickém je tedy něco jiného než věta ve smyslu gramatickém. Výrok je rovněž něco jiného než gramatická věta, i když gramatických vět – ale nejenom jich – používáme u výroků jako výrazového prostředku. Zjištění, zda fakt jmenovaný ve výroku platí nebo neplatí, se nazývá *úsudek* a je třeba jej jako takový od výroku odlišit. Každému úsudku předchází důkaz.

Cvičení

2.1. Které z následujících vět jsou výroky? Které z výroků jsou pravdivé? Jaké dodatečné předpoklady jsou pro některé z vět nutné, máme-li určit jejich pravdivostní hodnotu?

a) *Měsíc je zelený sýr.*
b) *Karel IV. používal elektrický holicí strojek.*
c) *Všichni lidé vyšší než dva metry jsou starší 200 let.*
d) *Tento výrok není pravdivý.*
e) *Tato věta není výrokem.*
f) *Následující věta není pravdivá. Předcházející věta je pravdivá.*
g) *Každá věta v této knize je nepravdivá.*
h) *Čte rád knihy.*
i) *Všechny knafy obsahují zelené hunky.*
j) *Desetitisící písmeno v této knize je e.*
k) *Lidé jsou neopeření dvounožci.*
l) $2^{(2^{17})} + 1$ *je prvočíslo.*

2.3. Spojení výroků

V hovorovém jazyce měníme věty anebo spojujeme více vět do vět nových. To je možné i u výroků. Má-li být např. vybudována teorie z geometrických výroků, nelze se obejít bez výrokových spojení (stejně jako několik navzájem nesouvisejících vět nemůže tvořit rozhovor). Uvedeme několik příkladů. Tak lze výrok

A: *Prší*

změnit připojením předpony *ne* na výrok

$\bar{A}$: *Neprší*

a tento druhý výrok popírá první. Výrok A můžeme změnit též tak, že před něj vřadíme slova *Je možné, že* nebo *Je pravděpodobné, že* či *Je nutné, aby*. Když přibereme další výrok

B: *Ulice bude mokrá,*

pak můžeme pomocí spojek *a, anebo, jelikož, přestože, zatím co, aby, ačkoliv* aj. utvořit spojení výroků A a B, např.

Prší a ulice bude mokrá,
Prší anebo ulice bude mokrá,
Prší, aby ulice byla mokrá,
Prší, ačkoliv ulice je mokrá.

Zajímá nás přitom, zda nová spojení vytvořená ze známých výroků (se známými pravdivostními hodnotami) jsou pravdivá anebo nepravdivá čili zda představují opět výroky. Přesněji řečeno: Je možné bez ohledu na obsah, pouze ze znalosti pravdivostních hodnot výroků, které vstupují do výrokových spojení, usuzovat na pravdivostní hodnotu tohoto spojení a vyjádřit ji tím jako jistou logickou funkci jednotlivých pravdivostních hodnot výroků, které do spojení výroků vstupují? Jelikož výroková spojení jsou součástí matematických vět a důkazů, je v matematice odpověď na položenou otázku důležitá.

Odpověď na uvedenou otázku bude podstatně záviset na použitých spojkách, které určují logickou strukturu věty. Pravdivostní hodnotu výrokového spojení můžeme popsaným způsobem jednoznačně zjistit (tj. udat příslušnou logickou funkci) pouze v tom případě, když je smysl spojek pevně stanoven. V hovorovém jazyce tomu tak vždy není; spojky svým postavením ve větě přispívají ke stylistickým a řečnickým efektům, jako je zdůraznění, libozvučnost, víceznačnost apod. Následující věty ukazují, jak je hovorový jazyk při používání záporu občas nedbalý; jedna věta formálně popírá druhou, přitom však jsou obě považovány za rovnocenné: *O vkusu lze diskutovat – O vkusu se nedá diskutovat.*[7]) Spojka *zatím co* je v češtině dvojznačná, jelikož může vyjádřit konfrontaci

C: $\sqrt{2}$ *není racionální číslo, zatím co při praktických výpočtech se* $\sqrt{2}$ *racionálními čísly aproximuje*

anebo může být použita v časovém smyslu:

[7]) Ve spisovné němčině je dnes dvojí zápor chápán jako přitakání, zatímco ve starších textech a v nářečích znamená zdůrazněný zápor. (Pozn. překl.: V jiných jazycích je úloha dvojího záporu ještě komplikovanější.)

D: *Descartes vytvořil analytickou geometrii, zatím co v Evropě zuřila třicetiletá válka.*

Obě výroková spojení jsou pravdivá, každý jednotlivý výrok vstupující do spojení je rovněž pravdivý. Logické struktury obou spojených výroků jsou ale podstatně odlišné. I když konfrontující spojkou *zatím co* v první větě je vyjádřeno jisté zdůraznění, jedná se z logického hlediska vlastně o výčet, takže lze slova *zatím co* nahradit spojkou *a*. Ve výrokovém spojení *C* můžeme výrok $\sqrt{2}$ *není racionální číslo* nahradit výrokem *Řekové objevili, že* $\sqrt{2}$ *není racionální číslo* a dostaneme z pravdivých výroků opět pravdivé výrokové spojení:

*C**: *Řekové objevili, že* $\sqrt{2}$ *není racionální číslo, zatím co při praktických výpočtech se* $\sqrt{2}$ *aproximuje racionálními čísly.*

Naproti tomu výrokové spojení

*D**: *Řekové objevili, že* $\sqrt{2}$ *není racionální číslo, zatím co v Evropě zuřila třicetiletá válka*

je utvořeno z pravdivých výroků a je přitom nepravdivé. Použití spojky *zatím co* v logickém smyslu spojky *a* umožní zjištění pravdivostní hodnoty výrokového spojení formálně a nezávisle na smyslu jednotlivých výroků, které jsou spojeny slovem *a* (*zatím co*), pokud jsou známé pravdivostní hodnoty jednotlivých výroků (extenzionální použití). To není možné, když spojku *zatím co* použijeme v časovém smyslu. V tomto případě je možno rozhodnout o pravdivostní hodnotě výrokového spojení pouze tehdy, když se vezme v úvahu smysl spojovaných výroků (intenzionální použití). V našem příkladě musí první část věty popisovat fakta, která se odehrála v čase třicetileté války, chceme-li, aby spojení výroků bylo pravdivé. Ve všech ostatních případech je výrokové spojení nepravdivé, i když každý z obou spojovaných výroků může být pravdivý.

Tím je jasné, jaká omezení musíme klást na spojky, když budeme chtít rozeznat pravdivostní hodnotu výrokového spojení bez ohledu na obsah výroků, které do spojení vstupují. Výroky zařazené do výrokového spojení pomocí extenzionálních spojek se v logické funkci chápou jako celek „bez vnitřní struktury". Zajímavé jsou pouze jednotlivé pravdivostní hodnoty, které pak slouží k určení pravdivostní hodnoty výrokového spojení. Proto zůstane pravdivostní hodnota výrokového spojení zachována, když v něm výrok *A* nahradíme výrokem *B*, který má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok *A*. Smysl jednotlivých výroků, který vychází za rámec jejich pravdivostních hodnot (tj. za rámec

jejich pravdivosti či nepravdivosti), nemá vliv na pravdivostní hodnotu jejich spojení.[8]) Proto používají logici s oblibou příklady s „nesmyslnými" větami jako

Měsíc je zelený sýr anebo jsou lidé neopeření dvounožci,

aby zdůraznili, že je pro ně důležitá logická struktura větných spojení a ne jejich obsah. Výroková spojení zprostředkovávají z hlediska formální logiky pouze souvislosti logické, nikoliv však věcné. Logické struktury tvoří ona schémata, která jsou základem myšlení.

Dá se ukázat, že matematika vystačí se spojkami *ne*[9]), *a* a *nebo* (srov. též cvičení 2.4). Spojky *když … pak* a *právě když* lze na ně převést (srov. odst. 2.3.5 a 2.3.7). Přesný výklad těchto spojek uvedeme za chvíli. Důležitý je pro nás následující výsledek: Každé výrokové spojení utvořené pomocí spojek *ne*, *a*, *nebo*, *když … pak*, *právě když* je opět výrok, jehož pravdivostní hodnota je určena pouze logickou strukturou spojení (a dá se tedy stanovit pomocí pravdivostních hodnot jednotlivých výroků, které do spojení vstupují). V dalším se budeme zabývat pouze takovýmito výrokovými spojeními; tato spojení budou mj. sama opět výrokem.

Jelikož nás jednotlivé výroky z hlediska jejich obsahu nezajímají, použijeme pro označení výroků písmena $A, B, C, \ldots$ – podobně jako v algebře, kde blíže neurčená čísla bývají označena písmeny $a, b, c, \ldots$. Logická struktura výrokových spojení tím nabude značně na výraznosti, jak ukazují tyto příklady:

non A; *A a B*; *A nebo B*; *když A, pak B.*

$A, B, C, \ldots$ nazveme *výrokové proměnné*. Formalizaci můžeme dovést ještě dál tím, že pro spojky zavedeme symboly zcela stejně jako v algebře, kde jsou operace (početní úkony) označeny symboly např. +, : apod.). Naše čtyři příklady lze pak stručně zapsat ve tvaru

$$\bar{A}; \quad A \wedge B; \quad A \vee B; \quad A \Rightarrow B$$

(znak $\vee$ vznikl z latinského slova *vel* pro *nebo*).

[8]) Protože konec konců jde pouze o pravdivostní hodnotu výroku, neprovozujeme výrokovou logiku nad nějakou množinou výroků, nýbrž nad množinou pravdivostních hodnot $P = (p, n)$. Jednohodnotové logické funkce (např. identita, negace) jsou zobrazení množiny P na množinu P. Dvouhodnotové logické funkce (např. disjunkce, implikace) jsou zobrazení kartézského součinu $P \times P$ na množinu P.

[9]) Pro jednoduchost nazýváme *ne* spojkou, i když slovo *ne* výroky nespojuje, nýbrž nějaký výrok modifikuje.

Cvičení

2.2. Jsou spojky *protože* a *buď... anebo* intenzionální nebo extenzionální?

2.3. Je *Jan a Petr jsou bratři* výrok nebo výrokové spojení?

2.3.1. Negace: *non A*

Nejjednodušší způsob, jak změnit výrok, je zřejmě popření popsaných skutečností, tj. souhlas s protikladnou (kontradiktorickou) skutečností. Negace výroku je nepravdivá právě tehdy, když výrok sám je pravdivý, a je pravdivá právě tehdy, když výrok sám je nepravdivý. Pravdivostní hodnotu negace tedy lze určit z pouhé znalosti pravdivostní hodnoty negovaného výroku, aniž by bylo cokoli známo o jeho obsahu. Spojka *ne* se tedy používá v extenzionálním smyslu. Negace nějakého výroku je opět výrok.

Jednoduché příklady jsou

Výrok:	7 *je prvočíslo*	6 *je prvočíslo*
Negace:	7 *není prvočíslo*	6 *není prvočíslo.*

Jestliže A označuje nějaký výrok, označíme jeho negaci symbolem *non A* nebo $\bar{A}$.[10]) Když pravdivostní hodnoty *pravdivý* a *nepravdivý* označíme písmeny p a n, pak můžeme pravdivostní hodnotu negace *non A* nějakého výroku A vyčíst z následujícího přehledného schématu pravdivostních hodnot výroků A a *non A* (pravdivostní tabulka – obr. 2.2):

A	*non A*
p	*n*
n	*p*

Obr. 2.2

Negace výroku se v matematických větách a důkazech používá velmi často, zejména u nepřímého důkazu (srov. odst. 4.3). Z tohoto důvodu je třeba věnovat stálou pozornost pečlivé a přesné formulaci negace výroku, abychom se vyvarovali omylů.

Slovně můžeme v češtině utvořit zápor většinou tak, že na vhodné místo zařadíme předponu *ne*. Věty *Neznalosti jsou velké*, *Znalosti nejsou velké* a *Znalosti jsou nevelké* ukazují, že přitom je důležité i to, na kterém místě předpona *ne* stojí. Existuje však i řada dalších možností, jimiž lze vyjádřit negaci; např. výrok 6 *není prvočíslo* nebo *Tvrzení, že 6 je prvočíslo, je nepravdivé* (*neplatí*).[11])

[10]) Negace bývá označována také symboly $\neg A$, A' nebo $\sim A$. (Pozn. překl.)

[11]) V jiných jazycích se zápor vyjadřuje složitějším způsobem:

Francouzština: Je le vois, mais je *ne* le crois *pas* (G. Cantor).

Angličtina: He does not understand arithmetic.

Ruština: Мы *ничего не* узнали.

(Pozn. překl.: Také v češtině se zápor tvoří komplikovanějším způsobem než v němčině, kde k negaci zpravidla stačí zařadit na vhodné místo slovo *nicht.*)

2.3.2. Konjunkce: *A a B*

Konjunkce spojuje dva výroky A a B do nového výroku

$$A \;a\; B.$$

Jako příklad může posloužit nedávno použitá věta *Prší a ulice je mokrá.* Konjunkce A a B má přitom být pravdivá pouze tehdy, když jsou současně pravdivé výroky A i B. Ve všech ostatních případech je konjunkce nepravdivá. Aby věta, která nám slouží jako příklad, byla správná, musí jak pršet, tak musí být ulice mokrá. Když je pouze mokrá ulice (přejel kropicí vůz) a nepršelo, pak je konjunkce nesprávná. Spojka *a* vyjadřuje spojení velmi silným způsobem: Pravdivost obou výroků je nutná a stačí k tomu, aby konjunkce byla pravdivá. Podobně jako u negace můžeme uvést pravdivostní tabulku i pro konjunkci (viz obr. 2.3).

A	*B*	*A a B*	*A nebo B*
p	*p*	*p*	*p*
p	*n*	*n*	*p*
n	*p*	*n*	*p*
n	*n*	*n*	*n*

Obr. 2.3

Konjunkce se hovorově často zkracuje, přičemž se např. výroky 11 *je prvočíslo* a 13 *je prvočíslo* stáhnou do výroku 11 *a* 13 *jsou prvočísla.* Ovšem ne každé vyslovené *a* odpovídá nějaké zkrácené konjunkci. Ve větách 11 *a* 13 *jsou prvočíselná dvojčata* nebo *Bod C leží na přímce p mezi body A a B* je spojkou *a* vyjádřen vztah mezi čísly 11 a 13, resp. mezi body A, B a C. Ekvivalentní formulace pro konjunkci *A a B* jsou: *jak A, tak B*; *A, a přesto B*; *A, i když B*; *nejen A, ale také B*; *A, a právě tak B.*

2.3.3. Disjunkce: *A nebo B*

Z vět

Zítra pojedu do Prahy nebo nepojedu,
Dnes večer možná půjdu do kina nebo do divadla,
Za deště nebo mlhy nepojedeme

je patrné, že v hovorovém jazyce se spojka *nebo* používá ve více významech. První *nebo* vyjadřuje právě jednu ze dvou možností: buďto pojedu, nebo nepojedu (věta o vyloučeném třetím – tertium non datur). Ve druhé větě znamená *nebo* to, že ze dvou možností (kino nebo divadlo) nastane nejvýše jedna, v žádném případě obě, nemusí však nastat žádná. Smysl spojky *nebo* ve třetí větě spočívá v tom, že alespoň jedna z možností (déšť *nebo* mlha), ale obě už zcela jistě stačí k tomu, aby se nikam nejelo. V tomto posledním *souhrnném* smyslu se spojka *nebo* používá v matematice a ve formální logice. Výrokové spojení A *nebo* B je pravdivé už tehdy, je-li alespoň jeden z výroků A, B pravdivý. Výroky

$2 + 2 = 4$ *nebo* 5 *je prvočíslo*,
$2 + 2 = 4$ *nebo* 6 *je prvočíslo*,
$2 + 2 = 3$ *nebo* 5 *je prvočíslo*

jsou všechny pravdivé, naproti tomu výrok

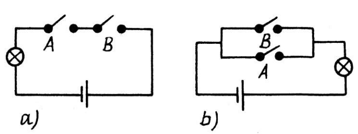
$2 + 2 = 5$ *nebo* 6 *je prvočíslo*

je nepravdivý. Pokud jde o pravdivost výrokového spojení, je disjunkce méně výrazným spojením než konjunkce, neboť už pravdivost jednoho z výroků způsobí, že disjunkce je správná. Pouze nesprávnost obou výroků vede k nepravdivosti jejich disjunkce.

Spojka *nebo* se tedy stále používá v tom smyslu, že alespoň jeden z obou výroků je správný. Tím je pravdivá zkráceně zapsaná disjunkce 0 *nebo* 2 *řeší rovnici* $x^2 - x = 0$. Přirozeně je správná i disjunkce 0 *nebo* 1 *řeší rovnici* $x^2 - x = 0$, věcně přiléhavější je zde ovšem konjunkce 0 *a* 1 *řeší rovnici* $x^2 - x = 0$. V hovorové řeči se *nebo* v souhrnném smyslu používá pouze v nejistých situacích (déšť *nebo* mlha). Nikdy bychom neřekli, že Země *nebo* Měsíc je planeta, nýbrž bychom postulovali přesnější fakt, že Země je planeta. V matematice je ale často výhodné netvrdit nebo nepoužívat najednou vše, co se předpokládá; to lze doložit např. na metodě geometrického místa v geometrii. Při této metodě se pro konstrukci některých geometrických míst používá zprvu pouze část předpokladů a teprve nakonec se prokáže platnost všech předpokladů pro hledané body jakožto průnik jednotlivých konstruovaných geometrických míst.

2.3.4. Souvislost s algebrou obvodů

Princip dvouhodnotovosti ve formální logice pro výroky umožňuje – jak to už kolem roku 1910 rozeznal Ehrenfest – pozoruhodnou vazbu k elektrotechnice (algebře obvodů), protože jak pro výroky, tak i pro spínače jsou možné jen dvě situace: Výroky jsou buď pravdivé, nebo nepravdivé



Obr. 2.4. a) Konjunkce A *a* B;
b) disjunkce A *nebo* B

a kontakty ve spínači jsou buď spojené (vedou), nebo rozpojené (nevedou). Tím mohou elektrické obvody sloužit jako modely pro logické spojování výroků a také naopak. Pravdivostním hodnotám odpovídá v modelu průchod proudu (lampa svítí), resp. přerušení proudu (lampa nesvítí). Negace

jedné výrokové proměnné ve výrokovém spojení se provede přechodem k opačné poloze u příslušného spínače. Konjunkce a disjunkce je realizována v obvodech znázorněných na obr. 2.4. Pravdivé jsou tehdy, když lampa modelu svítí.

2.3.5. Implikace: $A \Rightarrow B$

Pomocí slůvka „když" strčíš Paříž do láhve.

Francouzské přísloví

Pomocí negace a disjunkce lze ze dvou výroků A a B utvořit nové spojení výroků – implikaci

(1) (*non* A) *nebo* B,

která hraje v matematice a formální logice důležitou roli. Použijeme-li opět výroky

A: *Prší*, B: *Ulice je mokrá*,

dostaneme implikaci

(2) C: *Neprší, nebo bude ulice mokrá.*

Výrok A se nazývá předpoklad (premisa), výrok B je tzv. důsledek (conclusio) a v matematice bývá nazýván tvrzením.

Vyšetřeme logickou funkci, která přísluší implikaci a udává pravdivostní hodnotu implikace v závislosti na pravdivostních hodnotách obou výroků A a B. Implikace (1) má strukturu disjunkce. Tím je implikace nesprávná pouze tehdy, když jsou nesprávné oba výroky *non* A a B, které do ní vstupují, tj. když A je pravdivé a B nepravdivé. Je-li A nepravdivé, pak se od B nepožaduje nic – implikace je pak vždy správná (srov. obr. 2.5). Tím můžeme každou implikaci vyjádřit ve tvaru

(3) *Vždy když platí A, platí i B,*

resp. zkráceně

(4) *Když A, pak B.*

Věta (2), která nám sloužila jako příklad, pak zní takto:

Když prší, pak bude ulice mokrá.

Je důležité zdůraznit, že žádná implikace nevypovídá nic o platnosti faktů A a B. Zejména se n e t v r d í, že platí výrok A. Vždy když je pravdivé A, má být pravdivé i B. Nic víc se nepožaduje! (Kdo řekne A, musí říci i B.) Neudali jsme žádná pravidla či postupy, pomocí nichž lze z A získat B.

Věcná souvislost výroků běžného života či matematiky zcela ustoupí do pozadí, jde-li o formálně logické vyšetřování. Z logického pohledu je souvislost mezi výroky A a B v implikaci (1), resp. (4) dána smyslem spojek *nebo*, resp. *když ... pak*. Dobrým příkladem je proto běžná věta

Vždy když mám dovolenou, pak prší,

protože v ní nejde o příčinné souvislosti, ale o určitá zjištění. Dalšími příklady jsou věty

Když je $2 + 2 = 4$, *pak je sníh bílý,*
Když je $2 + 2 = 5$, *pak je sníh bílý,*
Když je $2 + 2 = 5$, *pak je sníh černý,*
Když je $2 + 2 = 4$, *pak je sníh černý.*

První tři výroky jsou pravdivé, zatímco poslední je nepravdivý:

Implikaci *Když A, pak B* lze vyjádřit též takto:

jež mají věcný obsah, či řečeno jinými slovy: na logickém smyslu spojek *když ... pak* je založeno každé další použití – ať všední nebo vědecké –, které zrcadlí kausální (příčinné), kondicionální (podmiňovací) nebo jiné podmínky či okolnosti. Zkráceným zápisem implikace

(5) $$A \Rightarrow B$$

je vzhledem k jejímu pozdějšímu použití v matematice a fyzice velmi sugestivně vyjádřeno, že výrok A podmiňuje výrok B anebo že fyzikální příčina A má za následek účinek B. V denním životě se zpravidla nebere v úvahu případ, kdy je výrok A v implikaci (5) nesprávný. Slovní obraty jako *Když budou současně vánoce a velikonoce, pak* ... anebo *Když voda poteče do kopce, pak* ... však přesto ukazují, že hovorový jazyk považuje implikaci za správnou i v těchto případech. Z něčeho nesprávného, nepravdivého plyne cokoliv!

Implikaci *Když A, pak B* lze vyjádřit gramaticky též takto:

Je-li A, pak B,
A implikuje B,
Z A plyne B (*též B plyne z A*),
A je postačující pro B,
B je nutné pro A,
A má za následek B,
Jenom když B, je možné A,
Jenom když B, pak A,
A jen (*tehdy*), *když B.*

Z hlediska formální logiky nejsou všechny tyto slovní obraty zcela korektní, neboť např. z výroku $2 + 2 = 4$ sotva vyplyne, že sníh je bílý, srov. odst. 2.7. (Byť už J. W. Goethe věděl, že důsledek *Ergo bibamus* se hodí ke všem premisám: *„Je pěkné počasí, ergo bibamus; Je špatné počasí, ergo bibamus...“*.)

2.3.6. Obrácení implikace (konverze)

Když východní vítr nepřemůže vítr západní,
pak přemůže západní vítr vítr východní.

Čínské přísloví

V disjunkci *A nebo B* lze výroky A a B zaměnit, aniž se tím změní pravdivostní hodnota tohoto výrokového spojení. Když v implikaci $A \Rightarrow B$ zaměníme předpoklad A a tvrzení B, získáme (logické) obrácení $B \Rightarrow A$ implikace $A \Rightarrow B$. Pro dříve uvedené implikace znějí jejich obrácení takto:

Když je sníh bílý, pak je $2 + 2 = 4$,
Když je sníh bílý, pak je $2 + 2 = 5$,
Když je sníh černý, pak je $2 + 2 = 5$,
Když je sníh černý, pak je $2 + 2 = 4$.

Druhá z těchto implikací je nepravdivá, všechny ostatní jsou pravdivé. Druhý příklad ukazuje, že pravdivost implikace nemusí mít za následek pravdivost jejího obrácení.

Když nějaká implikace $A \Rightarrow B$ popisuje fyzikální skutečnosti, pak se A nazývá příčinou jevu B. Při obrácení $B \Rightarrow A$ se usuzuje zpětně z účinku na příčinu. Tento případ se ve fyzice vyskytuje často, uvedený příklad však ukazuje, že fyzik nevystačí se samotnou logikou, bude-li chtít takový závěr odvodit ve fyzikálním smyslu zcela korektně. Jestliže znovu použijeme výroky A: *Prší* a B: *Ulice je mokrá*, pak příčinná souvislost vede na implikaci $A \Rightarrow B$: *Když prší, pak je ulice mokrá*. Z B však A bez dalšího neplyne, tj. implikace $B \Rightarrow A$: *Když je ulice mokrá, pak prší* (*pršelo*) nemusí být pravdivá, jelikož – a to právě když neprší – může pravdivost tvrzení B zajistit kropicí vůz. Chceme-li takové případy vyloučit, potřebujeme dodatečné poznatky, ležící mimo oblast logiky. Důsledky, které z výroků získáme na základě čistě logických důvodů, patří k *deduktivním* úsudkům, zatímco právě použitý způsob usuzování se nazývá *reduktivní*. Matematické úsudky jsou bez výjimky deduktivní.

2.3.7. Ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$

Pro výroky A: *Trojúhelník má všechny úhly stejné* a B: *Trojúhelník je rovnostranný* platí jak $A \Rightarrow B$, tak i $B \Rightarrow A$. Podívejme se obecně na případ, kdy pro dva dané výroky A a B platí jak implikace $A \Rightarrow B$, tak i její obrácení $B \Rightarrow A$. Z implikace $A \Rightarrow B$ dostaneme: Když platí A, pak platí i B. Z opačné implikace $B \Rightarrow A$ dostaneme: Když platí B, pak platí i A. Tím tedy jsou v tomto případě výroky A a B buď současně pravdivé, anebo současně nepravdivé. Takové výroky se nazývají logicky rovnocenné (ekvivalentní). Místo $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ píšeme stručně

(6) $$A \Leftrightarrow B\,.$$

Zápisem (6) je označeno výrokové spojení, které nazýváme *logickou ekvivalencí*. Ekvivalence dvou výroků A a B je slovně vyjádřena ve tvaru

(7) *A právě tehdy, když B.*

Uvedeme dva příklady ekvivalentních výroků:

65 437 je dělitelné 3 právě tehdy, když je ciferný součet čísla 65 437 dělitelný 3,

Měsíc je zelený sýr právě tehdy, když je možné provést kvadraturu kruhu pomocí pravítka a kružítka.

Ekvivalence se formuluje také některým z následujících způsobů (i když některé výrazy opět nejsou logicky zcela korektní, jsou v matematice běžné):

A tehdy a jen tehdy, když B,
B tehdy a jen tehdy, když A,
A je nutné a postačující (a stačí) pro B,
Když A, pak B a naopak,
B, právě když A.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
p	p	p	p	p
p	n	n	p	n
n	p	p	n	n
n	n	p	p	p

Obr. 2.5

Být logicky ekvivalentní znamená mít stejnou pravdivostní hodnotu, nikoliv však stejný smysl. Proto může být ve spojení dvou výroků nahrazen jeden výrok jiným ekvivalentním výrokem, aniž by se tím narušila pravdivostní hodnota výrokového spojení.

Cvičení

2.4. Obrázky 2.3 a 2.5 udávají příklady možností, jak popsat dvoumístná výroková spojení určením jejich pravdivostních hodnot p a n [srov. poznámku pod čarou [8]) na str. 29]. Existuje celkem 16 možností, jimiž můžeme dvoumístnému výrokovému spojení přiřadit pravdivostní hodnotu, tj. popsat je. Udejte další výroková spojení a pokuste se je slovně popsat!

2.5. Sestrojte pravdivostní tabulky pro spojky *ani ... ani*; *buď ... anebo*; *sice .... nikoliv však*!

2.6. Nechť je výrokové spojení $A \mid B$ (Shefferův symbol) určeno tabulkou

A	B	$A \mid B$
p	p	n
p	n	p
n	p	p
n	n	p

Na toto spojení výroků lze převést všech 16 možných výrokových spojení. O která výroková spojení popsaná v tomto odstavci se jedná u spojení

$$A \mid (A \mid B), \quad (A \mid B) \mid (A \mid B)\,?$$

2.7. Utvořte negaci následujících výroků:
a) *Trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný.*
b) *A mluví česky nebo rusky.*

2.8. Jsou následující výroková spojení pravdivá?
a) *Když nejsem starší než 200 let, pak jsem větší než 2 m.*
b) *Když je člověk vyšší než 2 m, pak je starší než 200 let.*
c) *Jen když je člověk vyšší než 2 m, je starší než 200 let.*
d) *Buď je* $5 < 3$, *nebo z* $2 + 3 = 5$ *plyne* $3 . 4 = 12$.
e) *Buď je* $5 < 3$, *nebo z* $2 + 3 = 6$ *plyne* $3 . 4 = 12$.
f) *Buď je* $5 > 3$, *nebo z* $2 + 3 = 6$ *plyne* $3 . 4 = 12$.
g) *Když je* $5 > 3$, *pak platí jak* $2 + 3 = 6$, *tak i* $3 . 4 = 12$.
h) *Když je* $5 > 3$, *pak platí jak* $2 + 3 = 5$, *tak i* $3 . 4 = 12$.
i) *Když je* $5 < 3$, *pak platí jak to, že* $2^{257} - 1$ *je prvočíslo, tak i to, že Goldbachova domněnka je správná.*
j) *Když jsem velký, pak jsem malý.*
k) *Jsem velký a jsem malý.*
l) *Jsem velký nebo jsem malý.*
m) 7 *nebo* 9 *je prvočíslo.*
n) 2 *a* 4 *jsou dělitele čísla* 216.
o) 2 *nebo* 4 *je dělitelem čísla* 216.
p) *Právě jedno z čísel* 2 *a* 4 *je dělitelem čísla* 216.

2.9. Jsou následující výroková spojení ekvivalentní?
a) *Dnes prší a zítra bude svítit slunce, anebo pozítří bude svítit slunce. – Dnes prší a zítra bude svítit slunce, anebo dnes prší a pozítří bude svítit slunce.*
b) *To není ten případ, že by to byla vařená vejce. – To jsou nevařená vejce.*

2.10. A a B jsou dané výroky. Které z následujících implikací jsou ekvivalentní?

a) $A \Rightarrow B$. b) $\bar{A} \Rightarrow B$. c) $A \Rightarrow \bar{B}$. d) $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$.
e) $B \Rightarrow A$. f) $\bar{B} \Rightarrow A$. g) $B \Rightarrow \bar{A}$. h) $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

2.11. A, B a C jsou osoby. A říká, že B lže. B říká, že C lže. C tvrdí, že A a B lžou. Výrok osoby A se vztahuje na výrok osoby B, výrok osoby B se vztahuje na výrok osoby C a konečně výrok osoby C se vztahuje na výroky osob A i B. Kdo lže a kdo říká pravdu? (*L. Carroll*)

2.12. V Logickém císařství potká poutník, který se chce dostat do místa A, na křižovatce cest obyvatele císařství. Obyvatelé Logického císařství buď stále říkají pravdu, nebo stále lžou (tzn. popírají každý výrok, výroková spojení však tvoří správně). Kterou z následujících dvou otázek se poutník zaručeně dozví, kudy vede správná cesta do A?

a) Řekl byste i před hodinou, že tato cesta vede do A?

b) Je pravda, že tato cesta vede do A a že vy říkáte pravdu?

2.13. Určete charakter osoby A na základě následujícího rozhovoru v Logickém císařství (viz 2.12). C: „B je lhář." B: „A a C jsou stejného druhu." (Tj. stále lžou nebo říkají stále pravdu.)

2.4. Logické zákony (tautologie)

Vedle implikace $A \Rightarrow B$ jsme se zabývali i jejím obrácením $B \Rightarrow A$. Použijeme-li vedle výroků A a B i jejich negace $\bar{A}$ a $\bar{B}$, dostaneme další výroky, které souvisí s implikací $A \Rightarrow B$, jako např.

(8) $$\bar{A} \Rightarrow \bar{B} \quad \text{(inverze)},$$

(9) $$\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad \text{(kontrapozice)}$$

(srov. cvičení 2.10). Například implikace

Když je přirozené číslo n dělitelné 6,
je dělitelné i 3

má toto obrácení:

Když je přirozené číslo n dělitelné 3,
je dělitelné také 6;

inverze naší implikace má tvar

Když přirozené číslo n není dělitelné 6,
pak není dělitelné ani 3

a konečně kontrapozice zní

Když přirozené číslo n není dělitelné 3,
pak není dělitelné ani 6.

Na základě definice implikace – viz (1) – můžeme (8), resp. (9) zapsat pro libovolné výroky A a B takto:

$$\bar{\bar{A}} \textit{ nebo } \bar{B}, \quad \text{resp.} \quad \bar{\bar{B}} \textit{ nebo } \bar{A}$$

neboli – protože $\bar{\bar{A}}$ je ekvivalentní s A a $\bar{\bar{B}}$, je ekvivalentní s B – takto:

$$A \textit{ nebo } \bar{B}, \quad \text{resp.} \quad B \textit{ nebo } \bar{A}.$$

Odtud dostáváme pro libovolné výroky A a B následující ekvivalence pro implikaci $A \Rightarrow B$ a pro výroková spojení, která jsou s ní svázána:

(10) $$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}),$$

(11) $$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}).$$

Naproti tomu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ platí pro dva dané výroky A a B pouze tehdy, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu. Výroková spojení, jež jsou jistými výroky splněna a jinými nikoliv, se nazývají *splnitelná*. Implikace patří do této třídy výrokových spojení. V protikladu k tomu jsou výroková spojení (10) a (11) platná pro libovolné výroky A a B, jelikož na základě jejich logické struktury vždy dostaneme pravdivostní hodnotu „pravdivý". Takovéto obecně platné logické výrazy se nazývají *logické zákony* nebo *tautologie*. Patří sem např.

$(A \textit{ a } B) \Leftrightarrow (B \textit{ a } A)$ [komutativita konjunkce],
$[(A \textit{ nebo } B) \textit{ nebo } C] \Leftrightarrow [A \textit{ nebo } (B \textit{ nebo } C)]$ [asociativita disjunkce],
$A \textit{ nebo } (\textit{non } A)$ [věta o vyloučeném třetím, tertium non datur],
$A \Leftrightarrow \textit{non } (\textit{non } A)$ [dvojitá negace],
$[(\textit{non } A) \textit{ nebo } B] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ [implikace],
$\left.\begin{array}{l} \textit{non } (A \textit{ a } B) \Leftrightarrow [(\textit{non } A) \textit{ nebo } (\textit{non } B)], \\ \textit{non } (A \textit{ nebo } B) \Leftrightarrow [(\textit{non } A) \textit{ a } (\textit{non } B)] \end{array}\right\}$ [de Morganovy zákony],
$\textit{non } (A \textit{ a } (\textit{non } A))$ [věta o vyloučeném sporu, principium contradictionis],
$((\textit{non } A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ [reductio ad absurdum].

U logického zákona nezáleží na tom, jaké výroky se spojují, nýbrž jde o to, jak se spojují, stejně jako v algebře u obecně platné formule (identity), např.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

nezáleží na tom, jaká čísla se dosadí za x a y, protože formule platí vzhledem ke své povaze pro všechna (reálná) čísla.

Negace logického zákona (tautologie) má vždy pravdivostní hodnotu „nepravdivý“ a nazývá se *kontradikce.* Z věty o vyloučeném sporu tak např. dostaneme kontradikci

$$A \text{ a } (non\ A).$$

Porovnáme-li situaci znovu s algebrou, je např. vzorec

$$(x + y)^2 > x^2 + 2xy + y^2$$

vždy (tj. pro všechna reálná čísla x a y) neplatný. Splnitelné formule ve smyslu algebry jsou např. určující rovnice jako $2x = 5$ nebo $x^2 - x - 1 = 0$ pro reálná čísla x. Tautologie nejsou považovány za matematické věty, protože z obsahového hlediska nepřinášejí nové poznatky. „O počasí nevím nic, když vím, že prší nebo neprší“ (L. Wittgenstein). Přesto tautologie nevyhnutelně při důkazech potřebujeme, takže se někdy objevily i názory, že celá matematika je jediná tautologie. My toto mínění nesdílíme.

Tautologie umožňují změnu logické struktury výroků, aniž by se tím měnil jejich obsah. Příklad:

Jsou-li ve shodných kruzích dány tětivy, pak platí:

Když jsou tětivy shodné, pak jsou shodné i jejich vzdálenosti od středu kruhů.

Jsou-li tětivy ve dvou kruzích stejné, ale jejich vzdálenosti od středu různé, pak mají kruhy různý průměr.

2.5. Důležitá pravidla logického usuzování

Logické zákony popisují logické skutečnosti. Korektní pravidla odvozování, která na nich spočívají, jsou naproti tomu návody k jednání (dokazování), protože udávají, jak lze přetvářet pravdivé výroky, aby vznikly opět pravdivé výroky.

Důležitou tautologií je implikace

(12) $$(A \text{ a } (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B\,.$$

Tato implikace je nepravdivá jen tehdy, když je předpoklad pravdivý a tvrzení nepravdivé. Předpokladem je ve (12) konjunkce A *a* $(A \Rightarrow B)$, resp. – vzhledem k (1) – A *a* $[(non\ A)$ *nebo* $B]$, která je pravdivá jenom tehdy, když je pravdivý jak výrok A, tak i výrok $(non\ A)$ *nebo* B. Když je ale A pravdivé, je *non* A nepravdivé, a tím může být výraz $(non\ A)$ *nebo* B pravdivý pouze tehdy, když je pravdivé B. Když je pravdivé A, musí být pravdivé i B, aby byla zajištěna pravdivost předpokladu implikace (12). Pak je ale tvrzení – tj. B – rovněž pravdivé, a tím je správná i implikace. Slovy zní (12) takto: Je-li pravdivý výrok A a platí-li implikace $A \Rightarrow B$, pak je pravdivý i výrok B. Implikace $A \Rightarrow B$ netvrdí, že výrok A je pravdivý! Logický zákon (12) nám tak skýtá možnost přejít od pravdivého výroku A k jinému pravdivému výroku B. Jelikož jsme výrok B do jisté míry oddělili od implikace $A \Rightarrow B$, nazývá se pravidlo příslušné tomuto logickému zákonu *oddělovací pravidlo* nebo též *modus ponens.* Toto pravidlo má dvě premisy, totiž A a $A \Rightarrow B$.

Příklad: Považujme implikaci *Když byl zapojen kontakt, pak světlo svítilo* za správnou. Když je pravdivý výrok *Kontakt byl zapojen*, pak je pravdivý i výrok *Světlo svítilo.*

Jestliže budeme místo implikace $A \Rightarrow B$ uvažovat její kontrapozici $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, pak pro (12) dostaneme

$$(\bar{B} \text{ a } (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})) \Rightarrow \bar{A}$$

$(\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

nebo vzhledem k (10) též

(13) $$(\bar{B} \text{ a } (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \bar{A}\,.$$

Pravidlo, které přísluší implikaci (13), tzv. *modus tollens*, zní: Když platí $\bar{B}$ a $A \Rightarrow B$, pak lze soudit, že platí $\bar{A}$.

Souhrnně tedy dostáváme: Když někdo akceptuje implikaci, musí s premisou přijmout i důsledek, a jestliže zavrhne důsledek, musí totéž učinit i s premisou.

Tautologie

(14) $$[(A \Rightarrow B) \text{ a } (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

vede na úsudkové pravidlo: Když platí $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, pak lze usoudit, že platí i $A \Rightarrow C$ (řetězový úsudek).

2.6. Logické usuzování (výroková logika)

Pokud není pravdivost nějakého výroku bezprostředně patrná, musíme ji odkrýt. Frege k logickému usuzování poznamenává: „Důležité není jen to, že se přesvědčíme o pravdivosti závěrečné věty; musíme si také uvědomit, co nás k tomuto přesvědčení opravňuje. To vyžaduje pevné koleje, v nichž se tvoření úsudku musí pohybovat, a takové koleje nejsou v řeči slov vytvořeny“. K tvoření úsudků (usuzování) je třeba předpokladů dvojího druhu. Nejprve potřebujeme známé pravdivé výroky a pak musí být dána pravidla usuzování, která v konečném počtu kroků umožní uznat na základě pravdivosti známých výroků za pravdivé i výroky nově získané. Těmito pravidly se tedy pravdivost původních výroků přenáší na výroky nové (na tzv. úsudky). Bohatost a mnohotvárnost přípustných úsudkových postupů je výsledkem přípustných pravidel, resp. logických zákonů, na nichž jsou tato pravidla založena.

Už dříve jsme poukázali na to, že matematika vystačí s několika druhy výrokových spojení (negací, konjunkcí a disjunkcí)[12]. Každé z těchto výrokových spojení může vystupovat na jedné straně jako předpoklad, na druhé straně jako tvrzení v logickém úsudku. V matematice je proto zapotřebí pravidel, která říkají, jak se na jedné straně usoudí, že takové spojení výroků je správné, anebo jak se na druhé straně z takového spojení výroků dá usuzovat dále.

Oddělovací pravidlo je příkladem úsudku ze spojení výroků; tam se totiž z implikace usuzuje na její důsledek. K úsudku, že platí implikace $A \Rightarrow B$, jsme vedeni tak, že z daných předpokladů a z výroku A odvodíme důsledek B, protože pak je výrok $A \Rightarrow B$ z daných předpokladů vždy dokazatelný.

Další důležité úsudkové pravidlo je *pravidlo dosazovací*, které říká: Ve spojení výroků lze místo výroku A (ale pak všude) dosadit ekvivalentní výrok B. Tento postup je běžný ve všech odvětvích matematiky; např. za nezápornou proměnnou $u \geqq 0$ lze dosadit všude reálnou proměnnou v^2.

Při výstavbě systému úsudkových pravidel stojíme před dvěma protikladnými možnostmi. Z hlediska logiky je žádoucí stanovit pokud možno málo pravidel, ze kterých lze všechna potřebná pravidla odvodit. Na druhé straně je však takový systém pro potřeby matematiky nevhodný, protože by pravidla měla být pochopitelně co nejvíce přizpůsobena matematickým skutečnostem. Jedním z pravidel zajímavých pro matematiku je to, že implikaci *Když A, pak B* lze dokázat také tak, že se ukáže platnost implikace *Když* $\bar{B}$, *pak* $\bar{A}$.

Pomocí systému úsudkových pravidel, který spočívá ve výběru tautologií odpovídajících vždy danému účelu, se logické úsudky velmi zjednoduší. (Pro srovnání: I nejnádhernější budovy jsou postaveny z jednoduchých stavebních kamenů.) Použitím korektních úsudkových pravidel vybudujeme řetěz výrokových spojení, jehož první člen je spojení, které je pravdivé, resp. je za takové považováno, a jehož další členy z prvního logicky vyplynou, až se nakonec dostaneme k požadovanému tvrzení.[13]) Ověření správnosti i těch nejsložitějších myšlenkových pochodů se tedy dá převést na řadu jednoduchých činností, přičemž je třeba ukázat, že jednotlivé kroky neodporují úsudkovým pravidlům. Pravděpodobnost, že se při takovém způsobu dokazování dopustíme omylu, je velmi malá. Ne vždy však matematik postupuje takto, častěji používá zkrácené úsudky, které zkracují často používané, a proto dobře známé způsoby usuzování. Zde se přirozeně vloudí i možnost, že se vynecháním předpokladů apod. dopustíme chyby. Rovněž zde vyvstává nebezpečí, že pro nezběhlého čtenáře se úsudek stane nesrozumitelným.

Zkráceným úsudkem z biologie je proslulý výrok Ch. Darwina: „Čím máme v Anglii více koček,

[12]) Srov. cvičení 2.6.

[13]) Jak je jistě známo každému, kdo někdy něco dokazoval, je právě nalezení odpovídajících logických úsudkových řetězců obecně nelehká záležitost, která vyžaduje jistou zkušenost a fantazii (srov. odst. 7.1 až 7.3).

tím lépe se daří ovcím na pastvinách." Poněkud obšírnější zdůvodnění zní takto: Mnoho koček znamená méně myší na polích. Méně myší znamená více čmeláků, jimž jsou myši jedinými nepřáteli. Mnoho čmeláků konečně znamená více jetele, neboť čmeláci jsou jediný druh hmyzu, který může svými dlouhými sosáky opylovat květy jetele.

2.7. O jednom způsobu uvažování, který nepatří k výrokové logice

Jeden z často používaných úsudků v matematice nalezneme v následujícím příkladu:

Když (*platí*)*: všechna sudá čísla jsou dělitelná*
2 *a* 8 *je sudé číslo, pak* (*platí*)*:* 8 *je dělitelné* 2.

Když souvislosti vyjádříme formálně pomocí výrokových proměnných, dostaneme spojení výroků

(15) *Když* (A *a* B), *pak* C,

které není logickým zákonem. Když např. za A a B dosadíme výroky z uvedeného příkladu a za C dáme nový výrok 8 *je dělitelné* 3, dostaneme nesprávnou implikaci. Přesto je mezi výroky v uvedeném příkladu jistá souvislost, podle níž je dělitelnost čísla 8 číslem 2 v důsledku spojení (15) vlastně logicky nutná.

Obecně se říká: Mají-li všechny prvky nějaké množiny jistou vlastnost a je-li dán nějaký prvek této množiny, pak má také on tuto vlastnost. Souvislost, kterou jsme popsali, nelze v rámci logiky výroků (*výrokové logiky*) vyložit. Proto se budeme zabývat takzvanou *predikátovou logikou.*

2.8. Výrokové funkce

Dosud nás na výroku zajímala pouze jeho pravdivostní hodnota. Výrok jsme proto mohli posuzovat jako celek a mohli jsme jej symbolicky vyjádřit pomocí jedné výrokové proměnné. V dalším vezmeme vnitřní stavbu (strukturu) výroků více v úvahu, a to tím, že výroky oddělíme od předmětu, o němž vypovídají. Ukážeme na příkladě, co se tím míní.

Vyjdeme od množiny přirozených čísel 1, 2, 3, ... Celá řada čísel v množině přirozených čísel se vyznačuje tím, že *jsou sudá.* Můžeme říci

2 *je sudé číslo,*
4 *je sudé číslo,*
6 *je sudé číslo*
atd.

Všechny výroky mají stejnou strukturu: jistým přirozeným číslům se přisoudí vlastnost *být sudý*. Část výroku *je sudé číslo* se beze změny objevuje ve všech výrocích. Pouze ta část výroku, na kterou se *je sudé číslo* vztahuje, se neustále mění. V takových případech bývá výhodné shrnout všechny výroky pomocí proměnné, kterou napíšeme místo přirozených čísel 2, 4, 6, ..., schematicky do věty

x je sudé číslo.

Vyšli jsme sice od výroků, ale věta *x je sudé číslo* sama není výrokem, protože není ani pravdivá, ani nepravdivá (srov. *Prší*). Tato věta udává pouze postup pro vytváření výroků, který spočívá v tom, že se proměnná x nahradí přirozenými čísly. Tím zpětně získáme všechny jmenované výroky, ale současně také nepravdivé výroky

3 je sudé číslo,
5 je sudé číslo
atd.

Důležité je, že pro větu *x je sudé číslo* máme k dispozici dobře popsanou množinu prvků, které můžeme za proměnnou x dosadit tak, že tím získáme smysluplné výroky (tedy takové výroky, jejichž pravdivostní hodnotu lze stanovit). Nahrazovat proměnnou x body, květináči apod. nemá smysl. Citujme k tomu B. Russella: „V matematické logice se každý symbol, jehož význam není jednoznačně určen, nazývá proměnná. Různá určení, jakého významu mohou nabýt, se nazývají hodnoty proměnné. Utvoříme-li např. výrok *o panu A a o panu B*, pak jsou *pan A* a *pan B* proměnné, jejichž hodnoty jsou omezeny na lidi.“

Náš příklad vede na následující definici: Písemně zachycenou skutečnost, ve které vystupuje proměnná, nazveme *výrokovou funkcí*, když nahrazením této proměnné libovolným prvkem jisté dané neprázdné množiny dostaneme výrok. Prvky této množiny se nazývají *předměty* nebo *individua*, proměnná se nazývá *individuální proměnná*. Nahrazení proměnné prvky dané množiny se nazývá *přípustné*. Když je x individuální proměnná a A je vlastnost, kterou připisujeme všem individuím dané množiny, zapíšeme odpovídající výrokovou funkci ve tvaru $A(x)$; ta je pak definována alespoň pro prvky dané množiny.

Pojem výrokové funkce lze zobecnit také na případ více individuálních proměnných. Příkladem je $A(x, y)$: *x je větší než y* s individuálními proměnnými x a y z množiny reálných čísel.

Stále předpokládáme, že množina individuí obsahuje alespoň jeden prvek, takže po dosazení za individuální proměnnou dostaneme aspoň jeden výrok.

Cvičení

2.14. V následujících výrazech označuje x proměnnou, která zastupuje reálná čísla. Které výrazy jsou výrokové funkce?

a) $6 + x = 10$,
b) $(1 + x)^2$,
c) $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$,
d) $(1 + x)^2 = 1 + x^2$.

2.15. Nechť proměnná x je omezena na množinu Marťanů. Je věta *x je menší než 4 m* výroková funkce?

2.9. Spojování výrokových funkcí

Předpokládejme v dalším, že výrokové funkce, které vstupují do nějakého spojení, jsou definovány nad stejnou množinou. Uvážíme-li, že výrokové funkce přejdou ve výrok tím, že jejich individuální proměnnou přípustným způsobem nahradíme, pak můžeme spojení definované pro výroky rozšířit i na výrokové funkce. Jsou-li $A(x)$ a $B(x)$ výrokové funkce definované nad stejnou množinou, pak můžeme považovat výrazy

$$\overline{A(x)},\quad A(x)\ a\ B(x),\quad A(x)\ nebo\ B(x),$$
$$A(x) \Rightarrow B(x) \quad \text{a} \quad A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

za známé. Tyto výrazy jsou opět výrokové funkce. Spojení výrokových funkcí označíme stejnými názvy jako odpovídající výroková spojení.

Jako příklad uvažujme negaci. $A(x)$ budiž výroková funkce *x je sudé číslo* nad množinou přirozených čísel. Pak $\overline{A(x)}$ je výroková funkce *x není sudé číslo* nebo, jelikož sudost a lichost u přirozených čísel jsou navzájem opačné (komplementární) vlastnosti, *x je liché číslo*. Nad množinou přirozených čísel dávají funkce $\overline{A(x)}$: *x není sudé číslo* a $A_0(x)$: *x je liché číslo* stejné výroky čili

$$\overline{A(x)} \Leftrightarrow A_0(x) \quad \text{nad množinou přirozených čísel.}$$

Jestliže ale místo množiny přirozených čísel budeme uvažovat množinu kladných zlomků, pak nad touto množinou sice platí

$$A_0(x) \Rightarrow \overline{A(x)}, \quad \text{nikoliv však} \quad \overline{A(x)} \Rightarrow A_0(x),$$

a tedy tím spíše neplatí $\overline{A(x)} \Leftrightarrow A_0(x)$, jelikož $A_0(\frac{1}{2})$ je nepravdivé a $\overline{A(\frac{1}{2})}$ je pravdivé, a tím je také implikace $\overline{A(\frac{1}{2})} \Rightarrow A_0(\frac{1}{2})$ nepravdivá. Protože nad množinou kladných zlomků pojmy *sudý* a *lichý* nejsou nadále navzájem komplementární, nepředstavuje už výroková funkce $A_0(x)$ nad touto množinou popření (negaci) výrokové funkce $A(x)$. Na tomto příkladě současně vidíme, že je důležité, nad jakou množinou individuí je výroková funkce definována.

Cvičení

2.16. Nechť je x proměnná, kterou nahradíme
a) reálnými čísly,
b) reálnými čísly, které jsou větší než 10.
Jsou následující výrokové funkce ekvivalentní?

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)},$$

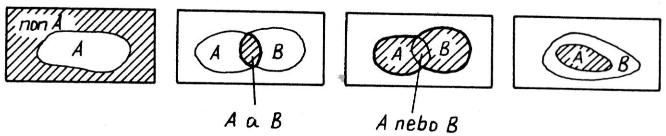
$$2x = (x+1) + (x-1).$$

2.17. Lze pro implikaci $A(x) \Rightarrow B(x)$ oslabit předpoklad, že obě výrokové funkce jsou definovány nad stejnou množinou individuí?

2.18. Nahraďme individuální proměnnou x reálnými čísly. Negujte výrokovou funkci *x je větší než 23 nebo* e^{π}.

2.10. Vztahy k množinové algebře

Spojení výrokových funkcí lze velmi dobře znázornit geometricky pomocí tzv. Vennových diagramů. K tomu použijeme souvislost výrokové funkce s množinou individuí, která jí přísluší. Ke každé výrokové funkci patří jistá množina individuí, pro kterou dává funkce pravdivé výroky. Na druhé straně lze každou množinu charakterizovat vlastností (nebo vlastnostmi), kterou mají jenom její prvky[14]. Tím se každému prvku přiřkne jedna vlastnost (nebo více vlastností) a toto přiřazení se uskuteční prostřednictvím výrokové funkce. Tedy obráceně přísluší každé množině také jistá výroková funkce.



Obr. 2.6. Vztah k množinové algebře (Vennovy diagramy)

Když vyšetřujeme výrokovou funkci $A(x)$: *x je prvkem bodové množiny* (*útvaru*) *M* v obdélníku, který útvar M obsahuje, dostaneme bezprostředně geometrické znázornění (srov. obr. 2.6). Negaci odpovídá utvoření doplňku množiny, konjunkci průnik, disjunkci sjednocení, implikaci inkluze a ekvivalenci rovnost množin.

[14]) Případ, že množinu lze udat výčtem jejích prvků, je možný pouze u množin s konečně mnoha prvky.

2.11. Kvantifikace

Výrokové funkce samotné nemají pravdivostní hodnotu. Pro každou výrokovou funkci existuje množina individuí, po jejichž dosazení za proměnnou se výroková funkce stane výrokem. Přitom nastane jeden ze tří případů:
1. Všechny výroky jsou pravdivé.
2. Některé, ale ne nutně všechny výroky jsou pravdivé.
3. Žádný výrok není pravdivý.

Označme M množinu individuí, která přísluší výrokové funkci $A(x)$. Pak se tři uvedené případy formulují v matematice takto:
1. Pro každé x z M je $A(x)$ pravdivé,
   Pro všechna x z M je $A(x)$ pravdivé,
   Pro libovolné x z M je $A(x)$ pravdivé,
   symbolicky $\forall x$: $A(x)$.
2. Existuje (alespoň jedno) x z M, pro které je $A(x)$ pravdivé.
   Existuje x z M, které splňuje $A(x)$.
   Pro alespoň jedno x z M je $A(x)$ splněno,
   symbolicky $\exists x$: $A(x)$.
3. Neexistuje žádné x z M, které splňuje $A(x)$.
   Neexistuje žádné x z M, pro které $A(x)$ platí.
   Pro žádné x z M není $A(x)$ pravdivé.

K tomu uveďme tyto příklady:
1. *Pro všechna reálná čísla platí* $x^2 > -1$.
2. *Existují reálná čísla, pro která platí* $x^2 > 10^4$.
3. *Neexistuje žádné reálné číslo, pro které by bylo* $x^2 < -1$.

Každou výrokovou funkci $A(x)$ s neprázdnou množinou individuí lze pomocí slov *pro všechna* nebo *existuje* atd. blíže určit (kvantifikovat) s ohledem na pravdivé výroky, které může dát. Výrazy *pro všechna* nebo *existuje* se nazývají *kvantifikátory* (*kvantory*). Když stojí kvantifikátor před výrokovou funkcí, je jím vázána (kvantifikována) dosud volná proměnná ve výrokové funkci, a tím vzniká výrok. Kvantifikátor *pro všechna* (*pro každé*), resp. *existuje* se nazývá *obecný* (*velký, univerzální*) *kvantifikátor*, resp. *existenční* (*malý*) *kvantifikátor* a označuje se symbolem $\forall$, resp. $\exists$. Výroky utvořené obecným nebo existenčním kvantifikátorem se nazývají *obecné* nebo *existenční výroky*.

Kvantifikované nebo vázané proměnné už nelze nahradit libovolným prvkem množiny individuí, tyto proměnné jsou příslušným kvantifikátorem vázány na jisté množiny prvků: v uvedených příkladech v 1. na reálná čísla a v 2. na všechna reálná čísla, pro která je $|x| > 10^2$. Často se v textu kvantifikátory vynechávají a je na čtenáři, aby ze souvislostí rozeznal obor platnosti té které výrokové funkce. V zásadě ale je rozdíl mezi výrokovou funkcí

$$A(n):\ 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1)$$

nad množinou přirozených čísel N a mezi výrokem

Pro všechna přirozená čísla platí
$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$,
resp. (ve zkráceném zápisu pomocí kvantifikátoru)

$$\forall n \in N:\ 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1),$$

i když poslední výrok zpravidla píšeme zkráceně ve tvaru

$$1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1),$$

protože není třeba se obávat nějakých nedorozumění. Tak v této knize budeme (mimo kapitolu o logice) používat tento obvyklý zkrácený způsob zápisu. Problémy se zkracováním mohou nastat, když např. ve výroku

Pro všechna reálná čísla platí $x^2 \geqq 0$

kvantifikaci vynecháme nebo když kvantifikujeme nepřesně slovy *pro všechna*: pro imaginární číslo i totiž platí $i^2 = -1 < 0$. Když součet $1 + 2 + \ldots + n$ zkrátíme symbolem $\sum_{k=1}^{n} k$, pak je běžný index k vázaná proměnná, zatím co proměnná n je volná. Ve výroku o součtu prvních n přirozených čísel je n také vázáno.

V některých odvětvích matematiky existují i jiné kvantifikace, které mohou typické situace popsat lépe:

Existuje právě jedno x z M s $A(x)$.
Existuje nejvýše jedno x z M, pro které je $A(x)$ pravdivé.
Pro skoro všechna x z M nastane $A(x)$.
Pro nekonečně mnoho x z M platí $A(x)$.

Z výrokové funkce lze výroky získat následujícími způsoby:
1. přípustným dosazením za volné proměnné;
2. kvantifikací volných proměnných.

Všechny matematické věty jsou buď výroky, nebo kvantifikované výrokové funkce (srov. novější pojetí axiómů v odst. 3.5).

Cvičení

2.19. Udejte pomocí obecného a existenčního kvantifikátoru negaci výroku a) $\exists x: A(x)$, b) $\forall x: A(x)$!

2.20. Jak zní správná negace výroku *Všechna sudá čísla jsou dělitelná* 3? Je jí výrok *Ne všechna sudá čísla jsou dělitelná* 3 nebo výrok *Všechna sudá čísla nejsou dělitelná* 3?

2.21. Jak zní správná negace věty *Existuje trojúhelník, v němž součet úhlů je různý od* 180°?
a) *Existuje trojúhelník, v němž se součet úhlů rovná* 180°.
b) *Neexistuje trojúhelník se součtem úhlů* 180°.
c) *Neexistuje trojúhelník, v němž součet úhlů není* 180°.
d) *Pro všechny trojúhelníky je součet úhlů* 180°.
e) *Pro všechny trojúhelníky neplatí, že součet úhlů je* 180°.
f) *Neexistuje trojúhelník, v němž je součet úhlů různý od* 180°.

2.22. Je správná implikace *Když jsou všichni lidé smrtelní a všichni lidé teplokrevní, pak neexistuje člověk, který je nesmrtelný nebo studenokrevný?*

2.23. Jsou následující kvantifikované výrokové funkce ekvivalentní?
a) *Každý člověk je buď logik, nebo není logik.*
Každý člověk je logik nebo žádný člověk není logik.
b) *Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*
Pro všechna prvočísla platí: neexistuje největší prvočíslo.

2.24. Jak znějí negace k následujícím výrokům?
a) *Bílé vrány existují.*
b) *Žádný člověk nemusí.*
c) *Některá přirozená čísla jsou sudá.*
d) *Všichni Marťané jsou vyšší než* 2 *m.*

2.12. Logické usuzování (predikátová logika)

Při logickém usuzování se předpokládá znalost toho, že všichni lidé jsou smrtelní a že Sokrates je člověk; z toho se usoudí – což by předtím nikdo nebyl očekával – že Sokrates je smrtelný.

B. Russell

V odst. 2.7 jsme na příkladu ukázali, že k tomu, abychom mohli provádět všechny matematické úsudky, nevystačíme s těmi úsudky, které skýtá výroková logika. Věnovali jsme se proto výrokovým funkcím a obrátili jsme se tak k predikátové logice[15]).

Usuzování v rámci predikátové logiky se uskutečňuje na základě zákonů predikátové logiky. *Zákonem $A(x)$ predikátové logiky* je taková výroková funkce, která dá platný výrok pro v š e c h n a možná dosazení za individuální pro-

[15]) Tento název pochází z toho, že libovolná výroková funkce $A(x)$ (třeba *x je sudé číslo*) přiřadí libovolnému individuu x predikát A (zde *sudý*).

měnnou. Zde odpadá omezení na jistý obor individuí, odpovídající dané výrokové funkci. Vždyť omezení na určitý obor individuí by znamenalo, že jenom speciální individua splňují zákon, který by tím nebyl všeobecně platný a nemohl by tak být zákonem. V dříve použitém příkladu $A(x)$: *x je sudé číslo* tedy $A(x)$ nemůže být zákonem predikátové logiky, protože $A(x)$ má smysl pouze pro čísla a platný výrok dává pouze pro některá z nich.

Ukážeme na příkladě, že zákony predikátové logiky vůbec existují. Pro každou výrokovou funkci a všechna možná dosazení do ní zřejmě platí

$$A(x)\ \textit{nebo}\ (\textit{non}\ A(x))\,,$$

protože dosazení zcela libovolného individua x_0 vede na výrok $A(x_0) = A_0$ a pro výrok, jak je známo, platí

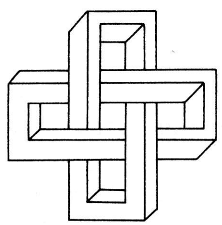
$$A_0\ \textit{nebo}\ (\textit{non}\ A_0) \quad \text{(věta o vyloučeném třetím).}$$

Princip použitý v příkladě lze zobecnit. Každý zákon výrokové logiky lze rozšířit na zákon predikátové logiky tím, že se za každou výrokovou proměnnou všude dosadí stejná výroková funkce. Tak dostaneme pro výroky A, B a C z řetězového úsudku $[(A \Rightarrow B)\ a\ (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ zákon predikátové logiky

$$[(A(x) \Rightarrow B(x))\ a\ (B(x) \Rightarrow C(x))] \Rightarrow (A(x) \Rightarrow C(x))\,.$$

Vedle zákonů odvozených z výrokové logiky existují další specifické zákony predikátové logiky, na kterých spočívají důležitá pravidla usuzování, např.:

> Když pro všechny prvky nějaké množiny platí $A(x)$, pak existuje alespoň jeden prvek, pro který platí $A(x)$.
>
> Když je $A(x)$ pravdivé pro libovolný prvek nějaké množiny, pak je $A(x)$ pravdivé pro všechny prvky této množiny.



Obr. 2.7

Požadovali jsme, aby množina individuí pro výrokové funkce nebyla prázdná, s cílem dostat z výrokové funkce aspoň jeden výrok. Uvedená úsudková pravidla ukazují, že tento náš požadavek je nutný. Když totiž za množinu individuí zvolíme množinu andělů a za výrokovou funkci vlastnost andělů mít křídla, pak na základě prvního pravidla existuje alespoň jeden anděl s křídly. Předpoklad se vztahuje na prázdnou množinu věcí (andělé) a tvrzení nemůže samozřejmě dát víc, než co vězí v předpokladu, nemůže tedy ani logickými prostředky zajistit existenci andělů. Stejně tak se těleso znázorněné na obr. 2.7 nestane ani o píď reálnějším na základě výroku, že má 32 vrcholů.

Nebudeme dále sledovat logické usuzování, protože rigoróznější výstavba logiky by nás oddálila od usuzování, které je běžné v matematice. Poukázali jsme už dříve na to, že logiku lze symbolizovat, a že tedy logické formule nabývají stejné podoby jako v algebře. Pomocí logických úsudkových pravidel lze tyto formule přetvořit, přičemž stejně jako v algebře není třeba přemýšlet o obsahu a na vzorce lze pohlížet jako na „řady znaků", v nichž úsudková pravidla řídí přípustné záměny a sestavování znaků. Logiku lze tak pěstovat zcela formálně, když se pravidla berou v úvahu mechanicky a tak se i používají. Je důležité poukázat na to, že se ve formalizované logice, stejně jako v algebře, sice odhlíží od obsahu, že však ani formalizovaná logika ani algebra nejsou proto bezobsažné.

2.13. Matematické věty

2.13.1. Odvozování v matematice

> Matematická práce sestává z vět a z textu mezi větami. Věta se dělí na předpoklady, tvrzení a důkaz toho, že tvrzení za uvedených předpokladů platí.
>
> H. Königsdorf

V předchozím výkladu jsme vyložili důvody, které v logice vedly k tomu, že za závazné považujeme nejširší pojetí výrokových spojení, jako například odvození důsledku vyjádřené implikací. Tím se stručně řečeno zachytí to, co je společné psychologickým, kondicionálním, kauzálním a jiným požadavkům. Cena, kterou musíme zaplatit za jasný význam na jedné straně a za všeobecnou platnost na straně druhé, je rovněž dvojaká, neboť se na jedné straně považuje za smysluplnou už každá formální souvislost mezi výroky a na druhé straně se jazyk logiky často až zarážejícím způsobem odchyluje od běžného (hovorového) jazyka.

Přestože (logická) implikace tvoří postačující základ pro mnohé složité matematické problémy, je v matematice žádoucí užší pojetí odvozování důsledků, které spíše odpovídá běžným představám hovorové řeči. V každodenním vyjadřování se často používá spojení *když ... pak*, jestliže existuje jistá obsahová souvislost, při níž lze závěr chápat jako neodvratitelný důsledek premisy (předpokladu). Podobně je tomu s matematickými důsledky, jak o tom svědčí následující příklad:

> *Když jsou a, b taková reálná čísla, že* $a > b > 0$,
> *pak pro reálná čísla* a^2, b^2 *musí nutně platit* $a^2 > b^2 > 0$.

Když na tuto větu pohlédneme jako na implikaci ve smyslu logiky, bude správná teprve tehdy, když budeme vědět, že jak předpoklad, tak i tvrzení jsou samy o sobě pravdivé. V logice není zajímavé, jak se o tom přesvědčíme, v matematice však ano, neboť tam máme z platnosti nerovností $a > b > 0$ odvodit platnost nerovností $a^2 > b^2 > 0$. Logickému pojetí spíše odpovídá věta

Když lze čtyřúhelníku opsat kružnici, pak je součet protilehlých úhlů čtyřúhelníka roven dvojnásobku pravého úhlu.

Uveďme příklad, kde je tvrzení překvapivým důsledkem premisy: *Když je* $2^{(2^n)} + 1$ *prvočíslo, pak lze pravidelný n-úhelník sestrojit pomocí pravítka a kružítka* (C. F. Gauss). Tato věta a její důkaz ilustrují to, co G. H. Hardy (1877–1947) považoval za typické znaky ryzí matematiky: „... vysoký stupeň neočekávanosti kombinovaný s přesvědčivostí." Také odpověď, kterou si básník G. Flaubert (1821–1880) přál slyšet v roce 1841 od své sestry na následující problém, má vysoký stupeň neočekávanosti: „Loď pluje po moři; vyplula s nákladem vlny z Bostonu a má výtlak 200 tun. Plachtí do Le Havru, velký stěžeň je zlomený, na palubě stojí plavčík, na lodi je 12 pasažérů, vane východo-severo-východní vítr, hodiny ukazují čtvrt na čtyři odpoledne, je měsíc květen – jak starý je kapitán?" Zde chybí jakýkoliv důvod, který by přesvědčil o souvislosti mezi předpoklady a tvrzením, a tedy i o tom, že je možno dojít k nějakému důsledku (tvrzení) (přesto je ale implikace možná!).

Po těchto příkladech upřesníme pojem důsledku: Výrok B je důsledkem výroku A v teorii T, jestliže teorie T za prvé obsahuje množinu pravdivých výroků (základních vět nebo axiómů) a za druhé má k dispozici korektní odvozovací (úsudková) pravidla, která umožní po konečném počtu kroků prokázat, že spolu s A je i B v T (srov. čl. 3).

Existují jisté pozoruhodné vlastnosti, které odlišují odvozování od implikací a které jsou dány tím, že odvozovat lze pouze v rámci jedné teorie, zatímco implikace lze tvořit pro libovolné výroky. Především nelze – na rozdíl od *ex falso quodlibet* (z něčeho nesprávného plyne cokoliv) – z nesprávného výroku nic odvozovat právě proto, že je nesprávný, a rovněž nelze pravdivý výrok odvodit z každého jiného (byť pravdivého) výroku. V našem příkladu z odst. 2.7 je C: 8 *je dělitelné* 2 odvozeno z A: *Všechna sudá čísla jsou dělitelná* 2 a z B: 8 *je sudé číslo*. Implikace $B \Rightarrow C$ však platí, protože B i C jsou pravdivé. Odvodit však lze C pouze z A a B, ze samotného B se C odvodit nedá – přesto však B samo implikuje C.

Předpoklady v implikacích mají rozdílný charakter. Tak se sice snadno přesvědčíme, že $2^{(2^2)} + 1 = 17$ je prvočíslo, vůbec však není jasné, proč by pro reálná čísla a a b muselo být právě $a > b > 0$. Zde se jedná o předpoklad, který byl učiněn, a všechny důsledky jsou vázány na platnost tohoto předpokladu. Tento postup je pro matematiku typický. Jsme ovšem povinni prokázat oprávněnost takových předpokladů.

U celé řady vět se předpoklady vynechávají, protože jsou v rámci příslušné teorie zřejmé, jako např. předpoklad tvrzení (srov. 4.1)

Platí $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} < \frac{488}{113}$,

nebo protože předpoklady jsou v souvislosti s tvrzením už nezajímavé či nepodstatné, jako např. u tvrzení

Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

2.13.2. Věty a jejich obracení

Matematické věty se obecně člení na předpoklady a tvrzení, mají tedy často formu implikace. Příklady, které jsme právě uvedli, byly tohoto druhu:

(16) *Když pro reálná čísla a, b platí* $a > b > 0$, *pak platí též* $a^2 > b^2 > 0$.

(17) *Když lze čtyřúhelníku opsat kružnici, pak je součet protilehlých úhlů čtyřúhelníka roven dvojnásobku pravého úhlu.*

Existují i věty, které tento tvar nemají:

(18) 17 *je prvočíslo.*

Abychom se přesvědčili, zda vůbec tvrzení podmiňuje předpoklad, je třeba vyšetřit obrácení věty. Obrácení mají pro naše příklady tvar:

(16′) *Když pro reálná čísla a, b platí* $a^2 > b^2 > 0$, *pak platí i* $a > b > 0$.

(17′) *Když je ve čtyřúhelníku součet protilehlých úhlů roven dvojnásobku pravého úhlu, pak lze čtyřúhelníku opsat kružnici.*

Výrok (18) nepřipouští v uvedeném tvaru obrácení. Když však (18) vyjádříme ekvivalentním způsobem ve tvaru

Když 17 *je dělitelné pouze samo sebou a číslem* 1, *potom je* 17 *prvočíslo*,

pak je obrácení možné. Obrácení (16′) k (16) je nepravdivé, protože reálná čísla $a = 2$ a $b = -1$ sice vyhovují předpokladům, tvrzení však pro ně pravdivé není. Naproti tomu je obrácení (17′) k (17) platnou geometrickou větou, takže můžeme říci:

(19) *Čtyřúhelníku lze opsat kružnici právě tehdy, když je součet protilehlých úhlů čtyřúhelníka roven dvojnásobku pravého úhlu.*

Inverze implikací (16) a (17) znějí takto:

(16″) *Když pro reálná čísla a, b neplatí* $a > b > 0$, *pak neplatí ani* $a^2 > b^2 > 0$.

(17″) *Když čtyřúhelníku nelze opsat kružnici, potom je součet protilehlých úhlů čtyřúhelníka různý od dvojnásobku pravého úhlu.*

Týmiž čísly, jimiž jsme to prokázali pro (16′), lze prokázat i nepravdivost výroku (16″). (17″) je správný geometrický výrok. Utvořme nyní kontrapozice

(16‴) *Když pro reálná čísla a, b neplatí* $a^2 > b^2 > 0$, *pak neplatí ani* $a > b > 0$.

(17‴) *Když ve čtyřúhelníku je součet protilehlých úhlů různý od dvojnásobku pravého úhlu, pak nelze čtyřúhelníku opsat kružnici.*

Kontrapozice $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ platné implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá. Proto platí spolu s (16), (17) i (16‴), (17‴).

Existují i další možnosti jak utvořit obrácení dané implikace. K tomu uveďme několik příkladů. V rovině budiž dána kružnice o poloměru r. Všechny uvažované body nechť leží v rovině kružnice. K následující jednoduché větě

(20) *Když je P bodem kružnice o středu S a poloměru r, pak je jeho vzdálenost od bodu S rovna r*

má její kontrapozice tvar

(20‴) *Když nějaký bod má od středu S vzdálenost různou od r, pak tento bod neleží na kružnici o středu S a poloměru r.*

Jelikož výrok *různý od r* znamená buď větší, nebo menší než r, resp. geometricky vně nebo uvnitř kružnice, lze (20‴) rozdělit do implikací

Když má bod od středu S vzdálenost větší než r, pak leží vně kružnice.
Když má bod od středu S vzdálenost menší než r, pak leží uvnitř kružnice.

Podobně tomu je i u inverze, takže skupina vět sestávající z věty výchozí, jejího obrácení, kontrapozice a inverze dává šest výroků.

Tento příklad ukazuje, že v matematice se obrácením věty nerozumí vždy jenom čistě formální záměna předpokladu a tvrzení, jak jsme to předvedli na větách (16) a (17). Často se v rámci jedné teorie vyslovují pro celé úseky stejné předpoklady, které se v těchto úsecích považují stále za platné. Tak se v obrácení věty (20), totiž ve větě

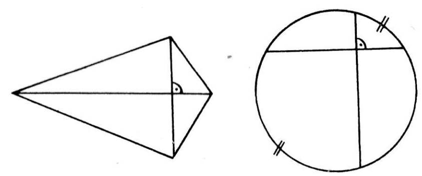
Když má bod od daného bodu (středu) S pevnou vzdálenost r, pak tento bod leží na kružnici o středu S a poloměru r,

mlčky předpokládá, že se u všech bodů jedná o body roviny, neboť jinak by splňovaly tuto větu i body koule. Ve větách se zpravidla nevyslovují ani ty předpoklady, které se vyskytují v označeních nebo obrázcích. Nastane-li tento případ pro implikaci $A \Rightarrow B$ a označíme-li nevyjmenované předpoklady symbolem A', pak je třeba implikaci $A \Rightarrow B$ doplnit na tvar

(21) $$(A \text{ a } A') \Rightarrow B\,,$$

protože jak A, tak i A' jsou předpoklady pro tvrzení B.

Obě následující věty jsou formulovány jako implikace, přičemž předpoklad je konjunkce dvou výroků. Věty mají strukturu, kterou udává formule (21).



Obr. 2.8

(22) *Když úhlopříčky čtyřúhelníka jsou navzájem kolmé a když jedna z úhlopříček půlí druhou, pak je čtyřúhelník deltoid.*

(23) *Když se dvě přímky protnou uvnitř kružnice a když obě protilehlé části obvodu kružnice, které přímky na obvod kružnice vytnou, mají délku rovnou polovině obvodu kružnice, pak jsou přímky navzájem kolmé.*

(Srov. obr. 2.8.) Ve smyslu logiky dostaneme obrácení výroku (22) tím, že zaměníme oba předpoklady s tvrzením, tedy

Když čtyřúhelník je deltoid, potom jsou jeho úhlopříčky navzájem kolmé a jedna z úhlopříček půlí druhou.

To je pravdivá věta. Obrácení výroku (23) v logickém smyslu však vede na výrok

(24) *Když jsou dvě přímky navzájem kolmé, pak se protnou uvnitř kružnice a obě protilehlé části obvodu kružnice, které přímky na obvodu kružnice vytnou, mají délku rovnou polovině obvodu kružnice.*

Je ale zřejmé, že kolmost dvou přímek nemá nic společného s jejich protnutím uvnitř nějaké kružnice atd. Toto formálně utvořené obrácení je matematicky nesmyslné. Matematicky daleko zajímavější je následující situace:

Když dvě přímky jsou navzájem kolmé a když jejich průsečík leží uvnitř nějaké kružnice, potom je délka obou protilehlých částí, které obě přímky na obvodu kružnice vytnou, rovna polovině obvodu kružnice.

Výrok *Přímky se protnou ve vnitřku nějakého kruhu* zde zůstal i nadále předpokladem, zatím co druhý předpoklad a tvrzení jsou zaměněny. Ve smyslu širším než je smysl logický se v matematice považuje za obrácení věty (23) právě tato věta – a ne věta (24).

Shrneme-li tuto situaci symbolicky, pak u implikace

(21) $$(A \text{ a } A') \Rightarrow B$$

má její obrácení v logickém smyslu tvar

$$B \Rightarrow (A \text{ a } A'),$$

zatím co v uvažovaném případě (23) je z matematického hlediska zajímavá implikace

(25) $$(A' \text{ a } B) \Rightarrow A,$$

a právě proto bývá nazývána obrácením implikace (23). Je-li A' nevyslovený předpoklad, pak obrácení implikace $A \Rightarrow B$ – provedené zdánlivě ve smyslu logiky, přičemž se vlastně má obrátit (21) – bude obecně mít tvar (25), protože A' jako nevyslovený předpoklad zůstane „automaticky" předpokladem.

Vezmeme-li v úvahu, že (21) připouští i obrácení

(25′) $$(A \text{ a } B) \Rightarrow A',$$

které může vést na pravdivou větu, ukazuje se, že běžný způsob, jímž se hovoří o jistém obrácení nějaké věty, není korektní; přinejmenším není korektní pro věty, které mají víc předpokladů nebo jejichž tvrzení sestává z více částí. V následujícím příkladě existují dvě obrácení, která jsou pravdivá.

Když je úhel ACB obvodovým úhlem nějaké kružnice a když je AB průměr této kružnice, pak je úhel ACB pravý (Thaletova věta).

Formální obrácení Thaletovy věty je zřejmě nesprávné. Obrácení (stylisticky lehce pozměněná) odpovídající větám (25) a (25′) dají dvě různé věty, které jsou obě správné:

Je-li úhel nad průměrem nějaké kružnice pravý, pak je obvodovým úhlem této kružnice.
Je-li obvodový úhel nějaké kružnice pravý, pak je úhlem nad průměrem této kružnice.

Obě tyto věty je třeba považovat za obrácení Thaletovy věty. Tradičně se však obrácením Thaletovy věty rozumí pouze první z těchto vět.

Když tvrzení B nějaké implikace $A \Rightarrow B$ je samo zase implikace $C \Rightarrow D$, potom je v některých případech možné udat více matematicky rozumných obrácení, protože $A \Rightarrow (C \Rightarrow D)$ je ekvivalentní s $C \Rightarrow (A \Rightarrow D)$ nebo s $(A \text{ a } C) \Rightarrow D$; jejich slovní vyjádření není vždy příliš libozvučné. Viz např. výrok (srov. cvičení 2.26):

Když stejné kružnice obsahují tětivy, pak platí: když jsou tětivy stejné, pak jsou stejné i jejich vzdálenosti od středu.

Existují obrácení jednoduchých vět, která „dají zabrat". Poměrně neškodná věta „Když je trojúhelník rovnoramenný, pak jsou osy jeho úhlů u základny stejně velké (měřeno od vrcholu k protilehlé straně)" vede k obrácení, které je sice pravdivé, ale nelze je tak jednoduše dokázat (srov. cvičení 4.15): „Jsou-li v nějakém trojúhelníku dvě osy úhlů stejné, pak je trojúhelník rovnoramenný"; pro toto tvrzení byly ještě před několika lety k dispozici pouze chybné důkazy. Ve svých *Základech* dokazuje Euklides větu „Když jsou dvě protínající se přímky protnuty třetí přímkou, pak tvoří tato přímka s ostatními dvěma vnitřní úhly, jejichž součet je menší než dvojnásobek pravého úhlu". Otázka, zda platí obrácení (přesněji: jedno z obrácení) této věty, které Euklides postavil do čela svého geometrického systému jako základní předpoklad (axióm), nedala matematikům spát zhruba po dobu 2 000 let. Vyjasněna byla kolem roku 1830 současně Bolyaiem, Gaussem a Lobačevským, kteří ukázali, že ani obrácení této věty, ani její negace se nedají dokázat v rámci Euklidova geometrického systému (srov. odst. 3.6.2 a 3.6.3).

2.13.3. Uzavřené systémy vět

Obrácení $B \Rightarrow A$ implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme, když ukážeme, že je správná implikace $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (věta o kontrapozici). Systém implikací

$$A \Rightarrow B \quad \text{a} \quad \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$$

vykazuje jisté zvláštnosti, které lze zobecnit. Předpoklady A a $\bar{A}$ vyčerpávají všechny možné případy, tj. vždy platí A *nebo* $\bar{A}$, a tvrzení se navzájem rovněž vylučují. Předpokládejme, že pro systém implikací

$$\text{(26)} \qquad \textit{Když } A_i, \textit{ pak } B_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vyčerpají předpoklady A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ všechny možné případy a tvrzení B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se navzájem vylučují. Pro $n = 2$ je $A_1 = A$ a $A_2 = \bar{A}$. Takový systém vět se nazývá *uzavřený*.

Příklad (úplná trichotomie): V trojúhelníku platí

Proti delším stranám leží větší úhly,
Proti stejným stranám leží stejné úhly,
Proti kratším stranám leží menší úhly.

(Ze stylistických důvodů nemají věty tvar *když* ... *pak*, jelikož je jasné, co je předpoklad a co je tvrzení.) Předpoklady o stranách zřejmě zahrnují všechny možné případy (tzn. pro dvě strany a a b platí buď $a > b$, nebo $a = b$, nebo $a < b$) a tři tvrzení se rovněž vylučují (protože pro dva úhly α a β platí $\alpha > \beta$, nebo $\alpha = \beta$, nebo $\alpha < \beta$).

Věta o uzavřených systémech vět tvrdí, že obrácení systému (26), tedy systém vět

$$\textit{Když } B_i, \textit{ pak } A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

je rovněž platný. Pro náš příklad tím máme:

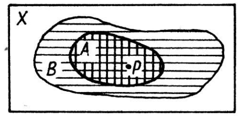
Proti větším úhlům leží delší strany,
Proti stejným úhlům leží stejné strany,
Proti menším úhlům leží kratší strany.

2.13.4. Nutné a postačující podmínky

Podíváme se nyní na matematické věty, které jsou formulovány ve tvaru implikací, z hlediska *modu ponens* a *modu tollens* (srov. odst. 2.5). Implikace $A \Rightarrow B$ vyjadřuje, že A stačí k tomu, abychom mohli tvrdit B. Předpoklad A se proto nazývá *postačující podmínka* pro B. Z $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (kontrapozice implikace $A \Rightarrow B$) plyne, že $\bar{B}$ je postačující pro $\bar{A}$, tedy vždy, když platí $\bar{B}$, platí i $\bar{A}$. V důsledku toho může A samo platit pouze tehdy, když neplatí $\bar{B}$, tedy když platí B. Pro platnost A je nutné, aby nastalo B. Tvrzení B se nazývá *nutná podmínka* pro A. V ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ jsou A i B navzájem jak nutné, tak i postačující.

Obrácení $B \Rightarrow A$ implikace $A \Rightarrow B$ říká při tomto způsobu vyjadřování, že

podmínka A je nutná pro B. Ze samotné implikace $A \Rightarrow B$ ale plyne pouze to, že A je postačující pro B. Tím dostaneme z této implikace její obrácení jenom tehdy, když A bude současně nutné i postačující pro B.



Obr. 2.9

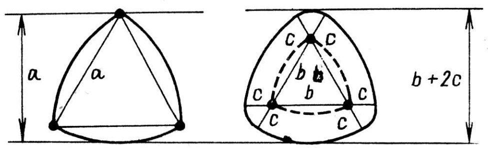
Rozdíl mezi nutným a postačujícím znázorníme geometricky na dvou bodových podmnožinách A a B nějaké základní množiny X, přičemž má být $A \subset B$ (obr. 2.9). Když je bod P obsažen v množině A, pak je jistě i v B. $P \in A$ je postačující pro $P \in B$, ale ne nutné, protože P může ležet v B, ale nemusí přitom být v A (tj. může ležet v množině, která je na obrázku vyšrafována vodorovně, ale ne svisle). Zde se ukazuje, že postačující podmínka požaduje příliš mnoho. Má-li být bod P z A, pak nutně musí být z B. Přirozeně není nutná podmínka $P \in B$ obecně postačující pro $P \in A$, protože existují body v B, které nepatří k A. Nutná podmínka tedy na druhé straně požaduje příliš málo. Pro bod $P \in B$ je $P \in A$ právě tehdy, když jsou množiny A a B stejné, tj. když je $A = B$.

Podívejme se ještě na dva příklady:

1. Podobnost trojúhelníků.

a) Nutná, ale ne postačující, je shoda v jednom úhlu.
b) Ne nutná, ale postačující, je shoda ve třech stranách.
c) Nutná a postačující je shoda ve dvou úhlech.

2. Kružnice je (rovinná) křivka, jejíž body mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost. Kružnice tedy je ve všech směrech stejně široká nebo, jak se říkává, je to „křivka o konstantní šířce". Válec s kruhovým průřezem lze



Obr. 2.10 Releauxovy trojúhelníky

umístit mezi čelisti posuvného měřítka a otáčet jím tak, že se stále dotýká čelistí měřítka, aniž by bylo potřebné polohu čelistí měnit. Jestliže lze válcovým tělesem v posuvném měřítku otáčet právě popsaným způsobem, musí mít toto těleso vždy kruhový průřez? Trochu matematičtěji: Je podmínka, že „křivka má konstantní šířku", postačující k tomu, aby křivka byla kružnicí? Tato otázka má i technický význam, protože když podmínka není postačující, pak popsaný postup, kdy je při otáčení naměřen stejný průměr ve všech směrech, není vhodný pro rozhodování o tom, zda je válec kruhový či nikoliv. Jako ukazují dva (z mnoha) protipříkladů, existují kromě kružnic další křivky o konstantní šířce (obr. 2.10), tzv. Releauxovy křivky.

Cvičení

2.25. Ukažte, že všechny možné polohy dvou různých kruhů se společnými tečnami lze popsat uzavřeným systémem vět (5 případů)!

2.26. Utvořte pokud možno nejvíce smysluplných obrácení vět:
a) Když stejné kruhy obsahují tětivy, pak platí, že když jsou tětivy stejné, pak jsou stejné i jejich vzdálenosti od středů.
b) Když je čtyřúhelník rovnoběžníkem a když jsou úhlopříčky čtyřúhelníka stejné, pak je to obdélník.

2.27. Diskutujte, co je míněno výrokem: *Jestliže Strindberg zvládl problém obchodního cestujícího, pak snim svůj klobouk!*

2.28. Diskutujte následující důkazy, v nichž je rovnost uvedených zlomků založena na vyškrtnutí stejných čísel:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{27}{75} = \frac{2}{5}.$$

2.29. Tři hráči hrají spolu tři hry. V první hře první hráč prohraje, druhý a třetí vyhrají právě tolik, že se jejich peníze zdvojnásobí. Ve druhé hře prohraje druhý hráč a oba zbývající vyhrají právě tolik, že se jejich peníze zdvojnásobí. A konečně ve třetí hře prohraje třetí hráč a zbylí dva hráči si výhrou zdvojnásobí své peníze. Po třetí hře mají všichni stejně, totiž 24 zlatých. Kolik měl každý z hráčů na začátku? (*L. Euler*)

3. Axiomatická metoda

3.1. Důkazy

> A to, že matematické věty lze dokázat, přece neznamená nic jiného, než že jejich správnost lze pochopit, aniž by bylo třeba porovnávat, zda to, co vyjadřují, souhlasí se skutečností.
>
> L. Wittgenstein

Řecká matematika, která byla vytvořena v podstatě v letech 400 až 200 př. n. l., si na rozdíl od matematiky egyptské nebo babylonské už nekladla jen otázku, **jaké** jsou vyšetřované objekty, nýbrž se také ptala, **proč** jsou takové. Tento posun v otázce vedl k tomu, že empiricky získané zkušenosti bylo možno odvodit i teoreticky z jiných známých skutečností. Tak např. zkušenost, kterou získali Babyloňané asi 1 000 let před Pythagorem – že totiž jeden úhel v každém trojúhelníku o stranách délky 3, 4 a 5 je pravý –, je pro řecké matematiky speciální případ (důsledek) jisté obecné věty. Důsledky jsou zdůvodněny logickými důkazovými postupy bez využití zkušenosti.

To, že si Řekové matematiky tolik cenili, spočívá ve schopnosti této disciplíny vyvozovat z daných skutečností nové poznatky. Sebevědomá slova nad branou Platonovy Akademie „Nechť nevstupuje nikdo neznalý geometrie" (μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω) dokazuje, že na řecké učence matematické myšlení hluboce zapůsobilo.

Důkaz vychází z něčeho, co bylo uznáno za pravdivé, z předpokladů, a vede k novému výroku, k tvrzení. Při důkazu se ukazuje: Platí předpoklady, a tedy je platné i tvrzení (Kdo uznal A, musí uznat i B). Jen v málo případech je správnost tvrzení bezprostředně patrná, a tak se v obecném případě důkaz rozkládá na konečně mnoho krůčků, jejichž správnost už bezprostředně patrná je. Jednotlivé kroky důkazu jsou prováděny na základě korektních logických pravidel, přičemž se z již známých výroků, z matematických vět, vyvozují závěry. Na konci takového řetězce důkazových úsudků stojí tvrzení, jehož pravdivost je tím dokázána, a tvrzení je přijato do teorie jako věta. Při důkazu, který je založen na předpokladech (např. pro všechna reálná čísla $x > 1$ nebo pro průsečík dvou přímek), je třeba ukázat, že jsme oprávněni tyto předpoklady vyslovit.

Důkazy jsou v matematice vedeny zpravidla v jisté „matematicky očištěné" hovorové řeči, a to dokonce i ve vědeckých pracech či ve vysokoškolské výuce. V zásadě je ale možno důkazy formalizovat způsobem, naznačeným na konci odst. 2.12. To však neodpovídá našemu způsobu myšlení a má za následek to, že důkazy nejsou vždy zcela srozumitelné. („Symbolický popis ... je něco, co stroje umějí zapisovat a co kromě strojů jen málokteří dovedou číst.“ P. R. Halmos.)

Důkazy jsou často prováděny podle stejného schématu, takže existuje řada standardních postupů, jichž si všimneme v čl. 4. Ve všech oblastech matematiky existují stále se opakující problémy jako např. otázka existence nebo jednoznačnosti matematických objektů; k těmto otázkám se vrátíme v čl. 5.

3.2. Vzorový příklad: geometrický důkaz

Metodické zásady pro řešení geometrických úloh rozvinuli vzorovým způsobem již Řekové; tyto zásady se staly předlohou pro dokazování ve všech odvětvích matematiky a pouze rigoróznost při dokazování (tj. vylučování názorných a nevyslovených předpokladů) se stále zpřísňovala. Vnější schéma důkazového postupu je členěno takto: *Předpoklad, tvrzení, důkaz.*

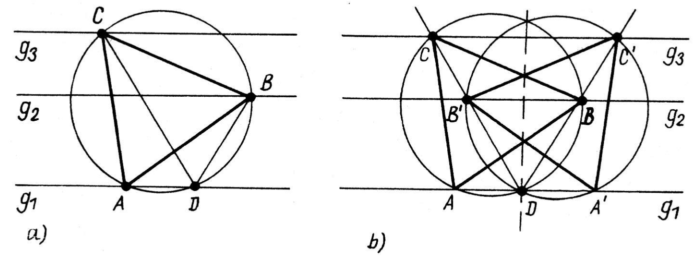
Geometrická konstrukční úloha, která stojí historicky na počátku geometrie, požaduje sestrojení (rovinného) geometrického obrazce, zpravidla pouze pomocí kružítka a pravítka. Tak nechť je např. třeba nakreslit rovnostranný trojúhelník tak, aby jeho vrcholy ležely na třech navzájem různých rovnoběžkách. Tato formulace se odlišuje od konfrontace předpokladů a tvrzení ve větě. Taková konfrontace je však také možná: *Jsou-li dány tři navzájem různé rovnoběžky, pak lze nakreslit – pouze pomocí kružítka a pravítka – rovnostranný trojúhelník tak, že jeho jednotlivé vrcholy leží na těchto rovnoběžkách.*

Při řešení této úlohy i dalších geometrických úloh se matematici už od antiky řídí následujícím schématem:

1. Analýza (rozbor).
2. Konstrukce.
3. Důkaz.
4. Determinace (diskuse).

Analýza (vyřešení úlohy). Nejprve se předpokládá, že úloha má alespoň jedno řešení. Z tohoto předpokladu se zpětně odvodí řada známých vztahů, které jsou nutné pro *konstrukci* (popis) řešení. A konečně *důkaz* ukazuje, že nalezené nutné podmínky jsou také postačující, čímž konstrukce skutečně vede k řešení. Řecký matematik Pappos (asi rok 300 př. n. l.) píše: „Předpokládejme hledané, jakoby už bylo uskutečněno. Odtud vyvozujme závěry a další závěry tak dlouho, až dojdeme k tomu, co je dáno. A konečně se pokusme úsudky obrátit a dojít tak od daného k hledanému“ Z předpokladu, že řešení existuje, nelze ovšem vyvodit žádné postačující podmínky pro řešení, neboť tento předpoklad existenci řešení nezaručuje. (Pro srovnání: Z předpokladu, že andělé mají křídla,

neplyne reálná existence andělů.) Závěrečná *determinace* (diskuse) zkoumá, zda je řešení možné a kolik těchto řešení existuje. Důkazy koncipované v latině končily stereotypně q.e.d. za „quod erat demonstrandum“, česky c.b.d. za „což bylo dokázati“. V řeckých textech stojí ὅπερ ἔδει δεῖξαι (= což bylo ukázati).



Obr. 3.1

Vysvětlíme si jednotlivé kroky geometrického důkazového postupu na již uvedené úloze. Je třeba nakreslit rovnostranný trojúhelník tak, aby jeho vrcholy ležely na třech navzájem různých rovnoběžkách. Vrcholy trojúhelníka označíme A, B a C a rovnoběžky označíme g_1, g_2 a g_3.

1. *Analýza:* Nechť trojúhelník ABC splňuje požadované podmínky. Nakreslíme opsanou kružnici, která protne přímku g_1 kromě bodu A ještě v dalším bodě D (srov. obr. 3.1a). Podle věty o obvodovém úhlu jsou všechny obvodové úhly nad tětivami $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$ stejné, a tedy platí:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 60°\,, \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 60°\,. \tag{1}$$

2. *Konstrukce:* Zvolme na g_1 libovolně bod D a veďme z něj dvě polopřímky (ramena) svírající s g_1 úhly 60° a 120°. Průsečíky těchto ramen s přímkami g_2 a g_3 označme B a C. Pak jsou B a C dva vrcholy rovnostranného trojúhelníka a třetí vrchol dostaneme jako průsečík kružnice, určené body B, C a D, s g_1.

3. *Důkaz:* Nechť kružnice, určená bodem D a sestrojenými body B a C, protne g_1 v bodě A. Podle věty o obvodovém úhlu a na základě naší konstrukce platí $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 60°$, a tedy je

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°\,,$$

což bylo dokázati.

4. *Diskuse:* Kružnice opsaná trojúhelníku BCD buď přímku g_1 protne v dalším bodě A, nebo se jí dotýká v bodě D. V tomto druhém případě sestrojme zrcadlový (osově souměrný) obraz opsané kružnice podle osy vztyčené v D kolmo ke g_1. Z důvodů symetrie se pak při tomto zrcadlení zobrazí průsečíky

ramen s opsanou kružnicí na sebe. Body B a C tedy jsou od g_1 stejně vzdáleny čili leží na přímce $g = g_2 = g_3$ rovnoběžné s g_1, což odporuje našim předpokladům. Musí proto existovat bod A různý od D, v němž kružnice opsaná trojúhelníku BCD protíná přímku g_1. Protože na označení rovnoběžek nezáleží, zvolme to, které je použito na obrázku 3.1a. Ramena úhlu, sestrojeného v bodě D, pak mají právě po jednom průsečíku s g_2 a s g_3; označme tyto průsečíky B a C', resp. B' a C. Body B a C, resp. B' a C' jsou vždy dvě dvojice vrcholů hledaného trojúhelníka, takže pro každý pevně zvolený bod D na g_1 existují dvě řešení úlohy. Obě řešení jsou osově souměrná podle kolmice ke g_1 v D. Všechna další řešení, která dostaneme pro libovolný bod $D' \neq D$ na g_1, lze rovnoběžným posunutím převést na některé z obou řešení pro bod D. q. e. d.

3.3. Axiomatická výstavba

Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.

I. Kant

Čtenář je jistě dobře obeznámen s některými matematickými teoriemi, jako je třeba rovinná geometrie nebo algebra. Předměty matematické teorie jsou jisté objekty (např. body nebo čísla), jejich vlastnosti, jakož i vztahy (relace), které mezi nimi existují, a operace, které pomocí daných objektů vedou na nové objekty (např. spojování bodů nebo sčítání čísel). O objektech nějaké teorie nashromáždíme co nejvíce vět. Věty nějaké teorie jsou zaváděny nejrůznějším způsobem. Aby bylo možno pojmout nějaký výrok do teorie jako větu, musí být toto tvrzení dokázáno v rámci této teorie. V ideální teorii by tedy všechny věty musely být dokazatelné. To však nelze uskutečnit, neboť abychom dokázali nějakou větu, používáme jako předpokladů vět již dokázaných. K důkazu těchto vět však opět potřebujeme dokázané věty a tak dále. Tímto způsobem buď vytvoříme nekonečný řetězec důkazů (regressus in infinitum), anebo se v našich důkazech objeví ve formě předpokladů právě ty věty, které máme dokázat (circulus vitiosus). Ustupovat při dokazování donekonečna prakticky nelze. Na druhé straně jsou závěry, obsahující již ve formě předpokladů ty výroky, jež máme dokázat (takzvaný *úsudek kruhem*), logicky nepřípustné. Proto zavádíme některé věty trochu jinak: Umístíme je – nedokázané – na začátek teorie, a v nich lze najít vše, co je potřebné ke zdůvodnění vět dalších. Tyto věty se nazývají *základní věty* nebo *axiómy*. Zpravidla máme konečný počet základních vět, v nichž jsou vyjádřeny základní vlastnosti objektů a základní vztahy

mezi nimi. Vycházíme zatím ze stanoviska, že axiómy jsou bezprostředně zřejmá tvrzení, která není třeba dokazovat a ani je dokázat nelze. B. Pascal (1623–1662) požaduje, aby za axiómy bylo považováno jen to, co je samo od sebe zcela evidentní.

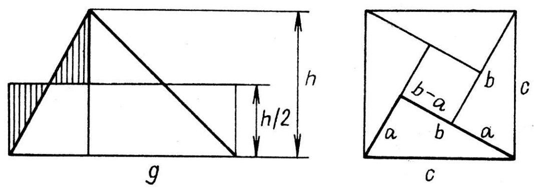
Všechny objekty teorie musí být dostatečně vysvětleny (definovány). Zde narážíme na stejné potíže jako u vět: některé *základní pojmy* je totiž opět třeba postavit na začátek teorie a ponechat bez vysvětlení. Z těchto nedefinovaných pojmů pak odvozujeme všechny další pojmy, které se týkají teorie. Korektní vysvětlení nějakého pojmu pomocí základních pojmů se nazývá *definice* pojmu. V zásadě se lze obejít bez definic, neboť definované pojmy lze vždy vyjádřit pomocí pojmů nedefinovaných. Definice však podstatně zlepšují přehlednost. Základní pojmy jsou mimologické pojmy v dané teorii, všechny další pojmy jsou toho druhu, že mají v teorii obecnou platnost.

Axiómy nějaké teorie obsahují také příslušné základní pojmy teorie. Souhrn axiómů a základních pojmů teorie se nazývá *axiomatický systém* této teorie. K výstavbě teorie, tj. k tomu, aby v jejím rámci bylo možné něco dokázat, jsou potřebná korektní úsudková pravidla.

Jeden z axiómů rovinné geometrie zní takto: „Dvěma body je určena právě jedna přímka.“ Základní geometrické pojmy jsou zde bod a přímka. Tyto pojmy není možné vysvětlit pomocí jiných, evidentnějších geometrických objektů. Jiné geometrické útvary lze pomocí těchto a dalších pojmů už definovat. Tak je např. kružnice množina všech bodů roviny, které mají od jistého pevného bodu roviny stejnou vzdálenost. B. Pascal vznáší ve svém „Duchu geometrie“ požadavek, abychom se nepokoušeli definovat nic, co už je samo od sebe natolik známé, že nemáme k dispozici žádné ještě jasnější pojmy, pomocí nichž bychom je mohli blíže vysvětlit, abychom při definici pojmů používali jen zcela známá nebo již vysvětlená slova a konečně abychom nenechali nedefinované žádné z poněkud temnějších či dvouznačných pojmů.

Ve shodě s D. Hilbertem (1862–1943) a P. Bernaysem (1888–1979) nazýváme teorii *axiomatickou* v nejširším slova smyslu, když jsou na začátek postaveny základní pojmy a základní věty jako takové a když z nich je odvozen další obsah teorie pomocí definic a důkazů. V tomto smyslu postavil Euklides na axiomatický základ geometrii.

Teorie je v tomto pojetí množina všech vět, které plynou z příslušného systému axiómů ve shodě se základními pravidly logiky. Prakticky se ovšem většinou



Obr. 3.2 Indický způsob důkazu vzorce pro obsah trojúhelníka a důkazu Pythagorovy věty

nevracíme až k axiómům, nýbrž používáme již dokázané věty jako premisy. První věta V_1, dokázaná v nějaké axiomatické teorii, plyne pouze a jen z axiómů. K důkazu druhé věty V_2 lze už vedle axiómů použít i první větu V_1 atd.

Za přísnou logickou výstavbu matematiky vděčíme Řekům. Indická matematika, které chybí systematičnost a abstrakce, má jiný způsob uvažování. Při mnoha důkazech jsou pro ni charakteristické obrazce, a to dokonce i u komplikovanějších vět: důvtipné rozklady činí u těchto obrazců tvrzení tak názorným, že komentář u obrázků jako např. u obr. 3.2 se redukuje na pouhé „Viz". Kdo má oči k vidění, ten to vidí, totiž to, že $P = \frac{1}{2}gh$ a že $c^2 = a^2 + b^2$ $[= (b - a)^2 + 4(ab/2)]$.

3.4. Dva příklady axiomatického systému

3.4.1. Peanův systém axiómů pro přirozená čísla

Pojem přirozeného čísla vznikl už někdy v pravěku lidského myšlení. Tento pojem je jedním z nejabstraktnějších a nejdůležitějších, které lidské myšlení kdy vytvořilo. Ačkoliv jsou přirozená čísla důvěrně známa početným generacím díky dennímu užívání v systémech číslic, zvolených více či méně šťastně, byl pro tyto nám tak dobře známé objekty vytvořen systém axiómů teprve před necelými 100 lety.

Přirozená čísla dostáváme z 1 postupným přidáváním 1. To je také východiskem axiomatického systému. Udáme nejprve základní pojmy, totiž „přirozené číslo" a „bezprostřední následník", a uvedeme axiómy, jimž tyto základní pojmy vyhovují.

Jako přirozená čísla označíme prvky každé neprázdné množiny N, pro jejíž prvky je udán následnický vztah prvek *a je bezprostředním následníkem prvku b*, přičemž jsou splněny tyto axiómy:

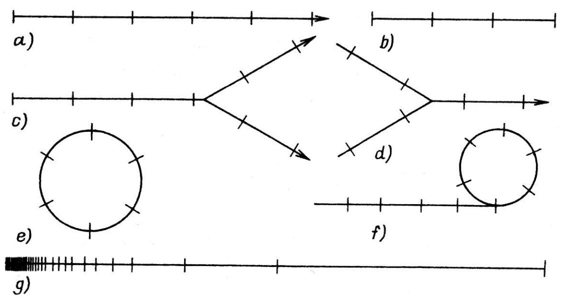
A.1 Existuje přirozené číslo 1, které není následníkem žádného jiného přirozeného čísla.[16]

A.2 Každé přirozené číslo a má právě jednoho následníka a'.

A.3 Každé přirozené číslo je následníkem nejvýše jednoho přirozeného čísla.

A.4 Každá množina M přirozených čísel, která
a) obsahuje přirozené číslo 1 a
b) s každým přirozeným číslem a obsahuje i jeho následníka a',
obsahuje již všechna přirozená čísla (a je tedy rovna N).

Abychom si uvedený systém axiómů více ozřejmili, použijeme obvyklé geometrické znázornění čísel pomocí bodů na přímce. Obrázek, který si tak o přirozených číslech můžeme učinit, vypadá takto (obr. 3.3a): Za číslem 1, které nemá žádného předchůdce, následují přirozená čísla ve stejném odstupu v nekonečné posloupnosti. „Ať je číslo jakkoli veliké," říká B. Pascal, „vždy si lze představit číslo větší a ještě jedno, které toto poslední překračuje; a tak dále až do nekonečna, aniž bychom kdy došli k číslu, které už nelze zvětšit."



Obr. 3.3 Geometrická interpretace Peanových axiómů

Uvidíme ještě, do jaké míry axiómy A.1 až A.4 odpovídají této představě. Axióm A.2 říká, že ke každému číslu patří právě jeden následník. Tím je sice vyloučeno větvení jako na obr. 3.3c nebo řada končící po konečně mnoha číslech (obr. 3.3b), která je modelem systému „Jeden, dva, mnoho", nikoliv však kruhovité uspořádání přirozených čísel jako na obr. 3.3e (zde by totiž každé číslo mělo právě jednoho následníka: je to model pro zbytkové třídy při dělení). Axióm A.3 vylučuje zpětná větvení jako na obrázcích 3.3d a f. Tím zbývají jako geometrické modely už jen přímka a kružnice. Axióm A.1 požaduje přirozené číslo bez předchůdce, čímž odpadá kružnice a přímka neomezená na obě strany. Zbývá tedy už jen ta možnost realizace přirozených čísel, která je naznačena na obrázku 3.3a. Axióm A.4 má poněkud komplikovanější strukturu, jíž si podrobně všimneme v článku 6. Jeho obsah je, stručně řečeno, takovýto: Přirozená čísla jsou vytvářena tvorbou následníků.

Axiómy stanovily strukturu množiny přirozených čísel. Zatím jsme však nevysvětlili, jak lze s přirozenými čísly počítat. Naznačíme to pro sčítání. Zárodek sčítání je obsažen již ve vztahu následnictví. Následník a' nějakého přirozeného čísla a je právě to číslo, které vznikne, když počítáme o 1 dále, resp. když k číslu a přičteme číslo 1 čili v nám důvěrně známé symbolice

$$a' = a + 1 \quad \text{pro každé přirozené číslo } a.$$ [17]

[16] Někdy se považuje za přirozené číslo i 0; pak se ovšem musíme rozloučit s představou, že přirozená čísla dostaneme pomocí postupného přičítání 0.

[17] Definujeme tedy vlastně *součet* přirozeného čísla a a čísla 1 tak, že jejich součtem je následník a'; $a + 1 = a'$. (Pozn. překl.)

Naším cílem je udat předpis sčítání, který přiřadí součet nejen přirozeným číslům a a 1, nýbrž každé dvojici přirozených čísel a a b. Zápis $a + b$ znamená, že k a přičteme 1 tolikrát, kolikrát to udává b, tedy např.

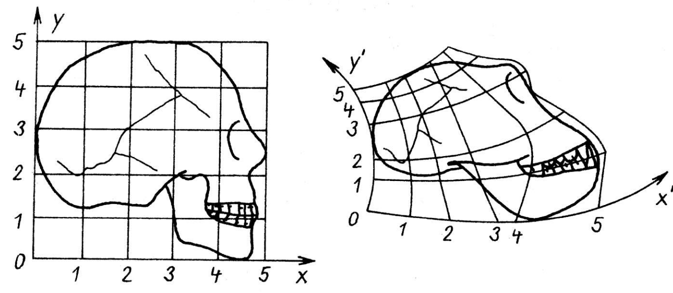
$$a + 2 = (a + 1) + 1\,,$$
$$a + 3 = (a + 2) + 1 = ((a + 1) + 1) + 1 \quad \text{atd.},$$
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad \text{pro každé přirozené číslo } a \text{ a } b.$$

Co přitom znamená $a + (b + 1)$, resp. $a + b'$, to je jasné právě tehdy, je-li to známo už pro $a + b$. Pomocí úplné indukce lze udat ne právě jednoduchý důkaz toho, že skutečnosti, které známe důvěrně z početní praxe (jako např. to, že $a + b$ je pro všechna přirozená čísla opět přirozené číslo, a to číslo určené jednoznačně), lze čistě logicky odvodit z axiomatického systému a z postupu uvedeného pro sčítání. Všechny další zákony sčítání (např. $a + b = b + a$ atd.) lze taktéž odvodit tímto způsobem, a tak vznikne z axiomatického systému krok po kroku celá aritmetika.

Zdá se, že uvedený systém axiómů má jistou vadu: Všechny prvky nějaké množiny, které uvedeným axiómům vyhovují, se nazývají přirozená čísla. Uvažujme třeba podmnožinu množiny přirozených čísel, která se skládá z přirozených čísel větších než 100 a vykazuje stejný vztah následnictví se 101 jako prvním prvkem; tuto podmnožinu bude třeba opět nazvat množinou přirozených čísel. Geometricky zcela odlišný obraz dává např. množina všech tzv. kmenných zlomků (tj. zlomků tvaru $1/k$), v níž by následníkem prvku $1/n$ bylo číslo $1/(n + 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (srov. obr. 3.3g). V obou příkladech lze definovat „sčítání, odčítání" atp.

Zde je třeba učinit zásadní poznámku. Přirozená čísla tvoří z historického hlediska systém, k němuž byla axiomatická soustava vytvořena až dodatečně. Proto také spojujeme s tímto systémem axiómů zcela pochopitelně představu, že čísla, která tak dobře známe, popíše jednoznačným způsobem. Matematika však nevyšetřuje objekty, nýbrž vztahy, které mezi nimi existují (H. Poincaré). Systém Peanových axiómů popisuje jistou strukturu, totiž následnictví, a všechny množiny s touto strukturou jsou z hlediska axiomatického systému nerozlišitelné. Odráží to skutečnost, že není rozhodující, čím počítáme (jablky, na prstech, desetinnými čísly, římskými číslicemi atd.), nýbrž jak počítáme. K tomu ještě jeden geometrický příklad: Představme si rovinu pokreslenou geometrickými útvary (body, přímkami apod.), které mají být popsány nějakým blíže neurčeným axiomatickým systémem. Když tuto rovinu (např. gumovou blánu) spojitě roztáhneme, aniž bychom ji přitom roztrhli, zůstávají polohové vztahy mezi geometrickými obrazci zachovány. Pojem přímky už pochopitelně nemá ten názorný význam jako dříve, ale když se dvě přímky protínaly předtím, protínají se nyní i ve zdeformované rovině. Zdeformované útvary jsou k sobě ve stejných vztazích, jako tomu bylo u nedeformovaných. Ačkoliv jsou obě soustavy znázorněny rozdílnými modely, nelze ryze pojmově obě soustavy od sebe

odlišit. Znázorníme-li např. Evropu na mapě pomocí Mercatorovy projekce, zachovávající úhly, nebo pomocí Eckertovy eliptické projekce, zachovávající plochy, bude se tok Labe a jeho přítoků geometricky na obou napách lišit,



Obr. 3.4 Thompsonovy transformace v biologii

vždy však bude vyjadřovat tutéž geografickou situaci. Pro morfologii, jejímž úkolem je studium příbuzných forem, je deformace forem velmi účinným pomocným prostředkem, který v nedávné době nalezl uplatnění zvláště v embryologii. Obrázek 3.4 ukazuje, že celkem „nepatrná" deformace lidské lebky vede na lebku šimpanze: je jasné, že by bylo třeba deformovat podstatně více, kdybychom chtěli dostat lebku psa.

3.4.2. Axiomatický systém teorie grup

Budeme nyní vyšetřovat systém axiómů, který nebyl – na rozdíl od situace u přirozených čísel – zadán pro již rozvinutou teorii, nýbrž byl postaven do čela teorie, již bylo třeba teprve vytvořit. Matematici pochopitelně už měli jisté zkušenosti s matematickými objekty, o nichž dnes říkáme, že tvoří grupu, a to ještě předtím, než vytvořili systém axiómů pro teorii grup, ale teorie grup sama nebyla ještě rozvinuta.

Uvažujme množinu M libovolných předmětů. Objekty této množiny mohou být např. čísla, otáčení, vektory apod. V tomto okamžiku nás nezajímá, jaké povahy jsou jednotlivé prvky. Pro množinu M nechť existuje jistá operace (vazba, spojení), jíž je každým dvěma prvkům a a b z M přiřazen právě jeden nový prvek c. V oboru čísel jsou takovými operacemi např. elementární početní úkony (sčítání, násobení). Budeme-li se opírat o způsob zápisu násobení, označíme operaci spojení dvou prvků a a b z M symbolem $a \circ b$. Aby množina M tvořila *grupu*, požadujeme od onoho dosud blíže neurčeného spojení, aby splňovalo tyto požadavky (axiómy grupy):

G.1 Spojením libovolných dvou prvků množiny M se nedostaneme mimo množinu M.

G.2 Pro každé tři prvky množiny M platí

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{(asociativní zákon).}$$

(Prvky a, b a c nemusí být navzájem různé.)

G.3 V množině M existuje prvek e (jednotkový prvek) tak, že pro všechny prvky a z M je

$$e \circ a = a .$$

G.4 Ke každému prvku a z množiny M existuje právě jeden inverzní prvek a^{-1} tak, že platí

$$a^{-1} \circ a = e .$$

Uvedeme nyní několik příkladů grupy:

1. Množinou M nechť je množina všech racionálních čísel bez nuly, operací nechť je obvyklé násobení. Je jasné, že axiómy G.1 a G.2 jsou splněny. Jednotkovým prvkem je 1, a tedy platí i G.3. Protože jsme vyloučili nulu, existuje ke každému prvku a inverzní prvek $1/a$. Máme tedy grupu.

2. Reálná čísla bez nuly tvoří vzhledem k operaci násobení opět grupu, která obsahuje grupu z příkladu 1.

3. Množina, skládající se z čísel 1 a -1, tvoří grupu, je-li operací opět násobení. Možná spojení $1 . 1, (-1) . 1, 1 . (-1)$ a $(-1) . (-1)$ nás nevyvedou z množiny M. Axióm G.2 platí pro všechna reálná čísla, tedy i pro 1 a -1. Jednotkovým prvkem je 1 a konečně je vzhledem ke vztahům $1 . 1 = 1$ a $(-1) . (-1) = 1$ každý prvek inverzní sám k sobě!

4. Vedle násobení je pro reálná čísla definováno i sčítání v poněkud nezvyklém označení $a \circ b = a + b$. Sčítání splňuje také všechny axiómy grupy, přičemž nula vystupuje v roli „jednotkového prvku".

5. Zvolíme-li jako množinu prvků množinu všech celých nebo množinu všech racionálních čísel a jako operaci sčítání, dostaneme opět grupy, které jsou obsaženy v grupě z příkladu 4.

Předpis, jímž jsou prvky grupy spojovány, je tedy zobecněním jak operace sčítání, tak i operace násobení. Pojem grupy se však neomezuje jen na číselné množiny.

6. Otáčení O_α kruhové desky okolo jejího středu o úhel α nechť tvoří prvky tzv. grupy rotací. Přitom je $\alpha > 0$, otáčíme-li proti smyslu otáčení hodinových ručiček, a $\alpha < 0$ pro otáčení ve směru hodinových ručiček. Spojení dvou otočení O_α a O_β nechť je otočení o úhel $\alpha + \beta$, symbolicky $O_\alpha \circ O_\beta = O_{\alpha+\beta}$. Je názorně patrné, že spojení tří otočení nezávisí na pořadí, v němž tato otáčení provádíme (axióm G.2). Jednotkovým prvkem je otočení O_0 o úhel 0, které ponechává vše beze změny a které tedy není ve smyslu běžné řeči žádným otáčením. Prvkem inverzním k otočení O_α je otočení $O_{-\alpha}$, tedy otočení, které provedené otočení opět zruší: $O_\alpha \circ O_{-\alpha} = O_0$.

7. Jestliže do kruhu vepíšeme pravidelný n-úhelník ($n \geqq 3$) a budeme-li otáčení provádět tak, aby se vrcholy n-úhelníka opět kryly, pak dostaneme podgrupu grupy z příkladu 6. Tato podgrupa bude mít konečný počet prvků.

8. Mechanicky uskutečnitelné uspořádání 20 pohyblivých částí Rubikovy kostky tvoří prvky Rubikovy grupy. Operacemi jsou otáčení jednotlivých vrstev kostky. (Počet možných uspořádání je dán číslem 43 252 003 274 489 856 000.)

9. Pohyby tělesa v prostoru, které těleso nedeformují, tvoří též grupu.

Na dané množině lze zavést i operace, které nesplňují všechny axiómy grupy: Uvažujme stejnou množinu jako v příkladu 4 a definujme operaci takto: $a \circ b = a + b^2$. Pak je

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b^2) \circ c = (a + b^2) + c^2 = a + b^2 + c^2 ,\\ a \circ (b \circ c) &= a + (b \circ c)^2 = a + (b + c^2)^2 = a + b^2 + c^4 + 2bc^2 ,\end{aligned}$$

a tedy je obecně $(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$ čili axióm G.2 není splněn.

Cvičení

3.1. Vyhovuje množina kladných sudých čísel systému Peanových axiómů?

3.2. Nechť jsou a, b kladná reálná čísla (tj. $a, b > 0$). Vyhovuje operace spojení, definovaná vzorcem
a) $a \circ b = a . b$,
b) $a \circ b = \log_r a + \log_r b$ (r je reálný základ logaritmu) axiómům grupy?

3.3. Ukažte, že funkce $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$ s operací spojení $g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ tvoří grupu.

3.4. Hledejte podgrupy na Rubikově kostce!

3.5. Nová pojetí systému axiómů

Axiomatická metoda si klade za základní cíl právě to, co samotný logický formalismus poskytnout nemůže, totiž průhlednost matematiky až do hloubky.

N. Bourbaki

Matematika vznikla z potřeby mít možnost vyslovit se o chování reálných objektů. Za tímto účelem byly vlastnosti předmětů vyjádřeny ve výrocích (větách), které měly odpovídat získaným zkušenostem. Axiómy tvořící záklateoretického systému, jsou založeny na pozorováních, která lze zachytit jasněji než ostatní, která se již od pradávných dob neustále opakují a potvrzují, takže o jejich pravdivosti a bezpodmínečné platnosti nemáme nejmenších pochyb. Pravdivost tvrzení *Dva body určují právě jednu přímku*, které jsme zvolili za axióm, je podstatně jasnější než platnost tvrzení *Jestliže přímka protíná strany trojúhelníka nebo jejich prodloužení, pak vytíná na těchto stranách, resp. na jejich prodlouženích úsečky, které lze rozdělit do dvou trojic tak, že úsečky v jedné trojici nemají společné krajní body. Součin délek úseček jedné trojice je pak stejný jako součin délek úseček druhé trojice.*

Z tohoto pohledu je Euklidova geometrie vlastně naukou o fyzikálním prostoru, a je to tedy přírodní věda. Ještě G. Frege (1848–1925) poukazuje na to, že axiómy nevyvěrají z pramene logického poznání, když píše: „Od pradávna nazýváme axiómem myšlenku, jejíž pravdivost je jistá, aniž by však bylo možno dokázat ji logickým řetězcem závěrů.“

„Matematici nestudují objekty, nýbrž vztahy mezi objekty; nejde jim tudíž o to, aby tyto objekty nahradili jinými, pokud se vztahy nezmění. Předmět sám je jim lhostejný, zajímá je pouze forma.“ Tato Poincaréova námitka ukazuje, jak vypadá nové myšlení.

Přesné logické důkazy, které slouží k odvozování vět, mají význam přesahující jejich původní účel. Je-li např. v rámci systému axiómů nějaké teorie možné vyměnit objekty tak, že dostaneme opět pravdivé výroky, pak zůstávají v platnosti všechny dříve odvozené důsledky, pokud i v nich provedeme tyto výměny. Jedna z možných výměn geometrických objektů v rovině je založena na vzájemné výměně bodu a přímky (dualita). Z axiómu

Dva body určují právě jednu přímku

plyne pravdivá věta

Dvě přímky určují právě jeden bod.[18])

Záměna objektů v jednom systému axiómů jinými objekty se nemusí uskutečnit uvnitř téhož pojmového systému. Ozřejmuje to systém axiómů teorie grup s aritmetickými nebo geometrickými příklady, tedy s čísly nebo pohyby v roli objektů. Množiny, jejichž prvky lze chápat jako objekty nějaké teorie (a jež tedy splňují všechny axiómy této teorie), nazýváme *modely axiomatického systému.* V každém modelu platí všechny důsledky, odvozené z axiomatického systému, s příslušnou interpretací prvků jako objektů systému axiómů. V teorii

[18]) Není-li zaveden nekonečně vzdálený bod jako průsečík dvou rovnoběžek, musíme zde doplnit slova *nebo jsou rovnoběžné.*

grup platí jak pro čísla, tak i pro pohyby pravidlo, že závorky v operacích lze vynechat, tj. že platí asociativní zákon:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c .$$

Tím, že připustíme, aby základní pojmy v axiómech byly obsahově různě interpretovány, ztrácí se původní pojetí, že se jedná o zřejmé a pravdivé výroky. Základní pojmy se stávají prázdnými pojmovými schématy, axiómy pak výrokovými funkcemi. Jako srovnání nám poslouží dotazník, který je třeba vyplnit: pojmovým schématům je třeba dát pomocí údajů o osobě obsahovou náplň.

Byl to především D. Hilbert (1862–1943), který ve své knize „Základy geometrie“ (1899) napomohl tomu, aby se prosadilo nové pojetí, že se totiž matematik zajímá jen o to, co z axiómů vyplývá, a ne o to, co axiómy znamenají. H. Scholz (1884–1956) k tomu poznamenává: „Všichni axiomatici před Hilbertem chápali axiómy euklidovské geometrie jako pravdy, které jsou tak evidentní, že nevyžadují žádný důkaz. Pro Hilberta jsou tyto axiómy něco zcela jiného. Nejsou to věty, nýbrž kostry vět (= výrokové funkce), které přejdou v efektivní věty teprve dodatečně – interpretací proměnných, které v nich vystupují. Kostry vět nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé, nýbrž jsou buď splnitelné, nebo nesplnitelné.“

Systém axiómů se spolu se svými důsledky stane přírodovědnou teorií teprve tehdy, když se schématům axiomatického systému přiřadí vnímatelné předměty (např. lze geometrickému obrazci přiřadit tuhé těleso). V matematických modelech se pojmová schémata naplňují idealizací vnímatelných objektů, např. body nebo přímkami. Všechny modely nějakého systému axiómů jsou matematicky zcela rovnocenné. V axiomatické přírodovědné teorii (např. v mechanice, termodynamice) je to úplně jinak, neboť jen interpretace základních pojmů má smysl. Světelné paprsky lze sice interpretovat jako přímky euklidovské geometrie (děje se to např. ve školních učebnicích), při této interpretaci však není předem samozřejmé, že euklidovské axiómy platí i ve fyzikálně poznatelném prostoru; to také ukázala nejpozději teorie relativity, když zavedla zakřivené prostory. Přezkoušení každé empirické interpretace je čistě otázkou přírodních věd.

Toto hledisko se objevuje v Einsteinově zjištění: „Pokrok dosažený axiomatikou spočívá v tom, že zřetelně oddělila logicko-formální stránku od věcného, resp. názorného obsahu: jen logicko-formální stránka tvoří podle axiomatiky předmět matematiky, nikoliv však názorný nebo jiný obsah, s logicko-formální stránkou spojený.“ Současně ještě dává Einstein odpověď na otázku o nepodmíněné (absolutní) platnosti matematiky oproti podmíněné platnosti přírodovědných teorií: „Neboť se nelze divit tomu, že dojdeme ke shodným logickým důsledkům, když jsme se shodli jak na základních větách (axiómech), tak na metodách, jimiž mají být z těchto základních vět odvozeny věty další.“

V novějším pojetí nepředstavují axiómy žádná zřejmá tvrzení o základních pojmech teorie, nýbrž naopak implicitně (nerozvinutě) vysvětlují základní pojmy, přesněji vztahy, které mezi nimi jsou. Z tohoto hlediska je pochopitelné stanovisko B. Russella (1872–1970), které jsme citovali na začátku knihy, totiž že „matematici ani nevědí, o čem hovoří, ani nevědí, zda řečené je pravdivé“.

Nejednoznačné vytýčení základních pojmů neznamená, že formálně pojaté systémy axiómů jsou bez významu nebo bez obsahu. Naopak – dávají nám možnost vybudovat abstraktní teorii, která se hodí pro všechny obsahové interpretace systému axiómů a kterou tedy není třeba při každé interpretaci znovu opakovat.

D. Hilbert, který napomáhal zdomácnění tohoto nového pojetí, vyjádřil nový pohled velmi případně, když během rozhovoru v jedné berlínské čekárně řekl: „Musíme vždy být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a půllitry." Euklidova definice „Bod je to, co nemá části" (σημεῖον, οὗ μέρος οὐδέν) vlastně přísně vzato vůbec nevysvětluje, co to bod je. Také atomy ve fyzice v řeckém pojetí, kde atom znamená nedělitelné (τὸ ἄτομον), by byly matematickými body. Zmíněná vlastnost nedělitelnosti je matematicky nepoužitelná a Euklides to sám dokazuje tím, že se k ní v žádném ze svých důkazů nevrací. Chce vlastně jen připomenout představu, kterou o bodu máme. Asi o 2000 let později to učinil velmi drasticky matematik naší doby (O. Perron, 1880–1975), když řekl: „Bod je to, co si pod tím představí každý rozumný a nepřemoudřelý člověk. A definice přímky zní právě tak." D. Hilbert uvádí svůj proslulý systém geometrie slovy: „Představme si tři různé soustavy věcí. Věci první soustavy nazýváme body..., věci druhé soustavy nazýváme přímkami..., věci třetí soustavy nazýváme rovinami... . Představme si, že body, přímky a roviny jsou v jistých vzájemných vztazích, a označme tyto vztahy slovy jako „leží", „mezi", „rovnoběžné", „kongruentní", „spojité"; přesný a pro matematické účely úplný popis těchto vztahů je dán axiómy geometrie."

Ačkoliv se matematici zajímají jen o to, co ze systému axiómů plyne, využívají pochopitelně při utváření myšlenek důkazu více či méně představy, spojené v jejich podvědomí se základními pojmy. Logicky vzato stojí systém axiómů před teorií, z psychologického hlediska předcházejí nashromážděné zkušenosti a příslušné názorné představy teorii nebo systém axiómů.

Při zavedení přirozených čísel (odst. 3.4.1) jsme již poukázali na to, že z axiomatického hlediska je zcela lhostejné, jaký speciální model přirozených čísel si zvolíme k počítání. Jestliže zápisu pomocí arabských číslic dáváme přednost před římskými nebo jinými číslicemi, je rozhodující pouze praktické hledisko. Každému po arabsku zapsanému číslu totiž odpovídá právě jedno číslo zapsané římskými číslicemi a naopak, a toto přiřazení zůstane zachováno i po provedených aritmetických operacích, jak to ukazuje pro sčítání příklad

$$\begin{array}{ccccc} 4 & + & 7 & = & 11 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathrm{IV} & + & \mathrm{VII} & = & \mathrm{XI}\,. \end{array}$$

Se skutečností, že modely – viděné abstraktně – mají stejnou strukturu, se v matematice můžeme setkat často. Budeme proto definovat, co rozumíme strukturální totožností libovolných modelů: Řekněme, že dva modely téhož systému axiómů jsou *navzájem izomorfní*, když lze objekty obou modelů vzájemně jednoznačně na sebe zobrazit, a to tak, že toto zobrazení zůstane zachováno i tehdy, když provedeme operace, které jsou definovány pro předměty v každém modelu.

Příklad: Množina kladných reálných čísel s početní operací násobení a množina všech reálných čísel s početní operací sčítání jsou izomorfní systémy, přičemž vzájemné přiřazení je dáno logaritmem: $a \leftrightarrow \log a$. Každé reálné číslo lze totiž chápat jako logaritmus nějakého kladného reálného čísla a naopak má každé kladné reálné číslo svůj logaritmus. Součinu $c = ab$ dvou kladných čísel a a b je tak vzhledem ke vzorci $\log a + \log b = \log ab$ přiřazen logaritmus součinu c a naopak, takže máme požadovaný izomorfismus (srov. cvičení 3.2).

Všechny modely systému Peanových axiómů pro přirozená čísla jsou navzájem izomorfní. Systém axiómů tedy nedokáže rozlišit dva modely přirozených čísel čili přirozená čísla jsou systémem axiómů popsána až na izomorfii.

Ne každé dva modely téhož systému axiómů však musí být navzájem izomorfní: Jak ukazují příklady grup z odst. 3.4.2, lze definovat grupy na konečných nebo nekonečných množinách, takže už jenom z tohoto důvodu nemusí existovat vzájemně jednoznačné přiřazení mezi prvky dvou grup. Systémy axiómů s neizomorfními modely jsou zajímavé vzhledem ke své široké použitelnosti v různých odvětvích matematiky, neboť mohou popisovat podobnou situaci v různých strukturách.

Při budování systémů axiómů můžeme sledovat dva cíle: můžeme volit axiómy tak, aby vznikl – až na izomorfii – jen jeden model, nebo tak, aby vzniklo co nejvíce modelů.

3.6. Požadavky kladené na systém axiómů

V matematice nebývají systémy axiómů voleny libovolně. Rozmysleme si nyní, jakým podmínkám musí tyto systémy vyhovovat.

3.6.1. Bezespornost

Geometrická teorie, v níž lze současně odvodit větu V „Pro každý trojúhelník platí, že součet jeho úhlů je 180°" i větu *non* V „Existují trojúhelníky, pro něž je součet úhlů různý od 180°", je bez užitku. Nesmí se tedy stát, aby ze systému axiómů plynula jak věta V, tak její negace *non* V. Jestliže jsme zkonstruovali model, který systému axiómů vyhovuje, můžeme otázku bezespornosti axiomatického systému přesunout na model. Protože existuje mnoho modelů (např. přirozená čísla, euklidovská rovina nebo fyzikálně motivované modely), které se nám zdají být bezesporné (konsistentní), zpravidla se s tím spokojíme. Bezespornost jedné teorie lze též učinit závislou na bezespornosti jiné teorie (relativní bezespornost), jak to ukážeme v odst. 3.6.3 pro euklidovskou a neeuklidovskou geometrii. Existují však také poměrně „názorné" teorie množin, kde snadno narazíme na rozpory (srov. odst. 3.7 a 7.4).

3.6.2. Úplnost

Teorie, resp. příslušná soustava axiómů byla nazvána bezespornou, když ze dvou navzájem si odporujících vět, které lze v rámci této teorie formulovat, se alespoň jedna v rámci teorie nedala dokázat. Od teorie však očekáváme, že bude obsahovat všechny pravdivé věty, které se jí týkají. Proto bychom chtěli vždy zjistit, zda nějakou větu lze dokázat či vyvrátit, tj. zda ze dvou navzájem si odporujících tvrzení jedné teorie[19]) lze dokázat právě jedno. Tak se např. domníváme, že Goldbachova hypotéza, uvedená na str. 25, je buď správná, nebo nesprávná, třetí možnost není (tertium non datur). Tato víra je historicky podmíněna u teorií, které byly axiomatizovány dodatečně a které mají názorně motivovaný (např. fyzikální) původ. Když totiž předpokládáme, že se v takové teorii objeví tvrzení, které nelze ani dokázat, ani vyvrátit, pak nám názor, spojený s teorií, nebo nějaký experiment naznačí, zda ono tvrzení je pravdivé či nikoliv. Toto tvrzení nebo jeho negaci pak můžeme připojit k systému axiómů a tím ho doplnit. A tak lze postupovat i v eventuálních dalších případech, čímž očekáváme, že vzhledem k našemu názoru nebo našim zkušenostem bude taková teorie úplná.

Tato názorně motivovaná úplnost se však nevyskytuje už ani v tak jednoduchém a důležitém axiomatickém systému jako je systém axiómů teorie grup. Uveďme k tomu příklad: Budiž G nějaká grupa a uvažujme větu

(2) *Pro každý prvek a grupy G platí $a = a^{-1}$.*

Negace této věty zní: *Není pravda, že pro každý prvek grupy G je $a = a^{-1}$*, resp.

(3) *V grupě G existuje alespoň jeden prvek a, pro který je $a \neq a^{-1}$.*

V modelech z příkladů 1, 2, 4, 5, 6 a 9 odst. 3.4.2 platí věta (3); v modelu z příkladu 3 je však každý prvek sám k sobě inverzní, a tedy platí (2). Dostali jsme tento výsledek: Systému axiómů teorie grup vyhovují jak bezesporné modely,

[19]) Zde je podstatné, že se jedná o jednu teorii. Věta

Pro každý trojúhelník platí, že součet úhlů je 180°

platí v rovinné euklidovské geometrii. Věta

Pro každý trojúhelník platí, že součet úhlů není 180°

platí ve sférické geometrii; obě – chápané jako věty jediné geometrické teorie – si však odporují.

v nichž platí (2), tak bezesporné modely, v nichž platí (3). Jestliže však systém axiómů teorie grup je bezesporný, pak nemohou navzájem si odporující věty (2) a (3) platit současně.

Co jsme při naší názorné motivaci prve přehlédli? Mlčky jsme použili to, že v teorii grup existují jen navzájem izomorfní modely, jak je to přirozené pro dodatečně axiomatizovanou teorii, která vyrostla ze zkušenosti a z názoru. Axiomaticky vybudovaná teorie grup však připouští různorodé modely, na což jsme poukázali již na str. 75, a my jsme našli jak modely, v nichž věta platí, tak modely, v nichž platí její negace.

3.6.3. Nezávislost

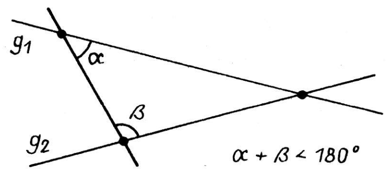
Může se stát, že mezi axiómy jsou některé, které lze odvodit z jiných axiómů. Lze je tedy jako axiómy vypustit a zařadit do teorie jako věty. Nezávislost axiómu A na zbývajících axiómech systému $\mathscr{A}$ prokážeme tak, že udáme model soustavy axiómů, který vznikne z $\mathscr{A}$ odebráním A a v němž platí všechny axiómy mimo A. Kdyby axióm A byl důsledkem ostatních axiómů, musel by tento důsledek platit v každém modelu systému vzniklého z $\mathscr{A}$ zmenšením o A.

Dokážeme nezávislost Peanova axiómu A.2 na zbývajících (odst. 3.4.1) a vyšetříme za tímto účelem množinu $N = \{1, a\}$ se vztahem následnictví $1' = a$. V tomto modelu jsou splněny všechny axiómy až na A.2 (neboť a nemá žádného následníka).

Ačkoliv nezávislost axiómů nějakého systému není v zásadě nutná k tomu, aby bylo možno obdržet všechny věty teorie, umožňuje znalost závislosti a nezávislosti axiómů poučné pohledy do struktury teorie. Slavným příkladem je objevení neeuklidovských geometrií, k němuž dala podnět po tisíciletí se opakující otázka, zda axióm o rovnoběžkách je na zbývajících geometrických axiómech nezávislý. Euklidův systém je velmi rozsáhlý, axiómy v něm obsažené jsou sice obecné, ale jako výroky o poznatelném fyzikálním prostoru všechny velmi názorné a nevyžadují zřejmě žádný důkaz. Týkají se sice prostoru, který si představujeme jako nekonečný, neobsahují však žádná tvrzení o tomto nekonečném prostoru, která by se vymykala naší konečné zkušenosti. K tomu tři příklady:

Dva body určují právě jednu přímku,
Okolo každého bodu lze sestrojit kružnici
o libovolném poloměru,
Všechny pravé úhly jsou stejné.

Komplikovanější strukturu má pouze podstatně delší axióm o rovnoběžkách (v Euklidově podání) *Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny* *a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají, a to po té straně přímky, kde je součet menší* (srov. obr. 3.5). Proto se matematici již od Euklidových dob pokoušeli odvodit tento axióm ze zbývajících kratších (a tedy jednodušších) axiómů, zvláště pak proto, že jeho obrácení se dá dokázat (srov. odst. 2.13.2). Pokusy o důkaz závislosti axiómu



Obr. 3.5 K axiómu o rovnoběžkách

o rovnoběžkách probíhaly všechny tak, že místo axiómu o rovnoběžkách využívaly jeho negaci, kterou považovaly za pravdivou. Snahou bylo narazit na konci jistého řetězce logických úsudků na spor; to se však nestalo. Proto někteří matematici asi před 150 lety přistoupili k problému opačně. Pokoušeli se dokázat, že může existovat i geometrie bez axiómu o rovnoběžkách. Na konci 19. století byly konečně nalezeny v euklidovské rovině modely neeuklidovských geometrií, které spojovaly bezespornost neeuklidovských geometrií s bezesporností euklidovské geometrie. Geometrie, kterou lze vybudovat bez axiómu o rovnoběžkách, se nazývá absolutní. Tato geometrie pochopitelně není úplná, neboť axióm o rovnoběžkách nelze v jejím rámci ani dokázat, ani vyvrátit. Systémy axiómů geometrie se člení podle toho, zda se do nich axióm o rovnoběžkách zahrne či nikoliv.

Když už axiómy nemusí být pravdivá a zřejmá tvrzení, musí jejich výběr splňovat alespoň právě vyjmenované podmínky. Matematikům přitom zůstává stále ještě dosti prostoru, chtějí-li axiomatizovat nějakou teorii. Základní pojmy, které potřebujeme k popisu nějaké teorie, a vztahy mezi nimi existující se dají vysvětlit i více způsoby. A je otcem B a B je synem A jsou rovnocenné popisy jediné skutečnosti, přičemž vztah mezi A a B lze vyjádřit jak pomocí základního pojmu otec, tak pomocí základního pojmu syn. Víme také, že k výrokům, resp. výrokovým funkcím existují ekvivalentní výroky, resp. výrokové funkce, takže každou teorii lze opatřit různými systémy axiómů, které jsou navzájem ekvivalentní. Důvody, které pak vedou k tomu, že upřednostníme nebo odmítneme jeden nebo druhý axiomatický systém, jsou rozdílné: jeden systém axiómů by měl obsahovat co možná nejméně axiómů, jiný by měl být tvořen pokud možno zřejmými nebo dobře použitelnými axiómy (ačkoliv poslední požadavek je subjektivní a závisí vždy na momentální zkušenosti) atd.

Cvičení

3.5. Dokažte nezávislost axiómu A.3 na zbývajících axiómech Peanova systému.

3.7. Problémy základů matematiky

Lidská věda se podobá kouli, která neustále roste. Stejnou měrou, jakou roste její povrch, roste i počet jejích dotyků s nekonečnem.

B. Pascal

Novým pojetím axiómů, jak jsme je vyložili v předcházejícím odstavci, vznikají pro matematiky nové problémy. Zapíše-li matematik formálně nějaký systém axiómů, vzniká ihned otázka, zda si axiómy odporují či nikoliv, zda jsou axiómy úplné a jaké modely náš systém axiómů vůbec připouští (přitom to byl zpravidla jeden nebo více modelů, co matematika inspirovalo k výstavbě formálního axiomatického systému).

Ačkoliv se pojem množiny zdá být jednoduchý, má vysoký stupeň abstrakce, a proto není bezespornost teorie množin mimo všechny pochyby, resp. nelze ji empiricky potvrdit. Množiny, které dobře známe, zpravidla neobsahují sebe samy jako prvek, neboť například množina všech knih není knihou. Uvažujeme-li však množinu všech abstraktních pojmů, pak je tato množina sama opět abstraktním pojmem. Tato množina má tedy tu zvláštní vlastnost, že obsahuje sama sebe jako prvek. Má proto smysl hovořit o množinách, které obsahují samy sebe jako prvek. Budeme-li však množinu M všech množin, které samy sebe jako prvek neobsahují, zkoumat z hlediska, zda obsahuje sama sebe jako prvek či nikoliv (třetí možnost není!), dojdeme k tomuto výsledku: Kdyby množina M obsahovala sama sebe, byla by vzhledem k definici množiny M množinou, která sama sebe neobsahuje; je-li ovšem množina M množinou, která sama sebe neobsahuje, pak je vzhledem k naší definici obsažena v množině M. Zde se myšlení splétá a mate (Russellova antinomie, 1901). Každý systém axiómů, který připouští tvoření takovýchto množin, obsahuje příliš mnoho „množin", mimo jiné i „nemnožiny"[20]). Snahy matematiků směřují od počátku tohoto století k tomu, takové zrůdné množiny a s nimi spojené rozpory z axiomatických systémů vyloučit. Ve známých axiomatických systémech teorie

[20]) V němčině slovní hříčka: *Menge* = množina, *Unmenge* = nemnožina má v němčině především význam „spousta, ohromné množství". (Pozn. překl.)

množin nebyly dosud objeveny žádné spory, to však nijak nezaručuje, že by k tomu jednoho krásného dne nemohlo dojít.

Stejně překvapující jako přílišná obsažnost systému axiómů je i chudost axiomatických systémů, objevená v roce 1931 K. Gödelem. Ukážeme to na příkladu systému Peanových axiómů. Protože ve všech matematických teoriích se odpočítává, jsou přirozená čísla pro studium základů matematiky obvzláště důležitá. Přirozená čísla tvoří nejjednodušší model množiny s nekonečně mnoha prvky. Protože konečné množiny lze – alespoň z teoretického hlediska – přehlédnout po jednotlivých prvcích, „rozpočítat" je, vznikají skutečné problémy základů matematiky teprve tehdy, když je ve hře nekonečně mnoho prvků.

Popíšeme nyní, jak lze každý matematický text (důkaz, vzorec, problém, ...) formulovat aritmeticky, tj. učinit z něj problém aritmetiky, která tím nabude pro zkoumání základů matematiky znovu na zajímavosti. Postup pochází ve svých základních myšlenkách od K. Gödela (1906–1978), uvedeme jej zde v poněkud pozměněné formě, abychom zvýraznili princip.

Předpokládáme, že aritmetika, rozvinutá pomocí systému Peanových axiómů, je bezesporná, jinak by totiž všechny následující výsledky platily triviálně (včetně svých negací). Každý běžný text lze vzájemně jednoznačným způsobem zapsat nebo, jak se říká, zakódovat pomocí Morseovy abecedy, tj. pomocí znaků pomlčky (–), tečky (.) a mezery ( ). Každý matematický text je formálně vzato posloupností znaků, v níž jsou znaky seřazeny podle určitých pravidel. Protože je vlastně lhostejné, jakých znaků používáme, můžeme každý znak, a tím i každý text zakódovat pomocí posloupností čísel. Musíme se jen postarat o to, aby existoval vzájemně jednoznačný kódovací předpis udávající vzájemně jednoznačné přiřazení mezi potřebnými matematickými znaky a přirozenými čísly, abychom mohli každou kódovanou posloupnost čísel zpětně přeložit (dekódovat). Potřebné znaky v matematických textech jsou zpravidla velká a malá písmena latinské a řecké abecedy, gotická písmena a matematické znaky jako „=" nebo „+" atd.; všech je jich jistě méně než 1 000. Tak můžeme každému znaku přiřadit trojici arabských číslic a opačně odpovídá každé trojici číslic nějaký znak. Toto přiřazení se realizuje jako ve slovníku, nemůže ovšem vést k nedorozuměním. Výtah ze slovníku by mohl vypadat takto:

znak	kód	znak	kód
0	000	n	047
1	001	⋮	⋮
⋮	⋮	φ	100
9	009	⋮	⋮
⋮	⋮	(	110
F	016	)	111
⋮	⋮	⋮	⋮

Výraz $\varphi(n)$, resp. $F(1)$ má kód 100 110 047 111, resp. 016 110 001 111. Skupiny trojic získané kódováním nazveme Gödelovými čísly a můžeme je chápat jako přirozená čísla, v jejichž zápisu mohou – způsobem nikoliv obvyklým – vystupovat na začátku i nuly. Když naproti tomu nějaké přirozené číslo jako třeba 16 421 nebo 1 421 762 doplníme na začátku jednou nebo dvěma nulami, aby bylo možné jejich číslice rozdělit jediným způsobem do skupin po třech, můžeme takto upravená přirozená čísla chápat jako Gödelova čísla. Každé přirozené číslo můžeme tedy při této úmluvě

považovat jednak jako obvykle za přirozené číslo, jednak na ně lze pohlížet také jako na kódovaný matematický výrok. Dekódování většiny přirozených čísel ovšem povede k nesmyslným kombinacím znaků (asi jako kdyby opice skládala dohromady písmenka dětské tiskárničky), jiná však někdy povedou na smysluplné texty (např. jak na pojednání o eskymáckých dialektech ve všech variantách, které navíc obsahují všechny tiskové chyby, tak i na rozumné matematické výroky).

Budiž nyní A dané tvrzení s Gödelovým číslem N, které lze utvořit uvnitř systému Peanových axiómů. Pak lze výrok

(4) *Tvrzení A s Gödelovým číslem N není v Peanově systému axiómů dokazatelné*

zakódovat v Gödelově smyslu, přičemž dostaneme nějaké Gödelovo číslo M. Gödel prokázal metodou nepřímého důkazu, že existuje tvrzení A s Gödelovým číslem N, pro něž má (4) Gödelovo číslo N.[21]) Tím ovšem potvrzuje tvrzení (4) svou vlastní nedokazatelnost! Tvrzení (4) je však skutečně nedokazatelné, a to z těchto důvodů: Důkaz odporuje tvrzení o nedokazatelnosti a vyvrácení tvrzení (4) potvrzuje právě výrok, obsažený v (4), totiž že (4) není dokazatelné. Ačkoliv (4) je tak pravdivým tvrzením, nelze je odvodit z Peanova systému axiómů, který je tím neúplný. Tento nedostatek axiomatického systému je zásadní povahy, neboť když připojíme (4) jako nový nezávislý axióm ke zbývajícím axiómům, lze v novém, rozšířeném systému axiómů opět konstruovat pravdivý a nedokazatelný výrok atd. Výsledkem je, že nelze udat přehledný axiomatický systém, který by aritmetiku přirozených čísel popsal úplně.

Gödelův důkaz, který jsme naznačili, je nepřímý a komplikovaný, a tak ho nebylo možno dodnes využít k tomu, aby byl udán aritmetický charakter nedokazatelných tvrzení; zvláště není dosud vyjasněna otázka, zda se mezi nedokázanými tvrzeními (např. Fermatova nebo Goldbachova hypotéza) nenacházejí pravdivá, ale nedokazatelná tvrzení. V jiných systémech axiómů jsou známy „zajímavé" nedokazatelné výroky. Pro absolutní geometrii je nedokazatelnou větou axióm o rovnoběžkách, v teorii grup jsou nedokazatelnými větami věta uvedená na str. 76 nebo komutativní zákon $a \circ b = b \circ a$ pro všechny prvky a a b dané grupy.

Gödel mohl dále dokázat, že otázku bezespornosti aritmetiky nelze v rámci aritmetiky zodpovědět. Aritmetika se tedy nemůže jako baron Prášil vytáhnout za vlastní kštici z močálu, nýbrž k tomu vyžaduje vnějších pomocných prostředků. Pozoruhodné však je, že matematika je s to vlastními prostředky popsat meze svých schopností. Důkaz bezespornosti aritmetiky, který v roce 1936 udal G. Gentzen, obsahuje podle očekávání prostředky, které nepatří k systému Peanových axiómů, totiž transfinitní indukci.

Z těchto výsledků lze tedy nejprve vyvodit zdánlivě pesimistický závěr, že bohatství matematických teorií (a tím spíše ani matematiku jako celek) nelze ve vší úplnosti pojmout axiomaticky. Nerozhodnutelnost některých tvrzení není absolutní, nýbrž je vázána na příslušný systém axiómů s odpovídající

[21]) Při naší „gödelizaci" je ovšem v důsledku zjednodušení vždy $N < M$.

logikou. Jsme tedy – a to je kladný obrat – vyzýváni k tomu, abychom konstruovali stále obtížnější systémy, jak pokud jde o axiomatiku, tak i pokud jde o důkazové metody. S axiomatickým systémem nemáme v rukou matematické poznání, onen kámen mudrců, získat jej můžeme pouze tím, že budeme jednat. Matematika není, jak to velmi obrazně vyjádřil H. Weyl (1885–1955), žádný „automat, který za 10 centů vyplivne balík axiómů, definic a lemmat a už se nehne...".

Vyjasněme si, kolik důkazů je myslitelných a kolik jich vůbec můžeme provést. Protože z časových důvodů musíme provádět jeden důkaz za druhým, je množství všech provedených důkazů spočetné, i kdybychom se pro budoucnost dokázali časového omezení zbavit. Vyčerpáme souborem všech proveditelných důkazů množinu všech možných důkazů? Každý důkaz je uspořádání konečně mnoha znaků. Už jsme si uvědomili, že již 1 000 různých znaků, obsažených v dostatečném množství v sazečově kazetě, dovoluje sazeči sestavit libovolný důkaz. Protože všechny důkazy obsahují jen konečně mnoho znaků, je jejich souhrn podmnožinou množiny všech možných znakových kombinací, v nichž se vyskytuje jen konečně mnoho znaků. Tato množina je však spočetná. K tomu si uvědomme, že existuje jen konečně mnoho množin, které obsahují *n* znaků ne nutně různých. Soubor těchto množin je pro každé *n* spočetný. Množinu všech možných znakových kombinací nyní očíslujeme takto: nejprve očíslujeme množiny, obsahující jeden znak, pak množiny obsahující dva znaky atd. Tímto způsobem zachytíme množiny znaků. Tím je také množina všech možných důkazů spočetná. Množina transcendentních reálných čísel, tj. čísel, která nejsou kořeny žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty, není – jak známo – spočetná. Abychom pro každé reálné číslo *x* prověřili platnost výroku získaného z výrokové funkce *x je transcendentní číslo*, potřebujeme tedy již více než spočetně mnoho důkazů. Množina potřebných důkazů obsahuje jako podmnožinu množinu všech možných důkazů. Na to poukázal P. Finsler.[22])

V matematice existuje mnoho problémů, jejichž řešení vede k důsledkům přesahujícím původní otázku. Problém rovnoběžek vedl k rozštěpení geometrie a podstatně pomohl při prosazení axiomatické metody. U Fermatova problému nebylo dosud nalezeno řešení, ale snahy o jeho řešení vedly k důležitým pohledům na teorii čísel. Neočekávané důsledky měl i následující problém: Již více než 100 let tuší matematici, že je pravdivé to, co kartografové dobře vědí, že totiž k vybarvení globu nebo jakékoliv jeho části (tedy každé mapy) stačí čtyři

[22]) Protože nám jde jen o úvahy zásadního rázu, odmítneme námitku, že za jistých okolností lze pro dostatečně velké třídy čísel vést společné důkazy, takže počet důkazů lze redukovat.

barvy, tři však nikoliv (pochopitelně s upřesněním pro matematiku nutným – jako co je mapa atp.). Matematici se tomuto problému čtyř barev věnovali se zvláštní tvrdošíjností (pro některé to už byla věta o čtyřech barvách), protože pro komplikovanější geometrická tělesa jako tórus (duše pneumatiky) aj. lze odpovídající věty dokázat: jen ta koule – a my přece žijeme na zeměkouli – tvoří skandální výjimku!

V roce 1976 přistoupili matematici K. Appel a W. Haken k důkazu tím, že použili počítač a v dialogu s ním ho nasadili ke zpracování rozvláčného rozlišování jednotlivých případů. Pro některé z případů, které bylo nutno rozlišit, potřeboval i počítač příliš mnoho strojového času, takže po dostatečně dlouhém počítání (30 minut) se od takových případů upustilo. To bylo možné, protože při dokazování byly k dispozici četné varianty pro možná rozlišení jednotlivých případů. Po 1 200 hodinách se počítač zastavil a vytiskl úspěšné zpracování úplného systému možných případů (asi 2 000), čímž se z problému čtyř barev stala věta o čtyřech barvách. Další nezávislé ověření potvrdilo v roce 1978 výsledek za desetinu původního strojového času.

Pro matematiku tím vznikají podstatné metodické otázky. Nejvíce je nasnadě otázka „Má činnost počítače průkaznost důkazu?" Důvěřujeme sice početní přesnosti počítače, ale stroje bývají poruchové. I když program a data byla v úplnosti zveřejněna a lze je ověřit, není tím ještě dána záruka, že děrné pásky byly správně vyděrovány nebo přečteny – a to zcela pomlčíme o obskurních chybách moderních počítačů[23]), jako jsou například pouze občas se vyskytující chyby nebo chyby, které se objevují tak zřídka, že je lze objevit až po letech; i při správném programu a korektních údajích tedy může být výsledek nesprávný. (Samozřejmě není ani ověření dlouhých tradičních důkazů bez problémů a podléhá subjektivním chybám.)

Je však rozdíl v tom, zda počítač vytiskne špatnou hodnotu pro kořen nějaké rovnice nebo zda je třeba nějaký text interpretovat tak, že každá kvadratická rovnice má právě jedno řešení. Druhou výraznou změnou oproti obvyklým důkazovým metodám je obrovský podíl strojového času. Až dosud mohl každý odpovídajícím způsobem vyškolený matematik porozumět každému důkazu, nebo alespoň dát dohromady čas potřebný k jeho rozboru. Nyní však je nucen buď počítači slepě důvěřovat, nebo mít k dispozici počítače stejné vý-

[23]) Zaměstnanec podniku pro stavbu počítačů, který se zabýval návrhem logických obvodů, se dostal se svou firmou do sporu a jako šibalskou odvetu vyvedl obvody jednoho počítače tak, že se ve výsledcích výpočtů náhodně, ale zato výrazně tiskla věta „Já jsem neznámý Glitch". Tuto provozní poruchu nebyli jeho bývalí spolupracovníci schopni odstranit.

konnosti, a tedy zejména získat prostředky na zaplacení strojového času. Na argument, že v budoucnu budou k dispozici výkonnější a levnější počítače, lze namítnout, že nelze dohlédnout konce ani u stupně složitosti problémů. Jednoduchý příklad tohoto typu je uveden v odst. 4.4. Matematické dokazování tohoto druhu tak nabývá společenského rozměru.

Zahrnutí počítače do procesu dokazování jako pomocného prostředku určitě v budoucnu změní chápání toho, co je důkaz a co je přiměřená přesnost důkazu. S tím, že se objevily kapesní kalkulátory, „vyžaduje" např. otázka, zda je $e^\pi > \pi^e$ nebo naopak, pouze několik stisknutí tlačítek, aby bylo rozhodnuto: $e^\pi \doteq 23{,}104\,6 > 22{,}459\,1 \doteq \pi^e$.

Leibnizovský ideál mechanického potvrzení všech pravd není dnes už nedostižným přáním. Současný matematik B. H. Neumann předvídá: „Nicméně přijde den, kdy výzkumné práce v matematice bude psát počítač." Jako útěchu ovšem připojuje: „Příslušníku lidské obce matematiků, neztrácej odvahu: ten den přijde, nebude to však ani v tomto, ani v příštím roce." R. Thom vychází z předpokladu, že takový počítač existuje, a ptá se: „Chtěli bychom ověřit, zda je správná formule *F* v teorii *T*. Po 10^{30} operacích, které se uskuteční během několika sekund, nám stroj dá kladnou odpověď. Který matematik by přijal bez váhání platnost takového způsobu dokazování, při němž by neměl možnost prověřit sám jednotlivé kroky?"

Změny v pojetí toho, co to je důkaz, nejsou nové. Je v povaze věci, že např. leccos formulujeme přesněji než Euklides před 2 000 léty (meziaxiómy). Sám princip důkazu nebyl v matematice nikdy předmětem pochybností. V době, kdy v matematice probíhaly hluboké proměny, zdůrazňuje F. Klein (1849 až 1925): „Ze studia historie naší vědy totiž vyplývá, že ‚přísnost' je přese všecko cosi relativního, něco, co se s pokračujícím rozvojem teprve vyvíjí. Je zajímavé pozorovat, jak v údobí, orientovaném na přísnost, se současníci vždy domnívají, že v tomto směru dosáhli maxima, a jak je pak pozdější generace ve svých požadavcích a výkonech překonává. Tak byl překonán Euklides, Gauss i Weierstrass. Zdá se, že rozvoji v tomto směru jsou kladeny meze stejně málo, jak málo existují hranice pro tvůrčí objevitelské schopnosti".

3.8. Lyrický exkurs: Hommage à Gödel aneb Pocta Gödelovi

Věta barona Prášila, kůň, močál a kštice,
jest okouzlující, nezapomeň však:
Baron Prášil byl lhář.

Gödelova věta vypadá na první pohled
poněkud tuctově, pomni však:
Gödel měl pravdu.

„V každém dostatečně obsažném systému
lze formulovat věty,
jež uvnitř tohoto systému
nelze dokázat ani vyvrátit,
leda by ovšem systém sám
byl inkonsistentní."

Můžeš svou vlastní řeč
popsat svou vlastní řečí:
ale ne docela.

Můžeš svůj vlastní mozek
svým vlastním mozkem prozkoumat:
ale ne docela.

Atd.

Aby prokázal své oprávnění,
musí každý myslitelný systém sám sebe přesáhnout,
tj. zničit.

„Dostatečně obsažný" či nikoliv:
Bezespornost je něco, čeho je málo,
nebo je to spor.

(Jistota = inkonsistence)

Každý myslitelný jezdec,
a tedy i baron Prášil,
a tedy i ty jsi podsystém
dostatečně obsažného močálu.

A podsystém tohoto podsystému
je vlastní kštice,
tento zvedák
na reformisty a lháře.

V každém dostatečně obsažném systému,
tedy i zde v tomto močále
lze formulovat věty,
jež uvnitř tohoto systému
nelze dokázat ani vyvrátit.
Popadni tyto věty
a táhni!

Hans Magnus Enzensberger

3.9. Axiomatická metoda mimo matematiku

> Tvrdím však, že v každé jednotlivé nauce o přírodě lze najít jen tolik skutečné vědy, kolik je v ní matematiky.
>
> I. Kant

Podrobné výzkumy axiomatické metody a jejího významu prováděli již řečtí filozofové, především Platón (427–348 př. n. l.) a Aristoteles (364–322 př. n. l.). Středověký filozof B. Spinoza (1632–1677) podnikl ve své knize „Etika“[24]) pokus vybudovat etiku podle příkladu geometrie (in more geometrico). 72. věta čtvrtého dílu zní: „Svobodný člověk nejedná nikdy lstivě, nýbrž vždy upřímně.“ Tato věta se dokazuje pomocí axiómů, postulátů (požadavků) a definic. Definice alkoholismu zní u Spinozy takto: „Pijanství je nemírná žádostivost a láska k truňku.“

Zvláště úspěšná v použití axiomatických metod byla fyzika; klasickou mechaniku zdůvodnil axiomaticky I. Newton (1642–1727). Axiomatické teorie mají v přírodních vědách význam zvláště tehdy, když se spolu srovnávají různé koncepce téhož oboru, např. klasická nebo relativistická mechanika, neboť rozdíly lze vyjádřit několika málo axiómy a důsledky změněných axiómů se velice zvýrazňují. Impulsová věta, která slouží v mechanice jako axióm, se liší neměnností, resp. proměnností hmoty, vyjádřeno ve vzorcích:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F\left(t, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right), \quad \text{resp.} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F\left(t, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$$

(proměnná hmota) (konstantní hmota)

(t je čas, v je rychlost, m je hmota a F je síla).

I v technických vědách docházelo koncem minulého století k pokusům o axiomatizaci. Zajímavý nematematický model axiomatické teorie uvádí Hilbert ve svém článku „Poznávání přírody a logika“[25]): „Drosophila je malá muška, ale velký je náš zájem o ni: byla předmětem nejrozsáhlejších, nejpečlivějších a nejúspěšnějších šlechtitelských pokusů. Tato muška je obvykle šedá, má červené oči, je beze skvrn, má kulatá a dlouhá křidélka. Existují však i mušky s odlišnými zvláštními znaky: nejsou šedé, nýbrž žluté, místo červených očí mají bílé oči atd. Obvykle je těchto pět zvláštních znaků spojeno, tj. je-li muška žlutá, pak má také bílé oči a skvrny, křídla jsou rozštěpena a beztvará. A má-li křídla beztvará, pak je také žlutá a má bílé oči atd. Při vhodném křížení se však mezi potomky vyskytují odchylky od obvykle se vyskytujících spojení znaků; tyto odchylky jsou počtem menší a vyskytují se percentuálně v určitém konstantním poměru. Na čísla, která takto experimentálně získáme, se hodí lineární euklidovské axiómy kongruence a axiómy geometrického pojmu „mezi“, a tak dostáváme jako aplikaci lineárních axiómů kongruence – tj. elementárních geometrických vět o přenášení úseček – věty o dědičnosti: tak jednoduše a přesně – a současně tak kouzelně, jak by si to nevymyslela ani nejbujnější fantazie.“ Přidáme-li k tomu ještě místo z Hilbertova dopisu Fregemu, vystoupí zřetelně nosnost axiomatické metody uvnitř a vně matematiky. „Když si pod svými body“ (srov. str. 74) „představím některé soustavy věcí, např. soustavu: láska, zákon, kominík ..., a chápu všechny své axiómy jako vztahy mezi těmito věcmi, pak platí mé věty, např. věta Pythagorova, i pro tyto věci.“

[24]) Spinoza, B.: Etika. Praha, Svoboda 1977.

[25]) Die Naturwissenschaften, 1930, s. 959–963.

4.1. Přímé důkazy

> Tu je problém, hledej řešení! Můžeš je nalézt čistým myšlením, protože v matematice není žádného ignorabismus.
>
> D. Hilbert

Přímý důkaz matematického výroku, tzv. tvrzení, spočívá v tom, že z již dokázaných výroků (tj. z vět) získáme tvrzení po konečném počtu korektních úsudků. Přímé důkazy se v některých speciálních případech nazývají též *konstrukce*.

Uvedeme několik příkladů.

Příklad 1: Chodec jde večer po rovné ulici kolem svítící pouliční lampy. Po jaké křivce se pohybuje stín jeho hlavy, pohybuje-li se chodec po přímce?

S chodcem se i jeho hlava pohybuje po přímce p podél lampy. Světelné paprsky vycházející z lampy a procházející přímkou p ohraničují stín hlavy. Jelikož se světelné paprsky šíří přímočaře, určují všechny paprsky, vycházející z bodové lampy a procházející přímkou p, rovinu. Tato rovina protíná rovinu ulice v přímce, která tím vymezuje křivku, po které se pohybuje stín hlavy.

Příklad 2: Letadlo letí s neměnným výkonem motorů z A do B a zpět. Jaká je doba letu, jestliže vítr vane konstantní rychlostí od A do B, v porovnání s dobou letu za bezvětří?

Označme délku trati z A do B znakem a. Pak za bezvětří a při rychlosti letadla v je doba potřebná k letu tam a zpět rovna $t_0 = 2a/v$. Jestliže se při letu tam rychlost v zvýší následkem větru o $c > 0$, pak se během letu zpět rychlost v sníží o c. Pro dobu letu tam, resp. zpět máme

$$t_T = \frac{a}{v+c}, \quad \text{resp.} \quad t_Z = \frac{a}{v-c};$$

celková doba letu za větru tedy je

$$t_V = t_T + t_Z = \frac{a}{v+c} + \frac{a}{v-c}.$$

Pro $c > 0$ je podmínka $v - c > 0$ nutná k tomu, aby se letadlo vůbec mohlo pohybovat z B do A. Tento předpoklad vychází z povahy úlohy. Protože je $v + c > 0$, je pak též $(v+c)(v-c) = v^2 - c^2 > 0$. Pro $c > 0$ je tedy

$$v^2 > v^2 - c^2 > 0,$$

resp.

$$\frac{v^2}{v^2 - c^2} > 1$$

neboli

$$2a\frac{v}{v^2 - c^2} > \frac{2a}{v} \quad \text{a} \quad \frac{a(v+c) + a(v-c)}{v^2 - c^2} > \frac{2a}{v}.$$

Odtud plyne

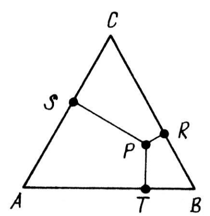
$$\frac{a}{v+c} + \frac{a}{v-c} > \frac{2a}{v},$$

tj.

$$t_V = t_T + t_Z > t_0.$$

Rovnost může nastat jenom tehdy, když je $v^2 = v^2 - c^2$, tj. když je $c = 0$. Letadlo tedy potřebuje za větru delší letový čas než za bezvětří.

Příklad 3: Pro každý rovnostranný trojúhelník platí, že součet vzdáleností bodu uvnitř trojúhelníka od jeho tří stran nezávisí na poloze tohoto bodu.



Obr. 4.1

Nechť ABC je libovolný rovnostranný trojúhelník a P nějaký bod uvnitř tohoto trojúhelníka. Paty kolmic spuštěných z bodu P na strany a, b a c označme R, S a T. Plocha trojúhelníka se rovná součtu obsahů trojúhelníků PCA, PAB a PBC (viz obr. 4.1). Jelikož $\overline{PS}$, $\overline{PT}$ a $\overline{PR}$ jsou výšky příslušných trojúhelníků a protože trojúhelník je rovnostranný ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$), máme pro celkovou plochu F

$$F = \tfrac{1}{2}a\overline{PS} + \tfrac{1}{2}a\overline{PT} + \tfrac{1}{2}a\overline{PR} = \tfrac{1}{2}a(\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT}),$$

a tedy je

$$\overline{PR} + \overline{PT} + \overline{PS} = \frac{2F}{a} = \text{konst.} \qquad \text{C. b. d.}$$

Příklad 4: Pro každou čtveřici čísel a_1, a_2, b_1, b_2 dokažte Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost

$$(1) \qquad (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 .$$

Nechť jsou čísla a_1, a_2 různá od nuly; jinak je totiž nerovnost (1) triviálně splněna. Kvadratický polynom

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2$$

je nezáporný a má nulovou hodnotu pouze tehdy, když oba sčítance mají současně nulovou hodnotu, tj. když je

$$a_1x - b_1 = 0, \qquad a_2x - b_2 = 0,$$

resp.

$$x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}.$$

Proto má $P(x)$ nejvýše jeden reálný nulový bod. Po krátkém výpočtu zjistíme, že $P(x)$ lze psát též ve tvaru

$$P(x) = x^2(a_1^2 + a_2^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2),$$

a to je polynom, jehož nulové body x_1, x_2 jsou, jak je známo, určeny vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1^2 + a_2^2} \pm \sqrt{\left[\frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} - \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2}\right]}.$$

Podle předpokladu přitom je $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Jelikož polynom $P(x)$ má nejvýše jeden reálný nulový bod, nemůže být výraz pod odmocninou kladný. Tedy platí

$$\frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} - \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqq 0,$$

resp.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 .$$

Rovnost platí pouze tehdy, když čísla a_i a b_i $(i = 1, 2)$ jsou taková, že pro ně platí $a_1/b_1 = a_2/b_2$.

Následující příklad je značně formální a čtenář si možná položí otázku, jakým způsobem se vlastně přijde na jednotlivé kroky v důkazu. K této otázce se ještě vrátíme v následujícím odstavci.

Příklad 5: Dokažte, že

$$(2) \qquad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} > \frac{468}{113}.$$

Platí $4{,}9^2 = 24{,}01 > 24 = 4\,.\,6$, tedy $6 > 4\,.\left(\frac{6}{4{,}9}\right)^2 = 4\left(1 + \frac{11}{49}\right)^2$, resp.

$$4\,.\,6 > 4^2\left(1 + \frac{11}{49}\right)^2 > 0 .$$

Odmocněním dostaneme

$$2\sqrt{6} > 4\,.\left(1 + \frac{11}{49}\right) = 4 + \frac{44}{49} > 4 + \frac{43}{49} = 4 + \frac{42}{49} + \frac{1}{49} = 4 + \frac{6}{7} + \frac{1}{49}.$$

Proto platí i

$$2 + 3 + 2\sqrt{6} > 9 + \frac{2\,.\,3}{7} + \left(\frac{1}{7}\right)^2,$$

resp.

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 > \left(3 + \frac{1}{7}\right)^2 > 0,$$

a tedy platí také

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3 + \frac{1}{7} = 3 + \frac{16}{112} > 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113};$$

odtud už snadno dostaneme tvrzení.

Cvičení

4.1. Pro všechna reálná čísla a, b platí

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab .$$

Důsledky: Pro kladná čísla a a b platí

$$\sqrt{(ab)} \leqq \frac{a + b}{2} \quad \text{a} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 .$$

4.2. Pro všechna kladná čísla a a b platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq \frac{4}{a + b}.$$

4.3. Pro všechna reálná čísla a a b taková, že $a, b > 1$, platí

$$\log_a b + \log_b a \geqq 2.$$

4.4. U dvouramenných vah (analytických vah), které používá chemik, se ukázalo, že jejich ramena nejsou stejně dlouhá. Protože se stále váží stejné množství jedné látky, postupují chemici takto: Aby se vyrovnaly nestejné délky ramen, klade se závaží střídavě na pravou a na levou misku vah. Získá se tímto způsobem po sudém počtu vážení více či méně látky, než je potřeba?

4.5. V každém rovnoramenném lichoběžníku, který má ramena délky a, základnu délky b a čtvrtou stranu (rovnoběžnou se základnou) délky c, platí pro délku d úhlopříček vzorec

$$d^2 = a^2 + bc.$$

4.6. Dokažte, že je $6 > \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$.

4.2. Zpětný úsudek

> Ne všude, kde je voda, jsou žáby; kde však je slyšet žáby, tam je i voda.
>
> J. W. Goethe

Přímý důkaz představuje řetěz úsudků mezi daným a hledaným. Postupuje od předpokladu k tvrzení. Když se ale podíváme na příkl. 5 z odst. 4.1, ukazuje se, že předpoklady potřebné pro důkaz byly formulovány neúplně. Protože pro reálná čísla a a b přichází do úvahy právě jedna ze tří možností $a < b$, $a = b$ nebo $a > b$, má totiž tvrzení v tomto příkladu smysl (tj. lze je dokázat nebo vyvrátit), aniž bychom věděli něco bližšího o potřebných předpokladech. Důkaz může začít zřejmým předpokladem $4{,}9^2 > 24$ nebo $2\,400 < 2\,401$ nebo $0 < 1$, který nám je z početní praxe běžný, a proto zůstává nevyslovený. K vynechání nutných předpokladů dochází jednak tehdy, když jsou zřejmé (nebo se zdají být zřejmé, což bývá často ošidné), jednak proto, že se jako celek objeví až po provedení důkazu. Cvičení 1.6 je naopak příkladem na nadbytečné předpoklady (stanoviště dubu), poznat to však vyžaduje jistou námahu.

Obtíže při hledání myšlenky důkazu vznikají často tím, že na rozdíl od tvrzení jsou předpoklady poměrně obecné a nemají zvláštní strukturu – asi jako v příkladu 4 z odst. 4.1. V tomto příkladu jsou předpoklady v oboru reálných čísel zcela obecné, jelikož a_i a b_i $(i = 1, 2)$ mohou být libovolná reálná čísla, zatímco tvrzení má speciální strukturu, jejíž souvislost s předpokladem nelze bez dalšího

rozeznat. Souvislostí se zde míní řetěz úsudků od předpokladu A k tvrzení B, tedy $A \Rightarrow B$. Lze si představit, že každý jednotlivý úsudek v tomto řetězu lze obrátit, takže celý řetěz sestává z úsudků, které lze obrátit, a tím lze obrátit i samotný úsudek, který vede od předpokladu A k tvrzení B, tj. platí $B \Rightarrow A$. V tomto případě můžeme vyjít i od toho, co hledáme, a dovést to k tomu, co je dáno. Často je jednodušší převést speciální tvrzení na nějaký obecný předpoklad. Tento postup však představuje důkaz tvrzení tehdy a jen tehdy, jsou-li předpoklad a tvrzení (tj. dané a hledané) logicky ekvivalentní $(A \Leftrightarrow B)$, jinými slovy, právě když je předpoklad nutný a postačující pro tvrzení. Když se proto „úspěšně" vyjde od hledaného, nesmí to svádět k tomu, aby se přehlédla důležitá vedlejší podmínka ekvivalence daného a hledaného (srov. příkl. 2 v odst. 2.13.4.). Vyjdeme-li od hledaného a postupujeme-li přitom pečlivě, odhalíme často nevyslovené a mlčky učiněné předpoklady.

Uvedeme jednoduchý příklad, který zřetelně ukáže následky takového „úspěšného" postupu. Nesprávné tvrzení $-1 = 1$ přejde po umocnění (správný úsudek) na $(-1)^2 = (1)^2$, tj. na $1 = 1$, a to je správný výrok. O tento správný výrok se nikdy nemůže opírat nesprávné tvrzení. Implikace *Když* $-1 = 1$, *pak* $1 = 1$ je sice pravdivá, její obrácení však nikoliv.

Implikace *Když* $-1 = 1$, *potom* $1 = 1$ a *Když* $-1 = 1$, *potom* $0 = 1$ ukazují, že z nesprávného předpokladu může plynout jak něco pravdivého, tak i něco nepravdivého. (Když je $-1 = 1$, pak také $-1 + 1 = 1 + 1 = 2$, a tedy je po dělení 2 též $0 = 1$.)

Chceme-li propast mezi všeobecností předpokladů a speciálností tvrzení překlenout tím, že vyjdeme od tvrzení, přijímáme tím tvrzení mezi předpoklady. To je bez dalšího komentáře přirozeně nepřípustné, protože hledané se nesmí předpokládat, nýbrž se má dokázat. Přesto však můžeme vyslovit domněnku, že tvrzení platí, a získané důsledky svázat s tímto předpokladem. Pokud na konci nějakého řetězu úsudků nalezneme dané předpoklady, stojíme před úkolem obrátit řetěz těchto úsudků, tedy postupovat od předpokladů k tvrzení. Obrácení řetězu úsudků, který vyšel od hledaného, se nazývá *zpětný úsudek*. Když vyjdeme od hledaného, obdržíme pouze ty předpoklady, které jsou pro platnost tvrzení nutné. Úkolem zpětného úsudku pak je, aby prokázal, že tyto podmínky jsou také postačující. Jak ukazuje náš příklad: *Z* $1 = 1$ *neplyne* $-1 = 1$, není to zdaleka vždy možné. Když jsou podmínky jenom nutné, potom můžeme při chybějícím zpětném úsudku dojít k nežádoucím (nesprávným) vedlejším řešením, a tomu se v dalším výkladu budeme věnovat. Řetěz úsudků od tvrzení k předpokladu je při praktickém provádění důkazu často užitečnou pomůckou, jelikož se může stát, že jej lze obrátit nebo že dá návody k důkazu.

Příklad 1: V příkladě 4 z odst. 4.1 byly provedeny některé úpravy, jejichž smysl pochopil čtenář pravděpodobně na konci důkazu. Jedna z praktických otázek zde a v podobných případech, jako třeba v příkl. 5 z odst. 4.1, kde chybějí předpoklady, ze kterých by bylo možné vyjít, zní, zda jsou v každém případě potřebné nápady („triky") tohoto druhu. Jedna z možností spočívá vždy v tom, že vyjdeme od tvrzení a pokusíme se o důkaz zpětným úsudkem. Tvrzení (1) příkladu 4 zní v mírně pozměněné podobě takto:

$$(3) \qquad (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \geqq 0\,.$$

Za předpokladu, že (3) platí, platí i nerovnost, kterou získáme roznásobením

$$(4) \qquad a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \geqq 0\,.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(5) \qquad (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqq 0\,,$$

která skutečně platí pro všechna reálná čísla a_i a b_i $(i = 1, 2)$. A teď přijde zpětný úsudek. Nerovnost (5) platí pro všechna reálná čísla a_i a b_i $(i = 1, 2)$, přičemž rovnost nastane pouze pro $a_1b_2 = a_2b_1$, tedy pro $a_1/a_2 = b_1/b_2$, pokud je $a_2b_2 \neq 0$. Jelikož výraz (4) je pouze roznásobeným tvarem výrazu (5), platí i (4). Když k levé i pravé straně nerovnosti (4) přičteme členy $a_1^2b_1^2$ a $a_2^2b_2^2$ a potom výrazy vhodně upravíme, dostaneme tvrzení (3).

Stejným způsobem lze postupovat i u příkl. 5 z odst. 4.1, přičemž sled úsudků, který vychází od hledaného, obrátíme (přesněji: pokusíme se o to) v tom okamžiku, kdy narazíme na platné předpoklady. Když vyjdeme od hledaného a postupujeme tak dlouho, dokud je zpětný úsudek možný, dostaneme to, co bylo dáno, totiž $(4{,}9)^2 > 24$.

Podíváme se nyní na několik příkladů, u kterých v řetězu od hledaného k danému nelze obrátit všechny úsudky.

Příklad 2: Hledejme reálné řešení rovnic

$$(6) \qquad \text{a)} \quad \sqrt{(x + 1)} = x - 1\,,$$

$$(7) \qquad \text{b)} \quad \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 1\right)} - \sqrt{(x + 1)} = 0\,.$$

a) Vyjděme z toho, že existuje alespoň jedno řešení rovnice (6). Toto řešení vyhovuje rovnici (6) a tím i umocněné rovnici $x + 1 = (x - 1)^2$, tj. $x^2 - 3x = 0$ neboli $x(x - 3) = 0$. Když existují řešení rovnice (6), pak to mohou být jenom čísla $x = 0$ a $x = 3$. Číslo $x = 3$ splňuje (6), ale $x = 0$ nikoliv, protože levá strana vztahu (6) se rovná $\sqrt{1} = 1$ a hodnota pravé strany je -1.

b) Znovu vyjdeme z předpokladu, že existuje aspoň jedno reálné řešení rovnice (7). Toto řešení pak splňuje i rovnici $\sqrt{(x/2 - 1)} = \sqrt{(x + 1)}$ a též rovnici, kterou z ní získáme umocněním: $x/2 - 1 = x + 1$ čili $x = -4$. Rovnost $x = -4$ je nutná podmínka, kterou musí splňovat rovnice (7). Protože pro $x = -4$ rovnice (7) nemá smysl, není nutná podmínka $x = -4$ pro řešení rovnice (7) postačující. Rovnice (7) nemá v reálném oboru řešení.

Zkouška je u našich příkladů zpětným úsudkem, a tedy je něčím víc než pouhou kontrolou výpočtu, za kterou je často považována. Při řešení kvadratické rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ pomocí vzorce $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$ provádíme zpětný úsudek hned při stanovení obecného vzorce pro řešení, takže zkouška pak skutečně je pouhou kontrolou výpočtu.

Předpoklad existence řešení rovnice (nebo jiných úloh) nemůže skutečnou existenci řešení nikterak zaručit, může pouze z množiny čísel, na níž je rovnice definována, vytřídit ty hodnoty, které jsou *podezřelé z toho, že jsou řešením.* Pro praktické účely je třeba, aby těchto podezřelých hodnot bylo konečně mnoho: pak je totiž možné je po řadě přezkoušet.

Příklad 3: Hledejme celočíselná řešení rovnice

$$(8) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \qquad (p \text{ je prvočíslo})\,.$$

Existují-li vůbec nějaká řešení rovnice (8), pak jsou nenulová. Splňují tedy i rovnici $xy - px - py = 0$, resp. $(x - p)(y - p) - p^2 = 0$, a tedy

$$(x - p)(y - p) = p^2\,.$$

Odtud je vidět, že celočíselná řešení můžeme dostat pouze tehdy, když $x - p$ proběhne všechny dělitele čísla p^2, přičemž $y - p$ proběhne doplňkové dělitele čísla p^2. Protože p má být prvočíslo, musí být nutně

$$x - p = 1,\ p,\ p^2,\ -1,\ -p,\ -p^2\,.$$

Protože $x \neq 0$, odpadá $x - p = -p$. Zbývá

$$x = 1 + p,\ 2p,\ p + p^2,\ p - 1,\ p - p^2$$

s odpovídajícími hodnotami

$$y = p + p^2,\ 2p,\ 1 + p,\ p - p^2,\ p - 1\,.$$

Tyto hodnoty jsou skutečně řešení (proveďte zkoušku!), a jsou to tedy všechna řešení.

Když vyjdeme od hledaného, pak jsou všechny závěry pouze nutnými podmínkami platnosti tvrzení. Tyto nutné podmínky však občas mohou dát návody k důkazu. K tomu dva příklady.

Příklad 4: Dvě sklenky jsou naplněny stejným množstvím tekutiny – v jedné je voda, ve druhé je víno. Ze sklenice s vínem odebereme lžíci vína, které nalejeme do sklenky s vodou a rovnoměrně rozmícháme. Z této směsi lžící přelejeme stejné množství tekutiny zpět do vinné sklenky. Jaký pak bude poměr vína a vody v obou sklenicích?

Úloha je formulována tak, že bychom – za předpokladu řešitelnosti – měli dostat vždy stejné řešení, nezávisle na velikosti lžíce. Když tomu tak je, pak je odpověď stejná jako v případě, když se napoprvé do vody přeleje všechno, resp. žádné víno. Podíl vína ve vodě, resp. vody ve víně je pak v obou sklenkách stejný.

Příklad 5: Koulí o poloměru R je provrtána válcová díra délky $2r$ tak, že osa válce prochází právě středem koule. Jak velký je objem zbytku koule?

Když má tato úloha řešení, pak je vzhledem k její formulaci toto řešení nezávislé na průměru vrtu, což se zdá nepravděpodobné. Když tomu ale tak bude, pak je výsledek stejný pro všechny průměry díry, zejména pak pro průměry, které se blíží k nule, a konečně i pro ten případ, kdy je průměr nulový. Poloměr koule se pak rovná r, neboť délka „díry" je $2r$, a zbylý objem koule se tedy rovná $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Cvičení

4.7. Interpretujte rovnice (6) a (7) geometricky tak, že budete řešení považovat za průsečíky grafů funkcí.

4.8. Která reálná čísla jsou řešením rovnice

$$\sqrt{(x + 5)} = |x| - 1\ ?$$

4.9. Z devíti koulí, které navenek vyhlížejí stejně, je jedna nepatrně těžší než ostatní. Kolika váženími na dvouramenných vahách lze tuto kouli bezpečně určit?

4.10. Ukažte, že podmínky udané v příkladech 4 a 5 jsou postačující k tomu, aby bylo možné určit řešení.

4.11. Udejte nutnou podmínku pro polohu pokladu ze cvičení 1.6!

4.3. Nepřímé důkazy

> ... tím je zřejmé, že člověk nemůže najednou přijmout skutečnost, že jedna a táž věc současně existuje a neexistuje; jinak by člověk měl současně dva navzájem si odporující názory.
>
> Aristoteles

Už u přímých důkazů jsme poznali, jak užitečné může být, když se vyjde od hledaného, od tvrzení. ***Nepřímý důkaz*** vychází z předpokladů, že tvrzení B je

nepravdivé, a odvodí odtud, že je nesprávný i předpoklad A, o němž už víme, že je pravdivý (reductio ad absurdum). Je tedy proveden přímý důkaz implikace

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \qquad [\text{přesněji } \bar{B} \Rightarrow (A \text{ a } \bar{A})]. \tag{9}$$

Vztah (9) je kontrapozice implikace

$$A \Rightarrow B \qquad [\text{přesněji } (A \text{ nebo } \bar{A}) \Rightarrow B],$$

která vede k tvrzení B. Nepřímý důkaz končí prakticky odkazem na „spor", když z popřeného tvrzení získáme evidentně nepravdivý výrok, aniž bychom museli pokaždé poukazovat na kontrapozici. Negace tvrzení se nazývá též *antiteze*. Důkazy, které vedou ke sporu, se často nazývají *důkazy sporem.*

Účinnost nepřímých důkazů závisí podstatně na tom, že vedle daných předpokladů se navíc jako předpoklad přijme nepravdivost toho, co se tvrdí, a vychází se tedy z většího počtu předpokladů. V nepřímém důkazu se do jisté míry usuzuje z daného i z hledaného (z předpokladů a z negace tvrzení) a vyhlídka, že se přitom setkáme někde uprostřed, činí tento postup leckdy výhodnější než důkaz přímou cestou.

Příklad 1: Nechť $a \neq 0$ a b jsou reálná čísla. Pak existuje nejvýše jedno reálné číslo x tak, že platí

$$ax = b. \tag{10}$$

Vyjdeme z předpokladu, že existují dvě různá čísla x_1 a x_2, pro která platí (10) (*antiteze*); je tedy $ax_1 = b$ a $ax_2 = b$. Odečtením jedné rovnosti od druhé dostaneme $ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) = b - b = 0$, tj.

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Jelikož je $x_1 \neq x_2$, je $x_1 - x_2 \neq 0$; musí tedy být $a = 0$. To však odporuje předpokladu $a \neq 0$. Spor lze rozřešit jenom tím, že necháme padnout předpoklad, tedy že tvrdíme jeho opak, a to je to, co jsme chtěli dokázat.

Příklad 2: Dokažme, že pro všechna reálná čísla x je

$$\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

Vyjdeme z předpokladu, že existuje reálné číslo x_0 tak, že je $\sin x_0 + \cos x_0 = \frac{3}{2}$. Umocněním této rovnice pak dostaneme

$$\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 + 2 \sin x_0 \cos x_0 = \frac{9}{4}.$$

Pro všechny argumenty x je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Tedy musí být

$$\sin 2x_0 = \frac{5}{4}.$$

Jelikož $\frac{5}{4} > 1$, je to ve sporu s tím, že $|\sin x| \leqq 1$ pro všechna x.

Příklad 3: Ukážeme, že $\log_2 3$ není racionální číslo, tj. že neexistují celá čísla p a q tak, aby bylo

$$\log_2 3 = \frac{p}{q}. \tag{11}$$

Protože podle definice je číslo $\log_2 3$ kladné, můžeme se dokonce omezit na přirozená čísla p a q. Antiteze $\bar{A}$ tedy zní: Existují přirozená čísla p a q, pro která platí (11), nebo-li – vzhledem k definici logaritmu 3 při základě 2 –

$$2^{p/q} = 3 \text{ čili } 3^q = 2^p \qquad (p, q \geqq 1, \text{přirozená}).$$

Protože 2 je dělitelem čísla 2^p, musí být 2 dělitelem čísla 3^q, a tedy i dělitelem čísla 3. Výrok $\bar{B}$: 2 *dělí* 3 je evidentně nepravdivý. Kontrapozice $B \Rightarrow A$ implikace $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ spolu s platností výroku B tedy dává platnost teze A.

Nepřímý důkaz vychází z dodatečného předpokladu (antiteze), který je nesprávný. Z tohoto důvodu si jej nemůžeme dost dobře názorně představit a spojení k němu máme pouze prostřednictvím negace pravého tvrzení, tedy přes formální a abstraktní myšlení. Proto máme po provedení nepřímého důkazu často nepříjemný pocit, což A. Schopenhauer (1788–1860), pro kterého byla celá matematika rovnocenná té, kterou vybudoval Euklides, vyjádřil takto: „Že vše, co dokazuje Euklides, je skutečně tak, musíme – donuceni větou o sporu – připustit: proč to ale tak je, to se nedovíme. Člověk má potom nepříjemné pocity skoro jako po kejklířském kousku, a tomu se skutečně většina Euklidových důkazů nápadně podobá. Skoro vždy přichází pravda zadními vrátky tím, že je per accidens (*lat.* náhodou) výslednicí nějaké vedlejší okolnosti. Apagogický (*řec.* nepřímý) důkaz často uzavírá postupně všechny dveře – jedny po druhých – a nechá otevřené pouze jediné, kterými prostě jenom z tohoto důvodu musíme vstoupit. Často jdeme po jistých liniích jako třeba u Pythagorovy poučky, aniž bychom věděli proč: posléze se ukáže, že to byly smyčky, které se nečekaně stáhnou, aby zajmuly assensus (*lat.* souhlas) žáka, který nyní udiveně musí připustit to, co mu – pokud jde o vnitřní souvislosti – zůstává zcela nepochopitelné.“[26]) Přímé důkazy leckdy také vycházejí z domněnek či předpokladů, jejichž smysl si čtenář ozřejmí teprve na konci důkazu, a to tím, že úspěšně vedou k cíli (viz příklady 4 a 5 z odst. 4.1), a proto není Schopenhauerův názor, že nepřímý důkaz má charakter myší pasti, zcela oprávněný. Konfrontujme ho s tím, co říká Sherlock Holmes, známá to postava detektiva od A. C. Doylea (1859–1930), na vysvětlenou svému spolupracovníkovi Dr. Watsonovi: „Když byly vyloučeny všechny ostatní možnosti, musí být pravdou to, co zbývá, ať už je to jakkoli nepravděpodobné.“

[26]) „Die Welt als Wille und Vorstellung“, 1. kniha, § 15.

Přímé důkazy jsou na rozdíl od nepřímých vždy konstruktivní. Matematikové se proto zpravidla pokoušejí nahradit nepřímé důkazy přímými. Tendence toho druhu lze objevit už v Euklidových „Základech“. Nepřímé důkazy jsou prováděny často tehdy, když máme prokázat, že něco existuje nebo je určeno jednoznačně (srov. čl. 5), ale i při obracení výroků.

4.3.1. Reductio ad absurdum

Nemusíte mne mást protimluvem! Jak se začne mluvit, už dochází k matení.

J. W. Goethe

Ukážeme nyní zvláštní typ nepřímého důkazu, totiž typ reductio ad absurdum (převedení na nesmyslné). Reductio ad absurdum spočívá na úsudkovém pravidlu: Když lze z negace tvrzení odvodit tvrzení, pak je tvrzení platné, symbolicky

$$(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A \qquad (\textit{ex contrario}),$$

kde A znamená tvrzení. [Pravidlo *in contrarium:* $(A \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow \bar{A}$ lze chápat jako protějšek pravidla ex contrario.]

Nechť v našem případě je A tvrzení „Množina reálných čísel není spočetná“. Pojem „spočetný“ je míněn takto: Když odpočítáváme (přebíráme) konečnou množinu věcí, zvolíme první věc a přiřadíme jí číslo 1, druhé věci přiřadíme číslo 2 atd., až se vyčerpá zásoba všech věcí. Toto odpočítávání lze rozšířit i na nekonečné množiny, pokud je zajištěno, že každý prvek nekonečné množiny bude vzat v úvahu. To, že lze odpočítávat celá čísla ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, je okamžitě vidět z uspořádání

$$0, -1, 1, -2, 2, \ldots$$

Lze ukázat, že i racionální čísla lze odpočítat, i když je to o něco složitější. Naše tvrzení praví, že ne každá množina reálných čísel je spočetná.

Při důkazu se omezíme na reálná čísla, která leží v intervalu $(0, 1)$. Tato čísla jsou podmnožinou množiny reálných čísel a pokud tato podmnožina nebude spočetná, nebude tím spíše spočetná ani celá množina. Každé reálné číslo z z tohoto intervalu lze napsat jako desetinný zlomek ve tvaru

$$z = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots,$$

kde a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou některé z číslic 0 až 9; např. číslo $z = \frac{1}{7}$ má v desetinném zápisu tvar $0{,}142\,857\,142\,8\ldots$ s $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ atd. U našeho důkazu můžeme odhlédnout od toho, že desetinný způsob zápisu není vzhledem k devítkové periodě jednoznačný (např. je 0,099 999 999 9 ... = 0,1), a to tak, že jednoduše nebudeme čísla s devítkovou periodou používat.

Začněme nyní s vlastním důkazem a předpokládejme, že platí opak tvrzení. V důsledku toho učiníme předpoklad, že reálná čísla z intervalu (0, 1) lze uspořádat do jisté posloupnosti

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots, \\
z_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots, \\
z_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Vzhledem k předpokladu obsahuje posloupnost $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ všechna reálná čísla z intervalu (0, 1). Utvořme nyní pomocí naší posloupnosti reálné číslo z následujícím způsobem. Číslice před desetinnou čárkou čísla z je 0, na prvním místě za desetinnou čárkou čísla z je číslice 1, když je $a_1^{(1)} \neq 1$, a číslice 2, když je $a_1^{(1)} = 1$. Na druhém místě za desetinnou čárkou je číslice 1, když je $a_2^{(2)} \neq 1$, a číslice 2, když $a_2^{(2)} = 1$ atd.; n-té místo za desetinnou čárkou je 1, když je $a_n^{(n)} \neq 1$, a 2, když je $a_n^{(n)} = 1$. Zřejmě leží číslo z v intervalu (0, 1). Dále je číslo z zkonstruováno tak, že se alespoň na n-tém místě liší od každého čísla z_n z naší posloupnosti. Číslo z se tedy nemůže vyskytovat mezi čísly v posloupnosti $\{z_n\}$, i když leží v intervalu (0, 1). To je ale spor s předpokladem, že posloupnost $\{z_n\}$ obsahuje všechna reálná čísla z intervalu (0, 1), a tedy s tím, že reálná čísla jsou spočetná. Tento spor je zásadní povahy a nelze jej odstranit tím, že budeme vyšetřovat jinou pozměněnou posloupnost, jejímž prvním členem by bylo číslo z, protože bychom stejným způsobem získali další číslo v intervalu (0, 1), které k této posloupnosti nepatří. Předpoklad, že taková posloupnost existuje, resp. že množina reálných čísel z intervalu (0, 1) je spočetná, je sám v sobě sporný a nelze jej zachovat. Tím spíše je sporný předpoklad spočetnosti všech reálných čísel.

4.3.2. Nepřímé důkazy implikací

Mnohé matematické výroky jsou formulovány ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$. Důkaz platnosti implikace lze vést také přes kontrapozici $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ této implikace (srov. odst. 2.4). I tento způsob dokazování se nazývá nepřímý.

Příklad 1: Pro všechna přirozená čísla a a b platí: Když se nedá zkrátit zlomek $(a - b)/(a + b)$, pak se nedá zkrátit ani a/b.

Kontrapozice této implikace zní: Pro všechna přirozená čísla a, b platí, že když lze zkrátit a/b, pak lze zkrátit i $(a - b)/(a + b)$. Pro toto tvrzení lze udat přímý důkaz. Když a a b mají společného dělitele m, pak platí $a = rm$ a $b = sm$ s jistými přirozenými čísly s a r. Tím obdržíme $a - b = (r - s)m$ a $a + b = (r + s)m$, a tedy lze i zlomek $(a - b)/(a + b)$ zkrátit číslem m.

V příkladě 1 byla kontrapozice implikace dokázána přímo. Přirozeně se můžeme pokusit provést důkaz platnosti implikace $A \Rightarrow B$ nebo její kontrapozice $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ sporem. Implikace $A \Rightarrow B$ se logicky ekvivalentně vyjádří jako (*non A*) *nebo B*. Pomocí tohoto tvaru lze (podle de Morganových zákonů, srov. odst. 2.4) negaci *non*$(A \Rightarrow B)$ zapsat ve tvaru A *a* (*non B*). Proto je třeba vyjít od předpokladu A *a* $\bar{B}$ (antiteze) a pokusit se získat spor. Přitom jsou tři možnosti:

a) Dostaneme spor s předpokladem A. } spor s antitezí
b) Dostaneme spor s předpokladem *non B*. }
c) Lze odvodit dva navzájem si odporující výroky S a $\bar{S}$.

Předpokládejme v dalším, že předpoklad A implikace $A \Rightarrow B$ je bezesporný. Na platnost implikace $A \Rightarrow B$ lze v prvním případě usoudit z platnosti předpokladu, ve druhém a třetím případě na základě věty o vyloučeném sporu.

Uveďme k těmto případům příklady:

a) Pro všechna reálná čísla x, y platí: Když je $x^2 > y^2 > 0$, potom je i

$$\frac{x^2}{1 + x^2} > \frac{y^2}{1 + y^2}.$$

Nechť pro reálná čísla x a y platí $x^2 > y^2 > 0$. Antiteze zní: Existují reálná čísla x a y tak, že $x^2 > y^2 > 0$ a $x^2/(1 + x^2) \leqq y^2/(1 + y^2)$. Odtud dostáváme

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \leqq \frac{1}{1 + \frac{1}{y^2}},$$

a jelikož oba jmenovatele jsou kladná čísla, platí

$$1 + \frac{1}{y^2} \leqq 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{čili} \quad \frac{1}{y^2} \leqq \frac{1}{x^2}.$$

A protože i zde máme kladné jmenovatele, je $x^2 \leqq y^2$. Předpokládali jsme však, že pro reálná čísla x a y platí $x^2 > y^2 > 0$; to je neslučitelné s odvozeným důsledkem.

b) Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí: Když je $a^2 + b^2 = c^2$, potom je součin abc dělitelný pěti.

Nejprve dokážeme jednu pomocnou větu. Když dělíme čtverec přirozeného čísla číslem 5, pak můžeme dostat pouze zbytky 0, 1 a 4. Každé přirozené číslo z lze pomocí jistého přirozeného čísla m vyjádřit ve tvaru $z = 5m + n$, kde n je některé z čísel 0, 1, 2, 3 nebo 4. Tak dostaneme $z^2 = (5m + n)^2 = 25m^2 + 2 . 5mn + n^2 = 5(5m^2 + 2mn) + n^2$, a proto bude zbytek při dělení čísla z^2 číslem 5 roven zbytku, který dostaneme při dělení čísla n^2 číslem 5. Pro n^2 přicházejí do úvahy hodnoty 0, 1, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ a $4^2 = 16$, a tím tedy dostaneme pouze zbytky 0, 1 nebo 4.

Antiteze zní tak, že za uvedených předpokladů existují čísla a, b, c, jejichž součin abc není dělitelný 5. Tedy žádné z čísel a, b, c není dělitelné pěti. Číslo c^2 může podle pomocné věty dát při dělení pěti pouze zbytky 0, 1 nebo 4. Zbytek 0 znamená, že c^2, a tedy i c, je dělitelné pěti. To však není možné, protože pak by i součin abc byl dělitelný pěti. Má-li c^2 zbytek 1, příp. 4, pak musí mít zbytek 1, příp. 4 i číslo $a^2 + b^2$ podle předpokladu $c^2 = a^2 + b^2$. Protože ale možné hodnoty zbytků jsou 0, 1 nebo 4, lze zbytek 1, příp. 4 pro součet čtverců vyjádřit jako součet dvou zbytků pouze tak, že jeden ze zbytků při dělení čísel a^2 a b^2 pěti je nulový, tím tedy bude a^2 nebo b^2 – a tedy i a nebo b – dělitelné pěti. Toto ale je opět nemožné, protože by to odporovalo předpokladu, který jsme učinili.[27]) Proto je součin abc dělitelný pěti.

c) Uvažujme mapu Evropy a nechť města, která jsou na ní zakreslena, mají vždy po dvou různé vzdálenosti. Potom tvrdíme: Spojíme-li každé město s tím, které mu leží nejblíže, potom z žádného města nevede víc než pět spojnic k jiným městům.

Především je jasné, že vzhledem k předpokladu rozdílnosti vzdáleností jednoho města od každého jiného města vždy existuje právě jedno nejblíže ležící město. Antiteze zní tak, že za daných předpokladů existuje alespoň jedno město, které je spojeno s více než pěti městy. Označíme-li toto město písmenem A, potom tedy existují další města $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n > 5)$, s nimiž je A spojeno. Jsou-li P a Q libovolná dvě z měst $B_1, B_2, \ldots, B_n$, pak je

$$\overline{AP} < \overline{PQ},$$

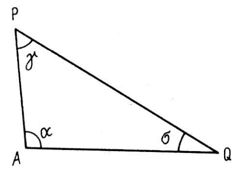
protože jinak bychom museli město Q spojit s P jako s nejbližším městem. Ze stejných důvodů je

$$\overline{AQ} < \overline{PQ}.$$

[27]) Je nasnadě, že tento nepřímý důkaz lze s malými změnami převést na důkaz přímý. Využije-li se pomocná věta, je součin abc dělitelný 5, když je zbytek při dělení čísla c^2 roven nule. Jinak je nulový zbytek buď při dělení čísla a^2, nebo při dělení čísla b^2 a součin abc je tedy opět dělitelný 5. (Pozn. překl.)

Když pohlédneme na trojúhelník APQ (srov. obr. 4.2), pak s využitím označení zavedeného v obrázku platí

$$\alpha > \gamma, \quad \alpha > \sigma,$$



Obr. 4.2

protože proti větším stranám leží i větší úhly. Protože součet úhlů v trojúhelníku APQ je 180°, dostaneme odtud, že je

$$180° = \alpha + \gamma + \sigma < \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha,$$

tj. $\alpha > 60°$. Body P a Q byly libovolné; úhel, který svírají úsečky $\overline{AP}$ a $\overline{AQ}$ v bodě A, je tedy vždy větší než 60°. K městu A existuje n spojnic, přičemž podle předpokladu má být $n \geqq 6$. Z tohoto důvodu tvoří všechny spojnice kolem A úhel, pro jehož velikost je

$$n . \alpha > 6 . 60° = 360°.$$

Proti tomu stojí skutečnost, že velikost plného úhlu je 360°. Předpoklad $n \geqq 6$ tedy je nesprávný.

Cvičení

4.12. Rovnice $x^3 - x - 5 = 0$ nemá v intervalu $\langle \frac{3}{2}, 3 \rangle$ žádné racionální řešení.

4.13. Dokažte větu: Když nelze zkrátit zlomek a/b, pak nelze zkrátit ani zlomek $(a - b)/(a + b)$ (a, b jsou přirozená čísla).

4.14. Když n není čtverec celého čísla, pak $\sqrt{n}$ není racionální číslo.

4.15. Když jsou v trojúhelníku úsečky na osách úhlů od vrcholu k protilehlé straně stejné, potom je trojúhelník rovnostranný. (Návod: Nechť úhly u vrcholů B a C nejsou stejné a nechť je $\sphericalangle B < \sphericalangle C$. Stejné osy úhlů označme $\overline{BM}$ a $\overline{CN}$ a P nechť je bod na $\overline{AN}$, pro který je $\sphericalangle PCN = \frac{1}{2} \sphericalangle B$; Q budiž bod na $\overline{PN}$ takový, že $\overline{BQ} = \overline{CP}$. V podobných trojúhelnících BMQ a CNP porovnejte úhly u P a Q!)

4.4. Metoda rozlišovací

U kvantifikovaných výrokových funkcí (které jsou výroky) lze, pokud je **příslušný obor individuí konečný,** ověřit jejich pravdivost dosazením konečného počtu prvků. Vyšetřujeme případ po případu, dokud neprobereme všechny (např. když ukážeme, že 11 je prvočíslo, tím, že ukážeme, že 2, 3, 5 a 7 nejsou dělitelé 11). Takové důkazy se nazývají *verifikace*. Když se všechny možnosti rozdělí do různých skupin a důkaz se provede pro každou z nich, mluvíme o *rozlišování případů* neboli o *metodě rozlišovací*. Ovšem již u relativně „jednoduchých“ úloh se mohou vyskytnout značné potíže. Jako příklady uveďme šachy, otázku, zda $2^{(2^{17})} + 1$ je prvočíslo, nebo úlohu obchodního cestujícího, které jsou všechny určeny konečným počtem případů, jež je třeba rozlišit, přičemž každý jednotlivý případ sám nečiní žádné zvláštní potíže. U úlohy obchodního cestujícího se jedná o to, že cestující navštíví z jednoho místa $n - 1$ město a pak se vrátí do svého východiska, přičemž počet absolvovaných kilometrů má být co nejmenší. Pro n měst existuje $(n - 1)!/2$ možností jak okružní cestu vykonat. Počet možností okružních cest s růstem počtu měst enormně narůstá. Předpokládejme, že počítač potřebuje $2n \cdot 10^{-6}$ sekund na to, aby vybral jednu okružní jízdu a porovnal její délku s nejkratší, kterou dosud nalezl; pak na zpracování úlohy pro 10 měst bude potřebovat zhruba 2 sekundy, pro 12 měst asi 4 minuty, pro 14 měst zhruba 12 hodin, pro 16 měst asi 4 měsíce a pro 17, resp. 18 měst už $5\frac{1}{2}$ roku, resp. 101 let.[28]).

Jestliže do výrokové funkce lze dosadit nekonečně mnoho individuí, pak se můžeme pokusit o důkaz rozlišovací metodou tak, že seskupíme všechny možnosti do konečného počtu skupin. Tak jsme v příkladě na str. 101 seskupili všechna ta čísla, která při dělení 5 dávají týž zbytek. Při důkazu metodou rozlišování případů lze jednotlivé případy dokázat přímo nebo nepřímo, přičemž jednotlivé případy lze rozčlenit na další podpřípady atd. Podstatné přitom je, aby rozlišení případů bylo úplné (*úplná disjunkce*), tj. aby byly vzaty v úvahu všechny možné případy.

Příklad 1: Která přirozená čísla a, b a c splňují rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad ? \tag{12}$$

Vzhledem k symetrii rovnice (12) se můžeme omezit na řešení, pro která platí $a \geqq b \geqq c$. Rozlišíme nejprve tyto případy:

1. Všechna čísla a, b a c jsou větší než 3.
2. Existuje alespoň jedno číslo, které je menší než 4.

[28]) Ve skutečnosti potřebuje centrální jednotka moderního počítače ke zpracování programu pro zjištění minimální okružní cesty pro 7, resp. 9, resp. 10 měst čas 8 sekund, resp. 1 minutu a 4 sekundy, resp. 11 minut.

Případ 1: Máme $a \geqq b \geqq c \geqq 4$, a tedy $\frac{1}{4} \geqq 1/c \geqq 1/b \geqq 1/a$. Následkem toho je $1/a + 1/b + 1/c \leqq 3 \cdot \frac{1}{4} < 1$. Když budeme předpokládat, že čísla a, b a c splňují rovnici (12), pak dostaneme spor.

Případ 2: Protože existuje aspoň jedno číslo, které je menší než 4, můžeme vzhledem k učiněnému omezení předpokládat, že je $c < 4$. Tím máme tři další případy, které mohou nastat v závislosti na možných hodnotách čísla c.

a) $c = 1$. Předpokládejme, že pro $c = 1$ existují přirozená čísla a a b, která splňují (12). Pak je $1/a + 1/b = 0$, ale to není možné, neboť čísla a a b jsou přirozená, proto je $1/a > 0$ a $1/b > 0$, a tedy $1/a + 1/b > 0$.

b) $c = 2$. Z (12) nyní máme $1/a + 1/b = \frac{1}{2}$. Nechť existují řešení a a b této rovnice taková, že $a \geqq b > 4$ čili $\frac{1}{4} > 1/b \geqq 1/a$. Pak je $1/a + 1/b < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Tedy musí být $b \leqq 4$ a vzhledem k omezení na řešení $(a \geqq b \geqq c)$ odtud plyne $2 \leqq b \leqq 4$. Krátký výpočet ukáže, že pro $c = 2$ vyhovují rovnici (12) čísla $b = 3$ a $a = 6$, jakož i čísla $b = 4$ a $a = 4$.

c) $c = 3$. Tento případ vede na rovnici $1/a + 1/b = \frac{2}{3}$. Možná řešení a, b taková, že je $a \geqq b > 3$ čili $\frac{1}{3} > 1/b \geqq 1/a$, odpadají, jelikož v tomto případě je $1/a + 1/b < \frac{2}{3}$. Tím tedy je $b \leqq 3$, a vzhledem k vedlejší podmínce na trojice, které úlohu řeší, je nutně dokonce $b = 3$. Pro $c = 3$ dostaneme tak řešení $a = 3$, $b = 3$.

Trojice (a, b, c), které řeší úlohu a splňují dodatečnou vedlejší podmínku, tedy jsou: $(6, 3, 2)$, $(4, 4, 2)$ a $(3, 3, 3)$.

Příklad 2: **Buďte** α, β a γ daná reálná čísla, pro která platí $\alpha > \beta > \gamma$. Pro která čísla x je

$$D(x) = \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{x - \gamma} > 0 \quad ?$$

Pro $x = \gamma$ není zlomek definován. K tomu, aby $D(x)$ bylo kladné, musí být buď všechny výrazy $x - \alpha$, $x - \beta$ a $x - \gamma$ kladné, nebo dva z nich záporné a třetí kladný.

Případ 1: $x > \alpha$. Z $x > \alpha$ plyne též $x > \beta > \gamma$ čili $D(x) > 0$.

Případ 2: $x = \alpha$. Je $D(\alpha) = 0$.

Případ 3: $\alpha > x > \beta$. To vede na $x - \alpha < 0$ a $x - \gamma > x - \beta > 0$, tedy je $D(x) < 0$.

Případ 4: $x = \beta$. Je $D(\beta) = 0$.

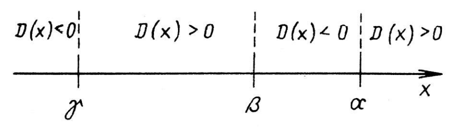
Případ 5: $\beta > x > \gamma$. Nyní je $x - \alpha < x - \beta < 0$ a $x - \gamma > 0$, tedy je $D(x) > 0$.

Případ 6: $x = \gamma$. $D(\gamma)$ není definováno.

Případ 7: $x < \gamma$. Protože v tomto případě jsou všechny tři výrazy záporné, je

$$D(x) < 0.$$

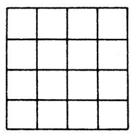
Na obr. 4.3 jsou řešení přehledně shrnuta.



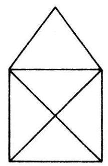
Obr. 4.3

Cvičení

4.16. Ortopolis je město, v němž se ortogonálně křižuje pět vodorovných a pět svislých ulic ve stejných vzdálenostech (srov. obr. 4.4). Kolika způsoby lze urazit nejkratší cestu z jednoho rohu do rohu protilehlého?



Obr. 4.4



Obr. 4.5

4.17. Kolika způsoby lze rozpůlit (rozčtvrtit) šachovnici o 4×4 polích tak, aby pole sama zůstala nedělená a aby vznikly podobné útvary (srov. obr. 4.4)?

4.18. V rozích šachovnice s 3×3 nebo 3×4 poli stojí jezdci. V jedné řadě stojí dva bílí jezdci, ve druhé dva černí. Bílí a černí jezdci si mají vyměnit místa, když jezdci táhnou jako v šachové hře.

4.19. Domeček z obr. 4.5 se má nakreslit jedním tahem, aniž by se po jakékoliv čáře jelo dvakrát. Začněte v jednom rohu a vyšetřete tomu odpovídající možné způsoby, jimiž lze pokračovat!

4.5. Protipříklady

Obecný výrok nebo existenční tvrzení lze vyvrátit již jedním jediným příkladem, tzv. *protipříkladem.* Tento postup se v matematice používá velmi často: jak při logicko-deduktivním usuzování, tak i při formulaci domněnek. „Jádro matematiky je v konkrétních příkladech a konkrétních úlohách“, říká P. R. Halmos a pokračuje: „Poučení z toho je, že nejlépe je soustředit práci kolem ústředních rozhodujících příkladů a protipříkladů“.

Existuje celá řada slavných domněnek, pro které dodnes neznáme důkaz, které se však ani nepodařilo vyvrátit protipříkladem; patří sem např. Goldbachova domněnka zmíněná na str. 25 nebo Fermatovo tvrzení, že rovnice

$$x^n + y^n = z^n$$

není pro $n > 2$ řešitelná v přirozených číslech. Nalézt protipříklady tedy není vždy snadné.

Francouzský matematik A. Legendre (1752–1833) se domníval, že neexistují přirozená čísla p, q, r a s, pro něž by platilo

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{r}{s}\right)^3 = 6.$$

Anglický matematik-amatér a původce mnoha matematických hříček H. Dudeney (1857–1931) však zjistil, že platí

$$\left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3 = 6.$$

P. Fermat (1601–1655) se domníval, že čísla

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[která, jak ukázal C. F. Gauss (1777–1855), hrají důležitou roli při konstrukci pravidelných k-úhelníků pomocí pravítka a kružítka] jsou prvočísla. To platí sice pro F_1 až F_4, ale L. Euler (1707–1783) udal jako protipříklad rozklad čísla F_5:

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \,.\, 6\,700\,417\,.$$

Dnes známe další protipříklady, až do F_{13} nejsou tato čísla prvočísly. Dělitel čísla F_{13} byl nalezen v roce 1960 po šestihodinovém výpočtu na elektronickém počítači. Číslo F_{36} je už tak velké, že by se papírový pás, na kterém by bylo napsáno v obvyklé velikosti, dal obtočit kolem celé zeměkoule. Číslo F_{73} má více číslic, než je písmen ve všech svazcích všech knihoven současné doby. (Kdybychom číslo F_{73} zapisovali rychlostí dvou číslic za sekundu, potřebovali bychom na to 200 biliónů let.) Přesto je ale kupodivu známo, že dělitelem čísla F_{1945} je číslo $5 \,.\, 2^{1947} + 1$.

I jedna z Eulerových domněnek byla po 200 letech čekání vyvrácena. Euler se zabýval problémem jak postavit 36 důstojníků z 6 pluků a s 6 různými hodnostmi (každý z pluků je zastoupen každou z hodností právě jednou) do čtverce tak, aby důstojníci ze stejného pluku nebo se stejnou hodností nestáli ani v téže vodorovné, ani v téže svislé řadě. Pro odpovídající problém s 9 důstojníky je řešení udáno na obr. 4.6 (první číslo znamená pluk a druhé hodnostní stupeň):

1 1	2 2	3 3
2 3	3 1	1 2
3 2	1 3	2 1

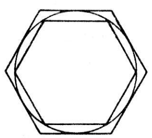
Obr. 4.6

Pro 16 důstojníků je problém též řešitelný a je znám jako úloha o uspořádání hracích karet. Vedle těchto více méně hravých použití je úloha velmi zajímavá pro plánování pokusů, když se např. má testovat vliv různých hnojiv na druhy pšenice a má se přitom vyloučit kolísající jakost půdy. Euler vyslovil domněnku, že pro n^2 důstojníků s $n = 4k + 2$ nemá úloha řešení. Případ $k = 1$ vyřídil francouzský matematik G. Tarry: ve tvrdé drobné práci prokázal nemožnost řešení systematickým vyzkoušením všech eventualit. Matematici E. T. Parker, R. C. Bose a S.S. Shrinkhande však v roce 1959 nalezli řešení pro $k = 5$. Později dokonce mohli ukázat, že pro všechna $k > 1$ je Eulerova domněnka nesprávná.

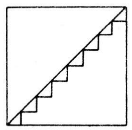
Ještě jeden příklad z dějin věd: G. W. F. Hegel (1770–1831) se v roce 1801 habilitoval prací o dráze planet a tvrdil, že nemůže existovat více než sedm tehdy známých planet. V roce 1846 byla objevena osmá planeta Neptun, v roce 1930 devátá planeta Pluto....

V důkazu G. Cantora (1845–1918) o nespočetnosti množiny reálných čísel (odst. 4.3.1) nebo v Euklidově důkazu existence nekonečně mnoha prvočísel (odst. 5.1) se na vhodném místě používá protipříklad: sestrojí se číslo, které dosud nebylo popsáno, resp. se sestrojí další prvočíslo. Tvrzení, že každá spojitá funkce je už diferencovatelná, bylo dlouho považováno za pravdivé a bylo vyvráceno rovněž protipříkladem.

Archimédes (287?–212 př. n. l.) vypracoval metodu, kterou lze obsah kruhu přibližně spočítat tak, že se spočítají vepsané a opsané pravidelné n-úhelníky, které jsou pro dostatečně velké n bodově blízké obvodu kruhu (exhaustní metoda). To, že takový způsob usuzování nelze přijímat nekriticky, ukazuje následující protipříklad. Úhlopříčky jednotkového čtverce mají délku $\sqrt{2}$.



Obr. 4.6



Obr. 4.7

Aproximující stupňovitá čára se stejně vysokými stupni (obr. 4.7) má ale stále délku 2, ať počet stupňů libovolněkrát zdvojnásobujeme, a přece se přitom každý bod stupňovité čáry k úhlopříčce libovolně přibližuje.

Vedle uvedených složitých a důležitých protipříkladů používají matematici neustále jednoduché příklady a protipříklady pro podporu nebo vyvrácení domněnek. O D. Hilbertovi se traduje, že říkával: „Začínat vždy zcela jednoduchými příklady".

Příklad: Čísla $n = 1, 3$ ukazují, že může být jak $2^n > n^3$, tak i $2^n < n^3$.

Matematik nejprve vyšetří neznámé skutečnosti pomocí příkladů a protipříkladů a teprve pak začne získané zkušenosti zobecňovat tak, aby nebyly logicky napadnutelné; tím vlastně dokazuje.

Cvičení

4.20. Ukažte, že se prohřešujeme proti pravidlu odmocňování, když definujeme: Nechť je $a \geqq 0$. Pak je $\sqrt[n]{a}$ to číslo x (pro sudé n navíc to číslo $x \leqq 0$), pro které platí $x^n = a$.

4.21. Dovedete udat protipříklad k větě, že každá kvadratická rovnice má nejvýše dvě různá řešení?

4.22. Obyvatelé Logického císařství buď stále lžou, nebo mluví stále pravdu. Tři obyvatelé se potkají. První cosi nesrozumitelně mumlá, druhý říká o prvním: „Tvrdil, že nelže. To souhlasí, a já také nejsem lhář!" Třetí na to: „Já nejsem lhář, ale oba ostatní lžou!" Kdo z nich je lhář a kdo nikoliv?

4.23. Budiž

$$P(x) = ax^2 + bx + p$$

polynom s celočíselnými koeficienty a a b, které nejsou současně nulové, a p budiž prvočíslo. Dokažte, že není možné, aby polynom $P(x)$ nabýval na množině všech přirozených čísel pouze prvočíselných hodnot, a to pro žádnou volbu čísel a, b a p!

5. Některé typické matematické důkazy

Matematické věty jsou z logického hlediska výroky nebo kvantifikované výrokové funkce. Víme, že nad příslušným oborem individuí jsou výrokové funkce buď splnitelné, nebo nesplnitelné. Matematické důkazy, které prokazují splnitelnost či nesplnitelnost výrokových funkcí, resp. existenci nebo neexistenci výroků, se nazývají *existenční důkazy* nebo *důkazy nemožnosti* (*neexistence*). Najdeme je ve všech odvětvích matematiky – stejně jako tam najdeme výrokové funkce kvantifikované slovy *pro všechny* nebo *existuje právě jedno* (identita nebo jednoznačnost). Jiné kvantifikace výrokových funkcí jako *pro skoro všechna* se vyskytují jen v některých disciplínách (např. v teorii nekonečných posloupností a řad).

5.1. Existenční důkazy

Jestliže jsme vyřešili problém nějakého oboru (geometrie, aritmetiky atd.), znamená to, že jsme řešení odvodili pomocí korektních úsudkových pravidel z axiómů tohoto oboru. Řešení je v příslušném axiomatickém systému logicky možné, nevede v tomto systému axiómů k žádnému sporu. Matematik v tomto případě říká, že *existuje* řešení. Lze ukázat, že rovnice $x^2 - 4 = 0$ má řešení $x = 2$ v rámci teorie, odpovídající systému Peanových axiómů (viz str. 66). Rovnice $x^2 - 2 = 0$ není naproti tomu v tomto systému axiómů řešitelná, k její řešitelnosti potřebujeme systém axiómů pro reálná čísla.

Důkaz řešitelnosti nějakého problému lze vést přímo nebo nepřímo. Při přímém důkazu řešení sestrojíme. V příkladu 5 z odst. 4.1 se přímo ukazuje, které z čísel $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ a $\frac{468}{113}$ je větší. Nepřímý důkaz sice zaručí řešitelnost z hlediska logiky, nedává však zpravidla žádné pokyny jak toto řešení najít (tj. sestrojit). Důkazy tohoto typu se nazývají *čisté* existenční důkazy.

Příklad 1: Jeden z nejstarších existenčních důkazů lze najít u Euklida, kde se ukazuje, že posloupnost prvočísel není konečná. Vždyť na první pohled není jasné, zda prvočísla, která se pro velká přirozená čísla vyskytují stále řidčeji a řidčeji, nakonec vůbec nevymizí. Euklides provádí důkaz nepřímo. Začíná tedy antitezí „Existuje jen konečně mnoho prvočísel". Těchto konečně mnoho prvočísel označíme $p_1, p_2, \dots, p_r$. Jsou mezi nimi v každém případě prvočísla 2, 3 a 5, a tedy je $r \geqq 3$. Podívejme se nyní na číslo $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$, pro

které platí $p > p_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. Proto nemůže být p prvočíslo. Na druhé straně však není p dělitelné žádným p_i pro $i = 1, 2, \dots, r$, což vede ke sporu. Důkaz mimochodem neukazuje, že by p bylo právě tím prvočíslem, které následuje hned po p_r. Důkaz ani nedává návod jak systematicky spočítat všechna prvočísla.

Příklad 2: Souprava hry domino se skládá ze sady kamenů, které na svých dvou polích obsahují všechny možné kombinace ok od nuly až po šest. Hraje se tak, že se k poli jednoho kamene přiloží pole jiného kamene, obsahující stejný počet ok. Máme ukázat, že ať byla hra zahájena jakkoli, vždy je možnost přiložit poslední kámen opět k prvnímu.

Protože se v sadě vyskytují všechny kombinace počtu ok od 0 do 6 a každý počet ok se s každým vyskytuje společně právě na jednom kameni, existuje pro každý počet ok 7 kombinací. Protože mezi těmito kombinacemi je právě jedna, v níž je počet ok na obou polích stejný, vyskytuje se každý počet ok na kamenech celkem osmkrát. Předpokládejme, že hra začala přiložením k poli s počtem ok n $(0 \leqq n \leqq 6)$. Proto se počet ok m, který na prvním kameni zůstal volný $(0 \leqq m \leqq 6)$, vyskytuje ve hře už jen sedmkrát. Pokud se počet těchto zbylých polí s m oky při další hře zmenšuje, děje se to vždy ve dvojicích. Na konci hry proto musí nutně zbývat kámen s polem o počtu m ok a tento kámen můžeme podle pravidel hry přiložit opět k prvnímu poli.

5.1.1. Dirichletův princip[29])

V Berlíně existují minimálně dva obyvatelé, kteří mají na hlavě stejný počet vlasů. Abychom tomu uvěřili, uvědomme si, že počet vlasů, které má člověk na hlavě, je menší než 200 000, zatímco Berlín má více než 200 000 obyvatel. Tato úvaha ovšem neukazuje, kteří obyvatelé mají na hlavě stejný počet vlasů, ani kolik jich je.

Právě jsme použili jednoduchý princip, který lze názorně formulovat takto: Máme-li rozdělit n předmětů do m zásuvek a je-li $n > m$, pak existuje alespoň jedna zásuvka, v níž jsou alespoň dva předměty (*Dirichletův princip*).

Příklad 3: Pokud se v místnosti, která měří $7 \times 7\ \mathrm{m}^2$, vyskytuje 50 osob, pak alespoň dvě osoby jsou od sebe vzdáleny méně než 1,5 m.

Abychom mohli použít Dirichletův princip, rozdělíme místnost na 49 čtverců

[29]) V češtině se (bohužel!) nepoužívá termín „šuplátkový princip" či „zásuvkový princip", který je doslovným překladem německého termínu (Schubkastenprinzip) a vystihuje situaci lépe než název uvedený v nadpise. (Pozn. překl.)

o straně délky 1 m. Pak lze 49 osob umístit tak, že každý čtverec obsahuje právě jednu osobu. Padesátá osoba se však musí postavit do čtverce, které je již obsazen. Vzdálenost mezi oběma osobami stojícími v témže čtverci není větší než délka úhlopříčky, a ta je $\sqrt{2} < 1{,}5$.

Příklad 4: Pro každé přirozené číslo n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti.

Z Dirichletova principu (použitého na zbytky při dělení) plyne, že ze tří po sobě jdoucích přirozených čísel musí být alespoň jedno dělitelné třemi a alespoň jedno dělitelné dvěma. Součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je proto vždy dělitelný šesti. Protože $n^3 - n = (n-1)\,n(n+1)$, je tím vše dokázáno.

5.1.2. Intuicionismus

V rámci nějaké axiomaticky vybudované teorie má výrok, že jistý matematický objekt existuje, stejný význam jako to, že tento objekt je v teorii logicky možný. Přitom není podstatné, zda tento objekt byl efektivně sestrojen či zda jen bylo vyloučeno, že takový objekt by uvnitř teorie vedl ke sporu.

V tomto smyslu usuzujeme na existenci reálných čísel, která jsou charakterizována určitými vlastnostmi, pokud negace této vlastnosti vede ke sporu. K tomu příklad: Reálné číslo x nazveme *algebraickým*, je-li kořenem nějaké algebraické rovnice $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ s racionálními koeficienty a_i $(i = 0, 1, \dots, n)$. Naproti tomu nazveme reálné číslo x *transcendentním*, jestliže žádná taková algebraická rovnice s racionálními koeficienty neexistuje. $\sqrt{2}$ je jako kořen rovnice $x^2 - 2 = 0$ algebraické číslo, zatímco čísla π nebo e nejsou algebraická, nýbrž transcendentní. Lze ukázat, že algebraických čísel je spočetně mnoho. Protože množina reálných čísel není spočetná (srov. odst. 4.3.1), musí tudíž existovat čísla, která nejsou algebraická, a jsou tedy transcendentní (a musí jich být nespočetně mnoho). Požadavku, že reálné číslo je považováno za dané teprve tehdy, je-li možno s libovolnou přesností udat jeho desetinný rozvoj, nelze u takovýchto úsudků vždy vyhovět.

Proto existuje v matematice směr, zvaný *intuicionismus*, který čistě existenční věty nepovažuje za průkazné. Reálné číslo $0, z_1 z_2 z_3 \dots$, jehož desetinná čísla jsou definována takto:

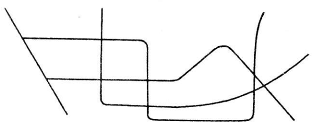
$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{platí-li pro } n \text{ Goldbachova hypotéza,} \\ 1, & \text{neplatí-li pro } n \text{ Goldbachova hypotéza,} \end{cases}$$

pro takové matematiky neexistuje, neboť toto číslo nelze v současné době s libovolnou přesností spočítat. Dalo by se sice namítnout, že po vyřešení Goldbachovy domněnky bude exaktní určení tohoto čísla možné, existuje však dostatek podobných problémů (Fermatův aj.) a problémů, které – jak víme od Gödela – jsou nerozhodnutelné (viz odst. 3.7), takže intuicionisté mají dostatečnou zásobu čistě existenčních důkazů, které nedávají návod ke konstrukci. Intuicionisté to populárně vysvětlili tímto příměrem: vědět o existenci zakopaného pokladu je bezcenné, nevíme-li alespoň, kde je poklad ukryt.

Cvičení

5.1. Ukažte, že v posloupnosti prvočísel jsou libovolně velké mezery.

5.2. Turista zahájí při východu slunce výstup na horu a dosáhne vrcholu při západu slunce. Následujícího dne začne po východu slunce sestupovat po stejné cestě: sestup dokončí před západem slunce. Dokažte, že existuje místo, jímž turista projde ve stejnou denní dobu jak při výstupu, tak při sestupu.



Obr. 5.1

5.3. Dokažte, že ve městě, jehož ulice jsou uspořádány jako na obr. 5.1, lze organizovat tramvajovou dopravu tak, že po žádné ulici nepojedou dvě linky, ale že také žádná ulice nebude vynechána.

5.2. Důkazy nemožnosti

Loge: ... abych přec nalezl to,
co nepřizpůsobí se, co se nezdaří!

R. Wagner

V matematice existují četné problémy, jejichž „řešení" spočívalo v důkazu toho, že jsou neřešitelné. Jeden z nejstarších *důkazů nemožnosti* pochází z doby okolo roku 450 př. n. l. a provedl ho Hippasos z Metapontionu, který ukázal, že $\sqrt{2}$ (délka úhlopříčky v jednotkovém čtverci) není racionální číslo.

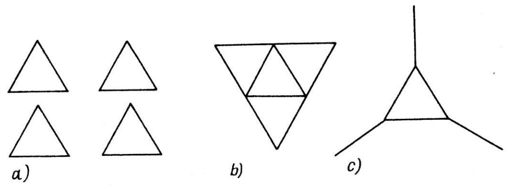
Příklad 1: Hippasův důkaz toho, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo, začíná předpokladem, že $\sqrt{2}$ je racionálním číslem a má tvar p/q (p, q jsou přirozená čísla). Přitom lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že jsme případné společné dělitele čísel p a q již vykrátili. Ze vztahu $\sqrt{2} = p/q$ plyne $2q^2 = p^2$. Levá strana této rovnosti je zřejmě dělitelná 2, a tedy platí totéž i pro pravou stranu. Pak však musí být dvěma dělitelné číslo p, a p^2 je tedy dokonce dělitelné 4. Proto je také levá strana dělitelná 4. Je tedy také q dělitelné 2, a to je spor s naším předpokladem (srov. cvičení 4.14).

Přesvědčení pythagorejců, že vše (a tedy i poměr délek strany a úhlopříčky v jednotkovém čtverci) lze vyjádřit jako poměr přirozených čísel, se tím zhroutilo a to vyvolalo krizi základů matematiky. Legenda praví, že bůh moří Poseidón Hippasa potrestal: „viník" se nevrátil z jedné plavby. Poté, co byl obor čísel dostatečně rozšířen, „hlásali" klasičtí přírodovědci opět pythagorejské učení „Vše je číslo" – připomeňme si jen jejich měřicí přístroje, které dodávají číselné hodnoty, z nichž ve svých úvahách vycházejí. Adam Riese (1492–1559), známý „umělec v počítání", složil verše, v nichž propagoval své umění a jež začínají takto: „Pythagoras Ti vpravdě dí, skrze čísla vše se vyjeví...".

Cantorova diagonální metoda (odst. 4.3.1) ukázala také, že není možné reálná čísla odpočítat. Kvadratura kruhu (tj. jeho přeměna ve čtverec o stejném obsahu) pomocí kružítka a pravítka je podle F. von Lindemanna (1852–1939) rovněž nemožná. Protože kruh o poloměru r má obsah πr^2, má stejný obsah také čtverec o straně $r\sqrt{\pi}$. Zde je třeba dávat bedlivě pozor, co se požaduje a co je nemožné. Existuje sice úsečka délky $r\sqrt{\pi}$ a tím i příslušný čtverec o ploše πr^2, tuto úsečku však není možné sestrojit z úsečky délky r pomocí kružítka a pravítka. Pomocí jiných vhodných konstrukčních prostředků může být úloha řešitelná.

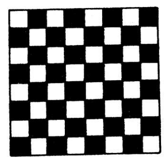
Další jednoduchý příklad ukazuje, jak přesně je třeba sledovat, co se požaduje.

Příklad 2: Z 12 sirek můžeme sestrojit 4 rovnostranné trojúhelníky tak, že každá sirka slouží jako strana. To jde i s 9 sirkami. Je to možné i se 6 sirkami?

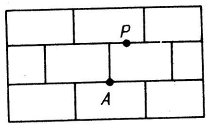


Obr. 5.2

Je-li možno tuto úlohu řešit, musíme řešení dostat z obrazce znázorněného na obr. 5.2c), neboť pro jeden trojúhelník potřebujeme právě tři sirky. Zbývající tři sirky musíme přiložit k vrcholům trojúhelníka, máme-li využít již položené sirky jako možné strany. Ale pak je zřejmě nemožné složit všechny sirky jako na obr. 5.2b) do trojúhelníka. Ano, je to nemožné, ale jen v rovině, což nebylo požadováno, což jsme však díky předcházejícím konstrukcím automaticky předpokládali. V prostoru tvoří šest hran pravidelného čtyřstěnu čtyři rovnostranné trojúhelníky.



Obr. 5.3



Obr. 5.4

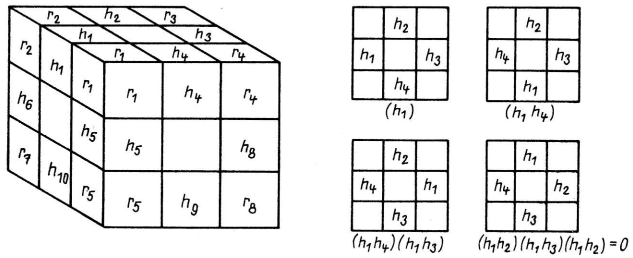
Příklad 3: Je nemožné táhnout na šachovnici jezdcem z jednoho rohu do rohu protilehlého tak, abychom přitom každé pole obsadili právě jednou (obr. 5.3).

Diagonála – a tím i protilehlé rohy – je tvořena poli o stejné barvě. Jezdec mění při každém tahu barvu pole. Šachovnice má 64 pole. Předpokládáme-li,

že úloha je řešitelná, potřebuje jezdec 63 tahy. Po lichém počtu tahů obsadí jezdec pole, které má jinou barvu než pole výchozí. Tak tomu bude i po 63. tahu. To odporuje tomu, že protilehlé rohy mají stejnou barvu.

Příklad 4: Pavouk sedí na stěně, znázorněné na obr. 5.4, na místě označeném P. Pavouk by chtěl proběhnout všechny spáry vyznačené stěny (kraj počítáme ke spárám), aniž by nějakou spáru proběhl dvakrát. Je to možné?

Při své obchůzce dorazí pavouk na místo (např. do bodu A), kde se spára „větví"; musí tedy použít jedné z obou spár. Chce-li proběhnout všechny spáry, musí jednou projít i po té spáře, kterou předtím při volbě na rozcestí nepoužil. Po této spáře však dojde jen k rozcestí, protože obě zbývající spáry již proběhl. Proto zde musí jeho obchůzka končit. Jelikož však existuje více takových rozcestí, zůstane pavouk při své obchůzce trčet.



Obr. 5.5

Příklad 5: Rubikova kostka se zdá být složena z 27 stejných menších kostek, z nichž 26 je viditelných. U 8 z těchto menších kostek jsou viditelné tři stěny, vybarvené různými barvami (*rohové kostky*), 12 kostek má dvě viditelné stěny, vybarvené opět dvěma různými barvami (*hranové kostky*). Vzájemnou polohu rohových a hranových kostek lze měnit. Ve výchozím postavení má každá stěna Rubikovy kostky jednu barvu; stačí však několik málo otočení menších kostek, tvořících vždy jednu stěnu kostky, okolo střední kostky, aby vznikl nepřehledný barevný vzor. Celkem lze tímto způsobem vytvořit 43 252 003 274 489 856 000 barevných vzorů. Ukážeme, že těmito mechanicky uskutečnitelnými barevnými vzory nejsou vyčerpány všechny myslitelné barevné kombinace.

Označíme si vhodným způsobem rohové a hranové kostky (viz obr. 5.5) – např. symboly $r_1, \ldots, r_8$ a $h_1, \ldots, h_{12}$. Při otočení některé stěny Rubikovy kostky přejdou vždy rohové kostky opět v rohové a hranové v hranové – např. při otočení O vrchní stěny o 90° ve směru pohybu hodinových ručiček:

$$h_1 \to h_2, \quad h_2 \to h_3, \quad h_3 \to h_4, \quad h_4 \to h_1,$$
$$r_1 \to r_2, \quad r_2 \to r_3, \quad r_3 \to r_4, \quad r_4 \to r_1.$$

Zbytek zůstává beze změny, a proto to nikde nezaznamenáváme. Provedenou změnu zapíšeme zkráceně

$$O = (h_1h_2h_3h_4)(r_1r_2r_3r_4),$$

přičemž se dohodneme, že pro koncové prvky v závorkách platí $h_4 \rightarrow h_1$ a $r_4 \rightarrow r_1$. Tento zápis není jednoznačný, neboť je např. $(h_1h_2h_3h_4) = (h_2h_3h_4h_1)$. Podobně lze zapsat i jiná otočení nebo sled otáčení. Odhlédneme nyní od mechanických překážek, které nás při otáčení omezují, a představíme si, že výsledek nějakého otočení byl realizován sledem vzájemných výměn menších kostek. Tak můžeme např. $(h_1h_2h_3h_4)$ nahradit výrazem $(h_1h_4)(h_1h_3)(h_1h_2)$, který znázorňuje, že hranové kostky h_2, h_3 a h_4 vyměňujeme stále za hranovou kostku h_1. Jinou možnost představuje série vzájemných výměn $(h_2h_3)(h_1h_4)(h_2h_4)$ nebo – pokud chceme postupovat komplikovaněji – $(h_3h_4)(h_2h_3)(h_4h_2)(h_1h_2)(h_1h_4)$. Tyto příklady ukazují, že nahrazení jednoho otočení vzájemnými výměnami není jednoznačné; platí však následující tvrzení teorie výměn: Ať už dosáhneme jisté obměny vzájemnou výměnou dvojic kostek jakýmkoliv způsobem, vždy k tomu potřebujeme buď stále sudý, nebo stále lichý počet výměn. Počet výměn, který jsme uvedli v našich příkladech, byl stále lichý. Výsledek otočení O na Rubikově kostce – tedy vzájemnou výměnu jak hranových, tak i rohových kostek – lze tedy dosáhnout jen sudým počtem vzájemných výměn. Obecněji platí, že každé otočení nebo každý sled otočení lze nahradit pouze sudým počtem vzájemných výměn. Když však vyměníme vzájemně pouze dvě rohové kostky, odpovídá to lichému počtu vzájemných výměn. Takto vzniklý barevný vzor tedy nelze realizovat otočením nebo sledem otočení.

Příklad 6: Klubko vlny, které spadlo na zem a tam se beznadějně zamotalo, nemůže obsahovat žádný uzel, pokud ho neobsahovalo už před pádem, neboť volné konce nebyly při pádu protaženy žádnými smyčkami. Klubko pak rozmotáme nejsnáze tak, že neustále klubko uvolňujeme (roztahujeme) za současného tahu za některý volný konec. Obvyklá metoda, totiž vytahování vlákna z utažených smyček, vytváří neustále uzly a nelze ji doporučit.

Cvičení

5.4. Není možné, aby si 7 osob při přivítání podalo ruce tak, že každý nestiskne ruku právě dvěma osobám.

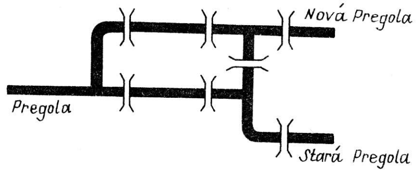
5.5. Pro žádné přirozené číslo n není číslo $2^n + 1$ dělitelné 7.

5.6. Na šachovnici o 3×3 polích je devět figur, které máme na stejné šachovnici rozestavit zcela jiným způsobem. Je možné takové nové postavení, v němž by spolu sousedily všechny figury, které spolu sousedily již předtím?

5.7. Zlomek $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ nelze pro žádné přirozené číslo n zkrátit.

5.8. Ze šachovnice (8×8 polí) odstraňme dva protilehlé rohy. Lze zbývajících 62 polí zcela pokrýt 31 kameny domina, když každý kámen pokrývá právě dvě pole šachovnice?

5.9. Do tří domů máme zavést v rovině plynovod, vodovod a elektrické vedení. Dokažte, že to bez křižování není možné.



Obr. 5.6

5.10. Dokažte, že není možné projít mosty znázorněné na obr. 5.6 tak, abychom po každém mostě přešli jen jednou. (Problém mostů v Královci.)

5.11. Ukažte, že u Rubikovy kostky nelze dosáhnout výměny a) dvou hranových kostek, b) dvou rohových kostek a jedné hranové, c) čtyř hranových kostek pomocí otáčení.

5.12. Korektními úsudky plyne z rovnice

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 1$$

nemožný výsledek $+1 = -1$. Jakto?

5.3. Důkazy jednoznačnosti

Na koho to slovo padne,
ten musí jít z kola ven!

Rozpočitadlo

K úplnému zpracování úlohy patří i zjištění, zda dané předpoklady připouštějí jedno či více řešení. Tato diskuse se děje pomocí *důkazů jednoznačnosti:* v užším smyslu se tento pojem používá tehdy, když jde o to ukázat, že existuje právě jedno řešení. Abychom ukázali, že řešení je právě jedno, postupujeme zhusta tak, že ukážeme: existuje alespoň jedno a současně nejvýše jedno řešení.

K jednoznačnosti existuje pěkná (a dobře vymyšlená) anekdota o matematiku E. Kummerovi (1810–1893), který mj. ukázal, že Fermatova domněnka je pro mnohá přirozená čísla správná, který však jako mnozí matematikové neuměl příliš dobře počítat z hlavy. Když se jednou během přednášky o teorii čísel (!) zarazil při násobení 7.8, obrátil se zoufale ke studentům, kteří mu hbitě nabídli 55 a 57. „Ale pánové“, rozhořčil se Kummer, „7.8 může být přece jen buď 55, nebo 57!“

Příklad 1: Probíhá-li p množinu všech prvočísel, je výraz $p^2 + 2$ právě jednou prvočíslem.

Platí

$$p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3 .$$

Jedno ze tří po sobě následujících čísel $p - 1$, p, $p + 1$ je v každém případě dělitelné 3. Je-li p prvočíslo různé od 3, musí být třemi dělitelné buď $p - 1$, nebo $p + 1$, a pak je třemi dělitelný i součet $(p - 1)(p + 1) + 3$. Prvočíslo tedy můžeme dostat nejvýše pro $p = 3$. Pro $p = 3$ je $p^2 + 2$ rovno prvočíslu 11. Mezi čísly tvaru $p^2 + 2$ je tedy alespoň jedno prvočíslo. Dohromady dostaneme, že jen $p = 3$ dává prvočíslo.

Příklad 2: V množině reálných čísel definujme pro každá dvě čísla a a b operaci spojení $a \circ b$ vzorcem

$$a \circ b = a + b + ab ,$$

kde na pravé straně uvažujeme známé násobení a sčítání. Pro která čísla a existuje ve smyslu této operace právě jedno číslo b tak, aby platilo $a \circ b = 1$ (tj. aby b byl prvek inverzní k $a : b = a^{-1}$)?

Předpokládejme, že k danému (libovolnému) číslu a existují dvě různá čísla b_1 a b_2 tak, že platí

$$a \circ b_1 = a + b_1 + ab_1 = 1 ,$$
$$a \circ b_2 = a + b_2 + ab_2 = 1 .$$

Z těchto rovností plyne odečtením

$$b_1 - b_2 = a(b_2 - b_1) ,$$

a tedy (vzhledem k tomu, že $b_1 \neq b_2$, je dělení číslem $b_1 - b_2$ možné) $a = -1$. Jen pro $a = -1$ mohou existovat různá čísla b tak, že $a \circ b = 1$. Je-li nyní $a = -1$, dostáváme

$$(-1) \circ b = (-1) + b - b \neq 1 \qquad \text{pro každé číslo } b .$$

Má tedy – ve smyslu daného spojení – každé číslo různé od -1 právě jeden inverzní prvek $b = (1 - a)(1 + a)^{-1}$, číslo -1 samo pak nemá žádný inverzní prvek.

Příklad 3: Máme ukázat, že rovnice

$$\sqrt[3]{(1 + \log x)} + \sqrt[3]{(1 - \log x)} = 2$$

má právě jedno řešení.

Jak ukazuje hodnota $x = 1$, má rovnice alespoň jedno řešení. Abychom ukázali, že $x = 1$ je jediné řešení, použijeme následující pomocnou větu: Pro tři kladná reálná čísla a, b a c platí (pro dvě čísla viz první důsledek cvičení 4.1)

$$\frac{a + b + c}{3} \geqq \sqrt[3]{(abc)}$$

(aritmetický průměr není menší než geometrický průměr). Rovnost zde platí jen pro $a = b = c$. Nyní je

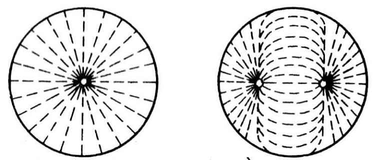
$$\sqrt[3]{(1 \pm \log x)} = \sqrt[3]{[1 . 1 . (1 \pm \log x)]} \leqq \frac{1 + 1 + 1 \pm \log x}{3} = 1 \pm \frac{1}{3} \log x ,$$

a tedy je

$$\sqrt[3]{(1 + \log x)} + \sqrt[3]{(1 - \log x)} \leqq 1 + \frac{1}{3} \log x + 1 - \frac{1}{3} \log x = 2 .$$

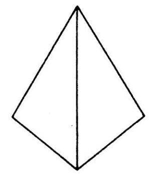
Rovnost může nastat pouze tehdy, bude-li $1 = 1 \pm \log x$, tj. $\log x = 0$ čili $x = 1$.

U čistých existenčních vět nám důkaz zpravidla neudává množinu řešení. K takovým čistým existenčním důkazům patří i tzv. věta o ježkovi: Ať jakkoli učešeme chlupatou kouli (ježka), vždy existuje alespoň jeden vír, v němž vlasy



a) b)

Obr. 5.7 Dvě možnosti, jak „učesat ježka“ (obrázky ukazují vždy jen polovinu koule)



Obr. 5.8

nejsou srovnány do nějakého pevného směru (srov. speciální případy uvedené na obr. 5.7). Rovnoběžky, resp. poledníky lze chápat jako jisté „účesy“ zeměkoule a v obou případech existují právě dva víry (póly).

Je-li úloha formulována tak, že má právě jedno řešení, říkáme, že je *dobře určena* nebo že je *formulována korektně.* Předpokládáme-li, že je možno sestrojit trojúhelník, jsou-li dány jeho tři strany, pak v obecném případě dostaneme vlastně dva různé trojúhelníky (obr. 5.8), které jsou navzájem svými zrcadlovými obrazy. V geometrii požadujeme pouze jednoznačnost až na kongruenci, tj. posunutí, otáčení a zrcadlení nějakého obrazce považujeme za nepodstatné. S podobným pojetím jednoznačnosti „až na…“ se můžeme setkat i v jiných matematických disciplínách.

Cvičení

5.13. Budiž dán polynom $P(x)$, o němž víme pouze tolik, že je $P(7) = 77$ a že pro jisté přirozené číslo $r > 7$ platí $P(r) = 85$. Koeficienty polynomu $P(x)$ jsou celá čísla. Dokažte, že pak existuje právě jedno přirozené číslo n s $n > r$, pro něž je $P(n) = 0$.

5.14. Jsou řešení následujících rovnic určena jednoznačně?

a) $\sqrt{(x^2 - 5)} = x - 1$.

b) $\sqrt{(x + 1)} = x - 1$.

5.15. Učitel hudby říká učiteli matematiky: „Vidím do školy přicházet tři osoby, které jsou dohromady tak staré jako ty. Jestliže jejich věky znásobíme, dostaneme 2 450.“ Učitel matematiky na to odpovídá, že mu to při určení stáří oněch osob nepomůže. Nato učitel hudby doplní svou informaci poznámkou, že žádný z těch tří není starší než ředitel. Nyní už učitel matematiky zná stáří oněch tří osob. Jak starý je ředitel?

5.16. A zná součin $p = mn$ a B zná součet $s = m + n$ dvou přirozených čísel m a n s $1 < m \leqq n$. A ví, že B zná součet s, a B ví, že A zná součin p. Dojde k tomuto rozhovoru:

A: „Neznám součet s.“

B: „To jsem věděl. Napovím ti: součet s je menší než 14.“

A: „To už jsem věděl! Ale teď už znám čísla m a n!“

B: „Pak znám i já čísla m a n.“

Jaké jsou hodnoty přirozených čísel m a n?

5.17. Návštěvníkům matematické redakce nakladatelství Teubner v Lipsku se dostává tohoto poučení: Kdybyste vždy jedním krokem vzali dva schody, zbyl by vám nakonec jeden schod. Kdybyste vzali tři, resp. čtyři schody, zbyly by vám na konci dva, resp. tři schody. Vezmete-li však jedním krokem pět schodů, dorazíte přesně na konec schodiště. Schodů není celkem více než 50. Je tím počet schodů určen jednoznačně? Lze vedlejší podmínku „ne více než 50 schodů“ vynechat?

6. Indukce jako příklad charakteristického způsobu usuzování v matematických disciplínách

Každá matematická disciplína má jisté způsoby usuzování, které jsou jí vlastní. Geometrie využívá už od antických dob při důkazech hojně geometrického místa, zatím co převedení geometrických problémů do algebraických formulí pomocí analytické geometrie je výsledkem novější doby. V diferenciálním a integrálním počtu se běžně používá následující způsob usuzování (takzvaná ε-δ-gymnastika): Když lze absolutní hodnotu rozdílu dvou čísel učinit libovolně malou, pak jsou obě čísla stejná. Příklad $1 = 0{,}999\,9\ldots$.

Ve všech matematických disciplínách se věci odpočítávají a vyslovují se výroky závisející na přirozených číslech. Mimořádnou důležitost má proto metoda, zvaná *metoda úplné* nebo *matematické indukce*, která umožňuje prokázat, že výroky jsou pravdivé pro všechna přirozená čísla (přesněji: umožňuje ukázat pravdivost výrokové funkce, která je uvedena kvantifikátorem *pro všechna* a jejímž oborem individuí je množina přirozených čísel).

Rozdíl mezi matematickou neboli úplnou indukcí a přírodovědnou neboli neúplnou indukcí objasňuje poznámka, kterou učinil E. Kummer v jedné ze svých přednášek: „Pánové, 120 je dělitelné 1, 2, 3, 4 a 5; nyní už zpozorním a ptám se, zda 120 náhodou není dělitelné všemi čísly. Zkouším dále a shledám, že je dělitelné i 6; abych si nyní byl už zcela jist, zkusím to ještě s 8, pak s 10, s 12, s 15 a nakonec ještě s 20 a 24. Jestliže jsem nyní fyzik, řeknu si: Je jisté, že 120 je dělitelné všemi čísly.“ L. Euler poukázal podobným způsobem na nutnost úplné indukce, když poznamenal, že polynom

$$P(x) = x^2 + x + 41$$

dává pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 39$ pouze prvočísla. Z toho však neplyne, že pro každé přirozené číslo x je $P(x)$ prvočíslo, neboť 41 je dělitelem čísla $P(41)$.

Přirozená čísla lze vytvořit z jedničky opakovaným sčítáním. Výroky, které mají platit pro všechna přirozená čísla, je tak potřebné ověřit krok za krokem – od jednoho čísla k následujícímu. Pravdivost výroku se dědí od čísla k číslu a z pokračovatelnosti v malém lze soudit, že výrok je platný v celku (důkaz jako když utíká oko na punčoše). To je, stručně řečeno, základní myšlenka úplné indukce. Vyslovme nyní větu, na které indukce spočívá.

Věta (*oprávnění matematické indukce*): Nechť výroková funkce $A(n)$ je definována pro všechna přirozená čísla n a nechť

a) $A(1)$ je pravdivý výrok a

b) z platnosti výroku $A(n)$ pro každé n plyne též platnost výroku $A(n + 1)$.

Potom platí $A(n)$ pro všechna přirozená čísla.

Než větu dokážeme, podívejme se na její strukturu, která má tvar implikace *Když p, pak q*. Tvrzení (indukční tvrzení) q zní „Výroková funkce $A(n)$ dává pro všechna přirozená čísla n pravdivé výroky". Předpoklady věty (indukční předpoklady) jsou uvedeny v bodech a) a b) a k nim je třeba přidat i výrok, že $A(n)$ je definováno pro všechna přirozená čísla. Takzvaný indukční krok od n k $n + 1$, tj. důkaz implikace *Když pro libovolné přirozené číslo n platí* $A(n)$, *pak platí také* $A(n + 1)$, je předpoklad (!) věty, jehož platnost je nutná, aby bylo možné soudit, že indukční tvrzení je pravdivé. Úsudek věty jde, jak je to obvyklé u každé implikace, od indukčního předpokladu k indukčnímu tvrzení. Z tohoto hlediska není příliš přiléhavé mluvit v souvislosti s úplnou indukcí o „úsudku z n na $n + 1$". Uvedeme ještě jeden příklad důkazu pomocí úplné indukce.

Příklad 1: Pro všechna přirozená čísla n platí, že 9 dělí výraz

$$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 .$$

Nejprve ukážeme, že jsou splněny indukční předpoklady. Začátek indukce – bod a) – je dán, neboť $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$. Dříve než se obrátíme k indukčnímu kroku od n k $n + 1$, poznamenejme, že po krátkém výpočtu dostaneme, že pro všechna přirozená čísla k platí

$$(k + 3)^3 = k^3 + 9(k^2 + 3k + 3) .$$

Předpokládejme, že 9 dělí součet $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$; ukážeme, že 9 dělí také součet $(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3$. S ohledem na náš malý vedlejší výpočet se tento poslední výraz rovná

$$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3) ,$$

a tedy je opět dělitelný 9. Tím jsou splněny všechny předpoklady indukčního úsudku a v důsledku toho platí i tvrzení.

Provedeme nyní důkaz věty, která dává metodě úplné indukce plné oprávnění; důkaz závisí podstatně na indukčním axiómu A.4 z odst. 3.4.1: „Každá množina přirozených čísel, která má tu vlastnost, že obsahuje přirozené číslo 1 a s každým přirozeným číslem n obsahuje i jeho následovníka $n + 1$, zahrne množinu všech přirozených čísel". Označme M podmnožinu množiny přirozených čísel, pro která platí $A(n)$. Podle předpokladu patří 1 k množině M. Podle předpokladu patří s každým číslem k M i jeho následovník, tedy s 1 také následovník 2, s 2 její následovník 3 atd. Podle indukčního axiómu je proto množina M rovna množině všech přirozených čísel, tj. $A(n)$ platí pro všechna přirozená čísla.

Indukční princip byl odvozen z axiómu, který se mnohému čtenáři může zdát poněkud nenázorný. Indukční axióm a s ním i metodu úplné indukce lze také odvodit z výroku *Každá množina přirozených čísel má nejmenší prvek*, který je z praktického zacházení s číselnou řadou znám důvěrněji. Ukážeme to nepřímo. Předpokládejme proto, že sice jsou splněny předpoklady věty o úplné indukci, že však její tvrzení neplatí. Tedy existuje množina přirozených čísel M, pro která je $A(n)$ nepravdivé tvrzení. Množina M musí mít nejmenší prvek, který označíme m. Pro všechna přirozená čísla n taková, že $n < m$, tedy platí $A(n)$. Podle indukčního předpokladu není 1 prvkem M, tedy je $m > 1$. Odtud plyne, že $m - 1$ je přirozené číslo, pro které platí $A(m - 1)$. Na druhé straně $A(m)$ neplatí. To však odporuje indukčnímu předpokladu b). Antitezi tím nelze udržet, a indukční tvrzení je pravdivé.

Ukážeme nyní, že u indukčního důkazu nelze vynechat žádný z předpokladů.

Příklad 2: Součet geometrické řady $s_n = 1 + q + \ldots + q^n$ je pro $q \neq 1$ roven

$$\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} .$$

Důkaz indukčního kroku. Když pro libovolné přirozené číslo n platí

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \qquad (q \neq 1) ,$$

potom odtud máme

$$1 + q + \ldots + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} + q^{n+2} - q^{n+1} - q}{q - 1} =$$

$$= \frac{q^{n+2} - q}{q - 1} ,$$

tj. součtový vzorec platí i pro $n + 1$, jestliže platí pro n. Přesto řada nemá součet $(q^{n+1} - q)/(q - 1)$, protože chybí začátek indukce a indukční krok tak vede do prázdna. Pro $n = 1$ je součet $s_1 = 1 + q = (q^2 - 1)/(q - 1)$, zatímco vzorec dává $(q^2 - q)/(q - 1) = q$.

Úplná indukce byla srovnávána s velkým schodištěm. I kdybychom měli sílu potřebnou k výstupu po schodišti (indukční krok), nepomůže nám to, když na schodiště nemůžeme vstoupit, tedy když je první schod pod zámkem (začátek indukce není dán).

Příklad 3: Každých n přirozených čísel je stejných.

V případě $n = 1$ není co ukazovat (začátek indukce). Předpokládejme, že každých n čísel je stejných. Odtud dostaneme následujícím způsobem, že i každých $n + 1$ přirozených čísel je stejných. Je-li totiž dáno $n + 1$ čísel

$z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ a vyškrtneme-li z nich jednou z_1 a podruhé z_{n+1}, jsou podle indukčního předpokladu v obou případech zbylá čísla stejná:

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_{n-1} = z_n\,,$$
$$z_2 = z_3 = \ldots = z_{n-1} = z_n = z_{n+1}\,.$$

Odtud ale okamžitě plyne

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_{n-1} = z_n = z_{n+1}$$

a tím máme podle indukčního principu i tvrzení.

Kde vězí chyba? I zde chybí začátek indukce, protože případ $n = 1$ je pouze zdánlivý začátek. Princip porovnávání lze použít pouze pro $n \geqq 2$, a chybí tady začátek indukce pro tyto hodnoty. Je jasné, že pro $n > 1$ je výrok nesprávný.

V příkladu 1 jsme za začátek indukce mohli zvolit i $n = 0$. Nerovnost

$$2^n > n^2 \tag{1}$$

je – když odhlédneme od 0 a 1 – platná teprve od $n = 5$. Úlohy, ve kterých indukce začíná až přirozeným číslem $n_0 > 1$ nebo dokonce celým číslem $n_0 < 1$, se dají na známý princip indukce převést. Když je začátek indukce dán číslem p, pak místo přirozeného čísla n považujeme ve výrokové funkci za proměnnou přirozené číslo m dané vzorcem $n = m + p - 1$; m probíhá čísla $1, 2, 3, \ldots$, když n probíhá přirozená čísla $p, p + 1, p + 2, \ldots$. Nerovnost (1) lze tímto způsobem zapsat např. pro $p = 5$ ve tvaru

$$2^{m+4} > (m + 4)^2\,.$$

Tato nerovnost platí pro všechna přirozená čísla $m \geqq 1$. To lze ukázat pomocí věty o úplné indukci.

Příklad 4: Všechny celočíselné korunové obnosy, které jsou větší než 3, lze sestavit z dvoukorun a pětikorun.

Až k obnosu $n = 7$ je tvrzení určitě správné, protože $4 = 2 + 2$, $5 = 5$, $6 = 2 + 2 + 2$ a $7 = 5 + 2$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \geqq 7$, a ukažme, že platí i pro $n + 1$. Možné jsou dva případy: buďto je obnos sestaven ze samých dvoukorun, nebo je v něm obsažena aspoň jedna pětikoruna. V prvním případě obsahuje obnos $n \geqq 7$ alespoň tři dvoukoruny. K tomu, abychom sestavili obnos $n + 1$, stačí ubrat dvě dvoukoruny (= 4 Kčs) a nahradit je jednou pětikorunou. Ve druhém případě se pětikoruna nahradí třemi dvoukorunami (= 6 Kčs). Tím je dokázáno, že jsou splněny indukční předpoklady, a v důsledku toho platí indukční tvrzení.

Existuje i další modifikovaná forma indukce, která používá následující indukční předpoklady: Nechť je n libovolné přirozené číslo a nechť z platnosti

výroku pro všechna přirozená čísla k s $k < n$ plyne platnost výroku pro přirozené číslo n.

Důkaz. Protože n je libovolné, platí tvrzení pro $n = 1$ (začátek indukce). Když výrok neplatí pro všechna n, pak existuje množina výjimečných přirozených čísel s nejmenším prvkem $m > 1$, pro který je výrok nesprávný. Pro všechna k s $k \leqq m - 1$ je však výrok pravdivý, a to je ve sporu s předpokladem modifikované věty. Množina výjimečných přirozených čísel je tedy prázdná. I u této podoby indukce může jako začátek indukce posloužit libovolné celé číslo.

Příklad 5: Součet s_n vnitřních úhlů konvexního n-úhelníka je roven

$$s_n = 2(n - 2)\,.\,90°\,. \tag{2}$$

Začátek indukce je dán pro $n = 2, 3$ a 4, protože součet úhlů 0°, 180° a 360° souhlasí se vzorcem (2). Předpokládejme, že (2) platí pro všechna přirozená čísla k, $3 \leqq k < n$ při libovolném přirozeném n ($n > 3$), a ukážeme, že odtud plyne platnost (2) i pro samotné n. Za tím účelem rozložíme n-úhelník na dva mnohoúhelníky úsečkou, která spojuje nějaký vrchol A s nějakým jiným vrcholem B, který s A nesousedí. Tento rozklad je možný, protože n-úhelník má být konvexní a platí $n > 3$. Nechť oba takto vzniklé mnohoúhelníky mají p a q vrcholů, přičemž zřejmě musí být $p < n$ a $q < n$. Vrcholy A a B se počítají dvakrát, protože patří k oběma mnohoúhelníkům; tudíž platí

$$p + q = n + 2\,. \tag{3}$$

Protože je $p < n$ a $q < n$, platí v každém mnohoúhelníku indukční předpoklad (2), a tedy

$$s_p = 2(p - 2)\,.\,90°\,,$$
$$s_q = 2(q - 2)\,.\,90° = 2(n - p)\,.\,90°\,;$$

poslední úprava byla provedena pomocí (3). Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je zřejmě rovný součtu vnitřních úhlů p-úhelníka a q-úhelníka, tedy

$$s_n = s_p + s_q = 2(p - 2)\,.\,90° + 2(n - p)\,.\,90° = 2(n - 2)\,.\,90°\,.$$

To je právě naše tvrzení.

Příklad 6: Na str. 17 jsme popsali věž, která se údajně nalézá ve městě Benares a která prý tajemným způsobem souvisí s koncem světa. K přenesení jedné destičky ($n = 1$) z kolíku A na kolík C (viz obr. 1.6) potřebujeme jedno přemístění; nechceme-li přenést žádnou destičku, nepotřebujeme žádné přemístění. V případě dvou destiček dáme nejdříve menší destičku na kolík B, pak větší destičku na kolík C a konečně menší destičku z kolíku B na kolík C, celkem tedy provedeme 3 přemístění. Předpokládejme, že pro n destiček je zapotřebí u_n přemístění. Pro $n + 1$ destiček je pak zapotřebí u_{n+1} přemístění. Číslo u_{n+1} dostaneme z u_n následujícím způsobem. K přenesení n destiček z kolíku A na kolík B je třeba u_n úkonů. Pak lze další destičku z kolíku A přenést na kolík C a dalšími u_n úkony lze destičky z kolíku B přenést rovněž na kolík C, tedy je

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Odtud zjistíme, že

$$\begin{aligned} u_n &= 2u_{n-1} + 1 = \\ &= 2(2u_{n-2} + 1) + 1 = 2^2u_{n-2} + 2^1 + 2^0 = \\ &= \ldots = \\ &= 2^n u_0 + 2^{n-1} + \ldots + 2^1 + 2^0, \end{aligned}$$

a protože $u_0 = 0$, je počet přemístění u_n roven součtu geometrické řady

$$u_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(viz též čísla F_n z odst. 4.5). Pro 8 destiček je třeba 255 přemístění, pro 64 destiček je počet úkonů roven 18 446 744 073 709 551 615 ! I kdybychom počítali se 17 280 přemístěními denně, potřebovali bychom ještě miliardy let. Otázkou může být, co se se světem za tu dobu stane, jisté ale je, že věž by takovou zátěž nepřestála.

Existují ještě jiné formy úplné indukce, které např. pracují s úsudkem od n a $n + 1$ k $n + 2$. I pro reálná čísla existuje tzv. *transfinitní indukce*. Připomeňme ještě *zpětnou indukci*. U ní se nejdříve dokazuje platnost indukčního tvrzení pro nekonečnou množinu M přirozených čísel s nejmenším prvkem n_0. Pro každé přirozené číslo $n > n_0$ tím přicházejí v úvahu dvě možnosti:

a) n patří k M,

b) n leží mezi dvěma čísly, která patří k M.

V prvním případě je platnost tvrzení už ukázána. Ve druhém případě ji dostaneme, když ukážeme, že z platnosti výroku pro libovolné přirozené číslo n plyne i jeho platnost pro přirozené číslo $n - 1$ (zpětná indukce). Tímto zpětným postupem se uzavřou mezery, které množina M zanechala na ose přirozených čísel.

Cvičení

6.1. Pro všechna kladná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

6.2. Dokažte v obecném případě nerovnost z příkladu 4 v odst. 4.1!

6.3. Jaký je maximální počet ploch, na něž může n kružnic rozložit povrch koule (rovinu)?

6.4. Každá konečná množina reálných čísel obsahuje jak nejmenší, tak i největší prvek.

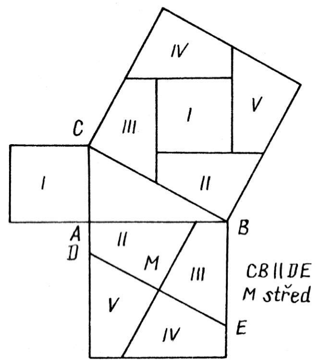
7. Výhledy

7.1. O důkazech

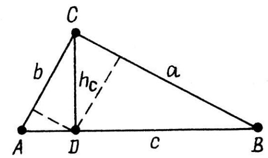
Smysluplná věta cosi vypovídá a její důkaz ukazuje, že tomu tak je.

L. Wittgenstein

O dokazování píše matematik F. Waismann toto: „A mnohý si jistě myslí, že je zcela zbytečné zeširoka dokazovat to, o čem stejně nikdo nepochybuje. Úlohou důkazů však není vyvolat v nás pocit přesvědčení, nýbrž dát nám nahlédnout do vzájemných souvislostí vět. Požadavek dokázat vše, co jen dokázat



Obr. 7.1



Obr. 7.2

lze, není výplodem pochybovačné mysli, nýbrž je to vyjádření touhy vidět strukturu větné stavby ve vší jasnosti, vidět spojení, existující mezi jednotlivými pravdami.“ Ačkoliv Gaussovou devizou bylo publikovat *nemnoho, leč věci vyzrálé* (pauca, sed matura), vracel se k ústředním a důležitým větám vždy s novými a novými důkazy, aby tak osvětlil různé stránky, které dávají lépe vyniknout nosnosti idejí. Jen tzv. fundamentální větu algebry dokázal sám Gauss čtyřmi způsoby. Důležitá věta teorie čísel (kvadratický zákon reciprocity) byla dokázána vcelku asi stokrát.

V čele stojí věta Pythagorova, pro níž bylo udáno přes 360 různých důkazů, mezi nimi indický důkaz z odst. 3.3, důkaz 20. prezidenta Spojených států

J. Garfielda (1831–1888) nebo důkaz matematika-amatéra H. Perigala z roku 1830, který jím ozdobil svou vizitku (obr. 7.1). Překvapující je následující důkazový postup. Z vrcholu C pravoúhlého trojúhelníka ABC spustíme kolmici, která přeponu c přetne v bodě D. Trojúhelníky ABC, ADC a BCD se shodují ve dvou úhlech, a proto jsou si podobné. Označíme-li h_c výšku patřící v trojúhelníku ABC ke straně C a dále h_b, resp. h_a výšky, patřící v trojúhelníku ADC, resp. BCD ke straně b, resp. a, platí v důsledku podobnosti (obr. 7.2)

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c} = \text{konst} = \lambda .$$

Protože trojúhelník ABC má stejný obsah jako trojúhelníky ADC a BCD dohromady, platí dále

$$\tag{1} \tfrac{1}{2}ch_c = \tfrac{1}{2}ah_a + \tfrac{1}{2}bh_b .$$

Tuto rovnost vynásobíme číslem 2λ a dostaneme

$$\tag{2} c^2 = a^2 + b^2 ,$$

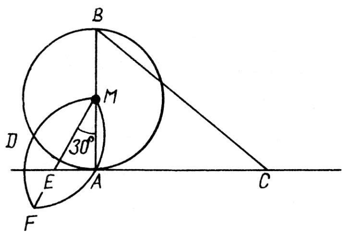
což bylo dokázati.

Pythagorovu větu lze odvodit též z kosinové věty rovinné trigonometrie. Tato věta zní pro libovolný trojúhelník o stranách a, b a c a o úhlu γ, sevřeném stranami a a b, takto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma ;$$

pro $\gamma = 90°$ je $\cos 90° = 0$ a dostáváme (2). Takový důkaz sice musíme akceptovat, odporuje však matematickému smyslu pro styl, který vyžaduje, aby geometrické věty byly dokázány geometricky.

Matematici někdy omezují při důkazech, jako např. u Pythagorovy věty, své důkazové prostředky na vlastnosti podobnosti, výpočty nebo rozklady.



Obr. 7.3. $\overline{AM} \doteq \overline{AF} = \overline{AD} = \overline{DM} = \overline{DF}$, $\overline{EC} = 3\,\overline{AM}$

V geometrii děláme konstrukce zpravidla pomocí kružítka a pravítka (Platonův požadavek, můžeme však vystačit i se samotným kružítkem (geometrie Mohrova-Mascheroniho) nebo s pravítkem a danou kružnicí (geometrie Steinerova).

Důkazy rozlišujeme také podle toho, zda je na nich založena nějaká přibližná metoda nebo zda vedou na exaktní řešení. Jak je známo, nelze pomocí kružítka a pravítka sestrojit úsečku, která by byla rovna obvodu o dané kružnice, přibližně je to však možné s chybou menší než $2r \,.\, 10^{-4}$ pomocí Kochańského konstrukce z roku 1685 (obr. 7.3):

$$\overline{BC} = \overline{AM} \sqrt{(13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3})} \doteq o .$$

Ale i u exaktních řešení je třeba přezkoušet, zda je lze provést „pouhým jazykem“, jak říká J. Steiner (1796–1863), či zda je umíme realizovat. U geometrických konstrukcí se např. mohou vyskytnout nepřístupné body (v důsledku omezení roviny, na níž kreslíme) nebo neúnosně mnoho konstrukčních kroků, které přesnost zakreslování značně omezují. Výkres je totiž tím přesnější, čím méně úkonů vyžaduje. Matematik F. Lemoine ohodnotil v roce 1888 oněch několik základních úkonů, kterých je třeba při konstrukci pomocí kružítka a pravítka, tj. přiřadil např. zabodnutí špičky kružítka do daného bodu nebo narýsování přímky atd. určitá čísla. Z těchto čísel lze spočítat stupeň jednoduchosti a přesnosti každé konstrukce. A k překvapení všech se ukázalo, že stupeň jednoduchosti známých standardních konstrukcí lze zpravidla snížit. Tak např. úloha setrojit čtyři společné tečny dvou kružnic měla při běžném postupu stupeň jednoduchosti 92, ale bylo možné snížit jej na 34. Přibližná řešení se – pokud jde o skutečně dosaženou přesnost – často vyrovnají přesným řešením.

Přesto, že matematici dokáží ročně odhadem asi 100 000 vět, zbývá ještě dost neřešených problémů, dokonce i takových, které lze formulovat velmi prostě.[30]) Čísla, u nichž je součet všech jejich dělitelů roven dvojnásobku původního čísla, nazýváme *dokonalými*. Číslo 6 mezi ně patří, neboť $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, a stejně je tomu u sudých čísel 28, 496 nebo 8 128. Existují lichá dokonalá čísla? Další otevřený problém: Má rovnice $(x + y + z)^3 = xyz$ řešení v celých číslech?

Matematika není – jak se v minulém století občas říkalo – velkolepá zábava lidského ducha se sebou samým, nýbrž návod k jednání při řešení problémů. Tím nabývá matematika charakter sdělení, a my se teď podíváme na důkazy z tohoto hlediska. Pro čtivost a srozumitelnost důkazu není vždy rozhodující jeho délka, nýbrž především jasnost a průhlednost metody důkazu. Existují slavné krátké důkazy, třeba na čtyřech řádkách, ale existují i velmi, velmi dlouhé

[30]) Ogilvy, C. S.: Mathematische Leckerbissen. Über 150 noch ungelöste Probleme. Braunschweig 1969; nebo Miller, M.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme, 3. vyd. Leipzig 1979.

důkazy, rozdělené do pomocných vět a lemmat. Jistý autor (E. Landau, 1877 až 1938) nazval svůj „nekonečný" důkaz jedné důležité věty žertem „velkým dramatem o třech dějstvích". Při dlouhých důkazech je žádoucí, aby důkaz byl cílevědomý. Kdosi odhadl, že zevrubný důkaz jedné domněnky indického matematika S. Ramanujana (1887–1920) by vyžadoval zhruba 2 000 stran textu (ve formalizované podobě ještě více). Čtenář musí stále vědět, co se dělá a proč a na kterém místě důkazu se právě nachází, a musí mít cíl stále před očima. Francouzský matematik G. Desargues (1591–1661) „uveřejnil" svou důležitou práci z projektivní geometrie „O událostech, které nastanou, když se kužel setká s rovinou" v snad nejnečitelnější podobě, neboť ji psal drobnými písmeny na volné listy, jež rozděloval přátelům, a přitom ještě dával geometrickým pojmům botanické názvy. Jinou kuriozitu představuje práce F. Willeho, která vyšla v r. 1972 v Mathematische Zeitschrift jako báseň à la Wilhelm Busch.[31]) Zvláštním způsobem na nás zapůsobí opatrné vyjádření G. W. Leibnize (1646–1716) o jeho poznatcích a jejich důkazech, jež je srozumitelné jen v kontextu tehdejších prioritních sporů a svárů mezi učenci (kontroverze s I. Newtonem): „Když se něco skutečně exhibituje (z lat. vykládá), je dobré nedat buď žádnou demonstraci (z lat. důkaz), nebo takovou, aby nám na to nikdo nepřišel." Důkaz musí být jinými matematiky schválen a akceptován, což se může táhnout přes několik generací, a to nejen tehdy, když byl původní výklad svérázný.

Užitečné je dobré a sugestivní označení. Obsah je sice důležitější než forma, což podnítilo fyzika L. Boltzmanna (1844–1906) k výroku „Eleganci přenechme krejčím", krása či elegance důkazového postupu je však dána použitím jednoduchých, pregnantních a věcných pojmů v přehledné formě. Za mnohá podobná pojetí zde citujme názor G. H. Hardyho (1877–1947): „Matematik tvoří stejně jako malíř či básník... Matematikovy formy musí být krásné stejně jako formy malířovy či básníkovy, pojmy musí být v harmonickém souladu stejně jako barvy nebo slova. Krása je první zkouškou: Na světě není trvalého místa pro ošklivou matematiku."

[31]) W. Busch (1832–1908), známý německý kreslíř a humorista, který se proslavil svými satirickými příběhy ve verších.

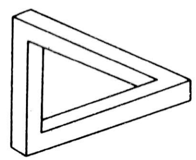
7.2. Malý výlet do psychologie

Psychologie není nic jiného než umění dávat otazníky na správná místa.

A. Wellek

Myšlení usiluje o uspořádání vztahů, přičemž proces myšlení sám probíhá vědomě jen v malé míře, ačkoliv mimo psychologii je myšlení hodnoceno obecně jako nejvyšší stupeň vědomí. Dokonce i filozof a matematik R. Descartes (1596–1650) budoval svou filozofii na zásadě *Cogito, ergo sum* (Myslím, tudíž jsem), i když by bylo místo předpokladu lépe říci *Myslí to ve mně;* to by ovšem vedlo k jiným důsledkům. (F. Schiller to ironizoval výrokem: „Už často jsem byl a opravdu jsem na nic nemyslel.")

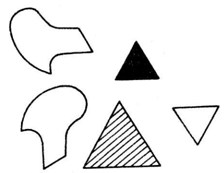
V matematice je formální logika prostředkem k systematizaci vztahů. Myšlení se odbývá v odrazových rovinách, založených na smyslovém vnímání. Již Euler poukázal na to, že nás naše rozumové úsudky podvádějí tak často, že se odvažuje tvrdit, že omyl při usuzování se vyskytuje ještě častěji než mámení smyslů. Přesto se zmíníme o některých výsledcích psychologie vnímání.



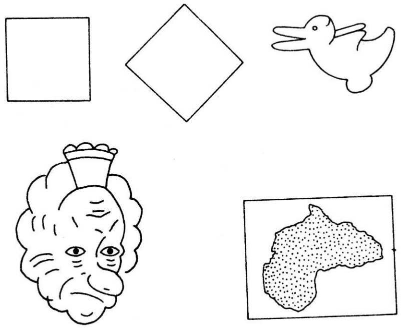
Obr. 7.4 Penroseův trojúhelník

Každý vjem je provázen spontánní tendencí orientovat se, pořádat a vytvářet dojmy. Přitom se každému vjemu přikládá jistý smysl (hvězdy jsou chápány jako souhvězdí, v rachocení vlaku slyšíme rytmus), což je jev využívaný také u psychologických (Rohrschachových) testů. Pokus zařadit prostorově obrázek 7.4 se nedaří, a je proto po jisté době pociťován jako nesnesitelný. Nepřesné vjemy jsou idealizovány. Každý blesk je ve skutečnosti zvlněný, ale v našich představách se objevuje jen jako lomená čára. Trojúhelník nakreslený více či méně křivočaře a nepřesně „vidíme" jako ideální trojúhelník. Výrazné tvary dominují, i když mění svou polohu, velikost či barvu (obr. 7.5). Nakreslíme-li např. pravý úhel a měníme-li pak pomalu polohu jednoho ramene, zůstane dojem pravého úhlu zachován poměrně dlouho. U úhlů, které nejsou tak výrazné, třeba u úhlu 30°, si změny všimneme podstatně dříve. Na výkresu dominuje směr považovaný za svislý, což je podmíněno působením gravitace. Otočíme-li čtverec z obr. 7.6 o 45°, zvíře o 90° nebo hlavu o 180°, dostaneme kvalitativně nový vjem; také důvěrně známý, ale o 90° proti severojižnímu směru otočený kus mapy Země poznáme teprve tehdy, když ho otočíme zpět. Těžko lze poznat i fotografie osob, otočené o 180°, nebo písmo stojící hlavou dolů. Obrazy, na nichž jsme zaměnili nahoře a dole, jsou ihned nápadné, když však zaměníme vpravo a vlevo, není to vždy hned vidět. Díky těmto jevům mají v geometrických obrazcích svislé čáry vždy větší váhu, a již proto kreslíme při důkazu obrazce pokud možno v několika tvarech a polohách.

Celek je vždy více než součet jeho částí. Zdánlivý pohyb prvního obrazce z obr. 7.7 není vlastní žádné z částí obrazce. Každou část nějakého vjemu je třeba chápat v jejím vztahu k celku, který se

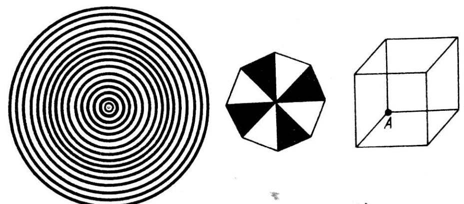


Obr. 7.5 Dominantnost tvarů



Obr. 7.6 Změny vjemu při otočení

objevuje jako pozadí. Druhý obrazec na obrázku ukazuje buď bílý, nebo černý kříž, tj. vztah obrazec-pozadí se může „převrátit". Totéž platí pro kostku, u níž lze bod *A* chápat buď jako bod v popředí, nebo naopak jako bod na zadní stěně.



a) b)

Obr. 7.7 a) Zdánlivé pohyby vzniknou pohybem hlavy nebo knížky. b) Maltézský kříž a Neckerova kostka

Tvůrčí myšlení nevědomky spojuje nebo třídí dané prvky (představy, myšlenky) do návrhů řešení (nápadů), které nás pak zasáhnou zcela nečekaně. „Hádanka se vyřešila, jako když udeří blesk", charakterizoval C. F. Gauss (1777 až 1855) tuto situaci, psychologové hovoří méně obrazně o zážitku typu *Aha.* Vědomému myšlení je přístupná jen analýza nějakého problému. Analyzování situace může mobilizovat „podvědomí" k tomu, aby volilo představy, kombinovalo je a spojovalo. Při spojování představ (asociacích) mají např. přednost představy s vysokým obsahem symetrie nebo s velkou výrazností či jednoduchostí, což si každý může ozřejmit na náčrtcích, které provedl při řešení geo-

metrických úloh. Nápady se dostavují teprve po jisté orientační přestávce, která nastane, když mysl dojde k poznání, že se obvyklé metody pro řešení problému nehodí. Mnozí matematici uvádějí, že orientační přestávky končí často subjektivně neomylnou jistotou „Tohle je řešení", resp. „Takhle se to dá dokázat", aniž by řetězec úsudků byl logicky pojištěn.

Anglický matematik J. E. Littlewood poukázal v jedné přednášce důrazně na nutnost přestávek při tvůrčí práci. Jako zajímavý příklad uváděl, že po jistou dobu byla neděle jediným dnem, kdy nepracoval, a nápady přicházely zpravidla v pondělí. Když se zabýval matematikou v neděli, přicházely nápady v úterý. Takovéto orientační přestávky mohou trvat od délky jedné procházky až po řadu let a řešení se objeví nečekaně v situaci uvolnění. Již I. Newton (1642–1727) však poukazoval na to, že po provedené analýze musíme mít problém stále před očima, máme-li dostat nápady pro řešení.

A. Einstein vysvětloval, že v myšlení asi nehrají roli napsaná nebo vyřčená slova (Platon naproti tomu považoval řeč a myšlení za totožné), nýbrž znaky a představy, které jsou reprodukovatelné a jež lze konstruovat. Básník P. Valéry zdůrazňoval, že génia charakterizuje ani ne tak kombinování, jako spíše poznání a volba podstatných kombinací. Pro Einsteina je podstatným znakem produktivního myšlení kombinatorická hra, jíž dává přednost před všemi spojeními s logickými konstrukcemi ze slov nebo jiných znaků, jež lze sdělit jiným.

Náš neúplný výlet nelze ukončit lépe než slovy J. Hadamarda z jeho eseje o matematickém objevování, kde píše, že tento předmět pro nás ukrývá ještě mnohá tajemství.

7.3. Jak matematici nalézají důkazy?

> Pozoruhodně atraktivní formu, v níž lze často vyjádřit konečný produkt matematického myšlení, tvoří model přísně axiomatické dedukce, který matematika razila tak dlouho už na základě Euklidových „Elementů" ... Zdůrazňování tohoto aparátu matematiky je však zcela scestné, pokud tím vzniká dojem, že konstrukce, imaginativní indukce a kombinace, stejně jako onen obtížně definovatelný duševní pochod zvaný intuice hrají podřadnou roli.
>
> R. Courant

Při každém tvrzení, které matematici vysloví, padá tíha důkazu na jejich bedra. Zatím jsme se zabývali otázkou, co můžeme považovat za přesvědčivý důkaz. Jak to ale matematici dělají, když nacházejí myšlenky pro důkazové postupy? K tomu říká F. Klein (1848–1925): „Jako v každé vědě ani v matematice nepracuje vědec výhradně tímto přísně deduktivním způsobem, nýbrž po-

A. Rodin (1840–1917):
Le Penseur (Myslitel). Bronz 1889/1904

užívá podstatnou měrou své fantazie, postupuje induktivně, opíraje se o heuristické pomocné prostředky." Jak postupuje matematik, je-li třeba řešit problém? Nejprve si problém objasní, odliší předpoklady od tvrzení a ozřejmí si pojmy, které v problému vystupují, dělá si náčrtky a kresby a pokouší se uspořádat všechno co možná nejpřehledněji. Na konci této intenzívní a vědomě realizované fáze má v hlavě úlohu se všemi daty; jeho představivost a jeho paměť jsou mobilizovány, budou mu v každé době připomínat věty a souvislosti, které jsou nebo se zdají být tomuto problému podobné (analogie), budou se pokoušet reprodukovat vše, co o vyskytujících se a o příbuzných pojmech ví, a dodávat tak užitečné i nepoužitelné nápady.

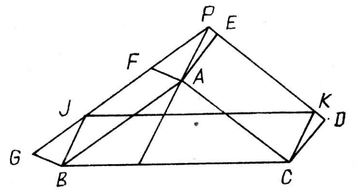
Z historie např. víme, že Archimédes (287?–212 př. n. l.) dostal svůj nápad o vztlaku (základní zákon hydrostatiky) ve vaně. H. Poincaré (1854–1912) dostal vnuknutí o reprezentovatelnosti jistých funkcí nečekaně v okamžiku, kdy chtěl nastoupit do autobusu, a C. F. Gausse (1777–1855) napadla myšlenka, jak konstruovat pravidelné n-úhelníky, v posteli před vstáváním.

Nápady jsou důsledkem předcházejícího vytrvalého přemýšlení o problému. Nepochybně závisejí na zkušenosti a nadání každého matematika. Gauss zjistil po rozsáhlém počítání celkem náhodně díky své enormní paměti na čísla, že dvě veličiny se shodují až do desátého desetinného místa, a z tohoto numerického poznatku odvodil podstatné teoretické souvislosti. Číselní teoretici vyšetřovali často tisíce čísel, aby získali návody k formulaci obecných zákonitostí. Tak např. G. Cantor a Aubry prozkoumali všechna sudá čísla do 1 000, resp. do 2 000 z hlediska Goldbachovy domněnky. (Gaussovi připadalo numerické počítání tak zábavné jak některým luštění křížovek.) Pokoušíme se pomocí „empirické indukce" usuzovat na základě speciálního o obecném. Archimédes si prý zhotovoval dřevěné modely koulí, válců a kuželů, aby se utvrdil ve svých domněnkách o jejich objemu.

Přes individuální aspekty existuje pro všechny problémy několik stále se opakujících otázek, které pomáhají při vyhledávání nápadů. Cílem je nalezení takových vztahů mezi předpoklady a tvrzením, kterých by bylo možno použít k vybudování důkazu. První tipy nám dává původ problému, třeba jisté fyzikální pozadí. Často pomůže, když rozložíme předpoklady nebo tvrzení na části a ptáme se, zda neexistuje souvislost mezi jednotlivými částmi. Přitom budeme ve fázi hledání vycházet jak z daného, tak z hledaného, nebo budeme zkoumat, jaký vliv mají negace toho či onoho. Předpoklady či tvrzení lze obměňovat, tj. lze vyšetřovat podobné problémy. Plody přináší i vzpomínka na to, jaké metody vedly v podobných případech úspěšně k cíli. Hledáme mezičlánky pro důkazy, které předpokládají, že tvrzení, která hypoteticky vypadají jako užitečná, jsou pravdivá, tj. mezičlánky, které říkají: kdyby z předpokladů plynulo to či ono, pak by se řešení dalo udat (srov. dále uvedený indukční příklad). Také pojmy rozkládáme na součásti. Chceme-li dokázat, že $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} > \frac{468}{113}$, nedosáhneme jistě ničeho bez přesné znalosti toho, jak je definována druhá odmocnina. Pomocí rovnocenných definic či vět lze často problém přeformulovat tak, že se naše představy dostanou ze slepé uličky a že nabudeme nových pohledů na věc. Zvláště známé problémy, jako je třeba Goldbachova domněnka, jsou v myšlení tradičně zafixovány, takže nové hledisko je často účinným prostředkem k řešení.

Prvočísla jsou charakterizována Eratosthenovým sítem, v němž jsou vyškrtávány násobky 2, 3, 5 atd. (číslo 4 = 2 . 2 je již vyškrtnuto atd.). Prvočísla dělala matematikům, jak je známo, velké potíže. Americký matematik S. Ulam charakterizoval pomocí jiného síta přirozená čísla, jež nazval *šťastnými čísly*. Tato čísla mají mnohé vlastnosti, které mají prvočísla a o nichž se předpokládalo, že je mají jen prvočísla (dokonce byla ověřena analogie Goldbachovy hypotézy až do $n = 100\,000$). A nyní je otevřeným problémem, zda vlastnosti prvočísel nejsou v podstatě charakterizovány spíše pomocí síta (Eratosthenes) než pomocí pojmu dělitelnosti; pak by tyto vlastnosti mohla mít i jiná čísla popsaná pomocí jistých jiných sít. Možná, že tento posun v otázce povede k novým výsledkům.

Účinný je také postup, při němž úlohu chápeme jako součást jistého obecného problému. Pythagorova věta je např. speciálním případem věty Pappovy, v níž se postuluje rovnost obsahů rovnoběžníků nad libovolnými trojúhelníky



Obr. 7.8 K Pappově větě. Budiž dán trojúhelník ABC; $ACDE$ a $ABGF$ nechť jsou libovolné rovnoběžníky nad stranami $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$. Úsečky $\overline{BJ}$ a $\overline{CK}$ jsou rovnoběžné s $\overline{AP}$. Pak je úsečka $\overline{JK}$ rovnoběžná s $\overline{BC}$ a plocha rovnoběžníka $BCKJ$ je rovna součtu ploch rovnoběžníků $ACDE$ a $ABGF$

(srov. obr. 7.8). Otázku, zda je e^π větší než $\pi^e = e^{e \ln \pi}$, se obvykle pokusíme zodpovědět obecněji pomocí tvrzení o monotónnosti funkce e^x. Thaletovu větu lze odvodit z věty o obvodovém úhlu (srov. odst. 2.1), která podává hlubší obraz o platných vztazích.

Tvrzení

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)n} < 1$$

pro všechna přirozená čísla m by se vzhledem ke své struktuře mělo dát dokázat úplnou indukcí. Při indukčním kroku však narazíme na jistou potíž: pravá strana nerovnosti, kterou chceme dokázat, nezávisí na žádném přirozeném čísle, a tak musí odhad, s jehož pomocí bychom chtěli za předpokladu platnosti nerovnosti pro m dokázat platnost nerovnosti pro $m + 1$, nutně selhat. Když však nerovnost zpřesníme tím, že budeme požadovat, aby platilo

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)n} \leqq 1 - \frac{1}{m} \quad (<1),$$

a budeme tedy řešit obecnější problém, pak nejsou s indukčním krokem žádné potíže:

$$s_m + \frac{1}{m(m+1)} = s_{m+1} \leqq 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Na myšlenku přidat další člen v uvedeném smyslu můžeme přijít po selhání indukčního kroku, ujasníme-li si, že nelze dosáhnout toho, aby bylo

$$s_m + \frac{1}{m(m+1)} = s_{m+1} \leqq 1 + \frac{1}{m(m+1)} < 1.$$

Přidáním dalšího členu můžeme jedničku zaměnit výrazem závisejícím na m tak, že indukční krok už lze provést. Úplně odjinud pochází idea G. W. Leibnize (1646–1716), který zjistil, že je

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}:$$

odtud ihned plyne

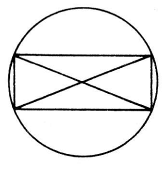
$$s_m = 1 - \frac{1}{m}.$$

V tomto příkladu bychom dali přednost Leibnizovu nápadu, ale při důkazu tvrzení jako

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < 2$$

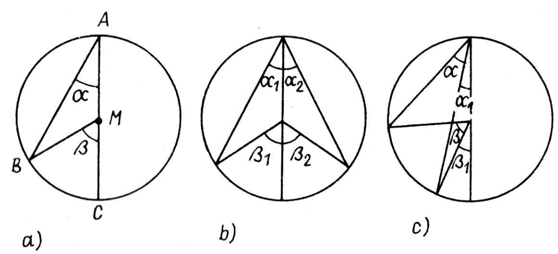
pro všechna přirozená čísla n tento nápad nelze užít, zato však by mohly být úspěšné úvahy prvního typu.

Podobně bychom mohli Thaletovu větu vyslovit jako domněnku, a to na základě následujících úvah o jistém příbuzném problému: Střed M každého pravoúhelníka má od vrcholů tohoto pravoúhelníka stejnou vzdálenost, řekněme r, neboť bod M půlí úhlopříčky (obr. 7.9). Vrcholy tedy leží



Obr. 7.9

na kružnici o středu M a poloměru r. Každý vrchol tedy určuje obvodový úhel o 90° na kružnici, která je sestrojena nad průměrem, tvořeným oběma sousedními vrcholy. Ačkoliv jsme názorně ukázali *Stojí-li pravý úhel nad průměrem půlkružnice, pak je obvodovým úhlem této (půl)kružnice*, tedy právě obrácení věty Thaletovy, máme přece vnitřní jistotu, že to musí platit i obráceně. Naše úvahy připouštějí domněnku, že na půlkružnici nemohou být žádné jiné body než takové, které určují pravý úhel nad průměrem kružnice (srov. odst. 2.13.2).



Obr. 7.10

U každé domněnky se matematik pokouší o to, aby si ji potvrdil na jednoduchých příkladech. Větu o obvodovém úhlu lze bez velké námahy potvrdit pro útvar znázorněný na obr. 7.10a, na němž má středový úhel společné rameno s úhlem obvodovým. Trojúhelník ABM je rovnoramenný se stejnými rameny $\overline{AM}$ a $\overline{BM}$. Úhel u vrcholu A je tedy týž jako úhel u vrcholu B. Úhel CMB je vnější úhel trojúhelníka ABM, a je tedy roven součtu obou nepřilehlých vnitřních úhlů, tj. $\beta = 2\alpha$. Pomocí tohoto speciálního případu lze prokázat i správnost obecného případu pomocí sčítání, resp. odčítání středových, resp. obvodových úhlů (obr. 7.10b a c). Stejná situace nastává, když budujeme obecné řešení soustavy rovnic jako lineární kombinaci speciálních řešení, když vektory vyjadřujeme pomocí speciálních bázových vektorů atd. Obecné řešení tedy lze dostat také ze speciálních, jednoduchých řešení téže úlohy.

Když už matematik důkaz provedl, neodkládá ho stranou jako vyřízený spis, nýbrž se ho pokouší zlepšit. Bude se pokoušet dodat mu na přehlednosti, podle možnosti ho zjednodušit a uvést do širších souvislostí. Tyto dodatečné úvahy slouží také k tomu, aby bylo plně využito nosnosti všech idejí. Podívejme se znovu na důkaz Pythagorovy věty ze str. 128. Vynásobíme-li rovnici (1) číslem $\lambda\pi/4$, bude

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

tj. Pythagorovu větu lze vyslovit též s půlkruhy místo se čtverci. Uvažujme v tomto směru dále, a uveďme k tomu tuto pomocnou větu: Pro každý pravoúhlý trojúhelník platí (obr. 7.2): Jsou-li F_a, F_b a F_c podobné obrazce nad stranami a, b a c trojúhelníka a jsou-li a, b a c navzájem si odpovídající části těchto podobných obrazců, pak jsou obsahy těchto obrazců v poměru $a^2 : b^2 : c^2$. Speciálně tedy jsou v tomto poměru obsahy Δ_a, Δ_b a Δ_c trojúhelníků BCD, ADC a ABC. Je-li tedy obsah obrazce F_a μ-násobkem čísla Δ_a, platí totéž i pro F_b a Δ_b, jakož i pro F_c a Δ_c. Vztah (1) říká, že $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b$. Vynásobení číslem μ vede na rovnost součtu obsahů obrazců F_a a F_b s obsahem obrazce F_c: $F_c = F_a + F_b$. Naše dodatečné úvahy tedy rozšířily důkaz ze čtverců na obecné podobné útvary nad stranami a podstatně tak zobecnili tvrzení.

Nápady pramení v matematické fantazii a vymykají se vědomému myšlení. Jsou založeny na úsudcích, které jsou psychologické a nikoliv formálně logické. Důležitost role obrazotvornosti je zdůrazněna v následující anekdotě, v níž D. Hilbert na otázku po osudu svého žáka odpovídá: „Měl příliš málo fantazie, a tak se stal spisovatelem." – Zmíníme se nyní o čtyřech malých nápadech (tři jsou v následujícím textu, čtvrtý je obsažen v obr. 7.11).

Thales (okolo roku 600 př. n. l.) prý byl postaven před úkol spočítat výšku egyptských pyramid. Měl nápad, jehož základem byla podobnost trojúhelníků: změřit stín pyramidy v tom okamžiku, kdy jeho stín byl stejně velký jako on sám.

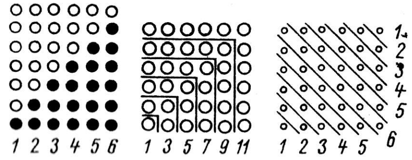
Zabývejme se úlohou určit skutečnou cenu tabulky čokolády, když ke každé tabulce je přiložena poukázka a za 10 poukázek dostane kupec bezplatně další tabulku. Mohlo by se zdát, že poukázka má cenu jedné desetiny tabulky. K této

desetině patří ovšem opět jedna desetina poukázky, takže přibývá ještě jedna setina tabulky, a tak to jde stále dále. Kolik je tedy součet

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots ?$$

Výpočet součtu této nekonečné řady obejdeme nápadem. Koupíme si 9 tabulek a desátou si půjčíme. Tímto způsobem jsme získali 10 poukázek, které vrátíme místo půjčené tabulky. 9 poukázek tedy má cenu jedné tabulky, a jedna tabulka s poukázkou tedy má cenu $1\frac{1}{9}$ tabulky bez poukázky.

Chceme si rozmyslet, zda součet vnitřních úhlů libovolného n-úhelníka musí být skutečně celistvý násobek 180°. Představme si tedy, že jsme na jednu stranu položili zápalku s hlavičkou ve vrcholu A. Sirku posuneme do dalšího vrcholu, přičemž ji otáčíme uvnitř n-úhelníka tak, aby ležela na další straně, pak ji posuneme dál atd., až sirka dorazí opět do bodu A. Do tohoto bodu dojde buď hlavičkou, nebo opačným koncem, a proto se v každém případě otočila o násobek 180°.



Obr. 7.11. Geometrický způsob výpočtu součtů přirozených čísel (na kresbě je $n = 6$):
a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
c) $1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = n^2$

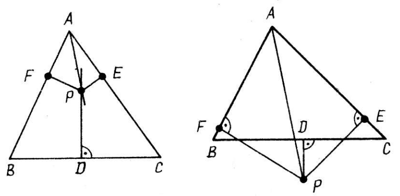
7.4. Falešné úsudky

Slaneček je dobrý. Šlehačka je dobrá. Jak dobrý musí být teprve slaneček se šlehačkou –!

K. Tucholsky

Na konci odst. 2.6 jsme poukázali na to, že logické problémy při důkazech jsou velmi jednoduché. Přesto však dochází stále k chybám. („Matematika je dokonalou metodou jak vodit sám sebe za nos." A. Einstein.) Používá se věcí, jež se nepředpokládaly, a jež často se dokonce zdají být zřejmé, údaje bývají špatně pochopeny atd. Na otázku „Kolik měsíců roku má 30 dnů?" dostaneme zpravidla po pečlivém přepočítání odpověď „Čtyři" a přitom je správná odpověď „Všechny kromě února". Úsudkové řetězce jsou často neúplné a právě v mezerách je třeba hledat chybu. V myšlení děláme stále skoky, tyto skoky ale nelze při bližším ohledání vždy považovat za logické. Je sice znakem matematického talentu, když někdo sled úsudků do jisté míry vytuší ještě předtím, než byly formulovány exaktně, konečným cílem je však logicky korektní forma. K frázím jako „Jak snadno nahlédneme…“ bychom měli přistupovat se zdravou nedůvěrou.

Velký geometr J. Steiner (1796–1863) dokázal pomocí jednoduchých geometrických prostředků, že problém sestrojit obrazec, který by při zadaném obvodu měl co největší obsah, nemůže řešit žádná křivka různá od kružnice. Usoudil proto, že řešením problému je kružnice. Budeme-li však přesní, pak Steiner dokázal jen tolik, že pokud vůbec nějaké řešení existuje, může jím být pouze kružnice. Chybí důkaz toho, že kružnice náš problém skutečně řeší (srov. příklad Besicovichův z odst. 1.2). Matematik O. Perron zdůraznil problematičnost takového závěru, když ho použil k „důkazu“ toho, že 1 je největší přirozené číslo. Každé přirozené číslo se při umocnění na druhou zvětší, výjimku tvoří 1. Když už přirozené číslo nelze umocňováním zvětšit, musí být největší, a tedy je 1 největší. [Potíže se zvětšováním čísel měl i spisovatel A. Strindberg (1849–1912), jak lze pochopit z jeho argumentace: „1 . 1 = 1, bezpochyby. Ale 1^2 není 1, protože čtverec daného čísla musí být větší než číslo samo. Odmocnina z 1 nemůže být 1, protože odmocnina čísla musí být menší než číslo samo. Matematika v tomto případě odporuje logice … .“]



Obr. 7.12

Dokážeme, že každý trojúhelník je rovnoramenný (obr. 7.12). Sestrojme proto osu úhlu u vrcholu A a osu úsečky $\overline{BC}$. Obě přímky nechť se protnou v bodě P. Neexistuje-li žádný průsečík, jsou obě přímky rovnoběžné a osa úhlu je tedy kolmá k a. Pak je však, jak je známo, náš trojúhelník rovnoramenný, což jsme měli ukázat. Vyšetřujme tedy dále případ, kdy se obě přímky protínají v bodě P. Z bodu P spustíme kolmice na strany $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$, tyto kolmice protnou obě strany v bodech E a F. Nechť P leží uvnitř nebo vně trojúhelníka, případ, že P leží na $\overline{BC}$, je triviální. Pomocí vět o podobnosti dostáváme postupně v obou případech

$$\triangle PDB \cong \triangle PDC, \qquad \triangle PAF \cong \triangle PAE,$$

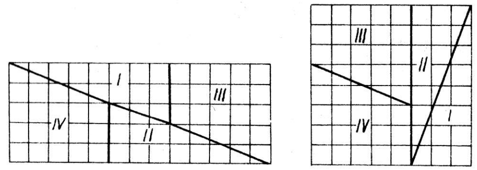
resp.

$$\overline{PC} = \overline{PB} \quad \text{a} \quad \overline{AF} = \overline{AE}, \quad \overline{PE} = \overline{PF}.$$

Odtud plyne podobnost trojúhelníků BPF a CPE a odtud zase rovnost $\overline{BF} = \overline{CE}$. Je tedy $\overline{AF} = \overline{AE}$ a $\overline{BF} = \overline{CE}$. Sečtením dostáváme

$$\overline{AB} = \overline{AC},$$

c.b.d. To, co je na tomto důkazu špatné, jsou nakreslené obrázky, které nás mají přesvědčit, že na jedné straně leží P uvnitř trojúhelníka, což je nemožné a že na druhé straně body E a F leží na stranách $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$, zatím co ve skutečnosti leží právě jeden z těchto bodů na prodloužení jedné ze stran trojúhelníku. („Geometrie je umění vyvozovat z nesprávných obrázků správné závěry.“ G. Pólya.)



Obr. 7.13

Pravděpodobností nějaké události nazýváme poměr počtu případů příznivých a počtu případů možných. Pravděpodobnost, že na kostce padne 1, je tedy $\frac{1}{6}$. Matematik d'Alembert (1717–1783) odpověděl takto na otázku, jak velká je pravděpodobnost, že při dvou po sobě následujících hodech jednou mincí, na jejíž jedné straně je hlava na druhé orel, padne alespoň jednou hlava: Padne-li hlava již při prvním hodu, je hod příznivý a mohu přestat. Padne-li naproti tomu orel, házím dál, přičemž nastane buď příznivý případ hlava, nebo nepříznivý případ orel. Jsou tedy dva případy příznivé a tři možné, a pravděpodobnost je tudíž $\frac{2}{3}$. Snadno však nahlédneme, že při dvou hodech jsou tyto možnosti:

1. hod:	hlava	orel	orel	hlava,
2. hod:	hlava	hlava	orel	orel

To jsou tři příznivé případy při čtyřech možných a pravděpodobnost je tak $\frac{3}{4}$. Chyba d'Alembertovy úvahy spočívá v tom, že pro něj nejsou všechny body rovnocenné.

Z přibližné rovnosti

$$\frac{5}{8} \doteq \frac{8}{13} \qquad (\text{resp. } 65 = 5 . 13 \doteq 8 . 8 = 64)$$

vychází falešný geometrický úsudek, znázorněný na obr. 7.13.

Tři děti mají každé po 10 korunách a koupí si za ně dohromady míč za 30 korun. Po prodeji zjistí prodavač, že míč stojí jen 25 korun, a pošle za dětmi učedníka s přeplacenými 5 korunami. Učedník dá každému z dětí po jedné koruně a sám si za svou námahu nechá 2 koruny. Tím zaplatilo každé dítě za míč jen 9 korun, dohromady tedy 27 korun. Se 2 korunami učedníka to činí ale jen 29 korun. Čtenář nechť sám zjistí, kde je ona zbývající koruna (cvičení 7.4).

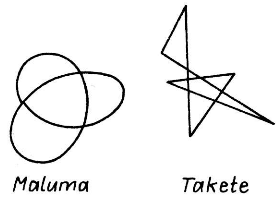
Obtížnější je odpověď na útoky, které jsou vedeny na logiku jako takovou a jejichž výsledkem jsou dvě neslučitelné skutečnosti. To je v matematice smrtelné: teorie, obsahující dvě neslučitelné skutečnosti, je bezcenná, protože z ní lze odvodit libovolné tvrzení. („Pracuješ-li svým duchem na duchu svém, jak můžeš zabránit ohromnému matení?" Seng-Ts'au.) Logicky nesprávné úsudky se nazývají *antinomie* nebo *paradoxy*, přičemž je poslední označení dvojznačné, neboť je používáno též ve smyslu odst. 7.6. Základní myšlenka je stručně vyjádřena úvahou o tvrzení: „Kréťan Epimenides řekl: Všichni Kréťané jsou lháři." Otázkou je, zda Epimenides řekl pravdu či lhal. Předpokládejme, že Epimenides řekl pravdu. Pak existuje alespoň jeden Kréťan, který nelže (totiž sám Epimenides), a Epimenides tedy lhal ... Myšlení se samo zapletlo. Ve všední situaci se může tento rozpor objevit, když nám cizí člověk radí „Od cizího člověka si nikdy nenechávejte radit!" Objevuje se i v literatuře u Cervanta (1547–1616) v jeho románu „Don Quijote". Přes řeku tam vede most, na jehož konci stojí soudní budova. Soudcové soudí podle zvláštního zákona: Chce-li někdo přejít po mostě, musí vysvětlit, co chce. Řekl-li pravdu, může jít. Lhal-li, je oběšen. Jednoho dne přišel poutník, který řekl: „Jdu přes tento most, abych zemřel na oné šibenici." V matematickém pláštíku se toto dilema objevuje od roku 1901 v Russellově množině všech množin, které samy sebe jako prvek obsahují, a to tehdy, když se ptáme, zda tato množina sebe samu obsahuje či nikoliv. Podobně je tomu u zjišťování toho typu, zda holič, který holí všechny muže, kteří se neholí sami, sám sebe holí či nikoliv, resp. zda Bůh jako všemohoucí bytost může stvořit tak velký kámen, že ho sám nezvedne.

7.5. Na čem spočívají nesprávné úsudky?

> Co vás chci naučit, je toto: přejít od nezřejmého nesmyslu ke zřejmému.
>
> L. Wittgenstein

U důkazu záleží jak na korektním dodržení pravidel, tak na prověření každého nápadu z hlediska jeho logické pádnosti; zejména je třeba ověřit správnost předpokladů.

Když je např. při počítání třeba dělit výrazem x, je třeba podle pravidel vyloučit $x = 0$ a případ $x = 0$ nelze na konci úvah chápat jako důsledek; je třeba vyšetřovat ho odděleně. Jinak by bylo možno odvodit ze vztahu $2(a - a) = a - a$ rovnost $2 = 1$. Nápady jsou sice žádoucí, ale vždy je třeba je kriticky přezkoumat. Psychologické testy např. ukázaly, že přiřazení mezi obrazcem

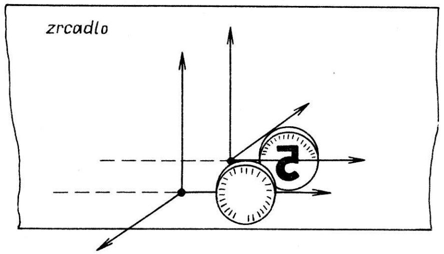


Obr. 7.14

a slovem, znázorněné na obr. 7.14, by udal skoro každý z nás sám od sebe na základě podobnosti obrazce a zvukového vjemu. Podobně je tomu u problému: A je synem B, ale B není otcem A. V jakém vztahu jsou tedy A a B? Dvojice pojmů otec-syn potlačí v abstraktní rovině otázky obecně velice jednoduché řešení, totiž že B je matkou A.

Z dějin myšlení vyplývá, že zobecňující myšlení bylo základem úspěchu. Zde mají svůj původ některé sklony k nesprávnému myšlení, které se mezitím nevědomky vžily. Mají-li předpoklady nějakého úsudku formu přitakání, kloníme se spontánně spíše k přitakajícím tvrzením než k odmítavým; obecné předpoklady jako *všechna a jsou* vyvolávají spíše obecná tvrzení jako *všechna b jsou*, než omezující tvrzení jako *některá c jsou*. Dáváme přednost zdařilým nebo pěkným úsudkům a úsudkům, které se zdají potvrzovat už získané zkušenosti, resp. podporovat tvrzení (přání otcem myšlenky). Sedneme na lep psychologismům (podle R. Lainga) jako „Jste-li kamarádi, zaplatí někdo z vás účet", neboť z „Nezaplatím" přece plyne (ovšem jen psychologicky) „Nejsem kamarád". Nebo poněkud vědečtěji: „Mnozí lidé se domnívají, že sídlem rozumu je mozek. Ale co jsou mozky otvírány, nikdo tam ještě rozum neviděl. Proto mnozí lidé už nevěří na rozum."

Falešné úsudky se vyskytují často tehdy, když podstata věci nebyla ještě dobře pochopena, což se při hledání důkazu stává alespoň zpočátku skoro pravidelně. Často dochází k pokusům o řešení, které jsou od samého začátku odsouzeny k nezdaru. Položme si jednoduchou otázku, proč rovinné zrcadlo, které mění vpravo a vlevo, nezaměňuje i nahoře a dole, ačkoliv bychom to mohli na základě symetrie očekávat. A proč zůstávají tyto vlastnosti zachovány i po otočení zrcadla? Tázaní se často pokoušejí těmto nepříjemným otázkám vyhnout tím, že odkazují na povahu našeho zrakového ústrojí, a jsou pak ohromeni poznatkem, že vlastnosti zrcadla nezávisejí na poloze našeho těla a nemění se ani u ležícího pozorovatele. Falešný úsudek, k němuž zde dochází,



Obr. 7.15 Zrcadlo zaměňuje „vpředu“ a „vzadu“ (vzhledem k rovině zrcadla)

spočívá v tom, že se v žádném případě nezaměňuje vpravo a vlevo, resp. nahoře a dole, nýbrž pouze vpředu a vzadu (vzhledem k rovině zrcadla), což na obr. 7.15 ozřejmují příslušné osy. Protože u lidí je z vnějšího pohledu pravá a levá strana symetrická, padne nám záměna levého a pravého zvláště do oka a vnucuje se pro vysvětlení všech jevů u zrcadla.

Antinomie vznikají i z nedostatečného pochopení teoretických souvislostí a dochází k nim tím snáze, čím abstraktnější a méně známá je zkoumaná oblast matematiky. Nesmyslnost požadavku nechat si vánoční pohlednice zabalit v obchodě jako vánoční balíček je nasnadě. Naproti tomu skutečnost, že v rovině existují pravidelné n-úhelníky pro každé přirozené číslo $n > 2$, zatímco odpovídající objekty v prostoru – tzv. platonská tělesa – se omezují na pět základních typů, v sobě obsahuje nebezpečí, že bez dostatečných prostorových geometrických zkušeností budeme považovat sporné věci analogicky za zaručené. Na základě zkušeností z počítání nebude jistě nikdo hovořit o sudých prvočíslech větších než 10, ale v teorii množin nebo v jiných nových oborech nám zpočátku tyto zkušenosti chybějí, a tak v důvěře ve „zdravý lidský rozum“ připouštíme antinomie již v předpokladech, resp. dáváme k nim podnět (např. množina všech množin) a příčinu hledáme teprve tehdy, když jsme už zaplatili dostatečně vysoké školné. „Později ovšem, tak po dvou třech letech, se sotva dechu popadajíc objevuje ona moudrá stará dáma, zvaná zkušenost, která díky své stařecké těžkopádnosti přichází vždy a všude pozdě.“ (J. Verdaguer.)

7.6. Paradoxy

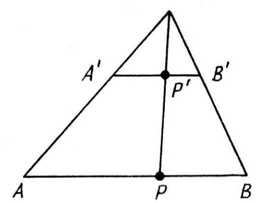
„Je to proti rozumu,“ řekl Filby.
„Jakému rozumu?“ zeptal se poutník v čase.

H. G. Wells

Zatímco falešné úsudky spočívají na chybách v usuzování nebo vycházejí již z falešných předpokladů, jsou paradoxy správné výsledky, které neznáme dosti dobře a které jsou proto nezvyklé. Co je chápáno jako paradoxní, závisí vždy na zkušenostech, které jsme nasbírali. Foukneme-li mezi dva listy papíru, které se dotýkají celou plochou, očekáváme, že se oba listy rozlétnou. Ale je tomu právě naopak, neboť vzniklým podtlakem proudícího vzduchu jsou listy tištěny k sobě a nepomůže ani sebesilnější foukání. Pro Galilea bylo v roce 1683 paradoxní, že mezi všemi přirozenými čísly a jejich podmnožinou – druhými mocninami – existuje vzájemně jednoznačné přiřazení:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots \end{array}$$

(Část je rovna celku!). My, kteří jsme seznámeni s teorií množin, nepovažujeme přiřazení tohoto druhu za nezvyklé stejně jako nepovažujeme za nezvyklé invertovatelné přiřazení mezi n a $n + 1\,000$, resp. mezi n a $2n$, jakož i invertovatelné přiřazení bodů dvou libovolných úseček, jak to je znázorněno na obr. 7.16. Když však tyto abstraktní předpisy naplníme konkrétním obsahem, jak to



Obr. 7.16

učinil D. Hilbert, pak můžeme dojít k tomuto příkladu: Hotel, který má nekonečně mnoho lůžek, může přijmout ještě 1 000 nebo dokonce nekonečně mnoho hostů i tehdy, když je „plně obsazen“: stačí, když se každý host z pokoje číslo n přestěhuje do pokoje číslo $n + 1\,000$, resp. $2n$. (A. Kertész poznamenal, že by v takovém hotelu nechtěl bydlet, protože by se hosté stále stěhovali.)

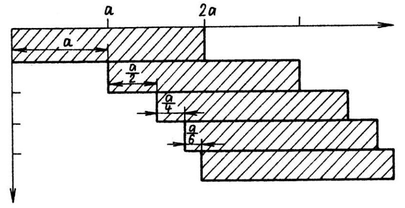
Při prvním seznámení s matematikou můžeme na paradoxy narazit na každém kroku. Je nasnadě, že součet $1 + 2 + 3 + \dots + n$ roste nad libovolnou mez, když sečteme dostatečný počet přirozených čísel. U součtu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \tag{3}$$

to ale už nebudeme bezpodmínečně očekávat, protože po nějakém malém sčítanci přibíráme další ještě menší. Protože však je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{atd.},$$

dostaneme libovolně často částečné součty, které jsou větší než $\frac{1}{2}$, a tedy postupným přidáváním dalších sčítanců opět můžeme překročit každé dané reálné číslo. Překvapující je, že když jako jmenovatele připustíme pouze prvočísla, pak se tato vlastnost řady zachová. Když ale budeme sčítat pouze ty členy, v nichž je ve jmenovateli čtverec přirozeného čísla, je hodnota částečných součtů vždy menší než $\pi^2/6$. Odtud by se dalo „usuzovat“, že přirozených čísel, resp. prvočísel je podstatně více než čtverců přirozených čísel. (K tomu viz předcházející výklad.)



Obr. 7.17

Představme si, že jsme dvě stejné cihly položili na sebe nejdelšími stranami. Horní cihlu nyní posuneme ve směru nejdelší hrany, přičemž část cihly je volně v prostoru. Posunutá cihla bude stabilně spočívat na druhé cihle, dokud její těžiště bude nad spodní cihlou. Budeme-li cihlu posunovat dále, až její těžiště už nebude nad spodní cihlou, tj. překročí jistou hraniční polohu danou hranou spodní cihly, pak se překlopí. Vezmeme systém dvou cihel v hraniční poloze a postavíme jej na třetí cihlu stejné velikosti, tak jako předtím, s cílem pohybovat systémem cihel tak, abychom dosáhli co největší předsunutí. Potom dáme celou tuto konstrukci na čtvrtou cihlu atd. Jak velké předsunutí lze za ideálních okolností docílit?

Položíme nejdelší hranu cihly rovnu $2a$, aby těžiště cihly mělo vzdálenost a od kraje cihly. Pro jednoduchost nechť je hmotnost cihly rovna 1, takže v těžišti soustavy n cihel si můžeme představit hmotnost n. Buď s_n vzdálenost těžiště systému n cihel od vyčnívajícího okraje nejvýše ležící cihly. Podle definice těžiště je vzdálenost s_{n+1} těžiště systému $n + 1$ cihel v hraniční poloze dána vzorcem

$$s_{n+1} = \frac{ns_n + (s_n + a)}{n + 1} = s_n + \frac{a}{n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Protože $s_1 = a$, dostaneme odtud

$$s_{n+1} = s_n + \frac{a}{n + 1} = s_{n-1} + a\left(\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n}\right) = a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n + 1}\right).$$

Až na koeficient a je tedy s_{n+1} rovno řadě (3). Těžiště tedy může mít libovolně velkou vzdálenost od nejpřednější hrany cihly, resp. předsunutí cihel lze sice pomalu, ale zato libovolně zvětšovat se zvyšováním počtu cihel. Můžete se o tom ihned přesvědčit pomocí kostek domina nebo pomocí hracích karet. Už D. Bernoulli, který tuto úlohu v roce 1733 zformuloval, poznamenal: „Kdyby se nyní kvádry kladly tak, jako na připojeném obrázku ..., vznikla by obdivuhodná architektura. Lze toho však využít i jinde.“ (Srov. obr. 7.17.)

Pro čtenáře bude jistě nepředstavitelná skutečnost, kterou objevili S. Banach a A. Tarski v roce 1924, že totiž každou kouli lze rozložit do konečně mnoha kusů (přesněji do konečně mnoha bodových množin) tak, že z těchto kusů lze složit dvě nové koule bez „dutin“, aniž bychom přitom tyto kusy deformovali, a každá z obou koulí bude přesně tak velká jako koule původní! Paradox zde spočívá ve fyzikálním názoru, který je s problémem spojen, neboť je porušen zákon o zachování hmoty. Matematický rozklad koule (tj. zobrazování bodových množin) však nemá s rozdělováním hmoty nic společného, nehledě už na to, že důkaz Banacha a Tarského je čistým existenčním důkazem. Kdybychom úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ z obr. 7.16 interpretovali jako tyče či podobně, objevil by se paradox ve formě nám bližší.

Paradoxem je však pro nás stále ještě skutečnost, že rozdíl mezi dimenzemi se – jak se zdá – stírá: existuje totiž vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body úsečky a body čtverce nad touto úsečkou.

Cvičení

7.1. Je možné, aby (gramatická) věta a její formální negace byly pravdivé zároveň?

7.2. Existuje vzorec, udávající pro každé přirozené číslo n prvočíslo?

7.3. Budiž dán libovolný trojúhelník. Pomocí lomené čáry, jejíž koncové body a body zlomu leží na obvodu trojúhelníka, rozložte trojúhelník na 5 částí o stejném obsahu.

7.4. Kde je chybějící koruna z problému, uvedeného na str. 141?

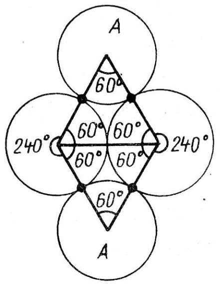
7.5. Učitel matematiky vstoupí v pondělí do třídy a sdělí, že se tento týden bude psát písemka. Fricek se ptá na přesný termín a dostane se mu odpovědi, že práce se bude psát tehdy, až s tím Fricek nebude počítat. Fricek argumentuje: „V pátek práci psát nemůžeme, protože to je poslední možnost, a to už bych o tom věděl. Čtvrtek odpadá také, neboť pokud jsme práci do té doby nenapsali, nelze ji – protože pátek už odpadá – psát ani ve čtvrtek, protože to bych opět věděl. Středa, úterý a pondělí odpadají ze stejných důvodů. Tudíž nemůžeme práci psát vůbec.“ Je tento důkazový postup korektní nebo lze písemku přece jen napsat?

Řešení

> V obecnosti nás přesvědčí spíše ty důvody, které jsme našli sami, než ty, které napadly někoho jiného.
>
> B. Pascal

1.1. –

1.2. Rozvinutý pás je čtyřnásobně překroucený. Slepením podél delších stran vznikne nejprve roura a potom tórus (duše z pneumatiky), slepené delší strany tvoří křivku, která tórus dvakrát ovíjí.

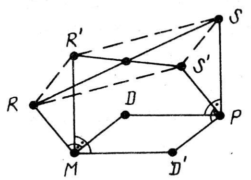


Obr. Ř 1

1.3. a) Pohybující se mince se odvalí jednou po stejně dlouhém obvodu pevné mince, její obvod se ale cestou otočí o 360°: celkem tedy 2 otočení o 360°. b) Po každé z obou pevných mincí se odvalí $\frac{2}{3}$ obvodu, k tomu přistoupí otočení obvodu o 240°: celkem tedy $\frac{8}{3}$ otočení o 360° (viz též obr. Ř 1).

1.4. Z levého ouška nůžek vytáhneme smyčku, provlékneme ji pravým ouškem souběžně s připevněným koncem šňůry a vytaženou smyčkou prostrčíme celé nůžky (zdola směrem nahoru).

1.5. 11 knafů má stejnou velikost jako 10 hunků. Je-li hemput menší než plauc, obsahuje méně než 20 knafů, tj. nejvýše $18\frac{2}{21}$ hunka, a tedy obsahuje 18 hunků. V hemputu je obsažen alespoň jeden hunk, ale více knafů. 18 hunků má stejnou velikost jako 11 knafů (= 10 hunků) a 8 hunků. V jednom hemputu tedy může být nejvýše 8 hunků.



Obr. Ř 2

1.6. Řešení nezávisí na umístění dubu! Buďte D a D' dvě libovolná umístění dubu. Pak je $\triangle DD'M \cong \triangle MRR'$ a $RR' \perp DD'$; analogicky je $SS' \perp DD'$. Je tedy $RR' \parallel SS'$. Dále je $RR' = DD' = SS'$. Tím je tedy $RR'SS'$ rovnoběžník a jeho úhlopříčky se navzájem půlí v místě, kde je uložen poklad (viz obr. Ř 2).

1.7. Tři nebo pět – to záleží na čtenáři. (Otočte v případě potřeby obrázek o 180°!)

2.1. Nepravdivé výroky: a, b, c; pravdivý výrok: k; výroky s neznámou pravdivostní hodnotou: j, l; výroky nejsou: d, e, f, g (vedou na spory jak v případě, že je považujeme za pravdivé, tak v případě, že je považujeme za nepravdivé, srov. odst. 7.4); i je gramaticky správně, ale beze smyslu; h je výroková funkce (srov. odst. 2.8).

2.2. *Protože* je intenzionální spojka: Tuto knihu čtete, *protože* vás zajímá (*protože* byla vytištěna v roce 1983); *buď… anebo* je extenzionální spojka (srov. cvičení 2.4).

2.3. Je to výrok (srov. konec odst. 2.3.2).

2.4.

A	*p p n n*	
B	*p n p n*	
	p n n n	*A a B*
	p p p n	*A nebo* (též) *B* (třetí příkladová věta z odst. 2.3.3)
	p n p p	*když A, pak B*
	p p n p	*když B, pak A*
	p n n p	*A právě když B*
	n p p n	*buď A, nebo B* (první příkladová věta z odst. 2.3.3)
	n n p n	*B, ale ne A*
	n p n n	*A, ale ne B*
	n n n p	*ani A, ani B*
	n p p p	*ne současně A a B* (druhá příkladová věta, $A \mid B$)

Další spojení jako *p p p p*, *n n n n* (nezávisle na A a B) nebo *p p n n*, *n n p p* (A, resp. $\bar{A}$) atd. nejsou zajímavá. Tabulka je vzhledem ke středové čáře antisymetrická (negace). To dokazuje tvrzení ze str. 29.

2.5. Viz cvičení 2.4.

2.6. Spojení $A \mid B$ odpovídá (*non A*) *nebo* (*non B*) (nesnášenlivost A a B); u obou spojení se jedná o spojení $A \Rightarrow B$ a A *a* B – lze to ověřit pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

2.7. a) Trojúhelník není pravoúhlý nebo není rovnoramenný.
b) A nemluví česky a nemluví rusky (srov. de Morganova pravidla v odst. 2.4).

2.8. *Člověk je starší než* 200 *let* je nepravdivý výrok. a) Jsem menší nebo roven 2 m (větší než 2 m); pak je implikace nepravdivá (pravdivá). b) Člověk je menší nebo roven 2 m (větší než 2 m); pak je implikace pravdivá (nepravdivá). c) pravdivé; d) pravdivé; e) pravdivé; f) nepravdivé; g) nepravdivé; h) pravdivé; i) pravdivé; j) Jsem velký (malý); pak je implikace nepravdivá (pravdivá). k) nepravdivé (věta o vyloučeném sporu); l) pravdivé; m) pravdivé; n) pravdivé; o) pravdivé; p) nepravdivé.

2.9. a) ano; b) ne, viz odst. před 2.3.2.

2.10. a = h, b = f, c = g, d = e (srov. odst. 2.4).

2.11. B říká pravdu. Jinak by nelhala osoba C, pak ale lžou A a B, tedy lže A a výrok o A vede ke sporu. C a A lžou.

2.12. a) Odpověď před hodinou: Cesta vede do A (nevede do A) – lže (nelže); je pravdomluvný (není pravdomluvný). Odpověď nyní: Cesta vede do A (nevede do A) – lže (nelže); je pravdomluvný (není pravdomluvný). b) Cesta vede do A (nevede do A); lže (nelže); je pravdomluvný (není pravdomluvný) – rozhodnutí není možné.

2.13. Nechť B je lhář. Pak jsou A a C různí. Protože C řekl pravdu, je A lhář. Nechť B není lhář. Pak jsou A a C stejného druhu a protože C lhal, musí být i A lhář. A je tedy lhář.

2.14. a), c), d) jsou výrokové funkce; b) je označení pro reálná čísla.

2.15. Nikoliv, protože množina Marťanů je prázdná. Změnou množiny individuí se tato situace ovšem může změnit.

2.16. První výroková funkce není definována pro $x = \pm 1$, druhá vyplývá z první pro všechny ostatní hodnoty x. a) ne; b) ano.

2.17. Množina, na které je definováno $A(x)$, může být podmnožinou množiny, na které je definováno $B(x)$ (srov. odst. 2.10).

2.18. x není větší než 23 a e^π [tj. $x \leqq \min(23, e^\pi) = 23$].

2.19. a) $non\,(\exists x: A(x)) \Leftrightarrow \forall x: \overline{A(x)}$; b) $non\,(\forall x: A(x)) \Leftrightarrow \exists x: \overline{A(x)}$.

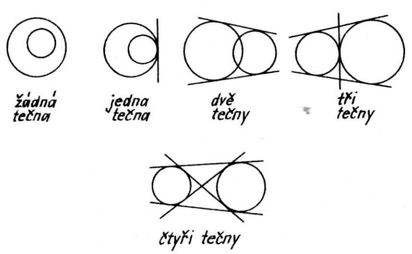
2.20. *Ne všechna sudá ...*.

2.21. c), d), f); srov. cvičení 2.19.

2.22. Ano.

2.23. a) Ne, protože se kvantifikuje na podstatně různých místech; b) ano.

2.24. a) *Bílé vrány neexistují;* b) *Existuje alespoň jeden člověk, který musí;* c) *Žádné přirozené číslo není sudé;* d) formálně: *Alespoň jeden Marťan není vyšší než 2 m;* smysluplně: *Pokud vůbec existují Marťané, pak alespoň jeden Marťan není vyšší než 2 m.*



Obr. Ř 3

2.25. Na obr. Ř 3 jsou udány všechny možné vzájemné polohy dvou kruhů; počet společných tečen se pohybuje od 0 do 4 a jednotlivé případy se přitom navzájem vylučují. Z platnosti vět typu „Když je jeden kruh uvnitř druhého, pak kruhy nemají společnou tečnu“ atd. pak plyne platnost jejich obrácení „Když dva kruhy nemají společnou tečnu, pak leží jeden z nich uvnitř druhého“ atd.

2.26. a) Když pro dva kruhy platí, že když jejich tětivy jsou stejné, pak je jejich vzdálenost od středu stejná, potom jsou kruhy stejné. Když platí, že když stejné kruhy obsahují tětivy, pak tyto mají stejnou vzdálenost od středu, potom jsou tětivy stejné. Když tětivy ve dvou kruzích mají stejné

vzdálenosti od středu, pak jsou jak kruhy, tak tětivy stejné (nesprávné). Když stejné kruhy obsahují tětivy, potom platí, že když mají stejnou vzdálenost od středu, pak jsou tětivy stejné. Když ve dvou kruzích jsou tětivy stejné, pak platí, že když mají stejnou vzdálenost od středu, pak jsou kruhy stejné. b) Když je čtyřúhelník obdélníkem (a tedy rovnoběžníkem), pak má stejné úhlopříčky. Když má obdélník stejné úhlopříčky, pak je to rovnoběžník. Když je čtyřúhelník obdélníkem, pak je to rovnoběžník a má stejné úhlopříčky.

2.27. Za pravdivé lze považovat: *Klobouk nesním* a stejně můžeme implikaci považovat za správnou (jinak by nebyl důvod něco vyvozovat). Kontrapozice implikace pak dává: *Strindberg nezvládl problém obchodního cestujícího.*

2.28. První dva příklady vedou na správné výsledky pomocí nesprávných úvah, třetí příklad ukazuje nesprávnost zvoleného postupu.

2.29. Vyjdeme z poslední hry. Pak jednoduše plyne:

	1. hráč	2. hráč	3. hráč
po 3. hře	24	24	24
po 2. hře	12	12	48
po 1. hře	6	42	24
na začátku	39	21	12

S těmito počátečními hodnotami skutečně zpětně dojdeme ke konečným výhrám.

3.1. Ano, když axióm A.1 bude znít „Existuje přirozené číslo 2 ...“.

3.2. a) Kladná reálná čísla tvoří grupu. b) $a \circ b = \log_r a + \log_r b$; $a = 1$, $b = r^{-1} \Rightarrow 1 \circ r^{-1} = -\log_r r = -1 < 0$! Axióm G.1 není splněn.

3.3. Platí

$f_1 \circ f_2 = f_1(f_2) = f_2 = 1/x$; $f_2 \circ f_1 = 1/f_1 = 1/x = f_2$; $f_1 \circ f_1 = f_1 = x$; $f_2 \circ f_2 = 1/f_2 = x = f_1$, a tedy $f_1 = e$ (G.3), $f_1 = (f_1)^{-1}$ a $f_2 = (f_2)^{-1}$ (G.4). Také axiom G.1 je splněn a platnost axiómu G.2 ověříme propočítáním všech možností.

3.4. Podgrupy dostaneme otáčením jednotlivých „stěn“ kostky o 90° nebo o 180°, a také otáčením dvou pevně zvolených „stěn“ atd.

3.5. Modelem může být například množina $\{1, a, b\}$ s $1' = a$, $a' = b$, $b' = a$, přičemž 1 a b mají stejné následovníky; zbylé axiómy zůstávají v platnosti.

4.1. $(a - b)^2 \geqq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$; rovnost nastane pouze když $a = b$. Důsledky:

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab \Rightarrow (a + b)^2 \geqq 4ab \Rightarrow \frac{|a + b|}{2} = \frac{a + b}{2} \geqq \sqrt{(ab)}. \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \geqq 2.$$

4.2. Podle cvičení 4.1:

$$(a + b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \frac{a + b}{b} + \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a} + 1 \geqq 2 + 2 = 4,$$

tj.

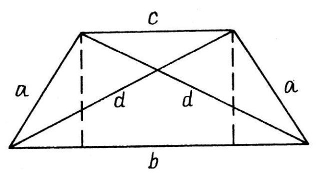
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geqq \frac{4}{a + b}.$$

4.3. $\log_a b = x$, $\log_b a = y \Rightarrow a^x = b$, $b^y = a \Rightarrow a^x = (b^y)^x = b^{yx} = b \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = 1/y$ a tvrzení odtud plyne podle cvičení 4.1.

4.4. Délky ramen: a_p, a_l; závaží: G; množství vážené vpravo, resp. vlevo: g_p, resp. g_l. Zákon páky:

$$a_l g_l = a_p G \quad \text{a} \quad a_l G = a_p g_p \Rightarrow g_l + g_p = G\left(\frac{a_p}{a_l} + \frac{a_l}{a_p}\right) > 2G$$

(cvičení 4.1).



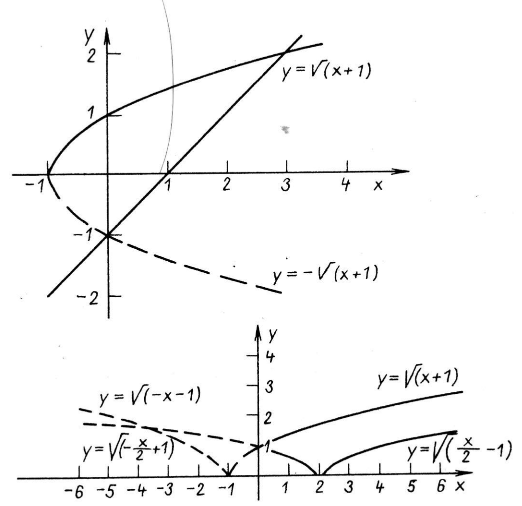
Obr. Ř 4

4.5. Obr. Ř 4: $x = (b - c)/2$,

$$\left.\begin{aligned} d^2 &= h^2 + (b - x)^2 = h^2 + \frac{(b + c)^2}{4} \\ a^2 &= h^2 + x^2 = h^2 + \frac{(b - c)^2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2 = a^2 + bc\,.$$

4.6. Protože $4 \,.\, 2 < 9$, platí $2\sqrt{2} < 3$. Je tedy

$$\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 + 2\sqrt{2} < 6\,.$$



Obr. Ř 5

4.7. Při tvoření druhých mocnin vede $y = \sqrt{\ }$ a $y = -\sqrt{\ }$ na stejné hodnoty. Proto dostaneme průsečíky zdánlivě i pro „záporné funkce". Při umocňování na druhou se stává, že potřebné omezení „odmocněnec je kladný" přehlédneme, takže se např. místo funkce $y = \sqrt{(x + 1)}$ definované pro $x \geqq -1$ objeví funkce $y = \sqrt{|x + 1|}$ definovaná pro všechna x [a rovná $\sqrt{(-x - 1)}$ pro $x \leqq -1$]. Viz obr. Ř 5.

4.8. $0 < x + 5 = |x|^2 - 2|x| + 1$.

$$x \geqq 0: \; x + 5 = x^2 - 2x + 1\,, \qquad x_{1,2} = 4,\, -1,$$

pouze $x_1 = 4$ je řešením.

$$x < 0: \; x + 5 = x^2 + 2x + 1\,, \qquad x_{3,4} = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}),$$

$x_3 < 0$ je řešením (je přitom $x_3 + 5 > 0$), $x_4 > 0$ odpadá.

4.9. U tří koulí lze jediným vážením rozhodnout, která je těžší: dvě položíme na váhu, jednu odložíme; když nastane rovnováha, je odložená koule těžší. Devět koulí rozdělíme do tří skupin po třech a jedním vážením určíme stejně jako předtím těžší trojici (jednu trojici odložíme, obě zbývající porovnáme). Při druhém vážení pak rozhodneme o tom, která ze tří koulí těžší trojice je těžší než obě zbývající.

4.10. a) Množství vína, které zůstává ve sklenici na vodu, nahradíme na lžíci vodou a přeneseme do vína. b) Od objemu koule $\frac{4}{3}\pi R^3$ odečteme objem válce $2r\pi(R^2 - r^2)$ a dvakrát objem kulové úseče $\pi h^2(R - h/3)$ s $h = R - r$. Výsledek: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4.11. Dub umístíme přímo do místa, kde je pramen. Poklad je ve středu spojnice PR.

4.12. Nechť je x_0 řešení, ležící v uvedeném intervalu, s $x_0 = p/q$ (p a q nesoudělná). Potom je $p^3 = pq^2 + 5q^3 \,.\, p \nmid q$, ale $p \mid 5$, tj. je buď $p = 1$, nebo $p = 5$. $p = 1$: x_0 leží pro každé q mimo uvedený interval; $p = 5$: v uvedeném intervalu leží jen číslo $x_0 = \frac{5}{3}$ (čísla $\frac{5}{1}$ a $\frac{5}{2}$ jsou větší než 2, čísla $\frac{5}{4}$ a další jsou menší než $\frac{3}{2}$), to však není řešením.

4.13. Kontrapozice: Když lze krátit ve zlomku $(a - b)/(a + b)$, pak lze krátit i ve zlomku a/b;

$$a - b = rn\,, \; a + b = rm \Rightarrow 2a = r(n + m)\,, \; 2b = r(m - n) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{r}{r}\,\frac{m + n}{m - n}\,.$$

4.14. Protože n není čtvercem celého čísla, má alespoň jednoho prvočinitele s lichou mocninou, např. p^k. Z rovnosti $\sqrt{n} = r/s$ (r, s nesoudělná) plyne $ns^2 = r^2$;

$$p^k \mid n \Rightarrow p^k \mid r^2 \Rightarrow p^{k+1} \mid r^2$$

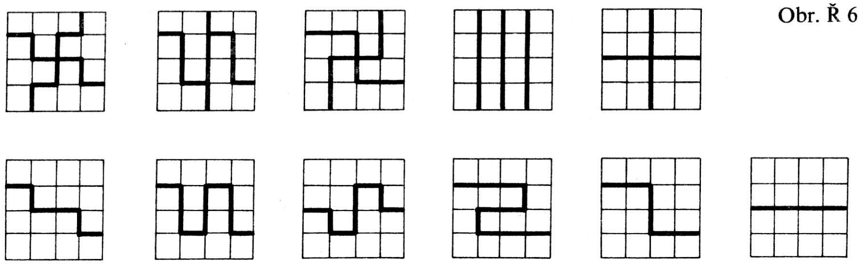
(protože k je liché), ale

$$p^{k+1} \nmid n \Rightarrow p \mid s$$

ve sporu s předpokladem (viz str. 113).

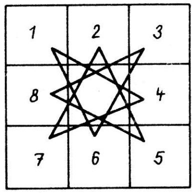
4.15. $\sphericalangle P = \sphericalangle Q$, a tedy $QM \parallel PC$. Tedy musí být $Q = P = A$, a pak je $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

4.16. Každá cesta má 4 vodorovné a 4 svislé úseky, a tedy jsou všechny cesty dány permutací $(4 + 4)$ prvků; přitom je však počet stejných cest roven $4!\,.\,4!$, neboť vzájemná záměna vodorovných úseků a svislých úseků celkovou cestu nemění. Tedy $8!/(4!)^2 = 70$.

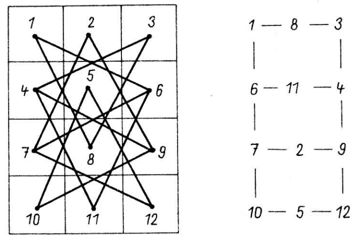


Obr. Ř 6

4.17. Existuje 6 možností půlení a 5 možností čtvrcení (obr. Ř 6).



Obr. Ř 7



Obr. Ř 8

4.18. Představme si, že jsme na šachovnici o 3 × 3 polích očíslovali 8 krajních polí a spojili je nitěmi tak, jak to odpovídá všem možným pohybům jezdců (viz obr. Ř 7). „Věnec" krajních polí lze seřadit do kruhového řetězce

$$\begin{array}{c} 1-6-3-8-5-2-7-4-1\,; \\ \check{C} \quad \check{C} \quad B \quad B \end{array}$$

Č a *B* zde označuje černé a bílé jezdce, kteří se přesouvají v kruhu, dokud si nevymění místa. – Pro šachovnici o 3 × 4 polích dostaneme síť znázorněnou na obr. Ř 8. Pokud jezdci stejné barvy stojí na kratších stranách šachovnice, potřebujeme k jejich výměně alespoň 16 tahů. Zbývající případ je jednoduchý.

4.19. –

4.20.
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,; \; n = 4\,, \; a = 10^4\,, \; b = 5^4 \Rightarrow \frac{-10}{-5} = 2 = -2\,!$$

4.21. Výrok platí pro algebraické rovnice. Nealgebraická rovnice $x^2 - |x| = 0$ má řešení $-1, 0$ a 1.

4.22. Existuje 8 možných kombinací (*L* je lhář, *P* je pravdomluvný):

P P P L P L L L	1. obyvatel
P P L P L P L L	2. obyvatel
P L P P L L P L	3. obyvatel

P P L je jediná vhodná kombinace.

4.23. Číslo $P(p)$ je vždy dělitelné číslem p.

5.1. Buďiž $10^m = n$. Pak n za sebou následujících čísel $(n+1)! + 2, \ldots, (n+1)! + (n+1)$ je po řadě dělitelných čísly $2, \ldots, n+1$.

5.2. Představme si, že v okamžiku turistova výstupu zahájí turistův „dvojník" sestup; oba se musí cestou potkat.

5.3. Uzlové body se sudým počtem (do nich ústících) ulic lze pominout (křižovatky). Uzlové body s lichým počtem ulic jsou buď začátkem, nebo koncem linky. Existuje 6 uzlů s 1 ulicí a 2 uzly se 3 ulicemi, tedy celkem 8 výchozích, resp. konečných stanic; jsou proto zapotřebí 4 linky.

5.4. Když osoba *A* podá ruku osobě *B*, pak i osoba *B* podá ruku osobě *A*. Celkový počet podání ruky je vždy sudý, ale $5 \,.\, 7 = 35$.

5.5. $2^n \equiv 1, 2, 4$ modulo 7, tedy $2^n + 1 \not\equiv 0$ modulo 7.

5.6. Na šachovnici jsou 4 bílá pole a 5 černých polí (nebo naopak). S bílým polem sousedí černé pole a naopak, nové postavení tedy není možné.

5.7. Když lze zkrátit zlomek

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3},$$

pak lze zkrátit i zlomek

$$\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1},$$

a to vede ke sporu, neboť zlomek $1/(7n+1)$ zkrátit nelze.

5.8. Chybějící pole mají stejnou barvu. 31 kamenů domina však vyžaduje 31 bílých a 31 černých polí.

5.9. Přívod vody a plynu bez křížení je vždy možný. Tyto přívody vymezí v rovině dvě oblasti. Je lhostejné, zda elektrárna leží uvnitř některé z těchto oblastí či mimo ně; vždy musí jedno elektrické vedení křižovat hranici některé z těchto oblastí.

5.10. Srov. cvičení 5.3 nebo příklad 4 (str. 115); protože máme více než dva liché uzly, potřebujeme více než jednu cestu.

5.11. a) Analogicky jako v textu. b) Protože hranovou kostku lze zaměnit jen za hranovou, nelze požadované uskutečnit. c) Máme-li 4 hranové kostky zaměnit způsobem $(k_1k_2k_3k_4)$, přičemž zbytek má zůstat beze změny, nelze to uskutečnit. Záměna způsobem $(k_1k_2)(k_3k_4)$ však možná je. (Opakujte např. třikrát tento postup: vrchní stěnu otočit o 180°, pravou stěnu rovněž o 180°.)

5.12. Pro $x \neq \pm 1$ je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 + x - x + 1 = x^2 - 1\,,$$

kterou z ní dostaneme vynásobením. Tato nová „rovnice" vyjadřuje nemožnou rovnost $+1 = -1$, a tak nemůže platit ani ona, ani původní rovnice.

5.13. Nechť je $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak je

$$P(p) - P(q) = a_m(p^m - q^m) + \ldots + a_1(p - q)\,.$$

Protože číslo $p - q$ je vždy dělitelem čísla $p^k - q^k$, je i dělitelem čísla $P(p) - P(q)$. Speciálně tedy platí:

$$\begin{aligned} r - 7 &\text{ dělí } 85 - 77 = 8 \quad (\text{tj. } r = 8, 9, 11, 15),\\ 7 - n &\text{ dělí } 77 - 0 = 77 \quad (\text{tj. } n = 8, 14, 18, 84),\\ r - n &\text{ dělí } 85 - 0 = 85 \quad (\text{tj. } n - r = 1, 5, 17, 85).\end{aligned}$$

To znamená, že může být pouze $n = 14$ $(n > r)$. Polynom P není určen jednoznačně, což ukazují tyto příklady: $P(x) = -3x^2 + 52x - 140$, $P(x) = -3x^4 + 100x^3 - 1\,164x^2 + 5\,568x + 8\,960$.

5.14. a) $x = 3$, b) $x = 3$ ($x = 0$ odpadá).

5.15. Označíme-li m věk učitele matematiky a p_1, p_2, p_3 stáří tří přicházejících osob, pak platí: $p_1 + p_2 + p_3 = m$ a $p_1p_2p_3 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Pro hodnoty p_i přicházejí v úvahu všechna možná rozdělení prvočinitelů 2, 5 a 7 (např. $p_1 = 2 \cdot 5$, $p_2 = 5 \cdot 7$, $p_3 = 7$). Protože učitel matematiky neumí čísla p_i vypočítat, musí existovat alespoň dvě rozdělení na prvočinitele, jež dávají stejný součet. Jsou to rozdělení $p_1 = 5$, $p_2 = 10$, $p_3 = 49$ a $p_1 = p_2 = 7$, $p_3 = 50$, kdy je $m = 64$. Označíme-li věk ředitele písmenem s, platí: $s \geqq p_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Kdyby bylo $s \geqq 50$, dostal by učitel matematiky pro hodnotu p_3 dvě řešení, kdyby bylo $s < 49$, nedostal by žádné řešení. Musí tedy být $s = 49$.

5.16. Protože B ví, že p má alespoň tři prvočinitele („To už jsem věděl…"), nemůže s být součtem pouze dvou prvočísel. Pro $4 \leqq s < 16$ je takové jenom $s = 11$. B nyní vyšetří všechny rozklady $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = \ldots = 5 + 6$ a utvoří odpovídající součiny $1 \cdot 10, 2 \cdot 9, \ldots, 5 \cdot 6$, mezi nimiž je hledaný součin p. Tento součin musí mít alespoň tři prvočinitele, jejichž součet nemůže být větší než 13. Proto je $p = 18 = 2 \cdot 9$, tedy $m = 2$, $n = 9$.

5.17. Když je číslo m dělitelné číslem r, pak má $m - 1$ po dělení číslem r zbytek $r - 1$ a naopak. Když je n počet schodů, pak platí $n = 3 \cdot 4k - 1$. Z $n \leqq 50$ plyne (protože 5 dělí n) $k = 3$, tj. $n = 35$. Když odpadne dodatečná podmínka $n \leqq 50$, existují další řešení, např. pro $k = 8$.

6.1. $n = 1$: $\dfrac{x_1}{x_1} = 1$; n libovolné:

$$(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) =$$

$$= (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n) + \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}} \geqq$$

$$\geqq n^2 + \frac{x_{n+1}}{x_1} + \ldots + \frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_1}{x_{n+1}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n+1}} + 1 \geqq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 .$$

(Indukční předpoklad a cvičení 4.1.)

6.2. Vyšetřete mnohočlen

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 ;$$

zbytek úvah je analogický příkladu 4.

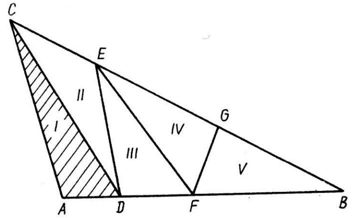
6.3. Nechť n kružnic dává a_n plošek. Další – tj. $(n + 1)$-ní kružnice K by měla mít s každou z předcházejících kružnic co možná nejvíce průsečíků, aby přidala hodně dalších plošek. Maximální kružnice na kouli se protnou nejvýše dvakrát (nebo jsou totožné), tj. K může všech n kružnic protnout $2n$-krát (musíme to zařídit tak, aby každým průsečíkem procházely pouze dvě kružnice).

K tedy prochází $2n$ ploškami a dělí je vždy na dvě části. Tedy je $a_{n+1} = a_n + 2n$. Protože $a_1 = 2$, je $a_n = n(n - 1) + 2$. Pro rovinu dostaneme týž výsledek.

6.4. $n = 2$: Pro každá dvě (různá) reálná čísla a a b platí buď $a < b$, nebo $a > b$. Budiž M libovolná množina o n prvcích a nechť pro ni platí tvrzení. Pro každou množinu o $n + 1$ prvku dostaneme po odstranění libovolného prvku c množinu o n prvcích s největším a nejmenším prvkem, a tyto dva prvky lze porovnat s prvkem c jako pro $n = 2$.

7.1. *Tato věta je tvořena šesti slovy. Tato věta nemá šest slov.*[32]

7.2. Ano, např. $2 + 1^n$ nebo $2 + \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$. Nebylo totiž požadováno, aby vzorec dal všechna prvočísla.



Obr. Ř 9

7.3. Z obrázku Ř 9 je jasné, že když bude $AD = \frac{1}{5}AB$, potom bude obsah trojúhelníka jednou pětinou obsahu trojúhelníka ABC. Trojúhelník II bude analogicky určen bodem E, pro který platí $CE = \frac{1}{4}CB$, atd.

7.4. 25 se rovná $3 \cdot 10 - (3 \cdot 1 + 2)$, a nikoliv $3 \cdot 10 - 3 \cdot 1 + 2$.

7.5. Písemku lze psát právě proto, že důkazový postup je korektní. Fricek totiž na základě svého důkazu už nepočítá s tím, že by se písemka psala, a tak jsou překvapivě znovu dány předpoklady pro psaní písemky.

[32]) Z estetických důvodů by bylo vhodnější vyslovit druhou větu ve tvaru *Tato věta není tvořena šesti slovy*, jež vystihuje naše cvičení lépe. Tato věta však má 6 slov, a tak by nebyla pravdivá; proto jsme volili pro druhou větu trochu jinou formu, která však vyjadřuje stejný obsah. To je rozdíl češtiny oproti němčině, kde lze zápor tvořit přidáním dalšího slova – např. *nicht*. (Pozn. překl.)

Literatura

Balada, F.: Z dějin elementární matematiky. Praha, SPN 1959.
Einstein, A.: Jak vidím svět. Praha, Čs. spisovatel 1966.
Katětov, M.: Jaká je logická výstavba matematiky? Praha, JČMF 1950.
Sedláček, J.: Nebojte se matematiky. Praha, SNTL 1960.
Struik, D. J.: Dějiny matematiky. Praha, Orbis 1963.
Tarski, A.: Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd. Praha, Academia 1969.
Zich, O.: Úvod do filosofie matematiky. Praha, JČMF 1947.

Rejstřík

ČESKÁ VĚDECKOTECHNICKÁ SPOLEČNOST
SOCIALISTICKÁ AKADEMIE

POLYTECHNICKÁ
KNIŽNICE
127. SVAZEK
I. ŘADY
VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ

RÜDIGER THIELE

MATEMATICKÉ DŮKAZY

Z německého originálu Mathematische Beweise vydaného nakladatelstvím BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig roku 1979 přeložili doc. RNDr. Alois Kufner, DrSc., a RNDr. Štefan Schwabik, CSc.

DT 510.6

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, 113 02 Praha 1 v roce 1985 jako svou 9667. publikaci — Redakce teoretické literatury — Odpovědná redaktorka RNDr. Jarmila Novotná, CSc. — Obálku, vazbu a přebal navrhl Miroslav Houska — Technická redakce Eva Endlová — Vytiskla Polygrafia, n. p., Svobodova 1, 128 17 Praha 2 — 164 stran, 60 obrázků — Typové číslo L11-E1-IV-31f 11914 — Vydání první — Náklad 6200 výtisků — 11,28 AA, 11,61 VA

03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 15,—
Cena vázaného výtisku Kčs 22,—
505/21,856

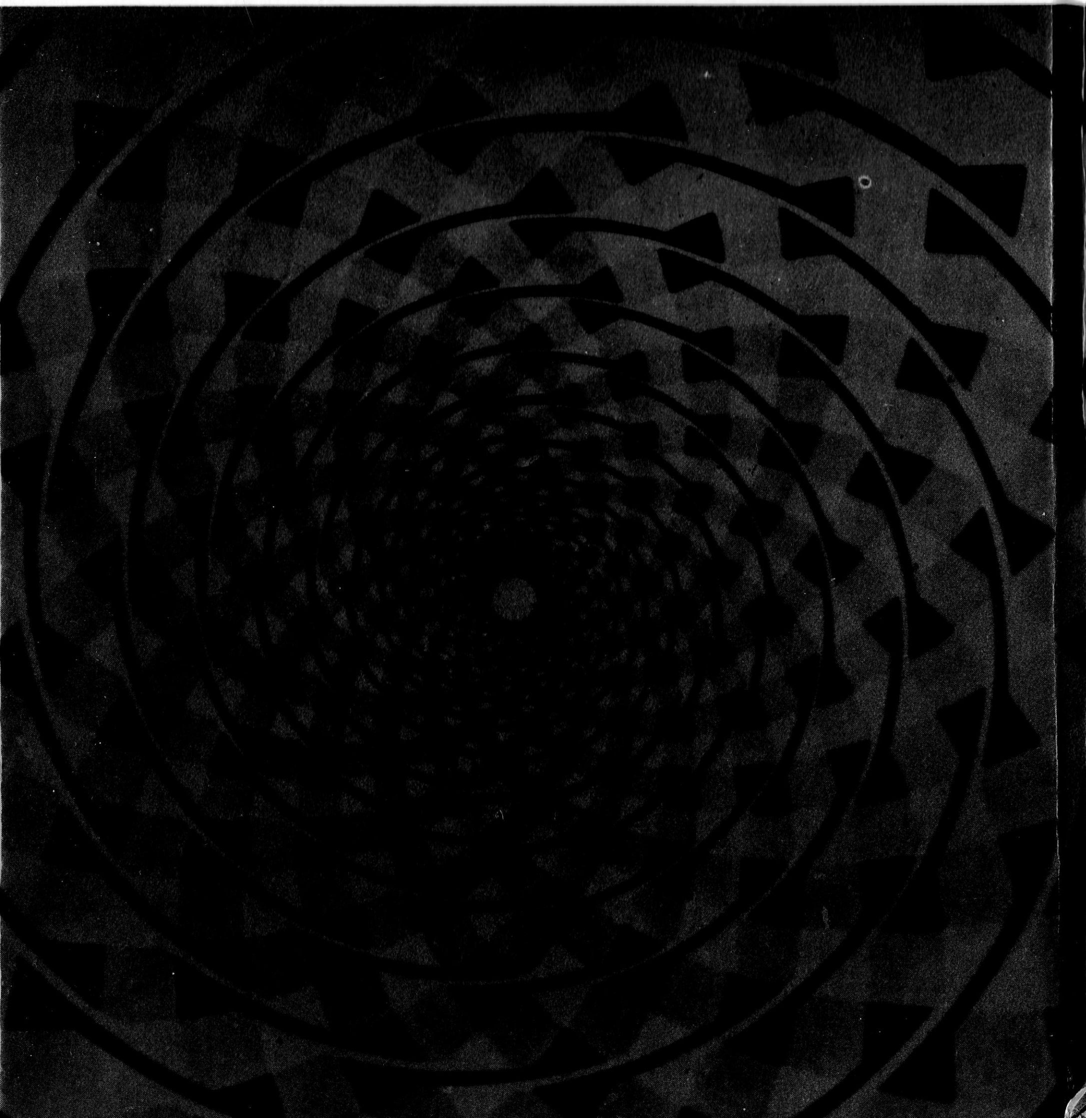
Publikace je určena studujícím středních a vysokých škol. Se zájmem si ji zcela jistě přečtou i fundovaní odborníci a široká technická veřejnost.

04-004-85 b. Kčs 15,—
04-005-85 v. Kčs 22,—

POLYTECHNICKÁ KNIŽNICE

ŘADA I / VĚDA A TECHNIKA POPULÁRNĚ – SV. 127

04 – 005 – 85
03/2 Kčs 22,–



R. THIELE • MATEMATICKÉ DŮKAZY

Matematické důkazy

SNTL

R. THIELE