Základy matematiky (MA-0001)
a
Algebra 1 (MA-0003)

poznámky ke studiu obou předmětů
verze 2017

Břetislav Fajmon

Obsah

Úvod

Tato skripta jsou vytvářena jako podpora přednášek i cvičení do předmětů Základy matematiky (MA-0001 … podzimní semestr) a Algebra 1 (MA-0003 … jarní semestr) na PdF MU Brno.

Témata kapitol s čísly 13 a více se týkají navazujícího předmětu Algebra 1 ve 2. semestru (tento text je vlastně přepracovávanou náhradou textu [6] ze seznamu literatury) – klíčová práce na tomto textu bude provedena během akademického roku 2017-18, kdy oba předměty v nových osnovách běží poprvé. V poslední kapitole jsou uvedeny výsledky k některým příkladům z celého dvousemestrového textu.

Konec matematických důkazů, pokud jsou uvedeny, je označen symbolem $\square$. Konce některých příkladů, pokud je rozumné je v textu odlišit od následujících úvah, jsou zakončeny znakem $\star$.

Břetislav Fajmon, Brno 2017

1 Podstata matematiky

1.1 Warm-up: Co je základem matematiky?

a) Co je podstatou matematiky? To je otázka pro studenty[1]. Přemýšlejte nejprve každý sám o dvou až třech věcech (5 min), a pak je řekněte svému sousedovi.
b) Čím Vás matematika zaujala?[2] Opět přemýšlejte o jedné až dvou věcech, proč jste si vybrali matematiku jako jeden z předmětů, kterým se věnujete.

Na předchozí otázku (a) je možné reagovat řadou odpovědí. Možnou dvojicí odpovědí je 1) číslo … je podstatou počítání (aritmetiky = práce s čísly, řecky arithmos = číslo); 2) tvar či obrazec … je podstatou geometrie = zeměměřičství, pramatky geometrické teorie i praxe.

Toto hrubé dělení matematiky na dvě oblasti přetrvává i do dneška:

ad 1) místo aritmetiky bychom možná obecněji řekli diskrétní matematika (= matematika oddělených objektů a struktur, zejména čísel a rovnic, ale i konečných množin, operací sčítání, odčítání, umocňování, apod.),

ad 2) a protipólem diskrétní matematiky je spojitá matematika, která studuje geometrické obrazce, ale také reálné funkce reálné proměnné (které jsou často spojité, aspoň ty elementární z nich).

Uvedené dva typy objektů často nelze oddělit (od nepaměti v geometrii šlo i o délky objektů, tj. geometrie byla vždy spojena s čísly), naopak v posledních dvou stoletích se staly revolučními ty obory matematiky, které spojují diskrétní i spojitou matematiku dohromady – takovou je například analytická geometrie (používá rovnice k popisu rovin, přímek, ploch, tj. geometrických objektů) nebo matematická analýza (popisuje křivky a plochy v prostoru pomocí reálných funkcí a dále s nimi pracuje).

Přesto existují i další odpovědi na otázku, co je základem či podstatou matematiky, a na některé se podíváme právě během tohoto kursu.

1.2 Přednáška

Zaměřmě se nyní na následující odpověď: **podstatou matematiky je přesné a logické odvozování**.

Řecké slovo *mathéma* = nauka (věda) či poučka, platné či pravdivé tvrzení – tj. matematika je vědou založenou na přesném vyjadřování, vědou o pravdách, jejichž platnost byla prokázána. Zajímají ji výroky s pravdivostní hodnotou „pravdivý“ – ty nazývá matematickými větami (teorémami)[3]

Definice 01: Výrok je písemně zaznamenatelné tvrzení, kterému lze v daných souvislostech jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu – výroky jsou tedy taková tvrzení, která lze označit buď za pravdivá (= s pravdivostní hodnotou 1), nebo za nepravdivá (= s pravdivostní hodnotou 0).

[1] Warm-up je anglické slovo, které lze přeložit jako „zahřívátko“ – jedná se o činnost na začátku hodiny, která má příchozí zapojit do hodiny či do tématu.

[2] Tuto otázku přenechávám kolegům do předmětu MA 0002.

[3] Slovo theóró (= vidím, zřím) je též z řečtiny, tj. teoréma = něco, co se nahlédlo a přijalo jako pravda … ovšem nikoli subjektivní pravda, ale objektivní, která nezávisí na nahlížiteli.

Skládáním výroků ve složitější tvrzení pomocí logických spojek dostaneme výrokovou formu (definice 02), respektive výroková forma je i jen schematické znázornění složeného výroku, ve kterém vystupují symboly jednodušších výroků a logické spojky.

Definice 03: Logické spojky jsou symboly, jejichž užitím spojujeme dílčí výroky ve složený výrok (respektive symboly označující dílčí výroky spojujeme ve výrokovou formu).

Poznámka: zákony logiky a filosofie. Podstatou přesného či správného vyjadřování jsou tři zákony, na kterých stojí nejen matematika, ale i filosofie:

- **Zákon o vyloučeném sporu: Nemůže současně platit výrok i jeho negace[4].** Jinými slovy, pokud při logickém usuzování dospějeme k tomu, že platí současně výrok i jeho negace, říkáme, že nastal spor = kontradikce (protiřečení, protimluv), a to znamená, že některý z předpokladů našeho usuzování má nesprávnou pravdivostní hodnotu.

- **Zákon vyloučení třetího (= princip pravdivostní dvouhodnotovosti): Buď platí výrok, nebo jeho negace, ale je vyloučena třetí možnost.** Znáte nějakou situaci, kde nastanou více než uvedené dvě možnosti? V životě někdy máme více než dvě řešení, jak se zachovat, a při výběru jedné varianty jednání tím pádem všechny ostatní vylučujeme – ovšem tento výběr z více než dvou možností je něco jiného než fakt, že při popisu reality používáme dvouhodnotovou logiku pravda/nepravda; pro každou z více než dvou možností se totiž rozhodujeme „dvouhodnotově“: buď si ji zvolíme, nebo ne.

- **Zákon negace negace: Negací negace dostáváme zase původní výrok[5].**

Příklad. Všechny tři zákony přesného vyjadřování platí u následujících dvou výroků:

výrok A : $2+2=4$; jeho negace je ¬A: $2+2\neq 4$. Negací negace dostaneme zase původní výrok A. Taktéž nemůže platit současně A i $\neg A$. A platí buď A, nebo $\neg A$ a je vyloučena třetí možnost.

výrok B : Berlín leží v Evropě; jeho negace $\neg B$: Berlín neleží v Evropě. Negací negace dostaneme zase původní výrok B. Taktéž nemůže platit současně B i $\neg B$. Platí buď B, nebo $\neg B$ a je vyloučena třetí možnost. $\star$

V dalším budeme pod výroky a matematickými tvrzeními vždy rozumět ta, která splňují uvedené tři zákonitosti.

Pokud A, B[6] jsou výroky, pak

[4]Negaci výroku definujeme jako výrok s opačnou pravdivostní hodnotou, než byl původní výrok.

[5]Respektive: Negací negace dostaneme výrok ekvivalentní původnímu výroku. Nebo ještě jinak – původní výrok je negací negace sebe sama.

[6]Protože za A, B obecně mohou být dosazeny různé výroky, přesnější je nazývat symboly A, B jako *výrokové proměnné* (Thiele, str. 29). Dále ze stejného důvodu složený výrok = výraz obsahující logické spojky a písmena, za která lze dosazovat libovolné výroky, se nazývá *výroková forma*. Tj. výroková forma je schematické znázornění jistého logického pravidla, do kterého můžeme za jednotlivá písmena dosazovat různé dílčí výroky. Zkoumat pravdivost výrokových forem tedy znamená zkoumat pravidla logického usuzování.

- výrok $\neg A$ nazveme negací[7] (definice 06) výroku A, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroku A platí tabulka jeho negace … DOPSAT
- výrok $A \wedge B$ nazveme (definice 07) konjunkcí (spojením) výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich konjunkce … DOPSAT
- výrok $A \vee B$ nazveme (definice 08) disjunkcí výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich disjunkce … DOPSAT
- výrok $A \Rightarrow B$ nazveme (definice 09) implikací utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot z nich vytvořené implikace … DOPSAT

  V případě platnosti implikace $A \Rightarrow B$ se výrok A (definice 04) nazývá dostatečná podmínka pro platnost výroku B (protože platnost výroku A dostačuje, postačuje, aby bylo zaručeno, že platí výrok B) a výrok B se nazývá (definice 05) nutná podmínka, která nutně vyplývá z platnosti výroku A (pokud platí A, z toho nutně plyne, že platí i B).
- výrok $A \Leftrightarrow B$ nazveme (definice 10) ekvivalencí utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B je tabulka ekvivalence … DOPSAT

Poznámka: Stručný matematický zápis. Budeme postupně (opakovat a) učit se řadě symbolů stručného matematického zápisu – výstižně a přesně se vyjadřovat je jedním z cílů matematiky „na úrovni B2“, pokud bychom si vypůjčili na popis vysokoškolské úrovně matematiky označení zažité z evropského referenčního rámce výuky cizích jazyků.

- označení 00 : $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ … množina přirozených čísel; někdy také $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ … množina přirozených čísel včetně nuly;
- označení 01 : $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ … množina celých čísel;
- označení 02 : množina racionálních čísel
$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \; : \; m \in Z, \; n \in N \right\}.$$
- označení 03 : I … množina iracionálních čísel, tj. $R = Q \cup I$;
- označení 04 : R … množina reálných čísel;
- označení 05 : C … množina komplexních čísel;
- označení 06 : $\neg A$ … negace výroku A;
- označení 07 : $A \wedge B$ … konjunkce výroků A, B;
- označení 08 : $A \vee B$ … disjunkce výroků A, B;

[7] V některých učebnicích je negace výroku A označována i symbolem $\overline{A}$ nebo A'.

- označení 09 : $A \Rightarrow B$ ... implikace utvořená z výroků A, B – s významem „Když platí A, tak platí i B“;
- označení 10 : $A \Leftrightarrow B$ ... ekvivalence utvořená z výroků A, B – s významem „A platí právě tehdy, když platí B“;

Typ důkazu číslo 1: Důkaz ekvivalence výrokových forem.

Sestavíme tabulku výsledných pravdivostních hodnot obou výrokových forem. Pokud na každém řádku tabulky (jeden řádek = jedna kombinace dílčích pravdivostních hodnot) mají obě formy stejné pravdivostní hodnoty, jsou ekvivalentní.

Zajímavá pravidla logického usuzování dostáváme při kombinaci několika logických spojek, jak je vidět ze dvou následujících matematických vět:

(věta 01) Výroková forma $\neg(A \wedge B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \vee (\neg B)$.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1).□

Příklad. Zde příklad na negaci konjunkce.

(věta 02) Výroková forma $\neg(A \vee B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \wedge (\neg B)$.
Důkaz: provedeme pomoci tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1).□

Příklad. Zde příklad na negaci disjunkce.

Poznámka: Univerzální výroky. V rámci jednoho výrazu se často v matematickém zápisu objevují proměnné hodnoty, označované zpravidla jako x, y, atd. Tímto způsobem lze směřovat k vytvoření univerzálních výroků, které platí pro více hodnot, například pro všechna přirozená čísla, apod.

(definice 11) Výroková funkce je výraz, který sám není výrokem, protože není specifikováno, jaké hodnoty nabývá proměnná x, takže nelze výrazu přiřadit pravdivostní hodnotu. Kvantifikace proměnných (definice 12) je proces, kterým vymezíme, jakých hodnot může nabývat proměnná ve výrokové funkci $V(x)$. A konečně kvantifikátor (definice 13) je ta část výroku, která vymezuje, jakých hodnot může proměnná ve výrokové funkci nabývat.

Příklad. Zde příklad na výrokovou funkci a kvantifikátor.

- označení 11 : $V(x)$ ... výroková funkce s proměnnou x;
- označení 12 : $\forall$ ... pro každé, pro každou;
- označení 13 : $\exists$ ... existuje; $\exists!$ ... existuje právě jedno, právě jeden; $\nexists$ ... neexistuje, neexistují;
- označení 14 : : (dvojtečka) ... tak, že; platí
- označení 15 : $\in$ ... patří do, je prvkem;

- označení 16 : $\cap$ … průnik množin;
- označení 17 : $\cup$ … sjednocení množin;

1.3 Cvičení

2 Základní typy důkazů

2.1 Warm-up: Logické hádanky

Logické hádanky z knihy [3], viz příprava.

2.2 Přednáška

Typ důkazu číslo 2: Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při přímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vyjdeme z toho, že platí výrok A; na základě A a dříve dokázaných matematických vět provedeme logicky korektní úsudek U_1; na základě A, U_1 a dříve dokázaných vět provedeme logicky korektní úsudek U_2; atd. až po k krocích logicky korektně usoudíme, že platí B, a to na základě platnosti A, U_1, …, U_k.

Příklad. Dokažte:

$$a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

(věta 03) Výrokové formy $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ jsou ekvivalentní.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot dílčích výroků.□

Na větě 03 je založen typ důkazu 03:

Typ důkazu číslo 3: NEpřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při NEpřímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vlastně dokazujeme platnost logicky s ní ekvivalentní formy $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 14: Forma $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá obměna implikace $A \Rightarrow B$.

Tj. nepřímý důkaz implikace = přímý důkaz její obměny.

Příklad. Dokažte matematickou větu:

$$x \in R \Rightarrow \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

(věta 04) Výrokové formy $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ jsou ekvivalentní.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot obou výrokových forem pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot dílčích výroků A, B. □

Na větě 04 je založen typ důkazu 04:

Typ důkazu číslo 4: důkaz ekvivalence $A \leftrightarrow B$.

Při důkazu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ vlastně musíme dokázat, že platí obě z implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Definice 15: Forma $B \Rightarrow A$ se nazývá obrácení implikace $A \Rightarrow B$.[8].

[8]Tedy při důkazu ekvivalence musíme dokázat, že současně platí příslušná implikace i její obrácení.

Příklad: Jako ekvivalenci lze dokazovat například rovnost, ve které vystupují množiny a operace s množinami. Viz příprava.

2.3 Cvičení

O principu vyloučení třetího (buď platí výrok, nebo jeho negace, a je vyloučena třetí možnost) už byla řeč. Nyní ve větě 5 uvedeme jeho důkaz!!!

(věta 05) (princip vyloučení třetího zapsaný jako výroková forma) Pro každý výrok A platí

$$A \vee \neg A.$$

Důkaz: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot lze ukázat, že daná výroková forma má vždy pravdivostní hodnotu 1. $\square$

V rámci cvičení lze dokázat ekvivalence některých výrokových forem, které nám pomohou při sestavování negace implikace a negace ekvivalence – podrobnější negace těchto dvou výrokových forem totiž právě využívá formy jim ekvivalentní.

(věta 06) Forma $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$.

Důkaz: Důkaz typu 1 provedeme pomocí tabulky logických hodnot. $\square$

(věta 06 - důsledek) Forma $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s formou $A \wedge (\neg B)$.

Důkaz: Mohli bychom důkaz provést pomocí tabulky logických pravdivostních hodnot, ale lze také užít větu 06 a větu 02[9]: podle věty 06 je implikace ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$, takže negace implikace musí být ekvivalentní s formou, kterou získáme z $(\neg A) \vee B$ využitím věty 02 (která říká, že negací disjunkce dílčích výroků je konjunkce jejich dílčích negací):

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{v.06}{=} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{v.02}{=} A \wedge \neg B. \ \square$$

Příklad: negace implikace. Uvažujme implikaci „Když bude pršet, vezmu si deštník.“ Její negace je: Bude pršet a nevezmu si deštník.

(věta 07) Forma $\neg(A \Leftrightarrow B)$ je ekvivalentní s formou

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

Důkaz: Mohli bychom provést pomocí tabulky pravdivostních hodnot, ale místo toho provedeme jen přímý důkaz úpravy výrazu na základě vět 01, 04 a 06-důsledek:

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \stackrel{v.04}{=} \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \stackrel{v.01}{=} \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \stackrel{v.06-\text{důsl.}}{=} (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A). \ \square$$

Příklad: negace ekvivalence. Uvažujme ekvivalenci „Číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi.“ Negace tohoto výroku (mimochodem nepravdivá, protože původní výrok je pravdivý) je podle věty 07 celá dlouhá věta:

[9] Vlastně se jedná o přímý důkaz (typ 2) pomocí úpravy výrazu na základě vět 02 a 06.

(Číslo n je dělitelné šesti a současně není dělitelné dvěma i třemi) nebo (číslo n je dělitelné dvěma i třemi a současně není dělitelné šesti).

3 Důkaz sporem, důkaz indukcí, důkaz existence nebo protipříklad

3.1 Warm-up: Axiomy aritmetiky

Definice 16: (matematická) definice je přesné vymezení pojmu, z něhož je patrno, které objekty toto vymezení splňují a které ne (např. bod, úsečka, přímka, kružnice, úhel, rovnoběžka ... to vše jsou pojmy, které musíme jednoznačně definovat v tzv. Euklidovské geometrii).

Definice 17: (matematický) axiom je tvrzení o vlastnostech pojmů či o vztazích mezi pojmy, které se nedokazuje, nýbrž všeobecně přijímá jako pravdivé (např. axiomy Euklidovské geometrie).

Definice 18: (matematická) věta je tvrzení o vlastnostech pojmů či vztazích mezi pojmy, které musíme dokázat pomocí axiomů, definic a vět dokázaných již dříve[10].

Úkol: Na základě stručného seznámení s axiomy Euklidovské geometrie zkuste podobně sestavit několik (cca 5) axiomů počítání s čísly (tzv. axiomy aritmetiky, protože řecky arithmos = číslo). Zadání a feedback viz příprava.

3.2 Přednáška

Na základě věty 05 lze provádět důkazy následujícího typu:

Typ důkazu číslo 5: Důkaz sporem.

Předpokládáme platnost negace daného tvrzení a logicky správně z této negace odvozujeme další úsudky, dokud nedojdeme k nesmyslu, který neplatí. Protože jsme pracovali logicky naprosto správně, tak kořen rozporu je ve startovacím předpokladu – nyní víme, že předpoklad $\neg A$ neplatí, a tedy platí výrok A.

Příklad. Dokažte, že $\log_2 3$ není racionální číslo.

Důkaz: budeme předpokládat negaci zadaného výroku, tj. že $\log_2 3$ je racionální číslo, tj. lze tuto hodnotu vyjádřit zlomkem:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

pro $m \in Z$ a $n \in N$. Zbytek důkazu – viz příprava.

[10]Např.: střed kružnice trojúhelníku vepsané leží na průsečíku os jeho úhlů ... platnost tohoto tvrzení plyne ze vztahu mezi definicí kružnice (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od svého středu) a definicí osy úhlu (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od ramen úhlu). Z těchto dvou definic plyne, že osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, a navíc v tomto bodě musí ležet i střed hledané kružnice. Podrobněji dokazovat nebudeme, daná skutečnost slouží jen jako příklad matematické věty, která nemusí být každému zcela zřejmá a jejíž platnost je dobré podrobněji zdůvodnit na základě definic a axiomů.

Typ důkazu číslo 6: Důkaz matematickou indukcí.

Při matematické indukci dokazujeme tzv. univerzální výrok, který platí většinou pro všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu n_0, tj. výroky typu

$$\forall n \geq n_0 : V(n).$$

Platnost tohoto univerzálního výroku dokazujeme ve dvou krocích:

a) Dokážeme platnost výroku $V(n_0)$.

b) Dokážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Pokud platí obě tyto věci, „dosáhne“ platnost $V(n)$ na jakékoli přirozené číslo n.

Definice 19: Indukční předpoklad se nazývá předpoklad $V(n)$ v implikaci

$$V(n) \Rightarrow V(n+1)$$

v podmínce (b), kterou dokazujeme při indukci.

Poznámka: důkaz indukcí vyplývá ze struktury množiny N:

ad a) jednička je nejmenší přirozené číslo;

ad b) každé další přirozené číslo různé od jedničky získáme zvýšením předchozího přirozeného čísla o jedničku.

Označení 18: | … dělí beze zbytku

Příklad. Dokažte, že

$$\forall n \in N : \quad 9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$$

Typ důkazu číslo 7: Důkaz existence (typ 7A) nebo protipříklad (typ 7B)

7A: Důkaz existence uvedením příkladu či konstrukcí … Uvedeme důkaz toho, že jistá struktura existuje, prostě tak, že ji sestrojíme (popíšeme její konstrukci).

7B: Vyvrácení univerzální platnosti pomocí protipříkladu … tvrzení, že něco existuje či platí v každém případě (např. pro všechna přirozená čísla) jednoduše vyvrátíme tím, že sestavíme aspoň jeden protipříklad, kdy daná skutečnost neplatí (např. najdeme jedno přirozené číslo, které zadanou vlastnost nesplňuje).

Oba typy důkazu označeny číslem 7 mají společné to, že jakmile sestavíme příklad či protipříklad splňující zadané předpoklady, důkaz je hotov. Ad 7B: důkaz typu 7B je založen na skutečnosti, že negací výroku

$$\forall x \in M : \quad V(x)$$

je výrok
$$\exists x_0 \in M: \text{ neplatí } V(x_0).$$

Příklad. Vyvraťte následující tvrzení pomocí protipříkladu: Každé přirozené číslo $n > 1$ lze „zaplatit“ sumou pouze dvoukorunových a pětikorunových mincí předaných v jisté obálce nebo kontejneru.

3.3 Cvičení

4 Množiny a Vennovy diagramy

4.1 Warm-up: Prověrka (a)

Jako dostatečný warm-up studentů ve 4. týdnu semestru poslouží prověrka (a) znalostí na negaci výroků, důkazy typu 1 (o evivalenci výrokových forem), základní matematické vyjadřování pomocí zkráceného zápisu … prověrka teoretických informací prvních tří týdnů semestru.

4.2 Přednáška

Po tématu logiky se nyní budeme krátce zabývat druhým základním pilířem matematiky, a to je pojem množiny a operace sjednocení ($\cup$) a průniku ($\cap$). To jsou pojmy čtenáři známé ze střední školy, nyní jen zopakujme a mírně rozšiřme celou problematiku.

Množinou M (definice 20) rozumíme soubor prvků, o kterých lze jednoznačně rozhodnout, zda do něj patří nebo nepatří.

Prvky množiny budeme vypisovat do složených závorek:

- označení 19: Levá závorka { a pravá závorka } označují množinu.

Například $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu přirozených čísel, čísla 1, 2, 3 jsou prvky množiny N.

Poznámka: Zadávání množiny. Množiny lze zadávat buď výčtem prvků jako v předchozím příkladě, nebo charakteristickou vlastností, jež splňují její prvky.

Příklad. Zadání množiny charakteristickou vlastností:

$$A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$$

(čteme: A je množina všech reálných čísel x takových, že $0 \leq x \leq 2$)[11] – charakteristická vlastnost množiny následuje v tomto zápisu za dvojtečkou. $\star$

Označení operací průniku a sjednocení čtenář zná – v následující definici připomeneme definici disjunktních množin, univerzální množiny a doplňku množiny:

Množiny A, B se nazývají disjunktní (definice 21), když jejich průnikem je prázdná množina ($A \cap B = \emptyset$).

Univerzální množina[12] (definice 22a) je taková množina, která obsahuje všechny prvky, které má smysl uvažovat. Doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině (definice 22b) jsou ty prvky univerzální množiny, které neleží v množině A.

Příklad. Pokud $U = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je univerzální množina a

$$A = \{\ldots, -2, -1 - 0, 1, 2\},$$

tak doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině U je množina

$$\overline{A} = \{3, 4, 5, \ldots\}.$$

Označení, která čtenář musí zvládnout, jsou tedy tato:

[11] Všimněte si, že dvojtečku nyní čteme „takových, že“ nebo „tak, že“.

[12] Česky: všeobecná, všeobsahující.

- označení 20 : $\overline{A}$ … doplněk množiny A (vzhledem k univerzální množině U);
- označení 21 : „:=“ … definiční, přiřazovací rovnítko, které znamená „se definuje jako …“; například lze definovat doplněk množiny A takto:

$$\overline{A} := \{x \in U : x \notin A\}$$

(čteme: doplněk množiny A se definuje jako množina (či označuje množinu) těch prvků x z množiny U, které nepatří do A)

- označení 22 : $\emptyset$ … prázdná množina;
- označení 23 : $\subseteq$ … je podmnožinou;
- označení 24 : $\subset$ … je vlastní podmnožinou, tj. je podmnožinou, ale nerovná se dané množině; v matematických symbolech $A \subset B$ tehdy, když

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B.$$

- (označení 25) rozdíl množin A a B budeme označovat sešikmeným znaménkem minus, aby bylo patrno, že se jedná o jinou operaci než odčítání reálných čísel:

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\};$$

Vennovy diagramy (definice 23) jsou diagramy, které schematicky reprezentují množiny pomocí části roviny – část roviny označená jako M reprezentuje všechny prvky množiny M.

Typ důkazu číslo 8: Rovnost množin Vennovými diagramy.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí Vennových diagramů – sestavíme Vennův diagram pro každou stranu rovnosti a vyšrafujeme v něm části odpovídající výsledkům daných operací; pokud pak v obou Vennových diagramech jsou vyšrafovány stejné části roviny, tvrzení o rovnosti je tím dokázáno.

(Věta 08) Pro libovolné tři množiny platí tzv. asociativní zákony vzhledem k operacím průniku a sjednocení:

$$\text{a)}\ \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad \text{b)}\ \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Důkaz (typ 8) provedeme nakreslením Vennových diagramů a vyšrafováním výsledků operace pro obě strany daných rovností. $\square$

Dále platí velmi zajímavé rovnosti množin, které souvisí také s operací doplňku množiny vzhledem k univerzální množině (viz definice 22):

(věta 09) De Morganovo pravidlo (a): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů. □

(věta 10) De Morganovo pravidlo (b): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů. □

A ještě poslední definice dnes, budeme potřebovat pojem kartézského součinu: (definice 24) Kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$ a současně $b \in B$. Speciálně pokud $A = B$, kartézský součin $A \times A$ nazveme kartézskou mocninou neboli kartézským čtvercem.

- (označení 26) kartézský součin množin A a B budeme označovat jako $A \times B$, tj.

$$A \times B := \{[a; b] : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Příklad. Zde příklad na pojem kartézského součinu.

4.3 Cvičení

5 Číselné obory, dělitelnost celých čísel

5.1 Warm-up: Feedback z písemky, číselné obory

a) Feedback z písemky; b) ve dvojicích:

1. Proč existuje N?
2. Proč existuje Z, nestačilo by N?
3. Proč existuje Q, nestačilo by Z?
4. Proč existuje R, nestačilo by Q?
5. Proč existuje C, nestačilo by R?

5.2 Přednáška

Po logice a množinách je třetí odpovědí na otázku ohledně podstaty matematiky – **používání čísel různého druhu**. V tomto úvodním předmětu pouze zopakujeme základní fakta o číslech reálných a komplexních, protože přirozená čísla, celá čísla a zlomky zná každý student prošlý matirutou ze střední školy.

Označení daných číselných oborů N, Z, Q, R, C už bylo zmíněno v přednášce první, na tomto místě se chvíli věnujme rozdíl mezi množinami Q a R – uvedeme nyní velmi jednoduchý princip, který souvisí s důkazem typu 9, a pak pomocí tohoto principu dokážeme větu 11, která ukazuje na hlavní rozdíl mezi racionálními čísly (= čísly, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku) a iracionálními čísly (která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku).

Typ důkazu číslo 9: Dirichletův princip.

Pokud rozdělujeme $n + 1$ předmětů do n přihrádek, aspoň v jedné přihrádce najdeme po rozdělení aspoň dva předměty.

Platnost Dirichletova principu[13] je vidět „přirozeně“ = celkem s ní každý souhlasí. V tom nejhorším případě se může totiž stát, že po rozdělení n předmětů je v každé z n přihrádek jeden – ale ten poslední „n plus první“ předmět, už musíme tedy přidat do nějaké přihrádky, kde nějaký jeden předmět je ... tedy v aspoň jedné přihrádce budou po rozdělení aspoň dva předměty. Samozřejmě se může stát, že pokud předměty rozdělujeme libovolně, nikoli rovnoměrně, po rozdělení budou dva nebo tří předměty v pěti přihrádkách a řada dalších přihrádek bude prázdná – to je možné. Nás ale jen zajímá, že určitě existuje jedna přihrádka (šuplík) obsahující aspoň dva předměty – tento fakt je zaručen tím, že předmětů je více než přihrádek.

Tento velmi jednoduchý typ důkazu lze kupodivu použít při důkazu celkem důležité věty, která vystihuje rozdíl mezi číslem racionálním a číslem iracionálním.

(věta 11) Každé racionální číslo má desetinný rozvoj buď konečný, nebo periodický.

[13] Též: přihrádkový princip, anglicky – pigeonhole principle.

Důkaz: Uvažujme nejprve konkrétní zlomek $\frac{1}{7}$ jako vyjádření jednoho racionálního čísla a nalezněme jeho desetinný rozvoj, tj. vyjádření ve tvaru s desetinnou čárkou – všechny úvhy pak lze vztáhnout na obecné racionální číslo $\frac{m}{n}$.

Při dělení $1 : 7$ postupujeme následovně:

- $1 : 7 = 0$, zbytek 1, napíšeme desetinnou čárku do výsledku a připíšeme nulu;
- $10 : 7 = 1$, zbytek 3, ke zbytku připíšeme nulu;
- $30 : 7 = 4$, zbytek 2, ke zbytku připíšeme nulu;
- $20 : 7 = 2$, zbytek 6, let us put down another zero to the remainder;
- $60 : 7 = 8$, the remainder is 4, let us put down another zero to the remainder;
- $40 : 7 = 5$, the remainder is 5, let us put down another zero digit to the remainder;
- $50 : 7 = 7$, the remainder is 1, let us put down another zero digit to the remainder;
- Od této chvíle dělíme $10 : 7 = 1$, zbytek 3 … ale to už tady jednou bylo, zbytky i výsledky po dělení se začínají periodicky opakovat. Proč tomu tak je?

Rozeberme si tuto situaci: Při dělení sedmi se po určité době dělenec „vyčerpá“ v tom smyslu, že neobsahuje žádné další cifry a přidáváme ke zbytku v nižších řádech pouze nuly[14]. Jediný rozdíl v dělencích po „vyčerpání“ dělence v tomto smyslu tedy představují zbytky po dělení sedmi.

Víme, že zbytků po dělení sedmi je sedm různých – jsou to čísla (a současně cifry) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A nyní využijeme Dirichletův (přihrádkový) princip: Stačí provést osm kroků částečného dělení po „vyčerpání“ dělence a protože možných zbytků po dělení sedmi je pouze sedm, jeden zbytek se po daných osmi krocích zopakuje dvakrát – a po zopakování daného zbytku se už periodicky opakují všechny další zbytky, takže desetinný rozvoj našeho čísla je nekonečný, ale periodický.

Přesněji řečeno, pokud některý z dílčích zbytků je roven nule, v dělení už nepokračujeme a desetinný rozvoj takového zlomku je konečný. Tedy obecně lze říci, že při dělení $m : n$ po „vyčerpání“ dělence m (který má konečně mnoho cifer, a tak se vyčerpat někdy musí) stačí provést maximálně $n + 1$ kroků a dostaneme dílčí zbytek nula (tj. desetinný rozvoj daného racionálního čísla je konečný, ukončený), nebo se některý z nenulových zbytků zopakuje (a tedy desetinný rozvoj daného čísla je nekonečný periodický). $\square$

Poznámka: Komplexní čísla

Ke komplexním číslům[15] nyní velmi stručně, snad podle materiálu [1], str. 15,16,18:

Důvodem existence komplexních čísel je snaha najít řešení například rovnice

$$x^2 + 1 = 0,$$

která má záporný diskriminant. Z Tohoto důvodu se v matematice zavádí tzv. (označení 27) imaginární jednotka i taková, že $i^2 = -1$, a také $(-i)^2 = -1$. Pak

[14] Nám se dělenec v našem příkladu dělení vyčerpal už po prvním kroku, protože byl jednociferný.

[15] Detailnějšího počítání s komplexními čísly se dotkneme v předmětech Algebra 1 a Algebra 3.

můžeme říci, že řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ jsou i a $-i$.

Definice 25: Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v algebraickém tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka.

Díky tomu, že každé komplexní číslo je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel $[a, b]$, lze každé komplexní číslo znázornit v tzv. Gaussově rovině (definice 26), kde na vodorovnou osu vyneseme reálné číslo a, na svislou osu reálné číslo b a obraz komplexního čísla $z = a + bi$ je pak na průsečíků kolmic k osám procházejících body a a b[16].

Na základě modelu komplexních čísel v Gaussově rovině lze definovat (definice 27a) pro $z \neq 0$ tzv. argument komplexního čísla z jako úhel, který svírá průvodič obrazu tohoto čísla v Gaussově rovině s kladným směrem osy $Re(z)$ (= vodorovné osy[17], na kterou vynášíme tzv. reálnou část a komplexního čísla $z = a + bi$), a (definice 27b) absolutní hodnotu neboli velikost komplexního čísla $|z|$ jako vzdálenost jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku (= jako délku tohoto průvodiče), tj.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

na základě pravoúhlého trojúhelníku, který je vytvořen úseky a, b na osách a bodem z v Gaussově rovině. A konečně, pokud máme definován trojůhelník a úhel, lze zavést tzv. (definice 27c) goniometrický tvar komplexního čísla z, jenž využívá délky přepony $|z|$ v daném trojúhelníku a argumentu φ daného komplexního čísla z:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

Poznámka: dělení celých čísel beze zbytku a se zbytkem

Definice 28: Celé číslo a beze zbytku dělí neboli je dělitelem celého čísla b, když existuje celé číslo q tak, že platí $b = a \cdot q$. Pokud číslo q s touto vlastností neexistuje, říkáme, že a nedělí (není dělitelem čísla) b.

Studenti pozor, dělitelnost známou ze střední školy jsme trochu rozšířili i na záporné dělitele, a tím se počet dělitelů každého celého čísla zdvojnásobil – kromě kladného znaménka existují i dělitelé se stejnou absolutní hodnotou, jen se jedná o záporná čísla.

Definice 29: Každé celé číslo b má vždy následující čtyři dělitele: 1, -1, b, $-b$ … tito dělitelé se nazývají nevlastní dělitelé čísla b. Všichni ostatní dělitelé (pokud nějací existují) se nazývají vlastní dělitelé čísla b. S tím souvisí další pojem – definice 30 – celé číslo p se nazývá prvočíslo, pokud má pouze nevlastní dělitele; pokud má i vlastní dělitele, nazývá se složené číslo.

[16] Díky geometrickému modelu komplexních čísel lze celou analytickou geometrii v rovině popsat pomocí komplexních čísel, což je další zajímavé využití kompexních čísel, používané např. v elektrotechnice.

[17] Podobně $Im(z)$ označuje svislou osu, na kterou vynášíme tzv. imaginární část komplexního čísla z.

(Věta 12) - věta o dělení se zbytkem

Pro libovlná celá čísla $a > 0$, $b \geq 0$ existuje dvojice celých čísel q, r takových[18], že $q \geq 0$, dále $0 \leq r < a$, a platí
$$b = a \cdot q + r.$$
Důkaz tohoto tvrzení je příkladem důkazu indukcí (typu 6), proto jej provedeme[19]:

Dokažme indukcí pro pevné a a měnící se b:

a)

$$\begin{array}{lcll} b=0 & \Rightarrow & 0 = a\cdot 0+0, & \text{tj. } q=0,\ \ r=0 \\ b=1 & \Rightarrow & 1 = a\cdot 0+1, & \text{tj. } q=0,\ \ r=1 \\ b=2 & \Rightarrow & 2 = a\cdot 0+2, & \text{tj. } q=0,\ \ r=2 \\ & & & \qquad\qquad\ldots \\ b=a & \Rightarrow & a = a\cdot 1+0, & \text{tj. } q=1,\ \ r=0 \end{array}$$

b) Pokusme se nyní dokázat obecný krok, tj. implikaci[20]

$$V(b) \quad\Rightarrow\quad V(b+1).$$

Předpokládejme, že platí $V(b)$, tj. existují q_b, r_b tak, že

$$b = a \cdot q_b + r_b.$$

Pak
$$b + 1 = a \cdot q_b + r_b + 1$$
a mohou nastat dvě situace: buď $r_b + 1 < a$, a pak hledané q_{b+1}, r_{b+1} existují ve tvaru $q_{b+1} = q_b$, $r_{b+1} = r_b + 1$; nebo (při druhé možné situaci) $r_b + 1 = a$, a pak

$$b + 1 = a \cdot q_b + a = a \cdot (q_b + 1)$$

a hledané hodnoty jsou $q_{b+1} = q_b + 1$, $r_{b+1} = 0$. Tedy platí i $V(b + 1)$, našli jsme podíl i zbytek pro dělení čísel $(b + 1)$ a a.

5.3 Cvičení

[18] Označení pramení z anglického quotient = podíl, remainder = zbytek.

[19] Tvrzení se zdá celkem zřejmé, ale musíme provést buď existenční důkaz (typ 7 … že daný podíl a zbytek sestrojíme pro jakoukoli dvojici a, b … viz [1], věta 4.2 na str. 23), nebo tvrzení univerzálně dokázat indukcí pro nekonečně mnoho dvojic (typ 6 … viz [15], str.13) – tuto druhou variantu si nyní projdeme. Důkaz je zkrácen díky nápadu Jana Pokorného.

[20] Označení: $V(b)$ … tvrzení platí pro b.

6 Binární relace

6.1 Warm-up: kniha 05

a) kniha 05 – soutěž Matematický klokan pro ZŠ, pozvání na seminář v den této přednášky; b) druhý warm-up bude proveden během přednášky, studenti dostanou zadaný úkol najít relace jistého typu.

6.2 Přednáška

V této kapitole vyjdeme z definice kartézského součinu (definice 24) a definujeme pojem relace, který vychází z latinsko-anglického relation = příbuznost, vztah. V matematice je těchto příbuzností celá řada, a to mezi prvky různých struktur. Relacemi jsou například

- $\leq$, $\geq$;
- $|$ (dělí = je dělitelem);
- $\subseteq$, $\supseteq$;
- a další.

Definice 31: relace na množině M je nějaká podmnožina kartézského součinu $M \times M$. Prvky relace jsou tedy uspořádané dvojice $[x, y]$, ve kterých záleží na pořadí.

Poznámka: Rozdíl mezi relacemi a operacemi

Hlavní rozdíl mezi relacemi a operacemi: výsledkem operace $*$ (za hvězdičku si dosaďte např. sčítání, násobení, průnik, apod) mezi dvěma prvky a, b je obecně nějaký třetí prvek $a * b$, kdežto relace např. $\leq$ jen uvádí do vztahu dané dva prvky a, b, když $a \leq b$ (odtud i název, který vychází z anglického relation = vztah).

Poznámka: Zadávání relace

Relaci[21] lze podle definice zadat jako množinu uspořádaných dvojic (ve kterých záleží na pořadí prvků), například

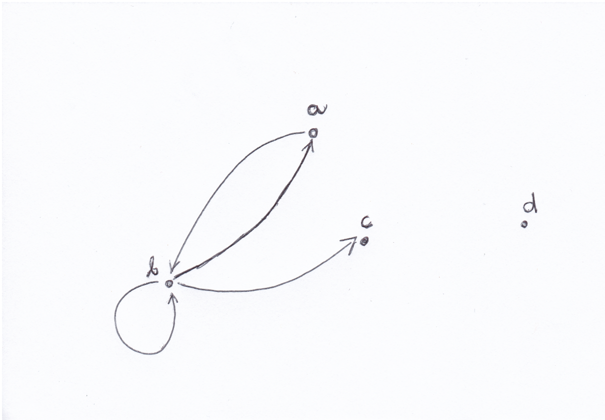
$$\rho = \{[a, b], [b, a], [b, c], [b, b]\};$$

ve shodě s učebním textem [16], str.17, budeme též relaci vypisovat takovým stylem, že označení relace bude umístěno v zápise mezi danými prvky (podobně jako $\leq$ je napsáno mezi prvky a a b, tj. v našem příkladu tatáž relace bude zapsaná i vztahy

$$a\rho b,\ b\rho a,\ b\rho c,\ b\rho b.$$

Každou relaci na konečné množině můžeme též reprezentovat grafem, kde prvek $[a, b]$ znázorníme šipkou vycházející z a a směřující do b, prvek $[b, b]$ znázorníme smyčkou z b do b, atd.:

[21] Podle [1], str. 41-42, s tím rozdílem, že uspořádané dvojice budeme znázorňovat nikoli v kulatých závorkách, ale ve hranatých – kulaté závorky si šetříme pro výpis souřadnic vektorů v předmětu Algebra 2. Dále některé učebnice uvádějí relace označené písmenem R, i když to koliduje s označením množiny reálných čísel. Je třeba proto označení R věnovat pozornost – ale snad ze souvislostí bude vždy jasné, zda se jedná o množinu reálných čísel nebo množinu uspořádaných dvojic.



Obrázek 1: Grafová reprezentace relace ρ – příklad.

Další způsob, jak lze reprezentovat relaci ρ, je matice relace (pro tentýž příklad):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(na průsečíku prvního řádku (= řádku prvku a) a druhého sloupce (= sloupce prvku b) matice je hodnota 1, protože uspořádaná dvojice $[a, b]$ je prvkem relace ρ; dále na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce matice je 1, protože smyčka $[b, b]$ je prvkem relace ρ; na třetím a čtvrtém řádku matice jsou samé nuly, protože c ani d není první souřadnicí žádné uspořádané dvojice z ρ, atd. Čtyřem šipkám v grafové reprezentaci odpovídají čtyři hodnoty 1 v matici relace.

Příklad 6.1 (vyučující – studenti) V následujících definicích řekněte,

(i) jak lze danou vlastnost poznat z grafové reprezentace relace (a z reprezentace maticí);

(ii) jak musíme změnit výše obrázkem zadanou relaci, aby splňovala danou vlastnost. $\star$[22]

U pojmu relace budeme studovat určité další definované vlastnosti a rysy. Z historických důvodů psaní tohoto textu (a označení na obrázcích dříve skenovaných) bych rád studenty požádal, aby přijali číslování (11) až (20) těchto vlastností, i když ještě neznají vlastnosti označené (1) až (10) ... ty se dozvíte až během 2.semestru[23].

[22]Příklady číslované ikonou tužky mají své odpovědi v poslední kapitole tohoto textu – očekává se ovšem, že studenti vyvinou patřičné úsilí o řešení dříve, než si zkontrolují řešení, popřípadě se nebudou na řešení dívat, pokud mají daný příklad řešit ve výuce.

[23]Dále bych čtenáře tohoto textu rád požádal, aby si čísla vlastností (1) až (20) pokud možno zapamatoval, protože v dalším se text bude na vlastnost odkazovat jejím číslem, nikoli výpisem vlastnosti – svým způsobem by to mělo přispět k lepší orientaci mezi různými vlastnostmi a k lepšímu zapamatování. Jou to jediná čísla, která si máte pamatovat – žádná další čísla vět, definic, typů důkazu nejsou důležitá. Vlastnosti (1) až (20) budou podbarvena zeleně, podobně jako definice – jedná se o definice – ale nebudeme je do číslování definic zahrnovat.

Relace ρ na množině M se nazývá

reflexivní, když $\forall x \in M \ : x\rho x$ (vlastnost (11));

antireflexivní, když $\forall x \in M \ : \neg(x\rho x)$; (vlastnost (anti-11)),

symetrická, když $\forall x, y \in M \ : x\rho y \Rightarrow y\rho x$; (vlastnost (12));

antisymetrická, když $\forall x, y \in M \ : (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$; (vlastnost (anti-12)),

tranzitivní, když $\forall x, y, z \in M \ : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$; (vlastnost (13));

úplná, když $\forall x, y \in M \ : x\rho y \vee y\rho x$; (vlastnost (14));

Poznámka: k úplné relaci. Z definice úplné relace je vidět, že úplná relace je automaticky reflexivní (tj. pro $x = y$ plyne, že $x\rho x$. Někdy se úplná relace definuje na základě podmínky, která platí jen pro navzájem různé prvky, tj. zhruba jako

$$\forall x, y \in M \ : x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x;$$

my se ovšem budeme držet té definice úplné relace, která zahrnuje i reflexivitu. Tato rozdílnost v definici zpravidla nehraje roli, protože většina relací, které jsou zajímavé pro naše studium a používané v praxi, jsou úplné a současně reflexivní.

Příklad 6.2 (v trojicích, jen studenti) Vezměte si stránku A4 a rozdělte na osm částí. V každé části nakreslete pět bodů znázorňujících pětiprvkovou množinu, označte je a, b, c, d, e. Do množiny šipkami znázorněte relaci, která

1. je reflexivní,
2. je antireflexivní,
3. není ani reflexivní, ani antireflexivní,
4. je symetrická,
5. je antisymetrická,
6. není ani symetrická, ani antisymetrická,
7. je tranzitivní,

8. není tranzitivní.

Příklad 6.3 (v trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace | (dělí, je dělitelem) na množině$(Z,\cdot)$? Relaci | definujeme normálně, jak bychom u dělitelnosti čekali:

$$\forall x, y \in Z: \quad x|y \Leftrightarrow (\exists p \in Z : y = x \cdot p)$$

Příklad 6.4 (vyučující – studenti) Jen dvě otázky, než pokročíme k vážnějším příkladům:

- Může být některá relace symetrická a antisymetrická současně? $\star$

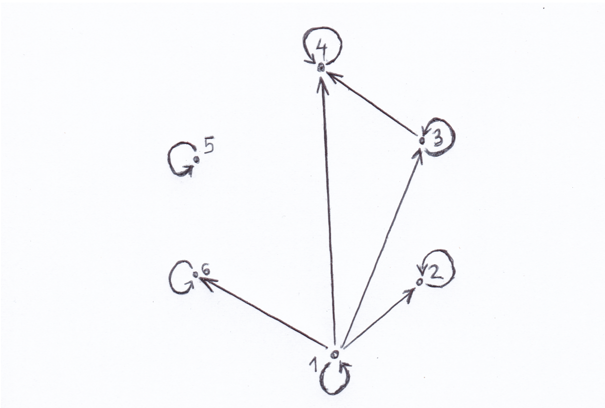
A nyní už zajímavější příklady:

Příklad 6.5 (v trojicích, jen studenti) U následujících příkladů rozhodněte, jaké vlastnosti splňují zadané relace:

a) Relace $\leq$ na množině $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

b) relace $\|$ (být rovnoběžný) na množině přímek v rovině;

c) Relace je zadána grafovou reprezentací[24] na obrázku 2:



Obrázek 2:

d) Zadání opět grafem[25], obrázek 3:

Definice 32: Inverzní relace ρ^{-1} k relaci ρ je taková relace, která obsahuje právě ty uspořádané dvojice, které byly utvořeny z prvků relace ρ přehozením pořadí prvků[26].

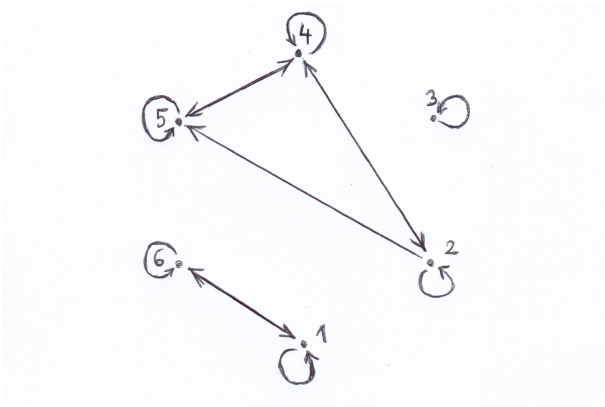
Tedy platí

$$\rho^{-1} = \{[y, x] \in M \times M \quad : \quad [x, y] \in \rho\}.$$

[24] [16], str.20, obr. 2a

[25] [16], str.20, obr. 2b.

[26] Ještě lze také definovat skládání relací, např. [1], str. 42, ale vzhledem k tomu, že při operaci skládání relací zapisujeme obvykle prvky v opačném pořadí než skládání zobrazení, není nutné studenty tímto pojmem mást – bude rozumné znak $\circ$ používat jen pro jeden typ operace, a sice skládání zobrazení v kapitole o zobrazení. Pojem skládání relací navrhuji neprocvičovat.



Obrázek 3:

Příklad. inverzní relace … př. z definice relace v přednášce (v inverzní relaci se všechny šipky grafové reprezentace otočí opačným směrem, v maticové reprezentaci se matice transponuje podle hlavní diagonály, tj. řádky maticové reprezentace relace ρ se napíší do sloupců maticové reprezentace relace ρ^{-1}).

6.3 Cvičení

Jádrem by mohly být příklady B1 (tento příklad obsahuje inverzní relaci), B2, B6, B8, B9, B10, B11 na stranách 48-49 sbírky [14].

Další příklad: nakreslete všechny relace (v grafové reprezentaci) na a) jednoprvkové možině, b) na dvouprvkové množině, c) na tříprvkové množině; d) pokuste se vyslovit větu o počtu všech relací na $n-$prvkové množině.

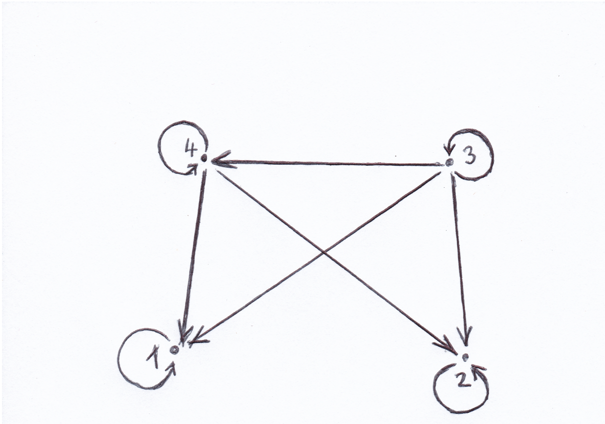
7 Uspořádané množiny

7.1 Warm-up: učebnice matematiky pro 6.-9. třídy ZŠ

Čtyři série učebnic. Info o první knize první série (Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša).

7.2 Přednáška

Příklad 7.1. (ve trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace na obrázku[27] číslo 4?



Obrázek 4:

Relace podobného typu, jako je ta na obrázku, jsou v matematice natolik důležité, že mají své jméno a budeme se jim věnovat téměř dva týdny naší exkurze po základních pojmech matematiky.

Definice 33: Binární relace na množině P, která je reflexivní (11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13), se nazývá uspořádání. Množina P, na které je definovaná relace uspořádání, se nazývá částečně uspořádaná množina – v textu [16][28] je označována poněkud nezvyklým termínem poset (z anglického Partially Ordered SET)[29].

Poznámka: obecné označení relace uspořádání.

Ikdyž relace uspořádání je blízká relaci $\leq$ (respektive $\leq$ je čtenáři známým příkladem uspořádání), budeme ji označovat (v souladu s textem [16]) obecnějším symbolem $\trianglelefteq$, který zaručuje, že se ne vždy bude jednat o relaci zcela totožnou s klasickou relací $\leq$ na množině celých či reálných čísel. Obecnou uspořádanou množinu budeme tedy zapisovat zápisem $(P, \trianglelefteq)$.

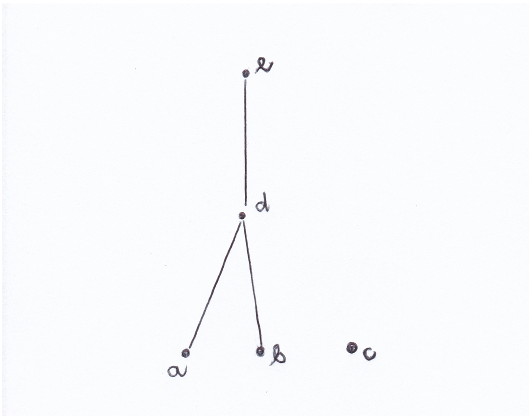
[27] [16], str.24.
[28] Str.23, definice 1.6.
[29] Je to skutečně neobvyklý termín pro češtinu, až extrémní – ale navrhuji jej autorovi, panu Kopkovi, odpustit, určitě jej použil s dobrým záměrem, aby studenti a vyučující nemuseli stále vypisovat dlouhý termín **částečně uspořádaná množina**.

Definice 34: Pro relaci uspořádání zavádíme kromě grafové reprezentace přehlednější strukturu, a sice tzv. Hasseovy diagramy, ve kterých

1. reflexivitu (= smyčky) nevyznačujeme, protože ji automaticky předpokládáme u všech prvků uspořádané množiny;
2. šipky odstraníme tak, že Hasseův diagram jednoznačně orientujeme zdola nahoru, a pak místo šipek spojujeme prvky neorientovanou úsečkou – jestliže prvek je spojen s jiným prvkem výš v diagramu, tak je s ním v relaci;
3. hranami vyznačíme jen bezprostředně následující prvky – ostatní šipky vyplývající z tranzitivity nevykreslujeme; pak pokud $x \trianglelefteq y$, tak je mezi prvky x a y řetězec spojů mezi bezprostředními předchůdci a následovníky;
4. antisymetrie bude z nákresů patrna též – ta ovšem spočívá spíše v neexistenci oboustranných šipek mezi různými prvky (a právě díky neexistenci oboustranných šipek můžeme orientaci šipek z částečně uspořádané množiny odstranit).

Příklad ilustrační – Hasseův diagram. Pro ilustraci je na obrázku 5 nakreslen Hasseův diagram pro pětiprvkovou množinu $P = \{a, b, c, d, e\}$ a relaci ρ na P definovanou výčtem uspořádaných dvojic:

$$\rho = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [a, d], [d, e], [a, e], [b, d], [d, e], [b, e]\}.$$



Obrázek 5: Hasseův diagram relace uspořádání.

Příklad ilustrační – Hasseův diagram: Překreslete relaci uspořádání z úvodního příkladu této kapitoly (obr. 4) do Hasseova diagramu (zde není provedeno).

Příklad 7.2. (úkol pro studenty) Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) tříprvkových posetů[30].

Označení 28: Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, označme symbolem $\triangleleft$ relaci ostré uspořádání na množině P, pokud $\triangleleft$ je antireflexivní (anti-11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní

[30] Jedno prvkový poset je až na přeznačení jeden, dvouprvkové posety jsou dva.

(13) (ostré uspořádání je tedy uspořádání zbavené reflexivity, nemůže nastat $x \lhd x$ pro žádný prvek x)[31];

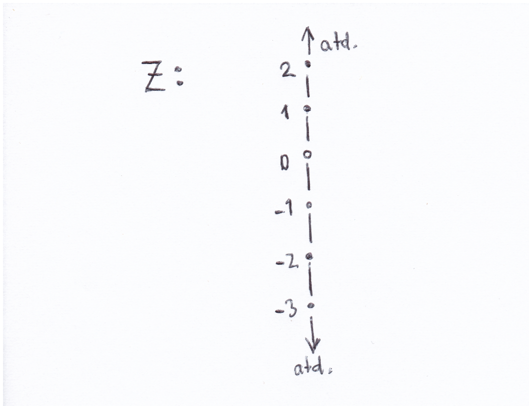
Označení 29: Symbolem $\prec$ budeme označovat relaci bezprostředího předchůdce v množině P, když $\forall x, y \in P$:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (x \lhd y \wedge \nexists\, a \in P : x \lhd a \lhd y)$$

(jinými slovy, mezi x, y už nelze vložit další prvek a různý od y). Říkáme, že prvek x bezprostředně předchází prvku y (nebo že prvek y bezprostředně následuje za prvkem x)[32].

Definice 35: $(P, \unlhd)$ je úplně uspořádaná množina = řetězec = lineárně uspořádaná množina[33], pokud $\unlhd$ je uspořádání a současně úplná relace, tj. pokud pro ni platí vlastnosti (11), (anti-12), (13), (14). (anglicky: coset = Completely Ordered SET = úplně uspořádaná množina)

Příklad ilustrační – coset. Na obrázku 6 vidíte příklad jednoho cosetu = úplně uspořádané množiny – je jím nekonečná množina Z.



Obrázek 6: Množina Z je coset = řetězec = úplně uspořádaná množina.

Označení 30: Symbolem $\unrhd$ označujeme relaci inverzní k relaci $\unlhd$.

Věta 13:

$$(P, \unlhd) \text{ je poset } \Rightarrow (P, \unrhd) \text{ je také poset.}$$

[31] Toto označení běžně používáme u reálných čísel: symbol $\leq$ označuje uspořádání, symbol $<$ pak ostré uspořádání.

[32] Pomocí ostrého uspořádání $\lhd$ a relace bezprostředního předchůdce $\prec$ lze lépe popsat konstrukci Hasseových diagramů: vyznačujeme v nich hranami pouze relaci bezprostředního předchůdce ([16], str.30, lemma 4). Pro konečný poset $(P, \unlhd)$ a jeho prvky $a, b \in P$ tedy platí: $a \lhd b$ (ostře menší než) znamená, že v množině P existuje řetězec bezprostředních následovníků $a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n = b$.

[33] Tj. všechny prvky jsou pospojovány v jedné linii, v jednom řetězci. Tato tři označení se bohužel používají v různé literatuře, tj. názvosloví zde není jednotné. Zcela postačí termín „úplně uspořádaná“ z definice úplné relace, někteří jej považují za málo názorný a používají termín „lineárně uspořádaná“, a termín „řetězec“ je také historicky známý i názorný.

Důkaz: (typ 2 – přímý důkaz, na základě definic pojmů, které se ve větě vyskytují) Vlastně stačí dokázat (ukázat), že relace $\trianglerighteq$ je uspořádání, tj. dokázat pro ni vlastnosti (11), (anti-12), (13).

ad (11) … reflexivita se zachová z původního uspořádání $\trianglelefteq$ … „inverzním prvkem" ke smyčce je zase smyčka, mluvíme-li terminologií grafové reprezentace relace.

ad (anti-12) a (13) … antisymetrie (anti-12) a tranzitivita (13) relace $\trianglerighteq$ plynou z toho, že všechny šipky jsou přesměrovány v opačném směru vzhledem k původní relaci $\trianglelefteq$, která antisymetrická a tranzitivní je – a pouhým přesměrováním všech šipek v grafové reprezentaci relace se antisymetrie ani tranzitivita neporuší. $\square$

Označení 31: Symbolem $\triangleright$ označujeme relaci inverzní k relaci $\triangleleft$[34].

Je zajímavé si uvědomit, že pokud máme k dispozici Hasseův diagram relace $\trianglelefteq$ nebo $\triangleleft$, příslušný Hasseův diagram relace inverzní získáme otočením původního Hasseova diagramu o 180 stupňů, tj. směr „nahoru" se stane směrem „dolů". Někdy[35] se uspořádání $\trianglerighteq$ nazývá duální uspořádání k uspořádání $\trianglelefteq$, nikoli inverzní uspořádání.

Význačné prvky posetu:

Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, $M \neq \emptyset$ je podmnožina množiny P, tak prvek $a \in M$ nazveme

a) (definice 36) nejmenší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M: \quad a \trianglelefteq x;$$

b) (definice 37) minimální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M: \quad x \triangleleft a;$$

c) (definice 38) největší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M: \quad a \trianglerighteq x;$$

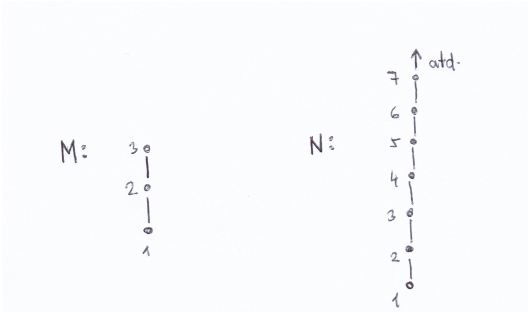
d) (definice 39) maximální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M: \quad x \triangleright a.$$

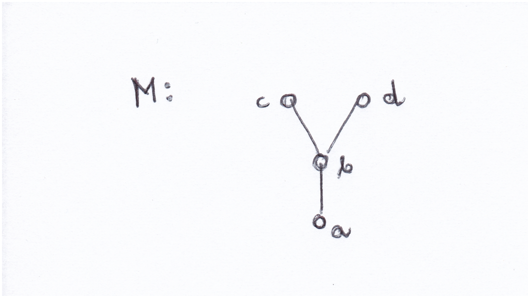
Příklad ilustrační. Ad obrázek 7: V tříprvkové množině M s uspořádáním zadaným v Hasseově diagramu je 1 prvek minimální a nejmenší současně, a dále 3 je prvek maximální a největší současně. V množině N s klasickým uspořádáním $\leq$ je nejmenší prvek 1 a číslo 1 je též minimální prvek. Největší prvek množiny N neexistuje.

Dále na obrázku 8 je množina M, ve které a je minimální i nejmenší prvek současně. Na druhé straně, největší prvek tato množina nemá – má pouze dva maximální prvky c, d.

[34] Označení 30,31 jsou běžná na množině reálných čísel ve tvaru označení $\geq$, respektive $>$.
[35] Viz [16].



Obrázek 7: Dvě dobře uspořádané množiny = wosety.



Obrázek 8: Rozdíl mezi maximálním a největším prvkem.

Tj. maximální prvek množiny M je takový, „nad kterým“ už není v této množině žádný prvek. Na druhé straně největší prvek musí být srovnatelný (= v relaci) se všemi prvky množiny M a musí být větší nebo roven než libovolný z nich. $\star$

Pro pořádek ještě zmiňme příbuznou definici dobře uspořádané množiny. Než se k ní dostaneme, definujeme vlastnost (15):

V posetu $(P, \trianglelefteq)$ je splněna vlastnost (15), když každá jeho neprázdná podmnožina M obsahuje svůj nejmenší prvek, tj. platí

$(P, \lhd)$ je poset a $\forall M \neq \emptyset,\ M \subseteq P:\ M$ má nejmenší prvek. (vlastnost (15)).

Věta 14: V posetu platí:

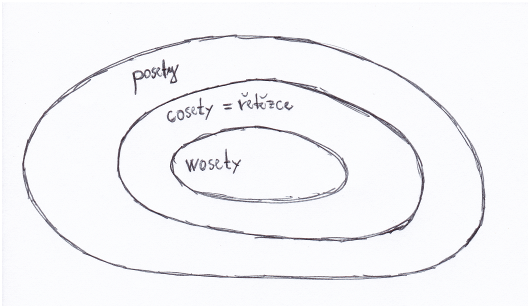
$$(15) \Rightarrow (14).$$

<u>Důkaz:</u> (typu 2 – přímý důkaz na základě vlastnosti (15) a definice nejmenšího prvku) Vlastnost (15), jejíž platnost předpokládáme na daném posetu, tvrdí, že každá dvouprvková podmnožina $\{a, b\}$ posetu musí mít nejmenší prvek. Pokud je tím nejmenším prvkem a, tak platí $a \trianglelefteq b$, pokud je jím b, tak $b \trianglelefteq a$. Jedna z těchto dvou možností musí nastat, tj. prvky a, b jsou srovnatelné, platí (14). $\square$

Definice 40: Poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá <u>dobře uspořádaná množina</u> (woset … z anglického Well Ordered SET), když splňuje vlastnosti (14)[36] a (15).

[36]Vlastnost (14) je do definice doplněna pro ignoranty, kteří nečetli předchozí větu – běžně se v definici wosetu uvádí jen (15), protože vlastnost (14) vyplývá z vlastnosti (15).

Jaký je tedy rozdíl mezi wosetem a cosetem? V cosetu nemusí mít některé podmnožiny (např. ani celá daná množina samotná) nejmenší prvek, kdežto ve wosetu ano. Tedy M a N z obrázku 7 jsou dobře uspořádané množiny (wosety), kdežto Z z obrázku 6 ne, protože samotná množina Z nemá nejmenší prvek.



Obrázek 9: Vztah mezi danými pojmy poset, coset, woset.

Na obr. 9 vidíme vztah mezi danými třemi pojmy: jen některé velmi hezké řetězce jsou wosety, všechny řetězce jsou cosety (to je ekvivalentní označení), a nejvíce je posetů, protože to jsou mnohem obecnější struktury, které mohou obsahovat i dvojice navzájem nesrovnatelných prvků. Tento vztah je zřejmý, když si uvědomíme definice těchto pojmů vyjádřené pomocí našich vlastností číslovaných speciálními čísly[37]:

- poset splňuje (11), (anti-12), (13);
- coset splňuje (11), (anti-12), (13), (14);
- woset splňuje (11), (anti-12), (13), (14), (15)[38].

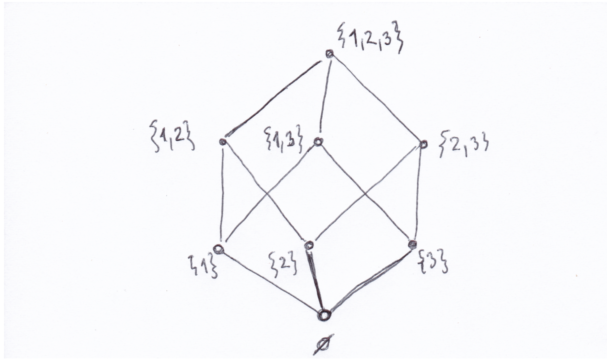
Označení 32: Symbol 2^A označuje množinu všech podmnožin množiny A. Například množina $A = \{1, 2, 3\}$ má osm podmnožin: prázdnou množinu, tři jednoprvkové podmnožiny, tři dvouprvkové podmnožiny a osmou podmnožinou je množina A samotná. Označení má svou logiku: pokud A má n prvků, jejích všech možných podmnožin existuje 2^n.

Dva důležité příklady posetů.

a) Relace $\subseteq$ na množině 2^P všech možných podmnožin množiny $P = \{1, 2, 3\}$ je poset, jeho Hasseův diagram je na obrázku 10:

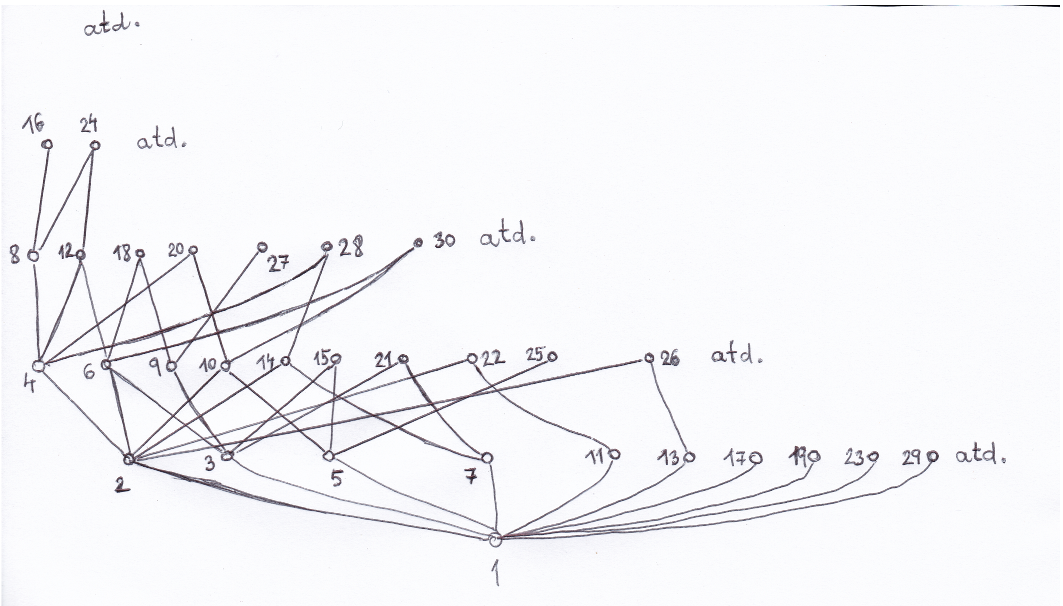
[37] Je vidět, že struktur, které splňují více vlastností (nějakou další vlastnost ve srovnání se strukturami předchozího typu), je méně – kdyby tomu tak nebylo, nemuseli bychom nový pojem zavádět, protože by popisoval přesně stejnou kategorii struktur jako pojem předchozí. Někdy se ovšem stane, jak je vidět u ekvivalentních pojmů řetězec – lineární poset – úplný poset, že existují v různé literatuře různé pojmy, nebo se definují různé pojmy, o kterých matematika později dokáže, že se jedná o totéž.

[38] Vlastnost (15) není už tak jednoduchá sama o sobě, protože má v sobě „zabaleny“ všechny předchozí vlastnosti (11), (anti-12), (13), (14) (vlastnost (15) je definována jen pro posety, tj. skrývá v sobě i platnost (11), (anti-12), (13); dále vlastnost (14) plyne z (15), jak už bylo řečeno). Ale pojem wosetu (15) hraje důležitou roli v předmětu Teorie množin ve 4. ročníku, proto byl zmíněn už nyní a porovnán s předchozími pojmy.



Obrázek 10: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3\}$.

b) Na množině N definujme uspořádání pomocí dělitelnosti, tj. $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow a|b$. Pak $(N, \trianglelefteq)$ je poset, který má nekonečně mnoho prvků. Na obrázku 11 je nakreslena jen jeho dolní část:



Obrázek 11: Poset $(N, |)$.

Ze struktury dělitelů vidíme, že např. číslo 24 má dělitele 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 a 24).

Příklad – úkol pro studenty. Nakreslete Hasseovský diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 60 vzhledem k relaci $|$.

Podívejme se nyní na další význačné prvky v posetech:

Když $(P, \trianglelefteq)$ je poset a M je nějaká neprázdná podmnožina množiny P, nazýváme prvek $a \in P$ (pokud takový prvek existuje):

- (definice 41) dolní závora množiny M, pokud $a \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M$;

- (definice 42) infimum množiny M (označujeme $\inf M$), pokud je největším prvkem na množině všech dolních závor množiny M; tj. a je infimum, pokud pro všechny další dolní závory d platí
$$d \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow d \trianglelefteq a;$$
- (definice 43) horní závora množiny M, pokud $a \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M$;
- (definice 44) supremum množiny M (označujeme $\sup M$), pokud je nejmenším prvkem na množině všech horních závor množiny M. Tj. a je supremum, pokud pro všechny další holní závory h platí
$$h \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow h \trianglelefteq a;$$

Nejdůležitějším postřehem k předchozím definicím je asi to, že závory nebo infima-suprema množiny M nemusí samy být prvky množiny M!! Obecně závora, infimum či supremum je prvek množiny P, který může a nemusí ležet v dané množině M.

Příklad ilustrační.

a) Například v posetu přirozených čísel s uspořádáním zadaným dělitelností těchto čísel (obr. 11) uvažujme množinu $M = \{12, 8, 20\}$. Dolní závorou množiny M jsou čísla 1, 2, 4 (společní dělitelé prvků v množině M), a tedy infimem je číslo 4 jako největší z těchto prvků (tj. infimem v $(N, |)$ je největší společný dělitel prvků v množině M.

Analogicky horní závorou množiny M jsou společné násobky čísel 12, 8, 20, tj. čísla 120, 240, 360, atd., a tedy supremem je nejmenší horní závora, tedy číslo 120.

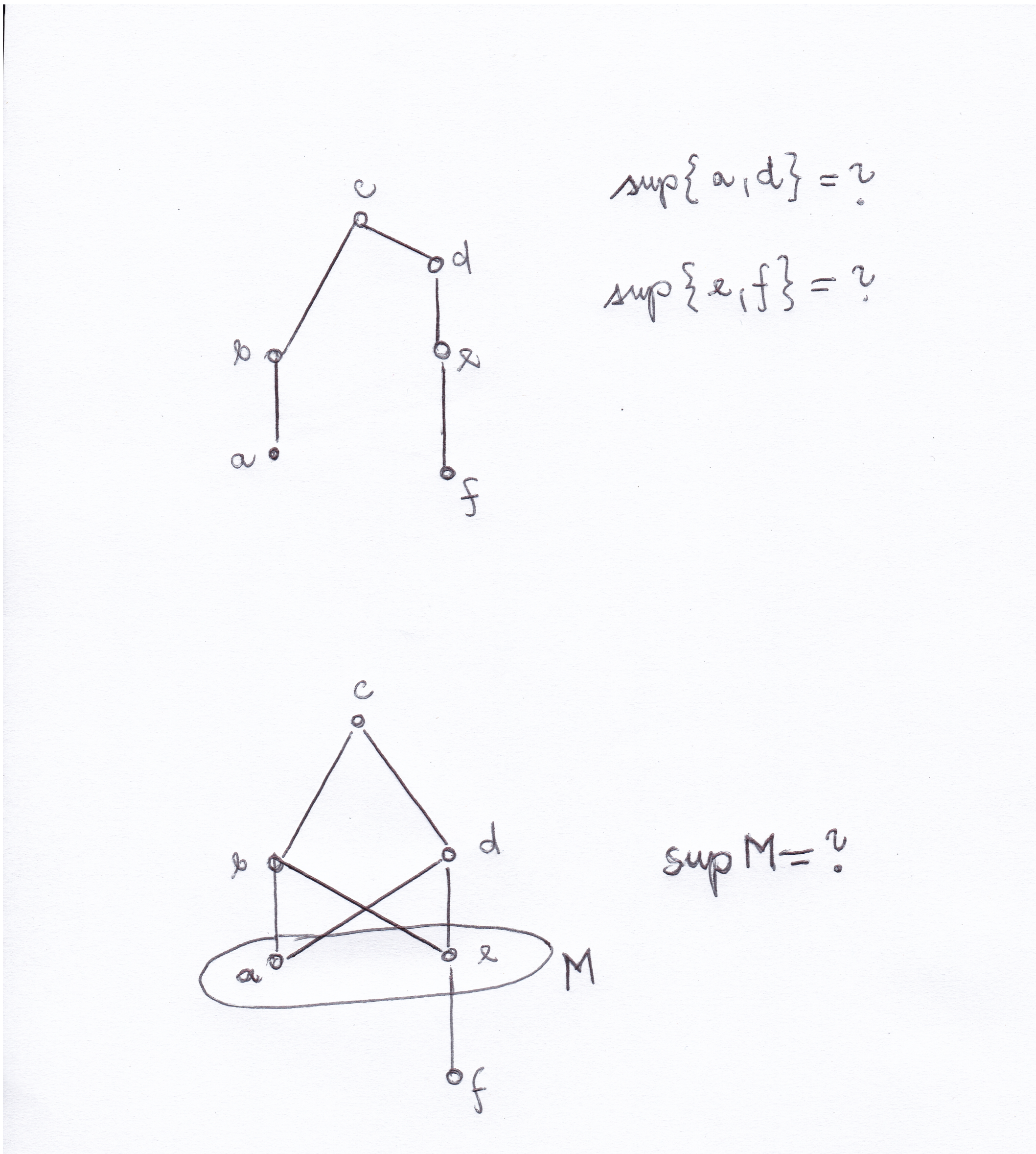
b) V posetu podmnožin tříprvkové množiny (obr. 10) například platí
$$\inf\{\{1,2\},\{1,3\}\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\},$$
$$\inf\{\{1,2\},\{2\},\{2,3\}\} = \{2\},$$
tedy infimem několika množin je jejich vzájemný průnik,
$$\sup\{\{1,2\},\{1\}\} = \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$$
(supremem několika množin v dané struktuře je jejich sjednocení).

Příklad 7.3. Najděte suprema množin na obrázku 12, pokud existují:

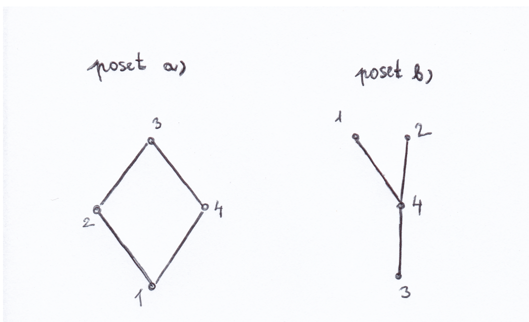
7.3 Cvičení

Příklad 7.4.

- i) Vypište podle Hasseova diagramu relaci $\trianglelefteq$ výčtem uspořádaných dvojic na obrázku 13: a) poset (a); b) poset (b)[39];
- ii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\vartriangleleft$ ostrého uspořádání;
- iii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\prec$ bezprostředního předchůdce.



Obrázek 12: Příklad suprem dvouprvkových podmnožin posetu.



Obrázek 13: Uspořádané množiny (a) a (b).

Příklad 7.5. Nakreslete Hasseovský diagram posetu 2^P pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$ – pro zjednodušení k uzlům diagramu nevpisujte závorky a čárky, tj. množiny budou označeny jen znaky prvků: např $\emptyset$, 12, 124 jsou označení různých množin. $\star$

Příklad. Nakreslete Hasseovský diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 144 vzhledem k relaci dělitelnosti beze zbytku.

Příklad 7.6. Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) čtyřprvkových posetů.

Další příklady. Dále ze sbírky [14] lze dělat příklady 1.6.A4-str.55, 1.6.B1, 1.6.B2, 1.6.B6, 1.6.B7, 1.6.B8, 1.6.B9, 1.6.B11.

[39] [16], str.28, obrázky 5a,5b.

8 Uspořádané množiny II – operace průsek a spojení

8.1 Warm-up: prověrka (b)

Prověrka opakující týdny 1—7: společně s tématem logiky [pozor, podívejte se na negaci iplikace a negaci ekvivalence, které byly v průběhu 5. týdne přidány do cvičení týdne 2 na str. 9 až 10 tohoto textu (takže jste schopni negovat konjunkci (věta 1), disjunkci (věta 2), iplikaci (věta 06) i ekvivalenci (věta 07))] jsou nově opakovány: téma množin (kap. 4), téma čísel (kap. 5 … jen několik definic a dvě věty včetně důkazů), téma relace (kap 6) a téma uspořádaných množin (kap. 7).

8.2 Přednáška

V předešlé kapitole jsme zavedli pojmy infimum (= největší dolní závora) a supremum (= nejmenší horní závora) konečné množiny. Pomocí těchto pojmů nyní definujeme na posetu P dvě operace: operaci průseku $\sqcap$ a operaci spojení $\sqcup$.

Pokud v posetu $(P, \trianglelefteq)$ má každá dvouprvková podmnožina své infimum, lze definovat operaci průsek (definice 45)

$$x \sqcap y := \inf\{x, y\}$$

a poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá průsekový polosvaz; to tedy znamená, že prokaždé dva prvky $x, y \in P$

- $x \sqcap y$ je dolní závorou, tj.

$$x \sqcap y \trianglelefteq x, \quad x \sqcap y \trianglelefteq y; \qquad \text{vlastnost (16a)}$$ [40]

- $x \sqcap y$ je největší dolní závorou, tj.

$$\forall d \in P: \quad (d \trianglelefteq x \wedge d \trianglelefteq y \Rightarrow d \trianglelefteq x \sqcap y). \qquad \text{vlastnost (16b)}$$ [41]

Pokud v posetu $(P \trianglelefteq)$ má každá dvouprvková podmnožina své supremum, lze definovat operaci spojení (definice 46)

$$x \sqcup y := \sup\{x, y\}$$

a poset $(P, \trianglelefteq)$ se nazývá spojový polosvaz; to tedy znamená, že

- $x \sqcup y$ je horní závorou, tj.

$$x \trianglelefteq x \sqcup y, \quad y \trianglelefteq x \sqcup y; \qquad \text{vlastnost (17a)}$$ [42]

- $x \sqcup y$ je nejmenší horní závorou, tj.

$$\forall h \in P: \quad (x \trianglelefteq h, \quad y \trianglelefteq h \Rightarrow x \sqcup y \trianglelefteq h). \qquad \text{vlastnost (17b)}$$ [43]

[40] (16a) … průsek dvou prvků je menší nebo roven než každý z nich
[41] (16b) … pokud nějaký prvek je menší nebo roven než jiné dva, pak je též menší nebo roven než jejich průsek
[42] (17a) … spojení dvou prvků je větší nebo rovno než každý z nich
[43] (17b) … pokud nějaký prvek je větší nebo roven než jiné dva, pak je též větší nebo roven než jejich spojení.

Poznámka: průsek a spojení v Hasseově diagramu.

a) Pokud poset $(P, \trianglelefteq)$ je průsekový polosvaz, v jeho Hasseově diagramu $\forall x, y \in P\ \exists!\ z \in P$,

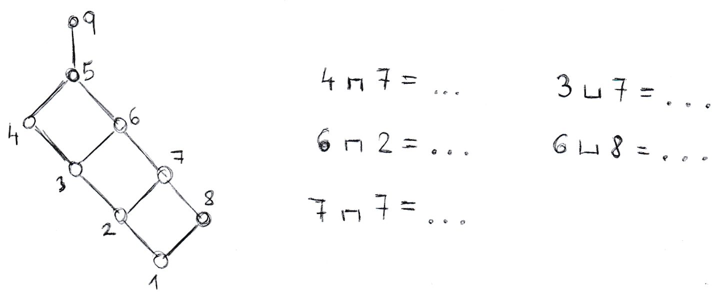
- do něhož se po hranách dostanete z x i y cestou stále dolů (z je dolní závora množiny $\{x, y\}$),
- přičemž z je ze všech takových uzlů nejvýše (je největší dolní závora množiny $\{x, y\}$).

b) Pokud poset $(P, \trianglelefteq)$ je spojový polosvaz, v jeho Hasseově diagramu $\forall x, y \in P\ \exists!\ z \in P$,

- do něhož se po hranách dostanete z x i y cestou stále vzhůru (z je horní závora množiny $\{x, y\}$),
- přičemž z je ze všech takových uzlů nejníže (je nejmenší horní závora množiny $\{x, y\}$).

Příklad 8.1. (učitel společně se studenty) Rozhodněte, zda je daný poset také průsekový polosvaz nebo spojový polosvaz, vypočtěte dané operace průseku nebo spojení:

(i) Viz poset na obrázku 14.



Obrázek 14: Poset P_1.

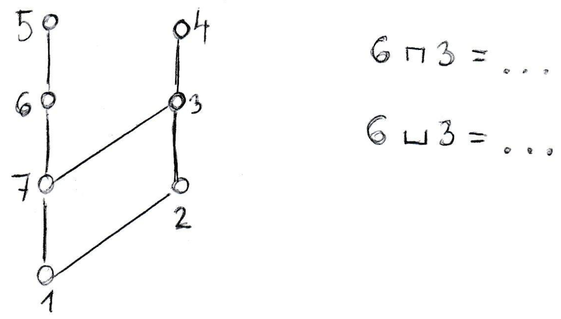
(ii) Viz poset na obrázku 15.

(iii) Viz poset na obrázku 16.

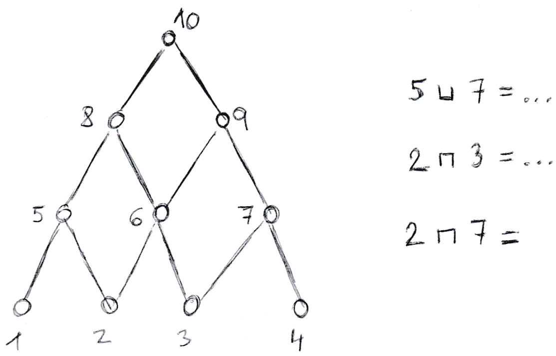
(iv) Viz poset na obrázku 17.

Vlastnosti operací průsek a spojení

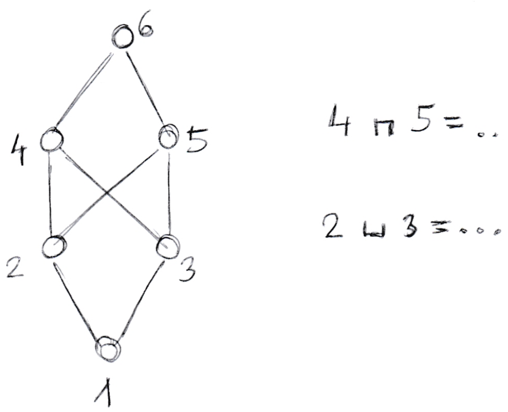
$\sqcap$, $\sqcup$ jsou operace – lze tedy studovat bližší vlastnosti těchto operací!!!!!!!!!!! Například ve větě 08 jsme pomocí Vennových diagramů dokázali tzv. asociativní zákon pro operace průniku a sjednocení. Platí podobý asociativní zákon pro operaci průseku nebo operaci spojení? Pokud ano, tak při jeho důkazu asi bude nutné použít jiné metody než Vennovy diagramy.



Obrázek 15: Poset P_2.



Obrázek 16: Poset P_3.



Obrázek 17: Poset P_4.

(Věta 15) Asociativita operace průsek a spojení

a) V každém průsekovém polosvazu $(P, \sqcap)$ platí:

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z).$$

b) V každém spojovém polosvazu $(P, \sqcup)$ platí:

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z).$$

Důkaz. Dokažmě pouze tvrzení (a): Při odvozování důkazu je nad implikacemi nebo nerovnostmi vždy číslo vlastnosti, na základě které příslušná implikace nebo nerovnost platí.

$$\left.\begin{array}{l}
(x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \sqcap y \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \\
\left.\begin{array}{l}
(x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \sqcap y \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \\
(x \sqcap y) \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} z
\end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} (x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq y \sqcap z
\end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} (x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} x \\
x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y
\end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq x \sqcap y \\
x \sqcap (y \sqcap z) \overset{(16a)}{\trianglelefteq} y \sqcap z \overset{(16a)}{\trianglelefteq} z
\end{array}\right\} \overset{(16b)}{\Rightarrow} x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap z$$

No a v této fázi důkazu zbývá už jen malý kousek, stačí si uvědomit, že relace $\trianglelefteq$ je antisymetrická, tj. platí (anti-12):

$$a \trianglelefteq b \quad \wedge \quad b \trianglelefteq a \quad \Rightarrow a = b.$$

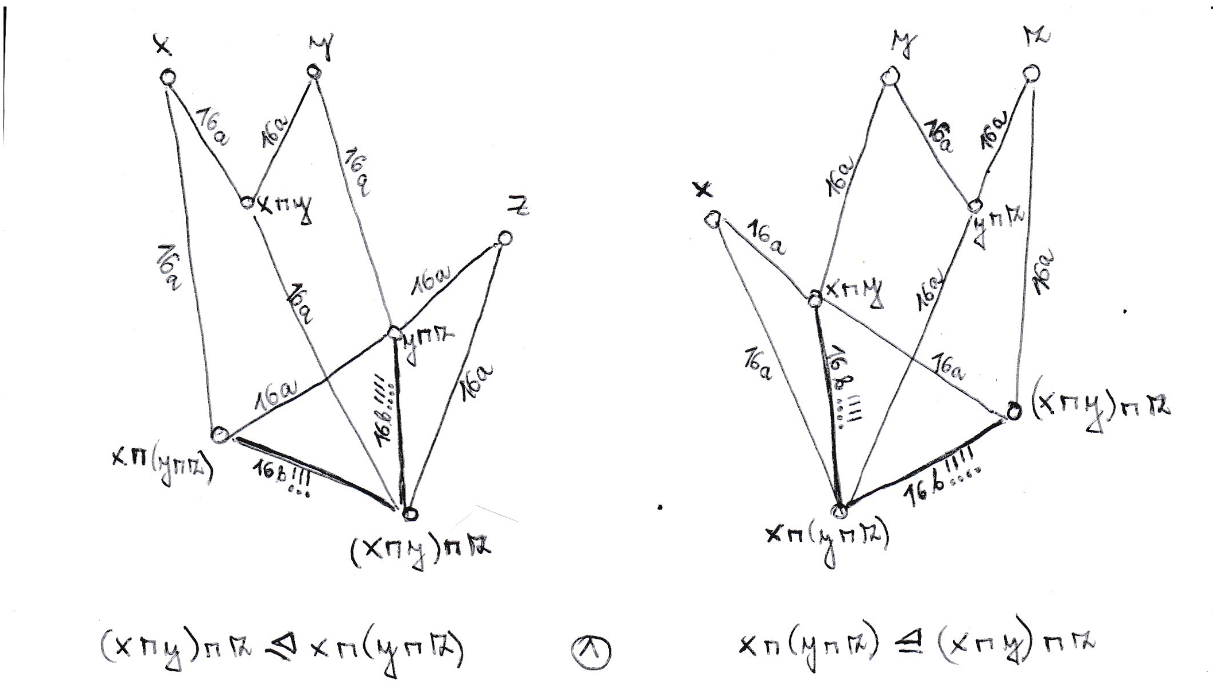
Tedy z obou nerovností, ke kterým jsem při odvozování dospěli, plyne nakonec rovnost v daném vztahu, což je dokazované tvrzení (a):

$$[(x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)] \quad \wedge \quad [x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap] z \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z).$$

Pokud byl pro čtenáře právě předvedený důkaz příliš náročný, lze jej udělat jiným způsobem: lze si obě jeho hlavní části nakreslit. Snad lze následující metodu důkazu označit jako nový typ – typ číslo 10.

Typ důkazu číslo 10: Rovnost výrazů pomocí Hasseových diagramů.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují operace průsek a spojení, lze dokázat pomocí Hasseových diagramů, do kterých kreslíme výsledky těchto operací – rovnost $a = b$ plyne při vlastnosti (anti-12) z nerovností $a \trianglelefteq b$ a $b \trianglelefteq a$, které platí současně. Důkaz rovnosti provedeme tak, že nakreslíme Hasseův diagram pro každou z nerovností.



Obrázek 18: Důkaz věty 15 pomocí Hasseových diagramů.

Důkaz věty 15a pomocí Hasseových diagramů[44]: Hasseovy diagramy nerovností $(x \sqcap y) \sqcap z \trianglelefteq x \sqcap (y \sqcap z)$ a $x \sqcap (y \sqcap z) \trianglelefteq (x \sqcap y) \sqcap z$ vidíme na obrázku 18, platí tedy obě nerovnosti – a z vlastnosti (anti-12) tedy plyne rovnost obou výrazů. $\square$

Analogií operace $\sqcap$ s průnikem a operace $\sqcup$ se sjednocením na struktuře $(2^A, \subseteq)$ (tedy struktura 2^A je současně průsekový i spojový polosvaz) jsme si připravili půdu k následující definici, která je tedy celkem přirozená. V dalším se teď budeme zabývat otázkou: Jaké vlastnosti má poset, který je současně polosvazem obou typů?

Definice 47: Poset $(P, \trianglelefteq)$, který je současně průsekový i spojový polosvaz, se nazývá svaz[45]. Analogicky lze říci, že protože svaz je spojením vlastností průsekového polosvazu a spojového polosvazu, tak pro svaz je charakteristické, že s každou svou dvouprvkovou podmnožinou obsahuje i její infimum a supremum[46].

Poznámka: Jak lze chápat svaz.

Svazem tedy rozumíme strukturu $(P, \trianglelefteq, \sqcap, \sqcup)$, kde

a) relace $\trianglelefteq$ splňuje vlastnosti (11), (anti-12), (13);

b) operace $\sqcap$ splňuje dvojici vlastností (16a),(16b);

c) operace $\sqcup$ splňuje dvojici vlastností (17a),(17b).

[45] Anglicky: lattice. Pozor, neplést s hlávkovým salátem: lettuce. Anglicky polosvaz: semilattice.

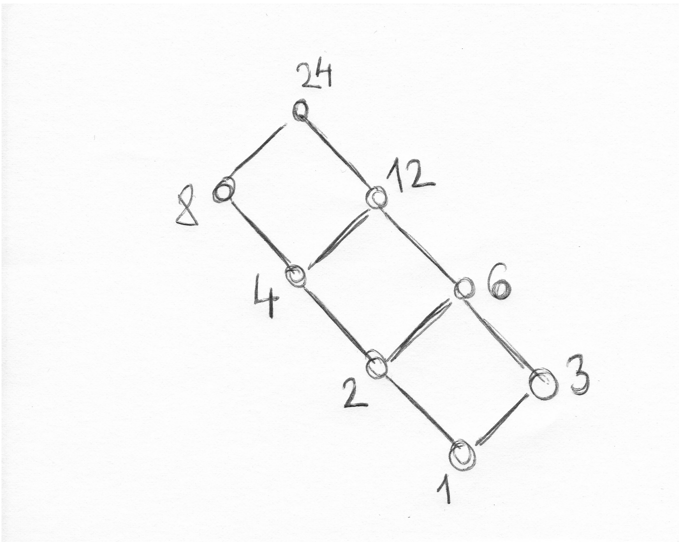
[46] Které ovšem nemusí ležet přímo v dané dvouprvkové podmnožině, jak jsme už na několika příkladech viděli.

Příklady svazů.

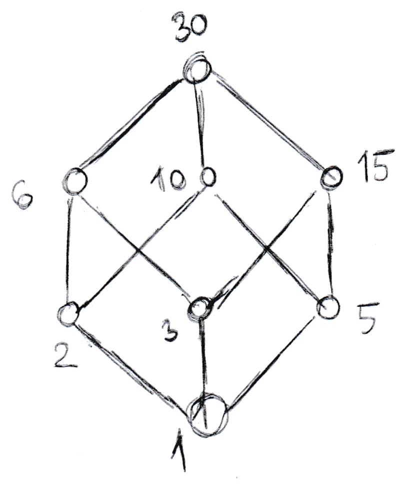
Př. 1 Systém všech podmnožin vzhledem k relaci „je podmnožinou“, tedy struktura $(2^A, \subseteq)$, svaz.

Př. 2 I druhý hlavní příklad posetu z předchozí kapitoly, množina N s relací definovanou na základě dělitelnosti, je svaz. Průsekem dvou přirozených čísel je jejich největší společný dělitel, spojením dvou čísel je jejich nejmenší společný násobek – tyto dvě charakteristiky vždy existují pro každá dvě přirozená čísla.

Př. 3 I některé podposety svazu $(N, |)$ jsou svazy, například podsvaz[47] všech dělitelů čísla 24

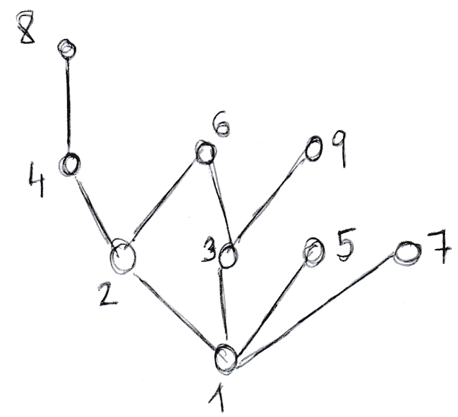


nebo podsvaz všech dělitelů čísla 30



[47] Z příkladů je vidět, že aby podmnožina svazu byla též svazem, musí být uzavřená vzhledem k operacím průsek a spojení. Takovou podmnožinu nazveme podsvaz.

Naopak řada podposetů posetu $(N, |)$ svazem není, protože nejsou uzavřené na operace průseku a spojení. Například podposet prvních devíti přirozených čísel není svazem, protože v něm neexistuje například supremum dvouprvkové množiny $\{4, 6\}$:

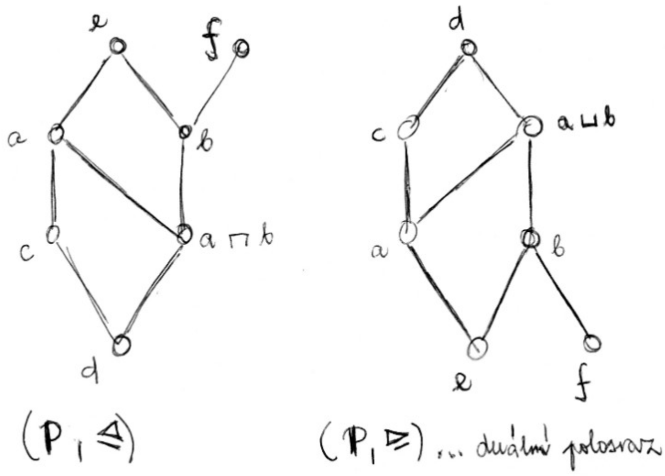


Př. 4 Každý řetězec (= coset) je svaz … například N s klasickým uspořádáním $\leq$ je svaz, $(Z, \leq)$ je svaz.

Dříve než přistoupíme ke studiu dalších vlastností svazu (pravděpodobně se k tomu dostaneme až v příštím semestru), všimneme si ještě jedné věci, která platí i v každém polosvazu – každý polosvaz definuje tzv. duální polosvaz, jehož Hasseovský diagram je obrácen vzhůru nohama o 180 stupňů:

Definice 48 Pokud například $(P, \trianglelefteq)$ je průsekový polosvaz, tak inverzní uspořádání $\trianglerighteq$ definuje tzv. duální polosvaz a jedná se o spojový polosvaz[48].

Příklad.



48 A naopak, duální polosvaz ke spojovému polosvazu je průsekový polosvaz

Na obrázku vidíme $\sqcap-$polosvaz $(P, \trianglelefteq)$ a vedle něj nakreslený $\sqcup-$polosvaz $(P, \trianglerighteq)$ zadaný toutéž množinou, pouze všechny šipky mají opačný směr, tj. Hasseovský diagram je oproti původnímu polosvazu „hlavou dolů“.

Ve svazech, kde jsou definovány obě operace současně, tj. existují současně infima i suprema dvouprvkových podmnožin, lze někdy využívat těchto duálních vztahů mezi pojmy a z platnosti určité vlastnosti jednoduše dokázat příslušnou duální vlastnost pouze záměnou $\sqcup$ za $\sqcap$, $\trianglerighteq$ za $\trianglelefteq$, horních závor za dolní závory, suprem za infima. To je pro matematiky velmi pomocný poznatek, protože jim usnadňuje práci s dokazováním vlastností ve svazech na polovinu.

Typ důkazu číslo 11: Důkaz pomocí polosvazové duality.

Pokud jsme už jinými prostředky dokázali rovnost či nerovnost, která platí ve svazu, tak platnost tzv. duální rovnosti nebo nerovnosti plyne ze vztahu duality mezi průsekovým a spojovým polosvazem. V tomto vztahu duality

- **znak relace $\trianglelefteq$ musíme zaměnit za znak $\trianglerighteq$;**
- **znak $\sqcap$ musíme zaměnit za znak $\sqcup$;**
- **vlastnost (16a), pojem dolní závory, musíme zaměnit za vlastnost (17a), pojem horní závory;**
- **vlastnost (16b), pojem největší dolní závory, musíme zaměnit za vlastnost (17b), pojem nejmenší horní závory.**

Důkaz věty 15b pomocí polosvazové duality. Vztah

$$\forall x, y, z \in P : \quad (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$$

plyne z věty 15a na základě polosvazové duality – přesně stejně zopakujeme důkaz věty 15a (buď rozepsáním, nebo graficky), pouze duálně nahradíme všechny pojmy z 15a duálními, které plynou z náhrady relace $\trianglelefteq$ inverzní relací $\trianglerighteq$. Po duálních záměnách dostaneme (sestavení negrafického důkazu):

$$\left.\begin{array}{l} (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} x \sqcup y \overset{17a}{\trianglerighteq} x \\ \left.\begin{array}{l} (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} x \sqcup y \overset{17a}{\trianglerighteq} y \\ (x \sqcup y) \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} (x \sqcup y) \sqcup z \trianglerighteq y \sqcup z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} (x \sqcup y) \sqcup z \trianglerighteq x \sqcup (y \sqcup z)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} x \\ x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} y \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} y \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} x \sqcup (y \sqcup z) \trianglerighteq x \sqcup y \\ x \sqcup (y \sqcup z) \overset{17a}{\trianglerighteq} y \sqcup z \overset{17a}{\trianglerighteq} z \end{array}\right\} \overset{17b}{\Longrightarrow} x \sqcup (y \sqcup z) \trianglerighteq (x \sqcup y) \sqcup z$$

Důkaz obou nerovností je přesně stejný jako u věty 15a, jen všechny pojmy a symboly byly duálně zaměněny). Dohromady spojením obou nerovností plyne z (anti-12) rovnost[49].

8.3 Cvičení

Příklad a. Nalezněte tři navzájem různé (lišící se více než přeznačením prvků) pětiprvkové posety, z nichž každý má právě dva prvky maximální a právě tři prvky minimální.

Příklad b. Nalezněte poset, který má maximální prvek, nemá největší prvek a nemá minimální prvek.

Příklad c. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, že <u>současně</u> platí:

a) V příslušném Hasseovském diagramu jsou znázorněny minimálně čtyři hrany;

b) každý prvek je srovnatelný alespoň s jedním dalším prvkem;

c) existují v něm tři prvky, které jsou navzájem mezi sebou nesrovnatelné;

d) platí $a \leq b$, a současně $b \leq c$.

Příklad d. Nakreslete Hasseovy diagramy všech navzájem různých (lišících se více než přeznačením prvků) pětiprvkových svazů.

[49]Respektive pokud víme, že ve svazu platí dualita mezi operacemi $\sqcap$ a $\sqcup$, nemusíme důkaz vůbec provádět, jen napíšeme duální rovnost 15b výměnou duálních pojmů z 15a, tedy jen záměnou spojení za průsek.

9 Ekvivalence a rozklady

9.1 Warm-up: ohlasy z prověrky (b).

Některé ohlasy z písemky. Zbude-li čas, tak příklad o složeném častějším úročení, viz kniha [11] ze seznamu literatury.

9.2 Přednáška

V minulých dvou kapitolách jsem se zabývali studiem relací, které splňují vlastnosti (11), (anti-12), (13) – uspořádáními. Nyní se budeme zabývat relacemi, kterých se v matematice též objevuje celá řada a které též splňují tři vlastnosti, jen druhá vlastnost je oproti minulým dvou kapitolám obměněna[50].

Definice 49: Relace ρ na množině M se nazývá ekvivalence, pokud splňuje vlastnosti (11), (12) a (13).

Příklad 9.1. Relace rovnoběžnosti na množině přímek v rovině je ekvivalence (viz příklad 6.5.b). Ověřte, že platí vlastnosti (11), (12), (13).

Příklad. Na množině všech zlomků (= všech racionálních čísel) existuje známá ekvivalence ρ mezi těmi zlomky, které všechny lze zkrátit na jeden základní tvar. Tuto relaci ekvivalence na množině Q všech zlomků lze definovat takto:

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \in \rho \text{ tehdy, když platí } ad = bc.$$

Například $\frac{3}{5}$ je číslo ekvivalentní s číslem $\frac{15}{25}$, které lze převést na $\frac{3}{5}$ vykrácením čitatele i jmenovatele pěti (platí tedy definiční podmínka $3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$).

Nebo číslo $\frac{-1}{3}$ je v ekvivalenci s číslem $\frac{-3}{9}$, které lze převést na $\frac{-1}{3}$ vykrácením třemi (protože platí $(-1) \cdot 9 = 3 \cdot (-3)$), atd.

S pojmem relace ekvivalence velmi úzce souvisí další pojem, a to rozklad množiny.

Definice 50: Řekneme, že systém podmnožin M_i množiny M tvoří rozklad množiny M, když

a) $M_i \neq \emptyset$;

b) $\bigcup_{i=1,\dots,n} M_i = M$;

c) $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Tj. ad a) množiny $M_i$jsou neprázdné, ad b) sjednocením množin M_i je celá množina M, a ad c) množiny M_i jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě z nich mají prázdný průnik.

Příklad. Vypište (a znázorněte graficky) všechny možné rozklady tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$. Řešení: viz příprava … takových možných rozkladů existuje pět: a) rozklad

[50] A vracíme se též k reprezentaci relací pomocí tzv. grafu = soustavy orientovaných šipek mezi jednotlivými prvky, tj. Hasseův diagram z minulých dvou kapitol je čistě určen k reprezentaci uspořádaných množin.

M na tři jednoprvkové podmožiny, b) rozklad M na $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c\}$; c) rozklad M na $M_1 = \{a, c\}$ a $M_2 = \{b\}$; d) rozklad M na $M_1 = \{b, c\}$ a $M_2 = \{a\}$; e) a konečně, rozklad M na jedinou tříprvkovou podmnožinu $M_1 := M$. $\square$

Pojem rozkladu je spojen s definicí ekvivalence následujícími dvěma způsoby:

a) Konstrukce ekvivalence na základě rozkladu

Je zadán rozklad množiny M – definujeme-li relaci E vztahem

$$xEy \Leftrightarrow x, y \in M_i \quad \text{pro nějaké } i,$$

(prvky x, y jsou v relaci, když leží ve stejné třídě rozkladu), pak tato relace je ekvivalence a nazývá se relace určená (= indukovaná) rozkladem množiny M (definice 51).

Příklad. Napište relaci ekvivalence indukované (= určené) každým z rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$ v předchozím příkladu. Řešení: viz tabule.

Příklad. (jen studenti) a) Nakreslete všechny možné rozklady čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$; b) jinou barvou do diagramů těchto rozkladů vyznačte (pomocí grafové reprezentace) relaci ekvivalence indukovanou vždy daným rozkladem. Na obě části úkolu máte dohromady deset minut.

b) Konstrukce rozkladu na základě ekvivalence

Je zadána ekvivalence E na množině M – definujeme-li rozklad M způsobem „v jedné třídě rozkladu leží právě ty prvky, které jsou navzájem všechny po dvojicích ekvivalentní“, dostaneme také strukturu označenou stejně jako v předchozí definici s tím rozdílem, že první nebylo vejce, ale slepice (promiňte – první nebyl rozklad, ale ekvivalence), a množina $M/_E$ se nazývá (definice 52) faktorová množina množiny M podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina[51], značíme (označení 33)

$$M/_E := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Pro upřesnění, které se nám bude hodit v předmětu Algebra 1, dodejme, že jednotlivé třídy M_i považujeme za prvky této faktormnožiny $M/_E$.

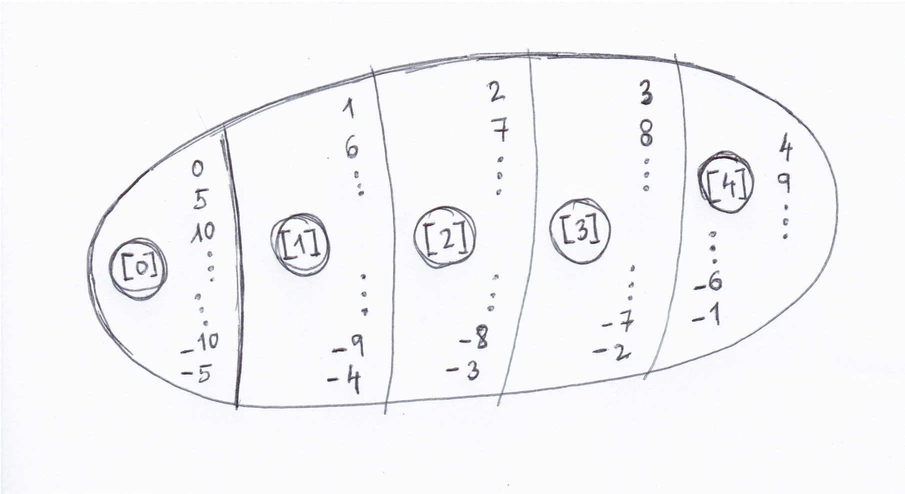
Ad příklad 9.1. Pokud se vrátíme k relaci = (rovnost racionálních čísel), tak v jedné třídě rozkladu $Q/_=$ jsou právě ty zlomky, které lze krácením či rozšířením převést navzájem jeden na druhý.

Než přikročíme k důležitému příkladu 9.2, definujeme na množině Z relaci kongruence:

- Definice 53: celá čísla a, b jsou kongruentní podle modulu n, pokud $n|(b-a)$;
- Označení 34 vztahu z definice 53: $a \equiv b \pmod{n}$;

Příklad 9.2. Podle relace kongruence podle modulu 5 lze množinu celých čísel rozdělit do pěti podmnožin.

[51] Česky: rozkladová množina (ale vžil se anglický název, FACTOR (jako sloveso) znamená ROZLOŽIT).



Obrázek 19: Množina zbytkových tříd Z_5.

V této situaci lze nyní říci:

a) Označíme-li znakem E danou relaci kongruence, můžeme psát xEy, když x, y náleží do stejné podmnožiny rozkladu … tato relace je relací ekvivalence na Z (je to relace reflexivní (např. $5 \equiv 5$), symetrická (např. $5 \equiv 10$ implikuje[52], že $10 \equiv 5$), tranzitivní ($5 \equiv 10,\ \ 10 \equiv 30\ \ \Rightarrow 5 \equiv 30$).

b) Označíme-li tyto podmnožiny $M_0 := [0]$, $M_1 := [1]$, $M_2 := [2]$, $M_3 := [3]$, $M_4 := [4]$, tak systém podmnožin $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ tvoří rozklad množiny Z podle ekvivalence E.

c) Když se na M_i přestaneme dívat jako na množiny a začneme se na ně dívat jako na prvky, dostaneme pětiprvkovou množinu

$$Z/_E := \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\},$$

kde všechna čísla v každé množině M_i jsme ztotožnili v jedno a označili za jediný prvek. Je to faktorová množina (= rozkladová množina) množiny Z podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina. □

Relace E kongruence podle modulu 5 a k ní příslušná faktormnožina jsou důležitým příkladem „ze života“ = ze situací matematiky na SŠ i ZŠ: v jedné třídě ekvivalence E jsou právě ta celá čísla, které mají po vydělění pěti tentýž zbytek, neboli jejich obrazy na číselné ose jsou stejně vzdáleny směrem doprava od obrazu nejbližšího násobku čísla 5.

9.3 Cvičení

Snad bude dobré cvičení pokryto příklady ze sbírky [14], str. 58-59, příklady 1.7.A3, 1.7.A4, 1.7.B1, 1.7.B4, 1.7.B5, vsunout jeden příklad na relaci kongruence modulo 4, B6, B7 (geometrické ekvivalence v rovině), B8, B9 (příklad B9 je důkazový, ale dobrý).

[52] Česky: z toho plyne, že …

10 Zobrazení

10.1 Warm-up: Příklad na častější složené úročení

Zmínění jazyka R jako vylepšené kalkulačky, instalace a některé výpočty. Vypočtěte příklad následující: Vypočtěte zůstatek na účtu při vkladu 100 kč a složeném úrokování po 25 letech, když úročíme

- a) jedenkrát ročně 4 procenta;
- b) dvakrát ročně 2 procenta;
- c) čtyřikrát ročně 1 procento;
- d) stokrát ročně $\frac{4}{100}$ procenta;

Výsledek: viz kniha [11], str. 31. Je zajímavé, že při rostoucím počtu úročení nižší částkou se výsledný zůstatek na účtu na konci stále téhož období blíží e-násobku vkladu, kde

$$e = 2{,}718281828$$

(ale dále desetinný rozvoj čísla je neperiodický, podobně jako u čísla π) je tzv. Eulerovo[53] číslo.

10.2 Přednáška

Už pátou přednášku se zabýváme pojmem relace, a tento oddíl tomu bude nejinak – podíváme se na definici jedné z relací, která je v matematice klíčová, a to je zobrazení[54], a budeme studovat některé vlastnosti tohoto pojmu.

Definice 54: Relace f na kartézském součinu $X \times Y$ se nazývá zobrazení z množiny X do množiny Y, jestliže pro ni platí podmínka

$$[x, y] \in f \ \wedge \ [x, z] \in f \ \Rightarrow \ y = z$$

(tj. v grafové reprezentaci zobrazení nemohou z prvku x vycházet orientované hrany do dvou různých prvků y, z množiny Y). Na obrázku 20 je znázorněn příklad relace, která není zobrazením.

Dále definujeme (definice 55) definiční obor zobrazení f jako množinu $D(f)$ těch prvků z X, které jsou v relaci f s některým z prvků množiny Y, neboli ve stručném matematickém zápisu

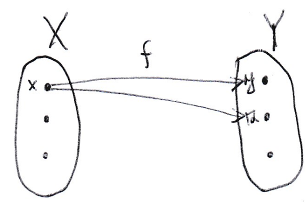
$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ [x, y] \in f\}$$

a (definice 56) obor hodnot zobrazení f jako množinu $Im(f)$ těch prvků z Y, se kterými je v relaci f aspoň jeden prvek množiny X, neboli

$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ [x, y] \in f\}.$$

[53] Čti: [ojlerovo].

[54] V této kapitole bude využit výklad z knihy [8], kapitola 6.

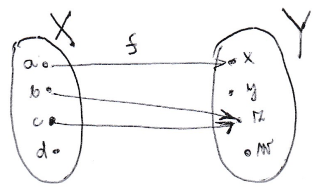


Obrázek 20: Příklad relace f, která není zobrazením.

Poznámka: ekvivalentní zápis zobrazení prvků.

Pokud je f zobrazení z X do Y, tak pro $[x, y] \in f$ můžeme vzhledem k jednoznačnosti prvku y psát $y = f(x)$ (a číst: prvek $y \in Y$ je obrazem prvku $x \in X$ vzhledem k zobrazení f) a v této symbolice zapisovat veškeré vlastnosti týkající se zobrazení f, tj. také i pojmy definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f:

$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ y = f(x)\}$$
$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ y = f(x)\}.$$



Obrázek 21: Příklad zobrazení f z množiny X do množiny Y.

Příklad. U zobrazení f z X do Y na obrázku 21 je $D(f) = \{a, b, c\}$ a $H(f) = \{x, z\}$.

$\star$

Definice 57: Nejzajímavějším případem ke studiu je takové zobrazení, kde $D(f) = X$ – nazýváme je

zobrazení množiny X do množiny Y a označujeme (označení 35)

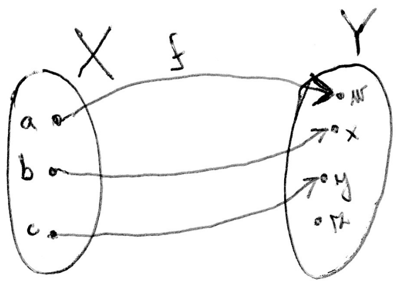
$$f : X \to Y$$

(mezi definicí 54 a definicí 57 je jediný češtinářský rozdíl, a sice písmenko „z“ – definice 54 mluví o zobrazení z množiny X, definice 57 o zobrazení celé množiny X).

V situaci zobrazování celé množiny X zobrazením f (definice 57) mluvíme o dalších vlastnostech zobrazení f, a sice: zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá

- injekce neboli **prosté zobrazení** X do Y, když každý prvek $y \in Y$ je obrazem nanejvýš jednoho (tedy jednoho nebo žádného) prvku z X. Ve stručném matematickém zápisu lze podmínku injektivního zobrazení psát[55]

$$\forall x, y \in X : x \neq y \;\Rightarrow f(x) \neq f(y). \qquad \text{(vlastnost (18))}$$



Obrázek 22: Příklad injektivního zobrazení f.

Věta 16.

Podmínce (18) z definice injektivního zobrazení je logicky ekvivalentní podmínka

$$\forall x, y \in X : \; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

(neboli pokud se dva obrazy rovnají, tj. $f(x) = f(y)$, tak se musí jednat o tentýž vzor, tj. $x = y$).

Důkaz: Plyne z platnosti věty 03: dokazovaná vlastnost je logicky ekvivalentní obměně implikace z vlastnosti (18). □

- surjekce neboli **zobrazení „na“** (zobrazení X na celou množinu Y), když každý prvek $y \in Y$ je obrazem alespoň jednoho prvku z X. Ve stručném matematickém zápisu lze podmínku surjektivního zobrazení psát[56]

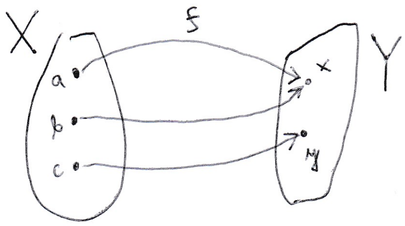
$$\forall y \in Y \; \exists \, x \in X : \; y = f(x). \qquad \text{(vlastnost (19))}$$

- bijekce (bijektivní) neboli **vzájemně jednoznačné**[57], když je současně injektivní i surjektivní. Ve stručném matematickém zápisu lze podmínku bijekce[58] psát

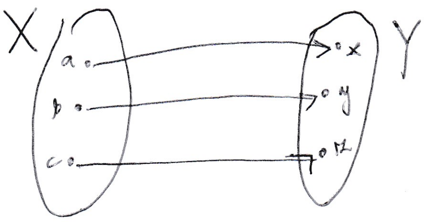
$$(\forall x \in X \; \exists! \; y \in Y : \; y = f(x)) \; \wedge \; (\forall y \in Y \; \exists! \; x \in X : \; y = f(x)) \qquad \text{(vlastnost (20))}.$$

O zobrazení bijektivním lze tedy alespoň na základě grafického názoru říci, že existuje mezi množinami, které mají stejný počet prvků.

[55] Pro různé vzory x, y vzhledem k zobrazení f dostáváme různé obrazy $f(x)$, $f(y)$.
[56] Jednoduše řečeno, $Im(f) = Y$.
[57] Historicky se v matematické češtině vžil spíše přejatý název – bijekce.
[58] Jednoduše řečeno, bijekce je to zobrazení, které je injekcí a současně surjekcí.



Obrázek 23: Příklad surjektivního zobrazení f.



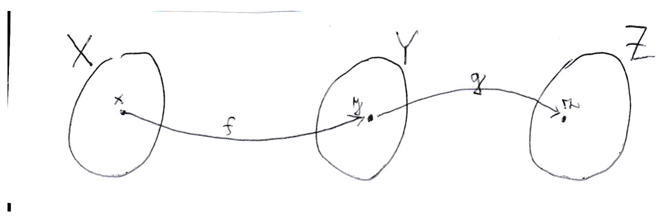
Obrázek 24: Příklad bijekce f.

Kromě jednoho zobrazování či zobrazení lze studovat (a budeme jim věnovat čas) ty situace, kdy skládáme dvě různá zobrazení, tj. nejprve zobrazujeme prvky z X do Y, a pak z Y do Z:

Definice 58: Pokud $f : X \to Y$ je zobrazení a $g : Y \to Z$ je zobrazení, definujeme složené zobrazení $g \circ f$ (označení 36) množiny X do množiny Z takto:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

(čti „g po f“ – toto čtení také umožňuje zapamatovat si pořadí, v jakém zobrazování provádíme: nejprve na prvek x použijeme zobrazení f, a pak teprve zobrazení g)



Obrázek 25: Příklad složeného zobrazení $g \circ f$.

Příklad. Vezměme $X = Y = Z$ množinu reálných čísel a zobrazení $f : R \to R$ definované předpisem $f(x) = 2x$, podobně $g : R \to R$ definované $g(x) = x + 5$. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je definované vztahem

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 5,$$

jedná se tedy opět o zobrazení $R \to R$.

Poznámka: Iverzní relace f^{-1} někdy není zobrazením.

Inverzní relaci f^{-1} netřeba zvlášť definovat, protože je to relace, v jejíž grafové reprezentaci všechny šipky změní směr na opačný vzhledem k f (a v množinové reprezentaci všechny uspořádané dvojice změní pořadí svých souřadnic). Problém je ten, že inverzní relace f^{-1} není vždy zobrazením: Uvažujme zobrazení $f : R \to R$ dané vztahem pro druhou mocninu $f(x) = x^2$. Pak např. $f(2) = 4$ a $f(-2) = 4$, tj platí $[4; 2] \in f^{-1}$ a $[4; -2] \in f^{-1}$, tj. f^{-1} není zobrazení.

Věta 17. Inverzní relace f^{-1} z Y do X je zobrazením z Y do X právě tehdy, když zobrazení $f : X \to Y$ je injekce.

Důkaz: Dokažme (typ 4) obě implikace této ekvivalence.

- Dk. implikace „⇒“:dokažme

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \Rightarrow \quad f : X \to Y \text{ je injekce.}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

  $$f^{-1} \text{ je zobrazení } \wedge \quad f : X \to Y \text{ není injekce.}$$

  Pak existují prvky $x, y \in X$, $x \neq y$ tak, že $f(x) = z = f(y)$ pro nějaké $z \in Y$. To by ale znamenalo, že $[z, x] \in f^{-1}$, $[z, y] \in f^{-1}$, a to je spor s tím, že f^{-1} je zobrazení. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

- Dk. implikace „⇐“:dokažme

  $$f : X \to Y \text{ je injekce } \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je zobrazení .}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

  $$f : X \to Y \text{ je injekce } \wedge \quad f^{-1} \text{ není zobrazení .}$$

  Pak existují prvky $x_1, x_2 \in X$ a $z \in Y$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $[z, x_1] \in f^{-1}$ a $[z, x_2] \in f^{-1}$. To by ale znamenalo, že $f(x_1) = z$, $f(x_2) = z$, a to je spor s tím, že f je injekce. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

Příklad. Například zobrazení $f : R \to R$ zadané vztahem $f(x) = 2x$ je prosté (injektivní), a tedy k němu existuje zobrazení inverzní $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (tedy předpis zobrazení představujícího násobení dvěma je inverzní k předpisu zobrazení představujícího dělení dvěma).

And last but not least, nyní jsme schopni si říci vysokoškolskou definici operace: (definice 59): Binární operace $\heartsuit$ na množině M je zobrazení $M \times M \to M$, tj. zobrazení, které přiřadí uspořádané dvojici $[a; b]$ z kartézského součinu $M \times M$ výsledek této operace, prvek $a \heartsuit b$.

Příkladem operací, které lze dosadit za symbol $\heartsuit$, je celá řada: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\cap$, $\cup$, $\sqcap$, $\sqcup$, atd. Jejich podrobnějšímu studiu se budeme věnovat ve druhém semestru studia.

Definice 60: Zobrazení $f : N \to R$ (tedy $D(f)$ je množina přirozených čísel, $H(f)$ je množina reálných čísel) se nazývá posloupnost reálných čísel.

Například posloupnost někdy zapisujeme ve tvaru

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

a to znamená, že přirozené číslo 1 se zobrazilo na reálné číslo označené a_1, přirozené číslo 2 se zobrazilo na reálné číslo označené a_2, atd.

Definice 61: Zobrazení f z množiny reálných čísel R do množiny reálných čísel R se nazývá (reálná) funkce (jedné) reálné proměnné.

10.3 Cvičení

Dostatečné cvičení je přístupné v knize [8], str.62-65. Další cvičení lze najít v knize [14], str. 52-54, příklady 1.5.B2, 1.5.B3, B5, B6, B7, B13.

11 Základní vlastnosti reálných funkcí

11.1 Warm-up: Jazyk R – kreslení grafů funkce

Jazyk R si lze nainstalovat z internetu, zadáte-li do vyhledávače „jazyk R“ nebo „R language“. Funguje jako dobrá kalkulačka offline, navíc si může uživatel prohlédnout veškeré předchozí výpočty. Základní informace: knihy [12], [13] jsou manuály k programu v češtině, nebudeme je příliš potřebovat, jen oddíly o matematických funkcích a o kreslení grafiky bude v první fázi využitelné[59]. Platí zde například:

- Pozor, desetinná čísla se zadávají s desetinnou tečkou, po americku, to je malá daň za jeho free užívání. Des. čárka slouží jako oddělovač rovnic a parametrů funkcí.
- Faktoriál zadáme příkazem (a následným stiskem klávesy ENTER)

  ```
  > factorial(n);
  ```

- Celočíselné dělení zadáme operátorem %/%, zbytek po dělení příkazem %%. Například

  ```
  > 62 %/% 5
  ```

  vede po stisku klávesy ENTER na výsledek 12 (celočíselný podíl),

  ```
  > 62 %% 5
  ```

  vede na výsledek 2 (zbytek po dělení pěti).

- Umocnění zadáme šipkou nahoru (na klávese čísla 6), například

  ```
  > 15^2
  ```

  vede na výsledek 225,

  ```
  > sqrt{144}
  ```

  vede na odmocninu[60] z čísla 144, tj. 12.

V tomto úvodu do funkcí reálné proměnné pro nás bude užitečné nakreslit si graf některých funkcí, toho docílíme následujícím způsobem:

Kreslení grafů funkce v jazyku R

Dejme tomu, že chceme nakreslit graf funkce $y = 2 \cdot \sin x + 1$ na intervalu $\langle -5; 5\rangle$. To uděláme zcela jednoduše příkazem „curve“ (křivka):

[59] Tento program studentům doporučuji kvůli předmětu Pravděpodobnost a statistika ve 4.semestru.
[60] Řídící slovo „sqrt“ je z anglického „square root“.

```
> curve(2*sin(x)+1,-5,5);
```

Pokud bychom chtěli nakreslit do jednoho obrázku grafy dvou funkcí, je to trošinku náročnější, protože musíme nejprve nadefinovat „hrací plochu“ pomocí intervalu $\langle -5; 5 \rangle$, a pak nakreslit prázdné hřiště, do kterého přidáváme jednotlivé funkce:

1. Vytvoříme vektor x rozdělením intervalu $\langle -5; 5 \rangle$ na tisíc podintervalů s krokem jedna setina[61]:

   ```
   > x<-seq(-5,5,0.01);
   ```

2. Připravíme si do vektorů $f1$, $f2$ obě funkce, například funkci $2 \cdot \sin x + 1$ a $2 \cdot \sin x$:

   ```
   > f1<- 2*sin(x)+1;
   ```

   ```
   > f2<- 2*sin(x);
   ```

3. Nyní nakreslíme hrací plán příkazem „plot“[62]:

   ```
   > plot(c(x,x),c(f1,f2),xlab="",ylab="",type="n");
   ```

4. A nakonec přidáme příkazem „lines“ do obrázku funkce[63]:

   ```
   > lines(x,f1,lty=1, col="red");
   ```

   ```
   > lines(x,f2,lty=1, col="blue");;
   ```

5. Příkazem „segments“ ještě můžeme přidat souřadné osy[64]:

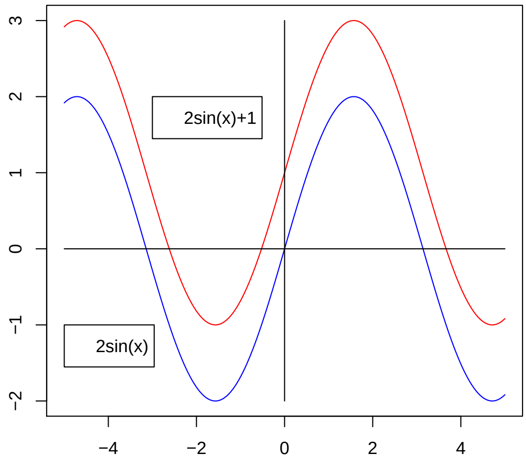
   ```
   > segments(-5,0,5,0, col="black");
   ```

   ```
   > segments(0,-2,0,3, col="black");
   ```

6. Pokud bychom chtěli vepsat popis funkcí přímo do obrázku, lze také na příslušné souřadnice napsat řetězec znaků, např:

   ```
   > legend(-3,2,"2sin(x)+1");
   ```

   ```
   > legend(-5,-1,"2sin(x)");
   ```



Obrázek 26: Obrázek dvou funkcí posunutých o hodnotu 1 ve svislém směru.

7. Celý obrázek si nyní můžeme uložit, když naň najedeme myší a klikneme levým tlačítkem – tak se zaktivní soubor obrázku; dále v levém horním rohu otevřeme volbu FILE, a pak SAVE AS a uložíme například jako PDF soubor. Vznikne obrázek, který lze vložit například do těchto skript (najdeme jej ve stejném adresáři, kde běží program R):

8. A poslední poznámka k tomuto náročnějšímu souboru příkazů: Pokud bychom nechtěli soubor několika příkazů neustále opisovat na obrazovku R, můžeme například náš soubor příkazů uložit do souboru kresleni.txt do stejného adresáře, ve kterém běží program R – pouze úvodní zobáčky každého řídícího řádku smažeme a zakončíme každý řádek středníkem:

```
x<-seq(-5,5,0.01);
f1<-2*sin(x)+1;
f2<-2*sin(x);
plot(c(x,x),c(f1,f2), xlab="",ylab="",type="n");
lines(x,f1,lty=1,col="red");
lines(x,f2,lty=1,col="blue");
```

[61]šipka vznikla ze symbolů „menší než“ a „minus“ … přiřazovací symbol, který jazyk R používá místo rovnítka;
seq … z anglického sequence = posloupnost (hodnot).

[62]Z anglického „plot“ = nakreslit. Význam symbolů:
c() … vytváří se vektor hodnot, z anglického „column“= sloupec, tedy sloupcový vektor;
xlab … popis osy x, nyní bude prázdný, ale lze vepsat označení proměnné (podobně ylab = popis osy y);
type=”n” … funkce se zatím nevykreslí.

[63]lty … typ vykreslené linie: typ 1 = plná čára, typ 2 = čárkovaná čára, atd.
col … volba barvy pro danou funkci.

[64]Např. čísla $[-5, 0]$ a $[5, 0]$ znamenají souřadnice počátečního a koncového bodu úsečky, který chceme nakreslit.

```
segments(0,-2,0,3,col="black");
segments(-5,0,5,0,col="black");
legend(-3,2,"2sin(x)+1");
legend(-5,-1,"2sin(x)");
```

Pak lze jen v jazyce R kdykoli později celou sekvenci příkazů vyvolat řídícím příkazem

```
> source("kresleni.txt")
```

(popřípadě můžeme pozměnit interval či funkce, které chceme nakreslit, vymazat některé příkazy a soubor uložit) – a provede se celá dávka najednou.

11.2 Přednáška

Poslední dva týdny tohoto semestru se budeme zabývat pojmem reálné funkce (viz definice 61 předchozí kapitoly). V devadesáti minutách musíme projít učebnici [9] zvanou Funkce. I když se jedná o opakování věcí ze střední školy, není možné projít podrobně celou problematiku funkcí, a čtenář bude muset některé detaily dohnat i v následujícím semestru. Zaměříme se tedy nyní na jedinou věc: na kreslení grafů některých funkcí a odečítání vlastností těchto funkcí z těchto grafů.

Definice 62: Když f je reálná funkce, tak graf je množina všech bodů $[x, f(x)]$ ve zvolené soustavě souřadnic (zadané počátkem a dvěma kolmými osami reálných čísel, které se protínají v počátku), pro které $x \in D(f)$[65].

V dalším se zaměříme na některé vlastnosti reálných funkcí a řekněme si něco málo o těch elementárních z nich, které jsou nejčastěji v matematice používány. Studenti budou muset znát definice následujících vlastností, a také vědět, jak se daná vlastnost pozná z grafu funkce $f(x)$. Říkáme, že

- funkce f je (definice 63) rostoucí na intevalu I, když
$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y);$$
- funkce f je (definice 64) klesající na intevalu I, když
$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y);$$
- x_0 z $D(f)$ je (definice 65) lokální minimum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí
$$f(x) \geq f(x_0) \;\; \forall x \in I;$$
- x_0 z $D(f)$ je (definice 66) lokální maximum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí
$$f(x) \leq f(x_0) \;\; \forall x \in I;$$

[65] Bod $[x, f(x)]$ modeluje prvek relace f a v rovině jej znázorňujeme na průsečíku kolmice k vodorovné ose v bodě x s kolmicí ke svislé ose v bodě $f(x)$.

- funkce f je (definice 67) sudá na svém definičním oboru, když $D(f)$ je symetrická množina na vodorovné reálné ose vzhledem k číslu 0 a
$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = f(x);$$
- funkce f je (definice 68) lichá na svém definičním oboru, když $D(f)$ je symetrická množina na vodorovné reálné ose vzhledem k číslu 0 a
$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = -f(x);$$
- funkce f není (definice 69) ani sudá, ani lichá na svém definičním oboru, když neplatí ani definice 67, ani definice 68.
- funkce f je (definice 70) zdola ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když
$$\exists K \in R : \forall x \in D(f): \quad K \leq f(x);$$
- funkce f je (definice 71) shora ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když
$$\exists L \in R : \forall x \in D(f): \quad f(x) \leq L;$$
- funkce f je (definice 72) ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když je ohraničená shora i zdola, tj. když
$$\exists K, L \in R : \forall x \in D(f): \quad K \leq f(x) \leq L;$$
- funkce f je (definice 73) periodická, když
$$\exists p \in R : p > 0 \ \wedge \ \forall x \in D(f): \quad (x + p \in D(f) \quad \wedge \quad f(x) = f(x+p)).$$

Budeme se učit poznávat uvedené vlastnosti (včetně těch, které byly definovány v minulé kapitole, jako je $D(f)$, $H(f)$, rozeznání, zda je funkce prostá = injektivní, a následné sestavení inverzní funkce) na základě grafu funkce.

Rozeznání některých vlastností z grafu funkce:

1. Definiční obor poznáme z grafu funkce takto: kolmice z bodů grafu na vodorovnou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $D(f)$.
2. Obor funkčních hodnot: kolmice z bodů grafu na svislou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $H(f)$.
3. Lokální minimum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je klesající na } \langle a; x_0 \rangle \ \wedge f \text{ je rostoucí na } \langle x_0; b \rangle;$$
4. Lokální maximum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že
$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je rostoucí na } (a; x_0\rangle \ \wedge f \text{ je klesající na } \langle x_0; b);$$

5. Sudou funkci poznáme tak, že její graf je osově souměrný vzhledem ke svislé ose soustavy souřadnic (osa y je osa souměrnosti).

6. Lichou funkci poznáme tak, že její graf je středově souměrný vzhledem k průsečíku souřadných os (bod $[0;0]$ je střed souměrnosti).

7. Funkci, která není ani sudá, ani lichá, poznáme tak, že její graf není ani osově souměrný vzhledem ke svislé ose, ani středově souměrný vzhledem k počátku soustavy souřadnic[66].

8. Funkci ohraničenou zdola poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = K$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$.

9. Funkci ohraničenou shora poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = L$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý pod přímkou $y = L$.

10. Funkci ohraničenou zdola i shora poznáme tak, že existují konstantní funkce $y = K$ a $y = L$ rovnoběžné s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$ a pod přímkou $y = L$.

11. To, že funkce f je prostá (injektivní), poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy nejvýše v jednom bodě.

12. To, že funkce f je surjektivní, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x vždy protnou její graf v nějakém bodě (aspoň jednom).

13. To, že funkce f je bijekce R na R, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy právě v jednom bodě.

14. Pokud je naším úkolem nakreslit funkci inverzní f^{-1} k funkci f, tak můžeme využít faktu, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné vzhledem ke grafu lineární funkce $y = x$[67].

15. To, že funkce je periodická, poznáme z jejího grafu tak, že část grafu odpovídající délce nejmenší periody na vodorovné ose se opakuje v tom smyslu, že rovnoběžky s osou x protínají graf funkce v nekonečně mnoha bodech, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna násobku této nejmenší periody.

[66] Aby to funkci ani sudé, ani liché nebylo líto, tak pokud je její definiční obor středově symetrický vzhledem k počátku a funkce je dostatečně slušná, tedy například spojitá, lze ji vyjádřit jako součet dvou (spojitých!) funkcí, z nichž jedna je sudá a druhá lichá – tedy z každé spojité funkce na vhodném definičním oboru lze separovat dvě hodnoty, z nichž jedna přispívá do sudosti a druhá do lichosti. Tato separace funkce na sudou a lichou část ovšem nepatří do základních dovedností, jimiž se budeme zabývat.

[67] To plyne mimo jiné z toho faktu, že při hledání inverzní funkce zaměňujeme x za y ve funkčním předpisu $y = f(x)$ a vyjadřujeme proměnnou x jako funkci proměnné y, a tedy oba grafy jsou „zaměnitelné“ = osově symetrické vzhledem k této „ose zaměnitelnosti“ $y = x$.

V této a následující kapitole rychle projdeme funkce některých elementárních typů a zopakujeme dovednosti shrnuté do následujícího příkladu:

přehled úkolů pro rozbor funkce $f(x)$:

a) Určete $D(f)$.

b) Určete $H(f)$.

c) Určete intervaly, na kterých je funkce rostoucí (klesající), nalezněte její lokální extrémy.

d) Určete, zda je funkce sudá, lichá, nebo není ani sudá, ani lichá.

e) Určete zda je funkce ohraničená (zhola nebo shora).

f) Určete, zda je funkce prostá – pokud ano, tak vyjádřete funkcí k ní inverzní.

g) Určete, zda je funkce periodická – pokud ano, najděte délku její nejmenší periody.

h) Nakreslete graf funkce f.

A) Lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$

Grafem lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$, kde a, b jsou pevně zvolené konstanty, je přímka, tj. se zde jen odkážeme na analytickou geometrii, která se přímkami podrobně zabývá[68]. Studenti by měli umět najít rovnici přímky, která prochází dvěma zadanými body.

B) Funkce s absolutními hodnotami

Těmito funkcemi se v této fázi také nebudeme zabývat, blíže lze nalézt řadu věcí v [9], str. 41-56. Zejména u funkcí, ve kterých se vyskytují absolutní hodnoty, s velkým úspěchem využijeme faktu, že některé z těchto funkcí jsou sudé – pokud například víme, že funkce f je sudá a $D(f) = R$, můžeme na základě znalosti grafu funkce na intervalu $(0; \infty)$ jedoduše dokreslit její graf pouhým překlopením v osové souměrnosti s osou y[69].

[68] Nebo na učebnici [9], str. 23-40

[69] Každá funkce, ve které se neznámá proměnná vyskytuje pouze ve tvaru $|x|$, je sudá. Například $f(x) = \frac{|x|}{|x|+2}$ je sudá, protože platí $\frac{|-x|}{|-x|+2} = \frac{|x|}{|x|+2}$. Zkuste si cvičně nakreslit její graf po absolvování opakování funkcí typu D = lineárně lomených funkcí.

11.3 Cvičení – některé elementární funkce

Podívejme se na některé typy elementárních funkcí, které jsou skutečně důležité – procvičíme na nich pojmy z této kapitoly:

C) Kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$

Podrobněji viz [9], str. 56-71. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9], některé příklady jsou řešené v jejím textu, u většiny neřešených příkladů je uveden výsledek na konci knihy [9]):

- grafy kvadratických funkcí (paraboly):
  - str. 61 ... graf funkce $y = a \cdot x^2$ pro různé hodnoty konstanty a;
  - str. 64 ... graf funkce $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$;
  - příklad 4.9 na str. 67;
- řešení kvadratických nerovnic:
  - str. 69, př. 1: řešte v R:
$$2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1;$$
  - příklad 4.23 na str. 71.

D) Lineárně lomená funkce $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Podrobněji viz [9], str. 72-84. Lineárně lomená funkce je vlastně podílem dvou lineárních funkcí, odtud její název. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- str. 77 ... graf funkce $y = \frac{k}{x}$ pro různé hodnoty konstanty k;
- str. 78-80 ... obecnější grafy lineárně lomených funkcí – příklady 1 a 2;
- str. 82, příklad 5.9 ... grafy dalších typů, je důležité všechny nakreslit;

E) Mocninné funkce $f(x) = x^n$ a funkce k nim inverzní

Podrobněji viz [9], str. 85-116. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Kreslení grafů mocninné funkce:
  - str. 87 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in N$;
  - str. 90 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in Z^-$;
  - str. 91, příklad 6.7;
- Hledání inverzní funkce – v každém z následujících příkladů by se hodil obrázek obou funkcí f a f^{-1} v jednom grafu, aby bylo patrno, že oba grafy jsou osově souměrné vzhledem k ose souměrnosti $y = x$:

– str. 95 … nalezněte funkci inverzní k funkci $y = 3x - 2$ pro $D(f) = \langle -1; 2\rangle$. Včetně obou funkcí f a f^{-1} v jednom grafu.
– nalezněte inverzní funkci k funkci $y = (x-2)^2 + 3$ a) pro $D(f) = (-\infty, 2\rangle$; b) pro $D(f) = \langle 2, \infty)$.
– nalezněte inverzní funkci k funkci $y = x^3$ pro $D(f) = R$.

F) Exponenciální ($f(x) = a^x$) a logaritmické ($f(x) = \log_a(x)$) funkce

Podrobněji viz [9], str. 117-150. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Str. 129, obr. 7.7: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (0; 1)$.
- Str. 129, obr. 7.6: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (1; \infty)$. Pro zapamatování si správného spárování grafů souvisejících v této a minulé odrážce platí princip, který lze snadno dokázat, že totiž **inverzní funkce k rostoucí funkci je zase rostoucí** – a analogicky **inverzní funkce ke klesající funkci je zase klesající**.
- str. 122, př. 1, př. 2 … porovnávání hodnot, které využívá znalostí o grafech funkce exponenciální;
- str. 124, př. 7.8.a) … kreslení grafu funkce exponeciální;
- definice logaritmu:

  $$\log_a x = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = x.$$

  Pak následující příklady:

  – str. 132, příklad 1: $\log_2 8 = \ldots$
  – str. 133, příklad 2: $\log_{10} 0{,}01 = \ldots$
  – str. 134, příklad 4: $\log_8 t = 3 \;\Rightarrow t = \ldots$
  – str. 134, příklad 5: $\log_a 100 = 2 \;\Rightarrow a = \ldots$
- str. 131, příklad 7.16 … příklad na porovnávání hodnot;
- str. 131, příklad 7.18 … logaritmické nerovnice.
- str. 134, příklady 7.23, 7.26 … výpočet hodnot, jednoduché logaritmické rovnice.
- str. 135-136 … věty o logaritmech: protože logaritmy jsou vlastně mocniny, tak z pravidel pro mocniny vyplývají i pravidla pro logaritmy:

$$\begin{aligned} \log_a(r \cdot s) &= \log_a r + \log_a s \\ \log_a\left(\frac{r}{s}\right) &= \log_a r - \log_a s \\ \log_a\left(r^s\right) &= s \cdot \log_a r \end{aligned}$$

- Str. 136, příklad 1 ... úprava výrazu s logaritmy (pomocí výše uvedených vzorců);
- str. 138, př. 7.30 ... další počítání s logaritmy podle vzorců;
- Mezi logaritmy různých základů existuje vztah, který převádí logaritmus jistého základu na logaritmus jiného základu. Z těchto vzorců se nám bude hodit speciálně převod všech základů na logaritmus o tzv. přirozeném základu (označení 37)

$$\ln x := \log_e x,$$

kde $e = 2{,}718281828459\ldots$ je Eulerovo číslo, o kterém už byla řeč v kapitole 10. Převodní vzorec je tvaru

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(vzorec lze zapamatovat tím způsobem, že ve funkci $\log_a x$ píšeme v jistém smyslu x nad hodnotu a, respektive a je napsáno v dolním indexu – podobně ve zlomku na pravé straně se vyskytuje podíl funkcí ln a opět argument x se vyskytuje graficky nad argumentem a)[70].

- A ještě poslední označení (označení 38): pokud u funkce $\log x$ není uveden žádný základ, zpravidla se jedná o

$$\log x := \log_{10} x$$

(není to vždy pravidlem, v některých učebnicích se výrazem $\log x$ označuje přirozený logaritmus – v tom případě by to ovšem učebnice měla dát čtenáři vědět; v tomto textu $\log x$ znamená logaritmus o základu 10 a pro přirozený logaritmus budeme užívat jeho klasickou značku $\ln x$).

[70]Tento převodní vzorec budou studenti potřebovat v předmětu matematická analýza – při derivaci či integraci logaritmů různých základů obvykle převádíme na základ přirozený, Eulerovo číslo, a pak teprve provádíme integraci či derivaci. Hodí se nám přitom vědět, že $\ln a$ je konstanta, protože základ a se nemění, tak proto s $\ln a$ zacházíme při integraci či derivaci stejně jako s jakoukoli jinou konstantou. Také díky vzorci je možné si pamatovat (nebo mít tabulky) pouze logaritmy o přirozeném základu a všechny logaritmy o ostatních základech pomocí toho přirozeného základu spočítat.

12 Goniometrické funkce

12.1 Warm-up

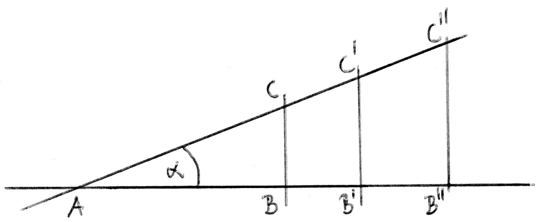
Ve 12. týdnu: prověrka (c). Případně warm-up v třináctém týdnu podzimního semestru: Ohlasy z prověrky (c). Mapa pojmů představených v předmětu Základy matematiky (viz příprava).

12.2 Přednáška

Odkud se vzaly goniometrické funkce? Označení pochází z řečtiny: *hé gé* … země, odtud „geometrie“ = měření země, zeměměřičství; dále *hé gónia* … úhel, roh, úhelný kámen, tj. odtud „goniometrie“ = měření úhlů, úhloměřičství.

A. Označení goniometrických funkcí

Pokud přeskočíme definici úhlu ze základní školy a podíváme se na středoškolskou definici goniometrických funkcí, mohla by se odehrávat následovně: Když se podíváme na pravoúhlé trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$, které jsou podobné díky všem třem úhlům navzájem shodným (viz obrázek 27, trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$),



Obrázek 27: Pravoúhlé trojúhelníky, které jsou podobné.

vidíme, že například poměr délky odvěsny protilehlé vrcholu A ku délce přepony se nemění a zůstává ve všech třech pravoúhlých trojúhelnících stejný – a je tedy spíše vlastností úhlu α sklonu přepony vůči vodorovné odvěsně, než vlastností délek; označme tento poměr $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha := \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|AC'|} = \frac{|B''C''|}{|AC''|}.$$

V praxi pak například lze určit z těchto vztahů $|BC| = |AC| \cdot \sin\alpha$, tj. délku jedné strany pravoúhlého trojůhelníka lze vypočítat pomocí délky jiné strany a hodnoty $\sin\alpha$.

Podobně v obrázku vidíme další poměry stran, které se nemění, pokud zachováváme všechny úhly trojúhelníka stejné, přičemž jeden z nich je pravý, a sice

$$\begin{aligned} \cos\alpha &:= \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB''|}{|AC''|}, \\ \operatorname{tg}\alpha &:= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|AB'|} = \frac{|B''C''|}{|AB''|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \end{aligned}$$

$$\text{cotg } \alpha \quad := \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB''|}{|B''C''|} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

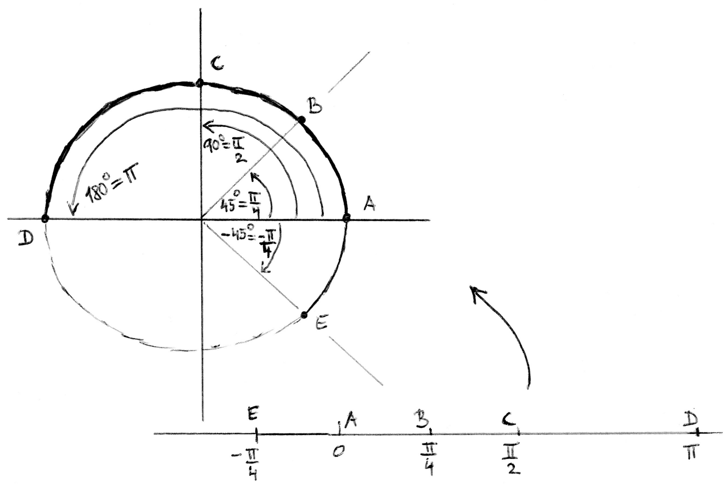
(v daných rovnostech jsou uvedeny jak definiční vztahy :=, tak z nich vyplývající vztahy mezi jednotlivými definicemi, které plynou z toho, že u funkcí tg α, cotg α dáváme funkce $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ do vzájemného poměru). Tím způsobem jsme definovali funkce popisující jistou vlastnost ostrých úhlů, tj. úhlů, které mohou vzniknout jako vnitřní úhly při vrcholu A v pravoúhlém trojůhelníku ABC.

B. Dvě metody měření úhlů

Při měření a popisu úhlů existují dvě základní metody neboli míry:

a) Stupňová míra … plnému úhlu se přisoudí velikost 360°, pravému úhlu velikost 90°, plnému úhlu velikost 180°, atd.

b) Oblouková míra = délka oblouku:



Obrázek 28: Namotání reálné osy na kružnici o poloměru 1.

Když reálnou číselnou osu „namotáme“[71] na jednotkovou kružnici se středem v počátku a poloměrem 1, na této kružnici dostáváme obrazy reálných čísel – nyní dostáváme úhly určené na jedné straně polopřímkou určenou kladným směrem vodorovné osy, na druhé straně polopřímkou vycházející z počátku, která prochází obrazem reálného čísla „namotaného“ na jednotkové kružnici. Obloukové míře se někdy říká i radiánová míra, kde jednotka jeden radián odpovídá úhlu s vrcholem v počátku a rameny procházejícími obrazy bodů 0 a 1 na jednotkové kružnici (úhel o velikosti jednoho radiánu tedy vytíná na jednotkové kružnici popsané v předchozí konstrukci oblouk délky 1).

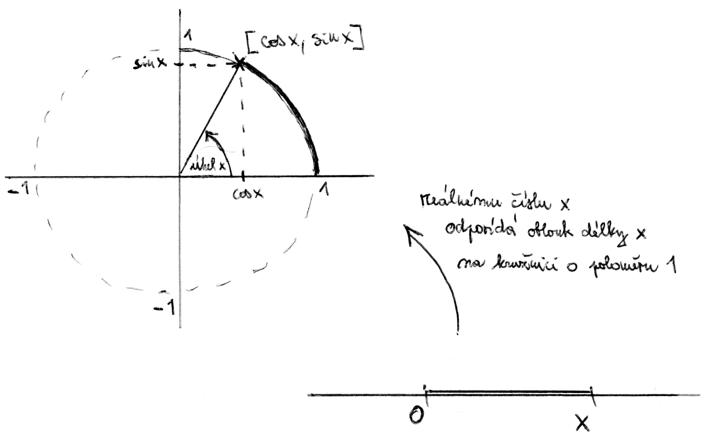
[71] Na obě strany donekonečna, tj. to namotávání by nám zabralo hodně času – nicméně toto přibližné vyjadřování je formální, ne že bychom to nekonečné namotávání museli prakticky provést.

V těchto dvou mírách potom

hodnotě 45° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{4}$ rad,
hodnotě 90° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{2}$ rad,
hodnotě 180° odpovídá oblouková délka π rad,
atd.

C. Rozšířená definice goniometrických funkcí

Tímto „namotáním“ reálné číselné osy na jednotkovou kružnici, která se dále nachází také v rovině, ve které jsme umístili kartézskou soustavu souřadnic (= vodorovnou a svislou osu) s počátkem ve středu kružnice, lze rozšířit definici goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ (a tím i tg x, cotg x) pro jakékoli reálné x následovně – viz obrázek 29 :



Obrázek 29: Rozšíření definice funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro libovolné reálné x.

Souřadnice obrazu bodu x po namotání na jednotkovou kružnici jsou v kartézské soustavě bodů v rovině, ve které se kružnice nachází, rovny $[\cos x, \sin x]$.

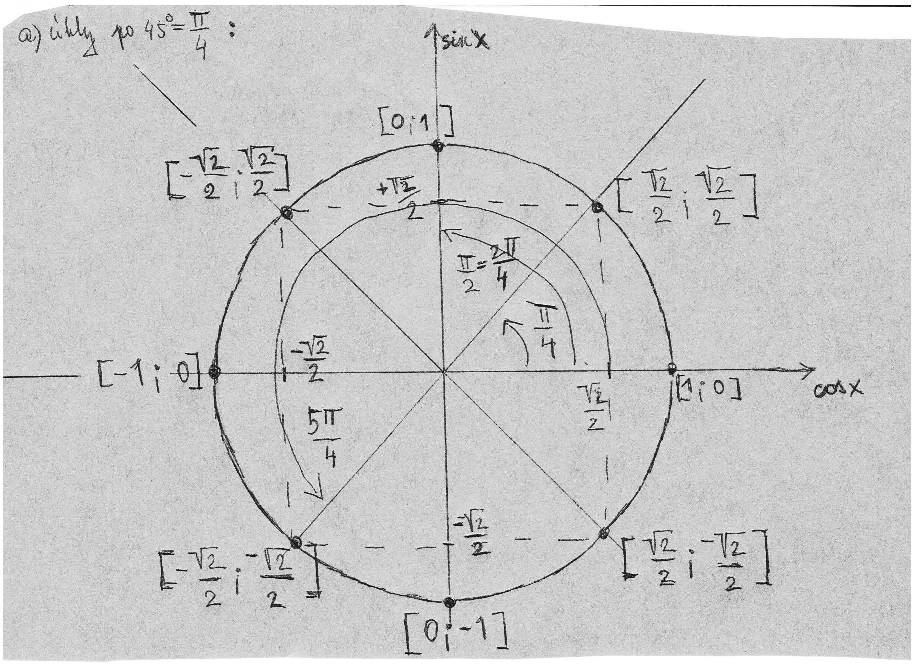
D. Význačné hodnoty goniometrických funkcí

Je důležité pamatovat si hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly x, minimálně hodnoty v tabulce:

x (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.
cotg x	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0

Zapamatování údajů z předchozí tabulky právě usnadňuje geometrický význam těchto hodnot jako souřadnic $[\cos x, \sin x]$ obrazu bodu x při namotání reálné osy na jednotkovou kružnici[72].

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$ jsou uvedeny na obrázku 30:



Obrázek 30: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$.

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$ jsou uvedeny na obrázku 31:

E. Graf a vlastnosti goniometrických funkcí

Podívejme se nyní na grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x s definičním oborem rozšířeným pro všechna $x \in R$ a z grafů se pokusíme vyčíst jejich vlastnosti.

- Vlastnosti funkce $\sin x$ vyčtené z jejího grafu:

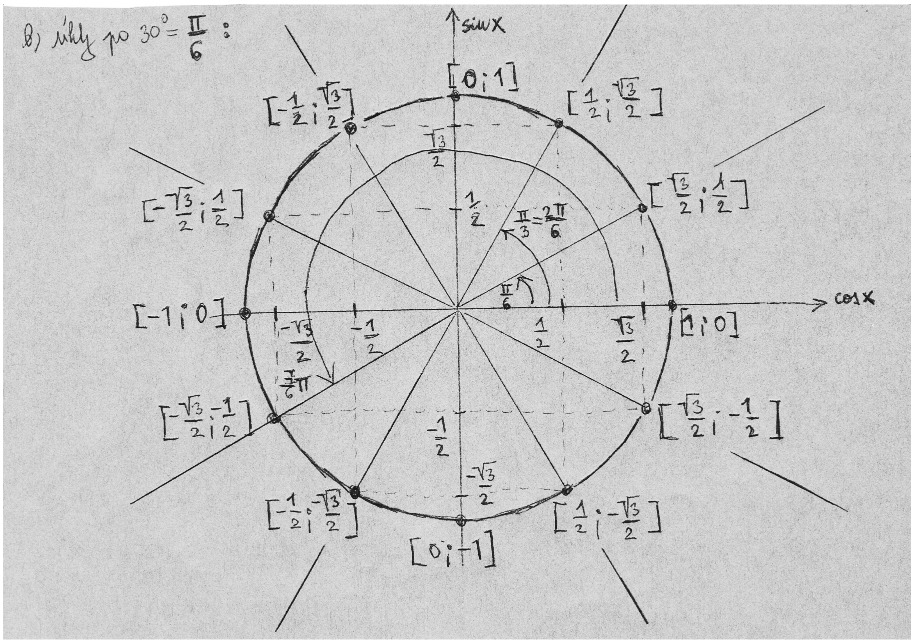
  a) Graf funkce $\sin x$ vidíme na obrázku 32.

  b) $D(f) = R$.

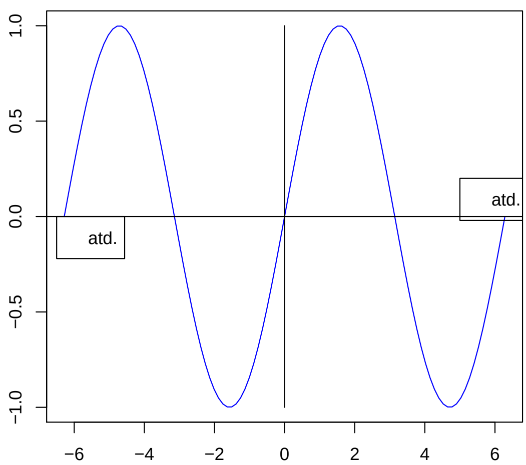
  c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

  d) Funkce $\sin x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

[72] Pozor, záleží na pořadí, první souřadnice bodů na jednotkové kružnici je rovna hodnotě $\cos x$, druhá souřadnice hodnotě $\sin x$.



Obrázek 31: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$.



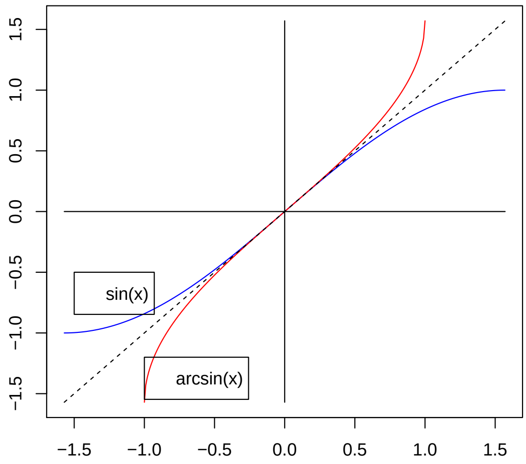
Obrázek 32: Graf funkce $f(x) = \sin x$.

e) Funkce $\sin x$ je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí $\sin(-x) = -\sin x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\sin x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

g) Funkce $\sin x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \sin x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\sin x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \sin x$ pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Grafy této funkce $\sin x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 33:



Obrázek 33: $f(x) = \sin x$ (modře) pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

- Vlastnosti funkce $\cos x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce $\cos x$ vidíme na obrázku 34.

b) $D(f) = R$.

c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

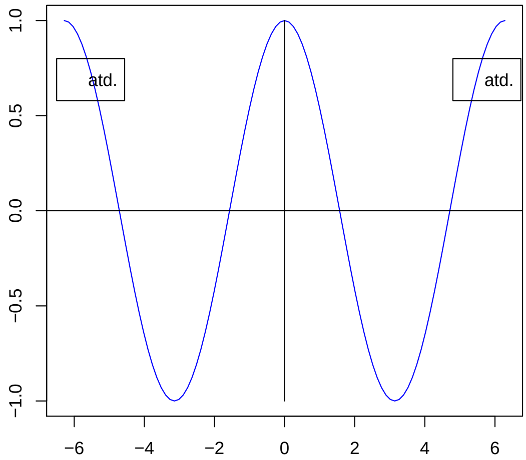
d) Funkce $\cos x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\pi + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $0 + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

e) Funkce $\cos x$ je lichá, protože její graf je osově souměrný podle svislé osy y, tj. platí $\cos(-x) = \cos x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\cos x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

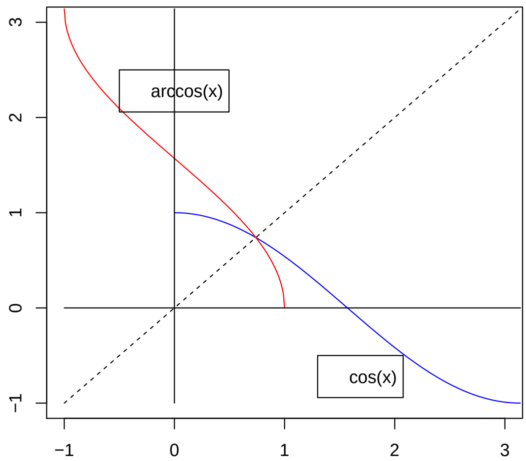
g) Funkce $\cos x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \cos x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno



Obrázek 34: Graf funkce $f(x) = \cos x$.

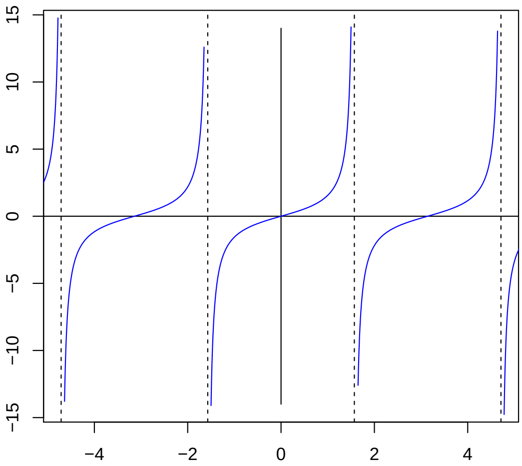
k funkci $\cos x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arccos } x$. Grafy funkce $\cos x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 35:



Obrázek 35: Graf $f(x) = \cos x$ (modře) pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arccos } x$.

- Vlastnosti funkce $\text{tg } x$ vyčtené z jejího grafu:

  a) Graf funkce $\text{tg } x$ vidíme na obrázku 36.



Obrázek 36: Graf funkce $f(x) = \mathrm{tg}\, x$.

b) $D(f) = R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

d) Funkce tg x je rostoucí na každém z intervalů $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a nemá lokální extrémy.

e) Funkce tg x je lichá[73], protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí tg $(-x) = -$tg x pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce tg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce tg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci tg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\, x$. Grafy funkce tg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 37:

- Vlastnosti funkce cotg x vyčtené z jejího grafu:

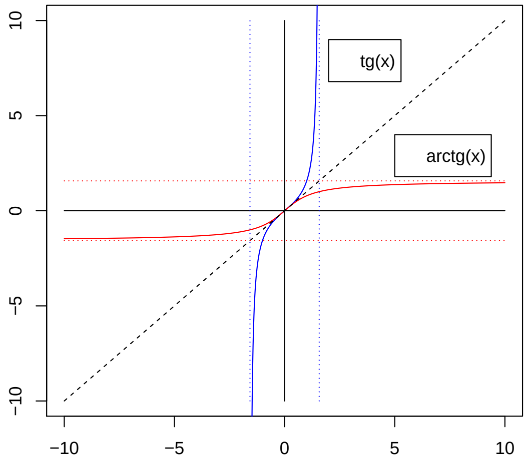
a) Graf funkce cotg x vidíme na obrázku 38.

b) $D(f) = R - \{0 + k\pi\}$.

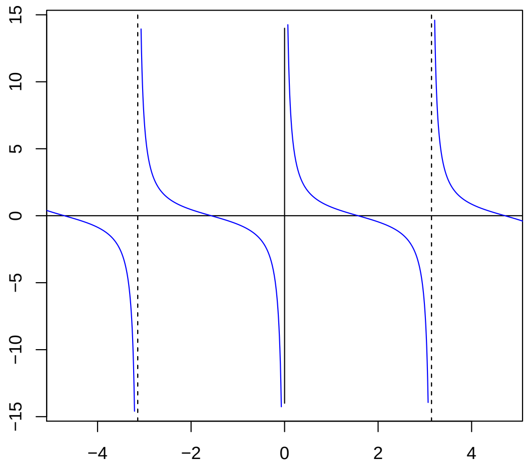
c) $H(f) = R$.

d) Funkce cotg x je klesající na každém z intervalů $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ a nemá lokální extrémy.

[73]Součin nebo podíl dvou funkcí, z nichž jedna je lichá a druhá sudá, je lichá funkce … díky této vlastnosti víme, že funkce tg x i cotg x jsou liché.



Obrázek 37: Graf fukce $f(x) = \text{tg}\ x$ (modře) pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arctg}\ x$.



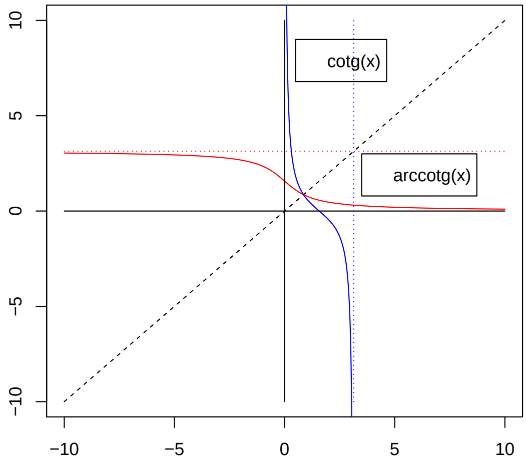
Obrázek 38: Graf funkce $f(x) = \text{cotg}\ x$.

e) Funkce cotg x je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí cotg $(-x) = -$cotg x pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce cotg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce cotg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) = \text{cotg}\ x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci cotg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \text{cotg } x$ pro $x \in (0;\pi)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$. Grafy funkce cotg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 39:



Obrázek 39: Graf fukce $f(x) = \text{cotg } x$ (modře) pro $x \in (0;\pi)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$.

Zapamatovat si průběh grafů zúžených goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních lze pomocí následujících dvou faktů: a) inverzní funkce k rostoucí funkci je opět rostoucí (jak je to u funkcí zúžený $\sin x$ a zúžený tg x); inverzní funkce ke klesající funkci je opět klesající (jak je to u funkcí zúžený $\cos x$ a zúžený cotg x); b) $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(F^{-1})$ ... platí pro všechny čtyři zúžené goniometrické funkce.

12.3 Cvičení

Projděme si důležité pertie cvičení ke goniometrickým funkcím podle učebnice [10] (dané učebnice se týkají i následující odkazy na strany a čísla příkladů)[74]:

1. Velikost úhlu ve stupňové a obloukové míře
   (a) Str. 21-23, řešený př. 1.
   (b) Převodní vztahy mezi stupni a radiány získáme z trojčlenky podle toho, zda se nám líbí více vzorec se 180° nebo 360°:

$$1 \text{ rad} \ldots \qquad \frac{\pi}{180} \text{ stupnů} = \frac{2\pi}{360} \text{ stupňů};$$

[74]Základní uvedení do stupňové a obloukové míry úhlů a do funkcí $\sin x$, arcsin x, $\cos x$, arccos x, tg x, arctg x, cotg x, arccotg x viz přednáška v této kapitole.

$$x \text{ rad} \dots \qquad \alpha \text{ stupňů}.$$

Odtud získáme vzorec pro převod stupňů na radiány

$$\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi} = \frac{x \cdot 360}{2\pi}$$

nebo radiány na stupně

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}.$$

(c) Str. 24, příklady 5 a 6 … konkrétní převod míry úhlu z radiánů na stupně nebo naopak. Další příklady str. 25, př. 2.10.a), 2.11.a).

2. Orientovaný úhel a jeho vlastnosti
   (a) Str. 27-28 … základní velikost orientovaného úhlu: $0 \le \alpha < 2\pi$ v obloukové míře, respektive $0° \le \alpha < 360°$ v úhlové míře;
   (b) orientovaný úhel, který nemá základní velikost, lze převést na úhel se základní velikostí odečtením či přičtením vhodného násobku 2π, respektive v úhlové míře vhodného násobku $360°$;
   (c) př. 1-str. 29, další příklady: 2.19-str.32, 2.20-str.33, 2.21, 2.22.
3. Vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$
   (a) Řešené příklady 6-str.37 a 1-str.38-39;
   (b) další příklady: str.40-41, příklady 2.24 až 2.33.
4. Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$
   (a) Str. 42 … grafy; str. 43 – př. 1, str. 44 – př. 2, str. 46 – př. 3, str. 48 – př. 2.39;
   (b) další příklady: str. 49 – př. 2.40.
5. Grafy funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$
   (a) Str. 57-58 … grafy; str. 55 – příklad 1;
   (b) str. 60 – př. 2.43 až 2.49.
6. Grafy a vlastnosti cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$[75]
   (a) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$;
   (b) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arccos(3x-2)$;
   (c) Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccotg}(2x-5) + \pi$.
7. Goniometrické rovnice
   (a) Str. 61 – příklad 1 … využití jednotkové kružnice;
   (b) další příklady: str.68 – př. 2.52, str. 69 – př. 2.57.
8. Úlohy k opakování – str. 69-70, příklady 2.60 až 2.68.

[75] Následující tři příklady nejsou vzaty z učebnice [10], a tedy budou vyřešeny na přednášce, to make sure that the students know the results. Výsledky ostatních příkladů viz závěr učebnice [10].

13 Výsledky některých příkladů

13.1 Výsledky ke kapitole 6 – relace

Ad příklad 6.1: reflexivní relace je reprezentována smyčkami u všech prvků (jedničkami na celé hlavní diagonále), antireflexivní relace nepřítomností smyček (nepřítomností jedniček na hlavní diagonále), symetrická relace má pro každou šipku též šipku v opačném směru, antisymetrická relace nemůže mít oboustranné šípky mezi dvěma různými prvky, tranzitivní relace musí pro např. šipku od a do b a od b do c obsahovat i šipku od a do c.

Ad příklad 6.2: Studentům by mělo být jasné, že např. antireflexivní ($anti - 12$) relace není negací relace reflexivní (11), ale úplným protipólem reflexivní relace – tj. že existují relace s nějakou smyčkou, které nejsou ani reflexivní, ani antireflexivní. Podobně u tranzitivní relace nemusí být všechny možné tranzitivní spoje prvky relace, ale jen ty, které jsou vynuceny šipkami v posloupnosti tří prvků (tj. $x\rho y$ a $y\rho z$ vynucují šipku $x\rho z$).

Ad příklad 6.3: R je reflexivní (11) a tranzitivní (13). Je důležité si všimnout, že relace R není antisymetrická, protože například $3|(-3)$ a $(-3)|3$, ale odtud neplyne $3 = -3$. Není ani symetrická, protože pokud $3|6$, neplyne odtud, že $6|3$.

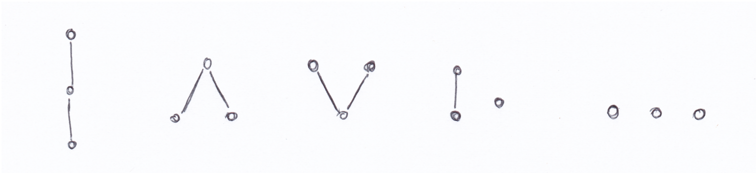
Ad příklad 6.4: ad a) může, ale jen relace, která je podmnožinou reflexivní relace, bez šipek mezi různými prvky;

Ad příklad 6.5: ad a) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti-12$) a tranzitivní (13).
ad b) R je reflexivní (11), symetrická (12) a tranzitivní (13).
ad c) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad d) R je pouze reflexivní (11), jinak nic rozumného nelze říci.

13.2 Výsledky ke kapitole 7 – uspořádané množiny

Ad příklad 7.1: Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní – takže je to podle definice, která bude následovat, uspořádání!!

Ad příklad 7.2: Neizomorfních posetů na tříprvkové množině je pět – viz obrázek 40:



Obrázek 40: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) tříprvkové posety.

Ad příklad 7.3: ad a) $\sup\{a, d\} = c$, $\sup\{e, f\} = e$.
ad b) $\sup M$ neexistuje, protože množina horních závor $\{b, c, d\}$ nemá nejmenší prvek.

Ad příklad 7.4: i)

$$\trianglelefteq_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

$$\trianglelefteq_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

ii)

$$\triangleleft_a = \{[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

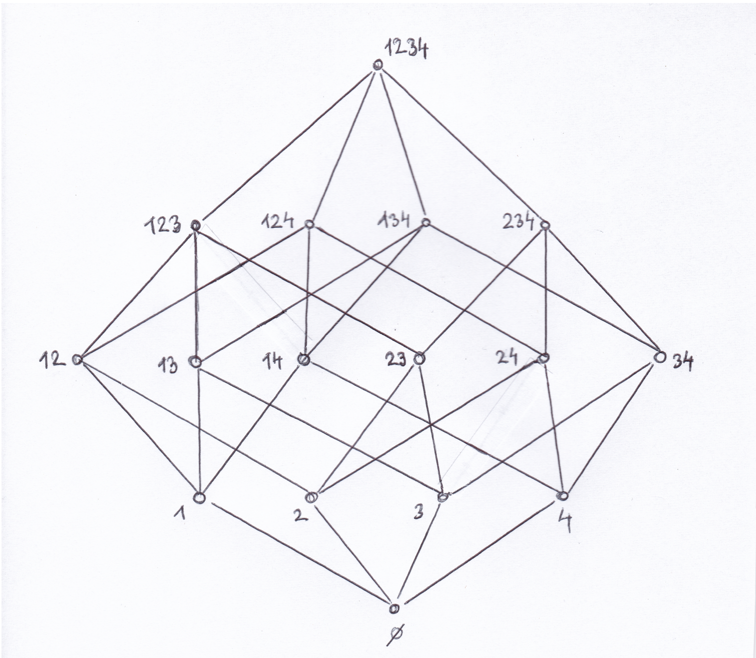
$$\triangleleft_b = \{[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

iii)

$$\prec_a = \{[1,2],[2,3],[1,4],[4,3]\};$$

$$\prec_b = \{[3,4],[4,1],[4,2]\}.$$

Ad příklad 7.5: Jedná se o poset zobrazený na titulní straně textu [16]: obrázek 41.

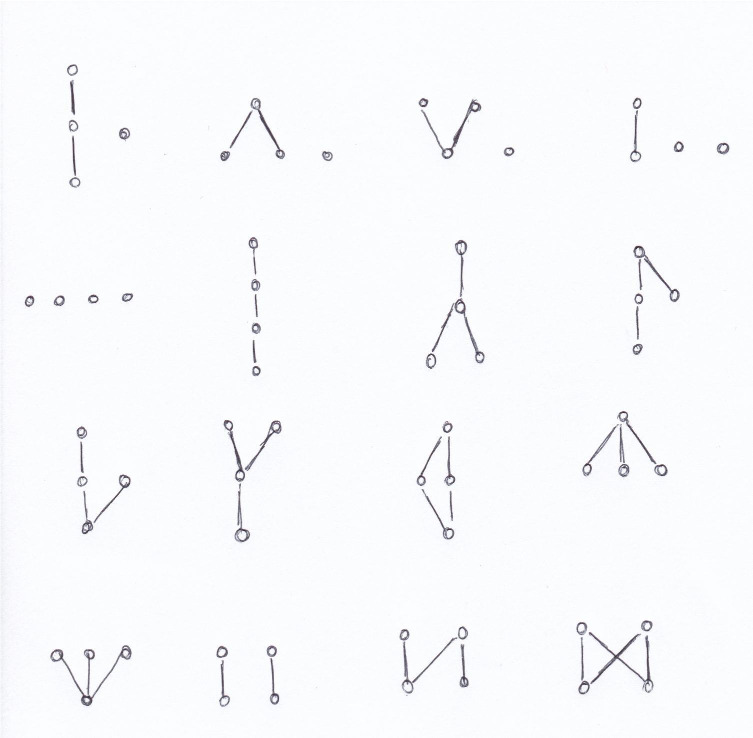


Obrázek 41: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1,2,3,4\}$.

Ad příklad 7.6: Navzájem různých posetů (až na přeznačení prvků) na čtyřprvkové množině je šestnáct – viz obrázek 42.

13.3 Výsledky ke kapitole 8 – uspořádané množiny II – operace průsek a spojení

Ad příklad 8.1: ad i) $4 \sqcap 7 = 2$, $6 \sqcap 2 = 2$, $7 \sqcap 7 = 7$, $3 \sqcup 7 = 6$, $6 \sqcup 8 = 6$; jedná se o průsekový i spojový polosvaz;



Obrázek 42: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) čtyřprvkové posety.

ad ii) $6 \sqcap 3 = 7$, $6 \sqcup 3$ neexistuje. Jedná se o průsekový polosvaz, který není spojovým polosvazem

ad iii) $5 \sqcup 7 = 10$, $2 \sqcap 3$ neexistuje, $2 \sqcap 7$ neexistuje. Jedná se o spojový polosvaz, který není průsekovým polosvazem.

ad iv) $4 \sqcap 5$ neexistuje, $2 \sqcup 3$ neexistuje. Tedy daný poset není ani průsekovým, ani spojovým polosvazem.

13.4 Výsledky ke kapitole 9 – ekvivalence a rozklady

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.5 Výsledky ke kapitole 10 – zobrazení

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.6 Výsledky ke kapitole 11 – základní vlastnosti funkcí

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

13.7 Výsledky ke kapitole 12 – goniometrické funkce

K této kapitole dosud nejsou uvedeny žádné příklady s výsledkem.

Seznam literatury:

1 P. Horák: M 1125 Základy matematiky. Elektronický text do analogického předmětu na Přírodovědecké fakultě MU Brno. Počet stran 100 v roce 2013. Tento text pokrývá předmět M0001 Základy matematiky na Pedagogické fakultě asi z poloviny, ale i daná polovina se věnuje záležitostem odlišným od těch, na které je kladen důraz na Pedagogické fakultě.

2 Rediger Thiele: Matematické důkazy. SNTL Praha 1985. Počet stran 160. Představení zákonitostí logického usuzování a dokazování v matematice. Poněkud širší pokrytí tématu logika, kterému jsou v předmětu Základy matematiky věnovány první tři přednášky.

3 Raymond Smullyan: Jak se jmenuje tahle knížka? Zajímavé logické problémy od jednoduchých hádanek pro ZŠ až po složitější logické úlohy, které vyžadují důkladný vysokoškolský rozbor.

4 D.Jordan, P.Smith: Mathematical techniques. Oxford 2008, 4th Edition. V kontextu předmětu Základy matematiky nás z knihy zajímá zatím jen kapitolka 35 – sets (= množiny) na str. 791-800.

5 Eva Nováková: Analýza výsledků soutěže Matematický klokan, Brno 2016. Zajímavá kniha seznamující s mezinárodní soutěží Matematický klokan a rozborem výsledků této soutěže v ČR v kategorii pro 4.-5. třídy ZŠ. Tato kniha dobře uvádí do problematiky didaktiky matematiky na ZŠ: úlohy různého typu, dělení matematiky na různá odvětví, apod.

6 B.Fajmon: Algebra 1 – verze 2016. Doplnění přednášek v předmětu Algebra 1 podle starých osnov, které jsou od roku 2017 změněny, takže některé věci přebývají a některé naopak chybí. Počet stran 66.

7 Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša: Matematika pro primy – úvodní opakování. Prometheus 1997, 2.přepracované vydání. Opakování učiva 1.stupně. Nultá kniha ze série sedmnácti knih pro 2.stupeň ZŠ a nižší ročníky osmiletých gymnázií.

8 Charles Pinter: A book of Abstract Algebra, 2010. Jedná se o reprint druhého vydání z roku 1990. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF MUNI, nicméně autora přednášky Základy matematiky už částečně inspiroval. Je neobyčejně čtivě napsán. Pinter říká, že napsal svou knihu z té pozice, že algebra (a tím i diskrétní matematika) je důležitá a má důležitá uplatnění.

9 O.Odvárko: Funkce, Prometheus 1993. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 3, počet stran 160. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

10 O.Odvárko: Goniometrie, Prometheus 1994. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 7, počet stran 127. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

11 S.Kowal: Matematika pro volné chvíle. Praha 1985, druhé vydání. Kniha, která na velkém množství úloh prochází celou historii matematiky v rámci zajímavých úloh, jejichž řešení uvádí buď v textu, nebo na konci každé kapitoly. Název láká širokou veřejnost, ale řada úloh je vysokoškolské obtížnosti, i když jejich řešení je často proveditelné i na SŠ.

12 P. Drozd – základy práce se softwarem R. Manuál ke stažení z internetu o některých základních funkcích jazyka R, který lze v 1.ročníku VŠ doporučit jako lepší kalkulačku zvládající běžné matematické funkce, a současně jednoduché kreslení obrázků, které lze stáhnout v různých formátech. Program po instalaci funguje offline.

13 J. Koláček: Výuka jazyka R. Rovněž úvod do jazyka R, nyní od vysokoškolského učitele matematiky, což je vhodným doplněním předchozího textu [12].

14 P. Horák: Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I, Brno 2002. Sbírka příkladů ke staršímu vydání textu [1] na Přírodovědecké fakultě MU.

15 Jiří Rosický: Algebra – grupy a okruhy 2000, reprint textu z roku 1985. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF, nicméně jen až jako doplnění čtivější knihy [8].

16 Jan Kopka: Svazy a Booleovy algebry (Ústí nad Labem 1991, zejména str. 19-82). Kolega Kopka napsal svůj text z té pozice, že by rád přehledně a srozumitelně podal přehled pojmů algebry a diskrétní matematiky, aby byla vidět její krása. Kniha je hlubším rozvedením pojmu uspořádaná množina uvedeným v předmětu Základy matematiky.