Kontrolní úkoly ke kapitole zobrazení:

1. Jsou dány množiny A, B: A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které z binárních relací R_1 - R_5 jsou zobrazení z A do B, určete jejich typ a posuďte, zda se jedná o zobrazení prosté:

a) R_1 = {[a,1], [b,2], [d,3]}
b) R_2 = {[a,2], [c,1], [a,2], [b,3]}
c) R_3 = {[a,1], [b,2],[c, 3] [d,1]}
d) R_4 = {[b,3]}
e) R_5 = {[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]}

2. Je dána množina skandinávských států S = {Švédsko, Norsko, Finsko, Dánsko} a množina měst M = {Stockholm, Oslo, Helsinky, Kodaň}. Určete zobrazení množiny S na množinu M a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení prosté.
3. Zjistěte, zda se jedná o zobrazení a určete jeho typ:
    a) každý návštěvník divadla sedí právě na jednom sedadle,
    b) každý žák 3.A dostal na vysvědčení právě jednu známku z matematiky.

4. Uvažujte množinu všech cestujících v jisté tramvaji, množinu všech sedadel v této tramvaji a binární relaci určenou vztahem „osoba X sedí na sedadle Y“. Přemýšlejte o různých situacích v této tramvaji (např. „každý cestující sedí na jednom sedadle a ještě jsou dvě místa volná“) a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny cestujících do množiny sedadel. Pokud ano, určete přesně typ tohoto zobrazení.

5. Na pískovišti si hrají Adélka, Agátka, Anežka, Anička a Alžbětka, které jsou dcerami paní Horákové, Dvořákové a Novákové. Určete, zda relace „každá z žen je matkou jedné z uvedených dívek“ je zobrazení a o který typ se jedná.

Klíč - řešení kontrolních úloh:

1. R_1 - je prosté zobrazení z A na B
   R_2 - není zobrazení (prvek *a* je 1. složkou ve dvou uspořádaných dvojicích
   R_3 = {[a,1], [b,2],[c, 3] [d,1]} - je zobrazení A na B, není prosté (prvkům a, d je přiřazen stejný prvek 1)
   R_4 = {[b,3]} - je prosté zobrazení z A do B
   R_5 = {[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]} - je zobrazení A na B, není prosté (prvkům a, d je přiřazen stejný prvek 2).
2. Zobrazení Z ={[Švédsko, Stockholm], [Norsko, Oslo], [Finsko, Helsinky], [Dánsko, Kodaň]} je prosté zobrazení S na M (zobrazení vzájemně jednoznačné).
3. a) prosté zobrazení množiny návštěvníků divadla do množiny sedadel (je-li vyprodáno, pak na množinu sedadel)
   b) zobrazení množiny žáků do množiny známek (bude-li ve třídě aspoň jedna pětka, pak na množinu známek) není prosté.
4. Jedná se o prosté zobrazení množiny cestujících do množiny sedadel.
5. Relace není zobrazením (některá z matek - vzor má více než jedno dítě - více než dva obrazy).

9 Ekvivalence množin

Cíle

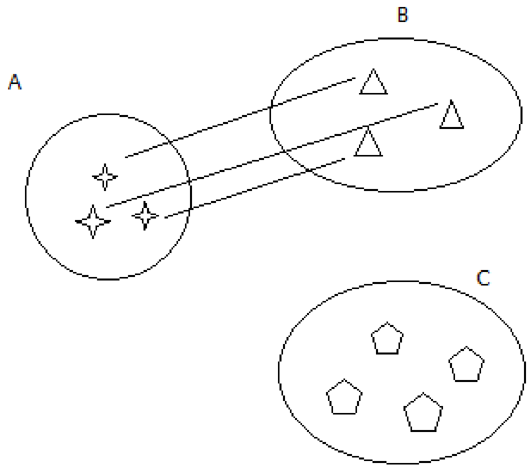
Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat ekvivalentní množiny,
- definovat kardinální číslo,
- definovat přirozené číslo.

Prostudování kapitoly Vám zabere přibližně 2 hodiny.

Důležitá pasáž textu:
Množiny **A**, **B** nazýváme ekvivalentní a píšeme **A** ~ **B**, právě když existuje prosté (vzájemně jednoznačné) zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

Řešený příklad 1:
Na obrázku jsou znázorněny množiny A, B, C. Určete, které z nich jsou navzájem ekvivalentní.



Řešení:
Mezi množinami **A**, **B** existuje prosté zobrazení množiny **A** na množinu **B**, resp. množiny B na množinu A (existuje vzájemně jednoznačné přiřazení A na B, resp. B na A).
Naproti tomu nelze sestrojit prosté zobrazení množiny **B** na množinu **C** a prosté zobrazení množiny **A** na množinu **C**, to znamená, že množiny A a C a B a C navzájem ekvivalentní nejsou.

Povšimněme si, že množiny A a B mají stejný počet prvků, množiny A a C, resp. B a C nemají stejný počet prvků. Jestliže dvě množiny mají stejný počet prvků, říkáme, že jsou navzájem **ekvivalentní**.

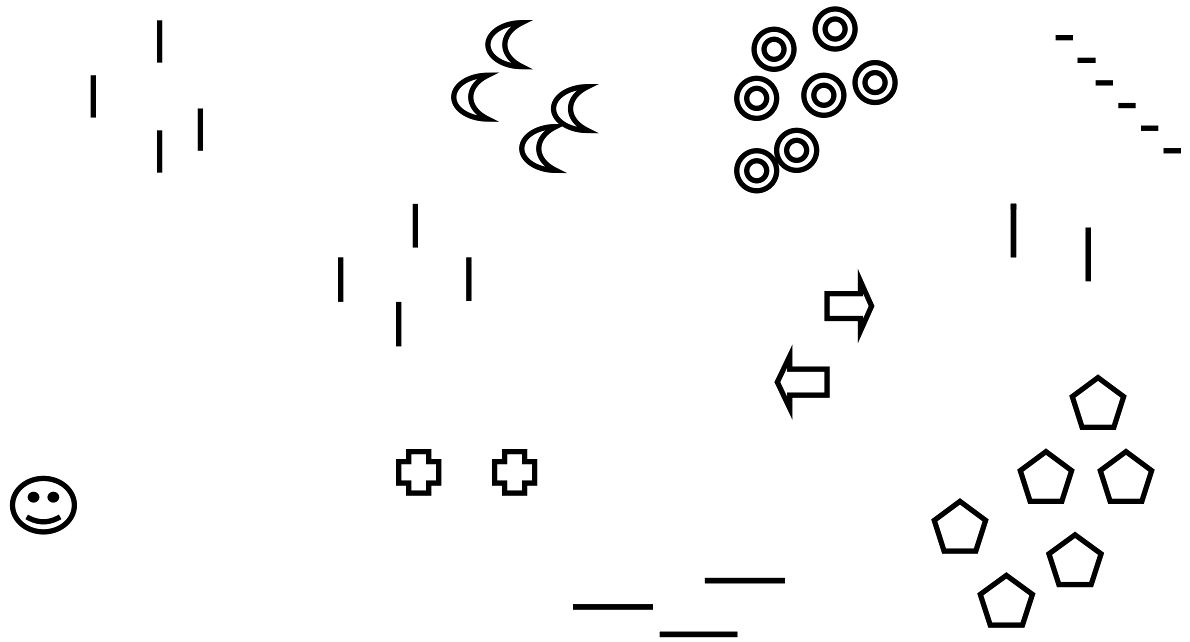
Relace **R** "být ekvivalentní mezi množinami" je relací **ekvivalence (**je reflexivní, symetrická a tranzitivní**)**. Proto k relaci **R** ~ přísluší rozklad systému množin **M** na třídy. V téže třídě rozkladu budou vždy právě všechny množiny, které jsou navzájem ekvivalentní, tj. mají **stejný počet prvků**. Každou třídu rozkladu nazveme **kardinální číslo**.

Řešený příklad 2:
Jsou dány množiny:
A - množina dětských hrdinů knihy Bylo nás pět
B - množina vrcholů pětiúhelníka
C - množina okvětních lístků jabloňového květu

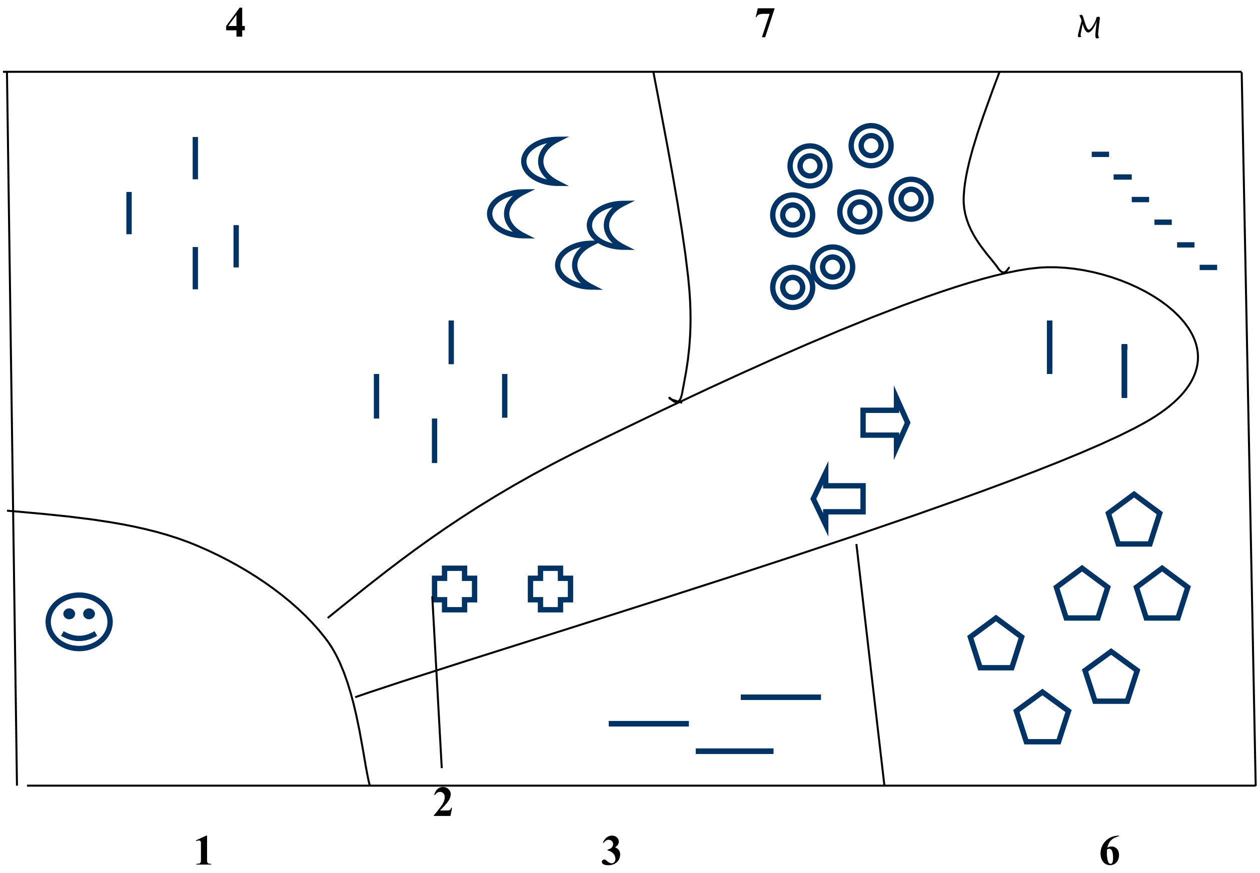
Přesvědčte se, že množiny jsou navzájem ekvivalentní.

Řešení:
Existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B (a obráceně: množiny B na množinu A): každé postavě z knihy přiřadíme právě jeden vrchol pětiúhelníka, zobrazení je vzájemně jednoznačné, obě množiny mají stejný počet prvků.
Stejně posoudíme i relace mezi A a C, B a C, A a D, B a D, C a D. Ve všech případech se jedná o vzájemně jednoznačná zobrazení. Každé dvě množiny jsou navzájem ekvivalentní, patří do téže třídy rozkladu $T_1 = \{A, B, C, D\}$, mají stejné kardinální číslo (5).

Řešený příklad 3:
Rozhodněte, které množiny tvarů jsou navzájem ekvivalentní.
*(Připomeňte si: Dvě množiny jsou **ekvivalentní**, právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení jedné množiny na druhou.)*



Řešení:
Vyznačte např. vzájemně jednoznačné zobrazení množiny trojúhelníků na množinu čtverců.



Kardinální čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních množin.. Místo pojmu „kardinální číslo“ se též užívá pojem „mohutnost množiny“, což vystihuje společnou vlastnost navzájem ekvivalentních množin. Ekvivalentní množiny mají stejné kardinální číslo, stejnou mohutnost. U konečných množin to znamená, že mají stejný počet prvků.
Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozená čísla.**
Např. kardinální číslo (třídu) množin, do které patří v naší úloze množina trojúhelníků, označíme 4.