

x_i a y_i tato pořadí přiřadit. Jestliže dvě čísla v řadě hodnot x_i , resp. y_i jsou stejná, přiřadíme jim průměrnou hodnotu příslušných pořadí. Obdobně provedeme tuto úpravu pro více stejných hodnot. V každé řadě nesmí být více než 1/5 pozorování stejných. Pokud se tak stane, musíme celý výpočet upravit.

PŘÍKLAD 7.7

Výpočet Spearmanova korelačního koeficientu

Výpočet r_s si ukážeme pro hodnoty z tabulky 7.10:

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 26}{10(100 - 1)} = 0,84$$

Tab. 7.10 Příklad postupu při výpočtu Spearmanova korelačního koeficientu pořadí

x	y	R_x	R_y	$D = R_x - R_y$	$D \times D$
187	72	10,00	6,50	3,50	12,25
170	60	1,00	1,00	0,00	0,00
180	73	6,50	8,00	-1,50	2,25
184	74	8,00	9,00	-1,00	1,00
178	72	5,00	6,50	-1,50	2,25
180	70	6,50	4,50	2,00	4,00
172	62	2,00	2,00	0,00	0,00
176	70	3,00	4,50	-1,50	2,25
186	80	9,00	10,00	-1,00	1,00
177	67	4,00	3,00	1,00	1,00
Součet					26,00

Pro posouzení statistické významnosti koeficientu r_s slouží tabulka X z přílohy B. Přesahuje-li hodnota $|r_s|$ tabulkovou hodnotu pro daný počet párů měření n a hladinu významnosti, můžeme vztah považovat za prokázáný. Pro náš příklad, testujeme-li dvoustrannou hypotézu $\rho_s = 0$ na hladině 1%, je tabulková hodnota 0,746 (tabulka obsahuje kritické hodnoty pro dvoustranné testy). Vztah mezi oběma proměnnými z příkladu je tedy prokázán. U větších výběrů ($n \geq 30$) lze na hladině α použít přibližný z -test hypotézy $\rho_s = 0$:

$$z = |r_s| \sqrt{n - 1}$$

Spearmanův koeficient r_s někdy používáme pro odhad Pearsonova korelačního koeficientu, resp. r , jelikož pro dvojrozměrně normálně rozdělené proměnné X a Y platí přibližný vztah $\rho = 2 \sin(0,523\rho_s)$. Tento vzorec je upřesněním přibližně platného vztahu $\rho = \rho_s$. Podle Spearmana lze jeho koeficient korelace s výhodou uplatnit v situacích, kdy:

- potřebujeme rychlý a rezistentní odhad korelačního koeficientu r ;
- testujeme schopnost zkoumané osoby správně řadit objekty nebo vlastnosti podle určitých hledisek tak, že ji necháme seřadit tyto objekty nebo vlastnosti a toto seřazení pak srovnáme se standardem;
- testujeme možnost přítomnosti monotónního trendu v časové řadě měření.

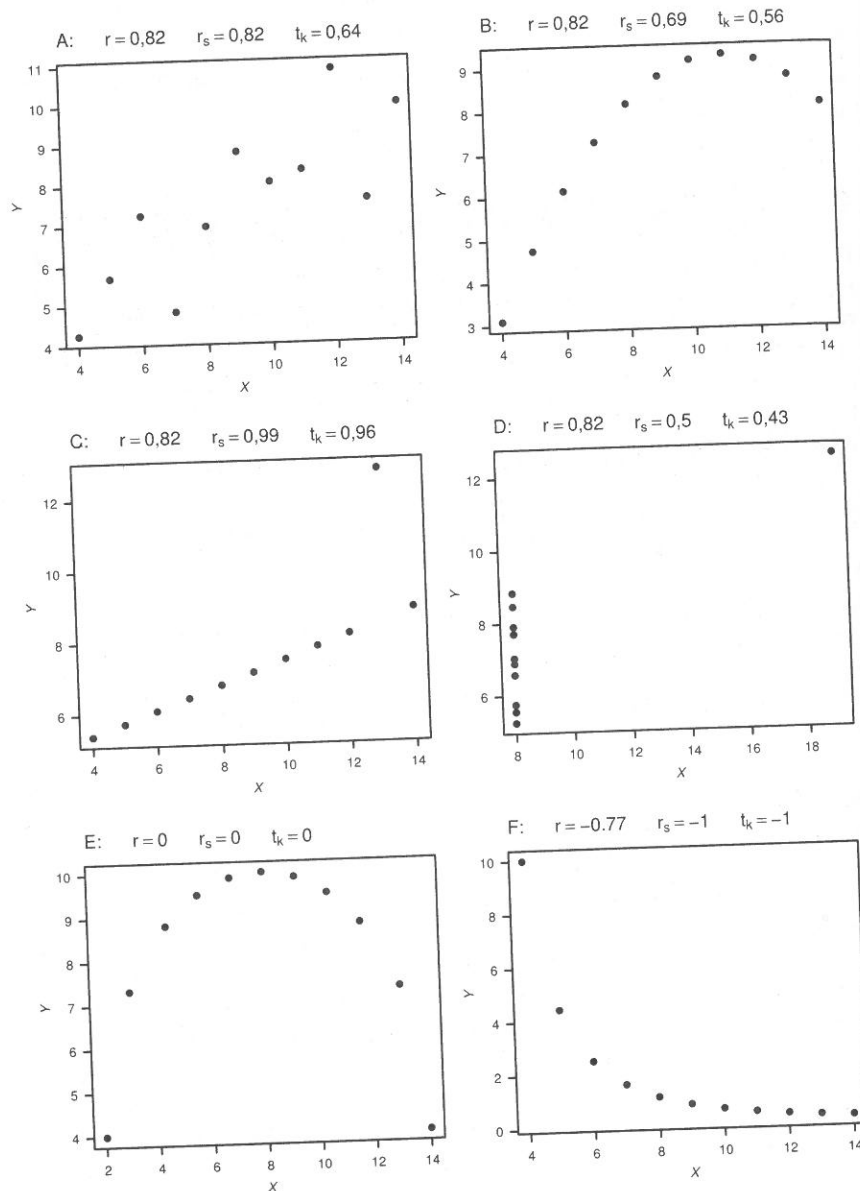
Pro usnadnění interpretace jsou na obrázku 7.5 znázorněna data z příkladu 7.3 (s. 246, množina 1 = A, 2 = B, 3 = C, 4 = D) a uvedeny k nim vypočtené korelační koeficienty podle Pearsona, Spearmana a Kendalla, aby bylo umožněno srovnání chování těchto koeficientů (viz odstavec o Pearsonově koeficientu). Obrázek ukazuje, jak zachytí Spearmanův koeficient vztah reprezentovaný různými bodovými konfiguracemi. Graf F dokumentuje jeho schopnost měřit monotónní vztahy, graf C ukazuje jeho rezistenci vůči odlehklým hodnotám.

7.2.7 Kendallův koeficient pořadové korelace

Korelační koeficient má měřit „sílu vztahu“ dvou proměnných. Ale různé korelační koeficienty ho měří různým způsobem. Pearsonův i Spearmanův korelační koeficient mohou mít hodnotu 0,3, ale pokaždé to znamená něco trochu jiného. Kendallův korelační koeficient má na rozdíl od předchozích dvou jednoduchou pravděpodobnostní interpretaci. Jeho teoretickou hodnotu v populaci označujeme τ_k nebo Kendallovo τ .

Zatímco Spearman koreloval pořadí, Kendall založil svoji statistiku na inverzích v pořadí. Vycházíme z dat, která se týkají metrického nebo ordinálního hodnocení n objektů ($i = 1, 2, \dots, n$) podle dvou kritérií X a Y . Ke každému objektu i získáme ohodnocení (x_i, y_i) . Nejdříve seřadíme dvojice (x_i, y_i) tak, že hodnoty x_i budou tvořit rostoucí posloupnost. Jestliže mezi kritérii X a Y je kladná asociace, pak také y_i budou mít vzestupnou tendenci. Při záporné asociaci budou mít y_i sestupnou tendenci. Kendall proto rozlišuje vztah $y_j > y_i$, resp. $y_j < y_i$, pokud $j > i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$). V prvním případě nastává tzv. **konkordance**, jež skóruje pro kladnou asociaci, ve druhém **diskordance**, která skóruje pro negativní asociaci. Počet všech konkordancí, resp. diskordancí označíme P , resp. Q . Rozdíl $S = P - Q$ někdy nazýváme Kendallovo S a je jednoduchou mírou závislosti. Převaha konkordancí, resp. diskordancí vede ke kladné, resp. záporné hodnotě S . Možná škála hodnot S závisí na rozsahu výběru n . Jednoduchá úprava však

Obr. 7.5 Zobrazení různých bodových konfigurací a k nim dopočítaného Pearsonova (r), Spearmanova (r_s) a Kendallova (t_k) korelačního koeficientu



tento problém vyřeší. S se totiž může pohybovat mezi hodnotami $-0,5n(n-1)$ a $0,5n(n-1)$. Proto se Kendallův koeficient tau t_k počítá podle formule

$$t_k = \frac{S}{D} = \frac{P-Q}{D},$$

kde jmenovatel D je maximální možný počet konkordancí, resp. diskordancí a má hodnotu $n(n-1)/2$.

PŘÍKLAD 7.8

Výpočet konkordancí a Kendallova koeficientu pořadové korelace

Vypočítáme počet diskordancí a konkordancí pro data v tabulce 7.11. Protože počty P a Q jsou přibližně stejné, mezi proměnnou X a Y není pravděpodobně žádná asociace. S má hodnotu -2 .

Kendallův koeficient $t_k = -2/36 = -0,05$.

Tab. 7.11 Příklad výpočtu Kendallova koeficientu pořadové korelace

Věk (X)	Cholesterol (Y)	Konkordance	Diskordance
41	274	1	7
45	209	4	3
50	194	5	1
51	270	1	4
54	165	4	0
59	234	2	1
62	281	0	2
68	238	0	1
71	208	0	0
Součet		$P = 17$	$Q = 19$

Platí $-1 \leq t_k \leq 1$ a hodnot právě ± 1 nabývá t_k ve stejných situacích jako Spearmanův koeficient. Kritické hodnoty pro rozhodování, kdy je možné zamítnout hypotézu nezávislosti X a Y ($H_0: \tau_k = 0$), nalezneme pomocí speciálních tabulek. Některé programy dokáží spočítat přesnou p -hodnotu pro test nulové hodnoty τ_k . Pro velká n má t_k přibližně normální rozdělení se střední hodnotou 0 a směrodatnou odchylkou s_τ

$$s_\tau = \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$$

pokud proměnné X a Y jsou nezávislé. Rozhodování o nulové hodnotě τ_k vychází z testovací z -statistiky $z = t_k/s_\tau$, kterou porovnááme s kritickými hodnotami standardizovaného normálního rozdělení.

Interpretace τ_k je přímočařejší než u Spearmanova koeficientu ρ_s . Jestliže $\tau_k = p$, můžeme u dvou náhodně vybraných jedinců očekávat s pravděpodobností p , že jejich seřazení podle kritéria X bude stejné jako seřazení podle kritéria Y . Většinou oba koeficienty mají přibližně stejnou velikost.

V kapitole 8.4 poznáme využití Kendallova korelačního koeficientu při hodnocení závislosti v kontingenčních tabulkách, jež vznikly klasifikací objektů podle dvou ordinálních znaků.

Jestliže v údajích existují shody ($x_j = x_i$, resp. $y_j = y_i$), musíme výpočet modifikovat, protože v tomto případě nemůže koeficient dosáhnout hodnoty -1 , resp. 1 . Modifikaci uplatňujeme při větším počtu shod a týká se jmenovatele D ve vzorci pro výpočet Kendallova τ . Označme symboly u , resp. v počty shodných pořadí mezi x_i , resp. y_i postupně v jednotlivých skupinách shodných pořadí a symboly U a V součty, které mají tvar:

$$U = 0,5 \sum u(u-1),$$

$$V = 0,5 \sum v(v-1)$$

Modifikace výpočtu spočívá v nahrazení D číslem $D' = \sqrt{(D-U)(D-V)}$. Takto modifikovaný výpočet Kendallova τ nazýváme **Kendallovu τ -b**, značíme t_b . Kendallovu t_b lze interpretovat jako korelaci mezi hodnotami dx a dy , kde dx se rovná 1 , resp. -1 , pokud pro $j > i$ je $x_j > x_i$, resp. $x_j < x_i$, a nule v ostatních případech. Hodnoty dy počítáme obdobně. Jak hodnoty dx , tak hodnoty dy spočítáme pro všechny možná srovnání, kterých je $n(n-1)/2$. (Zvára, 2000)

7.2.8 Bodově biseriální korelační koeficient a koeficient ϕ

Vztah mezi spojitou metrickou proměnnou a binární proměnnou se měří biseriálním korelačním koeficientem r_{pb} tak, že n dvojic měření se rozdělí na dvě skupiny podle hodnoty alternativního parametru a spočte se hodnota r_{pb} podle vzorce

$$r_{pb} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n(n-1)}}$$

kde n_i , resp. \bar{x}_i jsou počty, resp. průměrná hodnota spojitěho parametru v obou skupinách a s je společná směrodatná odchylka. Tento koeficient r_{pb} testujeme podobně jako normální korelační koeficient. Jestliže $r_{pb} > 1$, resp. $r_{pb} < -1$,

dosadíme za něj hodnotu 1 , resp. -1 . Uvedený vzorec se v praxi nepoužívá, protože stejnou hodnotu dostaneme použitím algoritmu pro Pearsonův koeficient korelace pro dvojice hodnot obou proměnných, přičemž binární proměnnou zastupují nuly a jedničky. Jestliže binární proměnná vznikla dichotomizací spojitě normálně rozdělené proměnné, můžeme spočítat odhad Pearsonova korelačního koeficientu obou spojitých proměnných pomocí tzv. biseriálního korelačního koeficientu (viz Howell 1992, s. 270).

Koeficient ϕ je Pearsonův korelační koeficient vypočítaný pro dvě alternativní proměnné, které kódujeme pomocí hodnot 0 a 1 . (Existuje i jednodušší výpočet, ale ten nemá v době počítačů opodstatnění.) Platí, že $\phi^2 = \chi^2/n$, kde χ^2 je testovací statistika nezávislosti v čtyřpolní tabulce a n je počet dvojic, z nichž se počítá korelační koeficient. Test nulové hodnoty koeficientu ϕ se provádí stejně jako test nezávislosti pro čtyřpolní tabulku, která je tvořena četnostmi kombinací hodnot obou proměnných (viz kap. 8.3.1).

7.2.9 Korelační koeficient v klasickém modelu teorie měření

V úvodní kapitole jsme popsali základní způsoby hodnocení kvality měřicích instrumentů. K hlavním konceptům hodnocení kvality měření patří *reliabilita* (spolehlivost), *validita* a *objektivita*. Při praktickém uplatňování těchto konceptů hraje velkou roli Pearsonův koeficient korelace. Upozorníme na nejdůležitější situace jeho použití. Nepůjde však o ucelený výklad, jak postupovat při řešení úkolu evaluace instrumentu měření (viz kap. 13.8.3). Nejdříve uvedeme základní prvky klasické teorie měření (teorie testů), která má využití především v behaviorálních vědách.

Klasická teorie měření pojednává vztah mezi naměřenou hodnotou a hodnotou konstruktů, již považujeme za „skrytou“, latentní proměnnou, pomocí matematicko-statistického modelu. Hodnota této latentní proměnné se považuje za „správnou hodnotu“ T (*true score*), která je jenom nedostatečně zachycena instrumentem X (např. hodnota jednoho indikátoru nebo součet hodnot jednotlivých indikátorových položek z dotazníku). Přijímá se několik hypotéz. První je, že se napozorovaná hodnota X skládá aditivně ze správné hodnoty a z chyby měření. Model pro měření instrumentem X proto zapisujeme ve tvaru

$$X = T + E,$$

který vyjadřuje, že napozorovaná hodnota (skór) je součtem hypotetické „správné hodnoty“ a chybové komponenty E . Chyba E může vzniknout mnoha způsoby, resp. také u ní lze identifikovat různé komponenty: např. technickou chybu vlastní