Geometrie

Jak stará geometrie je a co do ní patří?

Co je úkolem učitelů na základních školách?

Co je úkolem učitelů na základních školách?

- Vytvořit kvalitní základy geometrických znalostí
- Podněcovat abstraktní geometrické myšlení žáků takovým způsobem, aby žáci byli schopni je sami nadále rozvíjet v oblastech, které si sami zvolí

Různé metody zkoumání geometrie

- Syntetická geometrie
  axiomatický přístup
- Analytická geometrie
- Diferenciální geometrie
- Kleinova (transformační) geometrie

Základní geometrické útvary

Úvodem si uvědomíme, že geometrie je dnes rozsáhlý vědní obor. Geometrické objekty a prostory, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy můžeme zkoumat různými metodami. Podle toho jaké metody používáme, mluvíme v geometrii o různých přístupech. Ujasníme si, které základní metody to jsou (většinu z nich znáte ze studia na základní a střední škole) a vymezíme, které metody zkoumání budeme užívat v tomto textu.

Syntetická geometrie - v širším pojetí zahrnuje veškerou geometrii bez souřadnic. Do 17. století se přistupovalo ke zkoumání geometrických objektů až na malé výjimky výhradně metodami syntetické geometrie. Syntetické metody mají zřejmá omezení, jelikož pracují s naší představivostí a schopností objekty zobrazit. Dimenzi prostoru, ve které formulujeme a řešíme úlohy, těžko v syntetické geometrii rozšíříme nad trojdimenzionální prostor, kdežto v analytické geometrii je běžné řešit úlohy ve vícerozměrném prostoru. Jinak řečeno, v syntetické geometrii se pohybujeme v názorné rovině nebo trojrozměrném názorném prostoru. Navíc už v dvojrozměrném prostoru existují úlohy, které nejsou syntetickými metodami vůbec řešitelné, i když analytické zdůvodnění řešitelnosti či neřešitelnosti takových úloh nemusí být složité.

V rámci syntetické geometrie se objevuje **axiomatický přístup ke geometrii**. Axiomatický přístup znamená budovat nějakou teorii z co nejmenšího počtu jednoduchých pravidel (axiomů). Náznaky se objevily už u Eukleida, který formuloval slavných 5 postulátů. V moderním pojetí jsou ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii Hilbertovy axiómy.

V této přednášce budeme preferovat právě axiomatický přístup ke geometrii. Podrobněji se principům a vývoji axiomatické geometrie věnujeme hned v následujícím semináři. Nyní uvedeme pro úplnost stručně další základní možné metody zkoumání v geometrii.

Analytická geometrie - pohlíží na geometrické objekty jako na množiny bodů a zkoumá geometrické problémy a geometrické útvary popisem jejich souřadnic v pevně zvolené soustavě souřadnic. Popis problému pomocí rovnic pak umožňuje řešit geometrické problémy algebraickými a analytickými prostředky. Tento přístup zahrnuje velkou část studia geometrie na středních školách. Za zakladatele analytické geometrie je považován René Descartes, který již v roce 1637 představil princip

propojení geometrie a algebry, nejednalo se však ještě o analytickou geometrii tak, jak ji známe dnes. Protoře se jedná o propojení algebry s geometrií, bývá analytická geometrie někdy (zejména ve starší literatuře) nazývána algebraická geometrie. V dnešním moderním pojetí je však *algebraickou geometrií* míněn obor na pomezí geometrie a abstraktní algebry. Studuje vlastnosti polynomů nad obecnými komutativními okruhy, hlavně množinu nulových bodů nějakého systému polynomů. Tyto množiny se nazývají algebraické variety.
Podobor algebraické geometrie je studium eliptických křivek, které mají úzkou souvislost s teorií čísel. Aplikace našla teorie eliptických křivek hlavně v kryptografii, ale také v statistice, teorii řízení, geometrickém modelování, teorii strun, teorii her a v dalších oborech.

Diferenciální geometrie - je označení pro geometrické obory, které studují geometrické struktury pomocí metod diferenciálního počtu. Základy diferenciální geometrie položil Carl Friedrich Gauss, který zkoumal vlastnosti křivek a ploch, její další rozvoj se pak pojí se jménem Bernharda Riemanna. Modernějším pojetí se diferenciální geometrie zabývá strukturami na hladké varietě. Na ní jsou definovány tečné vektory, vektorová a tenzorová pole, derivace. Geometrie na varietě se obvykle definuje přidáním další struktury (význačná metrika, konexe, diferenciální forma a pod).
Stěžejní význam má diferenciální geometrie také pro fyziku, zejména tzv. *Riemannova geometrie*, která je popsána metrikou na hladké varietě. Je to tedy struktura, na které jsou definovány kromě vektorů i úhly, velikosti vektorů, délky křivek a vzdálenosti. Metrika určuje jednu význačnou beztorzní konexi, díky které je možné přenášet paralelně vektory a definovat geodetiky. V případě, že metrika není pozitivně definitní (tj. některé vektory můžou mít zápornou velikost), mluví se o tzv. *pseudoriemannově geometrii*. Ta slouží jako model časoprostoru pro Einsteinovu teorii relativity.

Kleinova (transformační) geometrie - pohlíží na geometrii jako na studium invariantů vůči grupě transformací.
Koncept symetrie se objevuje v geometrii od antiky. Kruh, pravidelný mnohoúhelník a Platónská tělesa vykazují vysokou míru symetrie, což vzbuzovalo pozornost řeckých filozofů. Od konce 19. století se objevuje pojetí, že symetrie nějakého objektu (útvar, prostor, geometrie) je jeho charakteristická vlastnost. Popis symetrie je úzce spojen s teorií grup. Všechny shodnosti eukleidovské roviny tvoří grupu, tato je podgrupou grupy afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy projektivních transformací.
Toto pojetí je formalizováno v Erlangenském programu Felixe Kleina. Klein v roce 1872 na přednášce v Erlangenu definoval geometrii jako studium invariantů vůči grupě transformací. A toto pojetí velmi ovlivnilo další vývoj geometrie.

Poznámky:

René Descartes (1596 -- 1650), Descartův spis **La Géométrie**, který byl vydán roku 1637 jako jeden z dodatků k jeho filozofickému dílu *Discours de la méthode (Rozprava o metodě),* bývá často považován za počátek analytické geometrie jako vědy. Podrobněji viz literatura.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 -- 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik. Zabýval se zejména geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění.
Mezi jeho stěžejní díla patří spis Disquisitiones Arithmeticae, který napsal již ve věku 21 let (1798; publikováno bylo ale až v roce 1801). Tato práce položila základy teorie čísel jakožto matematické disciplíny.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 -- 1866) byl německý matematik, který výrazně přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Na jeho myšlenkách byly dále rozvinuty například Riemannova geometrie, algebraická geometrie či teorie komplexních ploch. Tyto oblasti matematiky se staly základem topologie. V reálné analýze přispěl definicí Riemannova integrálu a rozvinul také teorii trigonometrických řad. Str.