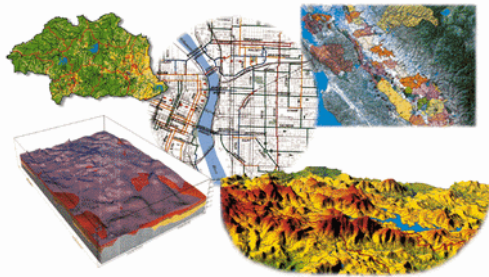


# Kartografie pro geografy

## 2. přednáška



Přednášející Ing. Václav Šafář, Ph.D.

*podzim 2017*

# Matematická kartografie

Matematická kartografie a její úkoly

Referenční plochy a tvar Země, geoid, sféroid, elipsoid a koule

Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu a kouli

Klasifikace kartografických zobrazení podle zkreslení

Ekvidistantní, ekvivalentní a konformní zobrazení

Kartografická zobrazení v ČR

# Země je „kulatá“



# Mapy jsou „placaté“



## Abychom mapy dobře vyrobili máme matematickou kartografii

Matematická  
kartografie a její  
úkoly



Referenční plochy  
a tvar Země,  
geoid, sféroid,  
elipsoid a koule



Souřadnicové  
soustavy na  
referenčním  
elipsoidu a kouli



Zkreslení  
kartografických  
zobrazení

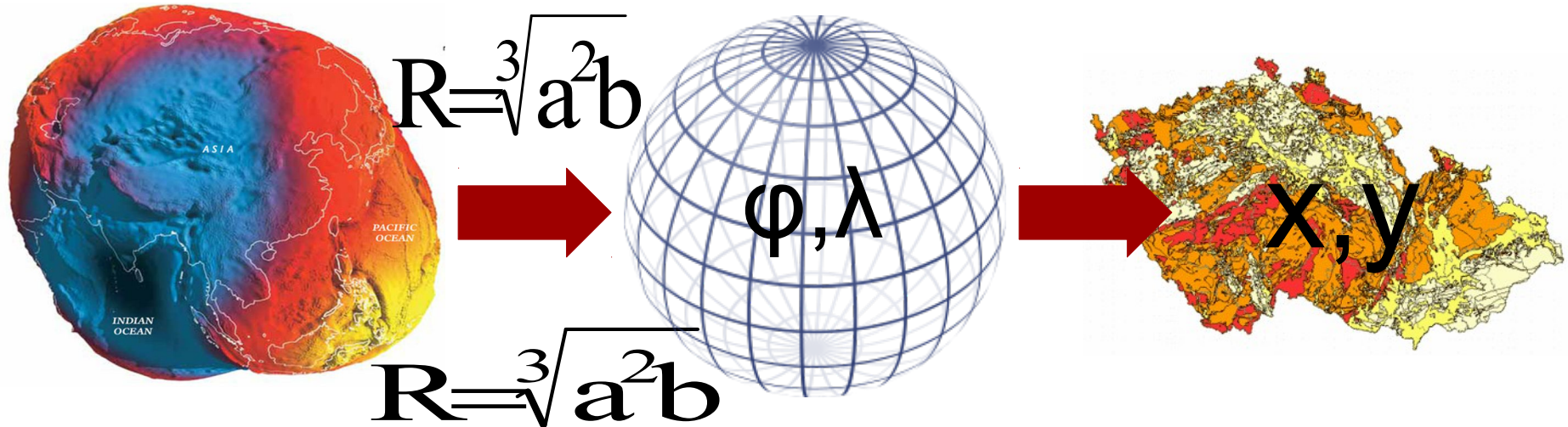


Ekvidistantní,  
ekvivalentní a  
konformní  
zobrazení



Kartografická  
zobrazení v ČR

# Základní úkol matematické kartografie je vyřešení způsobu zobrazení bodů a čar ze zakřiveného povrchu Země do roviny



MK hledá matematický vztah mezi zeměpisnými souřadnicemi  $\varphi, \lambda$  na referenční ploše a pravoúhlými souřadnicemi  $x, y$  v zobrazovací rovině a to při co nejmenším zkreslení zobrazovaných objektů. ☹️ Řeší způsoby zobrazení referenčních ploch (koule, elipsoid) do roviny mapy ☹️ a vysvětluje vlastnosti těchto zobrazení. ☹️

Matematická  
kartografie a její  
úkoly



Referenční plochy  
a tvar Země,  
geoid, sféroid,  
elipsoid a koule



Souřadnicové  
soustavy na  
referenčním  
elipsoidu a kouli



Zkreslení  
kartografických  
zobrazení

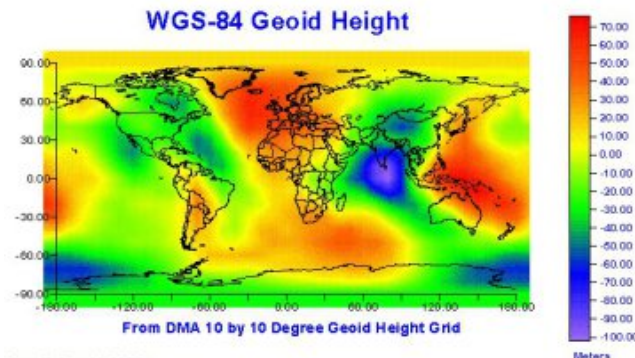
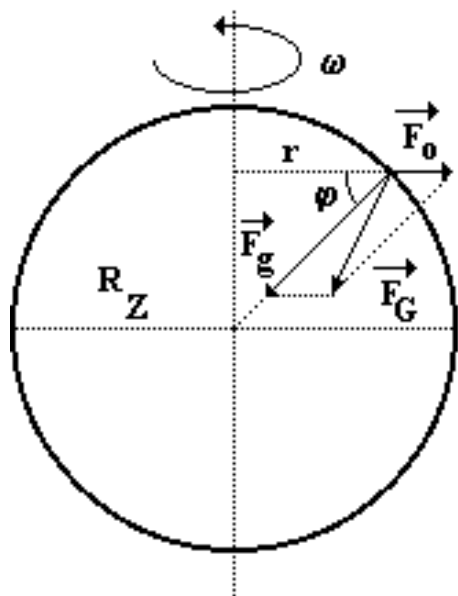


Ekvidistanční,  
ekvivalentní a  
konformní  
zobrazení

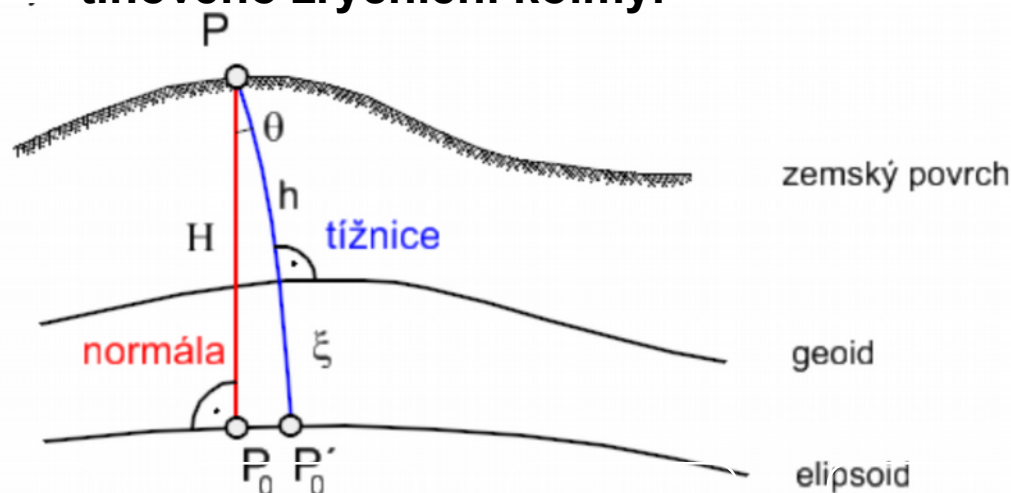


Kartografická  
zobrazení v ČR

Tvar Země je dán dvěma silami - gravitací a rotací Země, geomorfologickými tvary Země, plasticitou materiálu tvořícím zemský plášť a nerovnoměrným rozložením materiálu v něm



Geoid je fyzikální model povrchu Země při střední hladině světových oceánů. Je definován jako ekvipotenciální plocha vůči gravitaci, to jest plocha se stejnou úrovní tíhového potenciálu, na kterou je vektor tíhového zrychlení kolmý.



Matematická kartografie a její úkoly



Referenční plochy a tvar Země, geoid, sféroid, elipsoid a koule



Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu a kouli



Zkreslení kartografických zobrazení

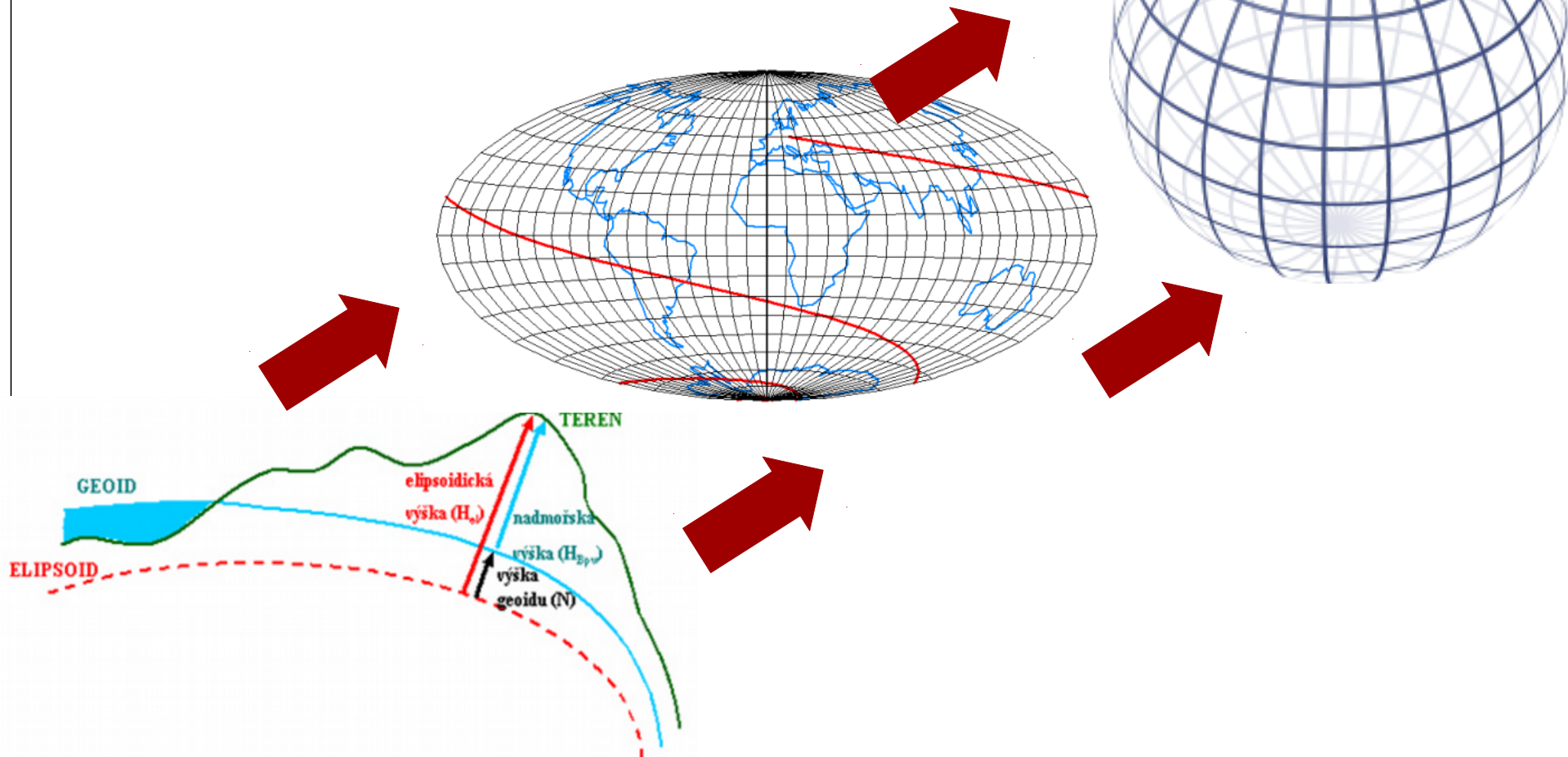


Ekvidistantní, ekvivalentní a konformní zobrazení



Kartografická zobrazení v ČR

# Referenční vztahné plochy aproximující tvar Země - geoid, elipsoid, koule



Matematická kartografie a její úkoly

Referenční plochy a tvar Země, geoid, sféroid, elipsoid a koule

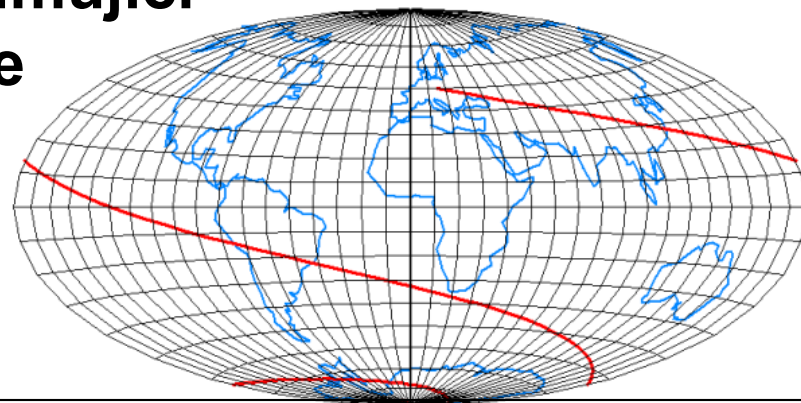
Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu a kouli

Zkreslení kartografických zobrazení

Ekvidistantní, ekvivalentní a konformní zobrazení

Kartografická zobrazení v ČR

# Referenční vztažné plochy aproximující tvar Země - geoid, elipsoid, koule



## Elipsoid

Veličina	Bessel 1841	Hayford 1910	Krasovskij 1940	1967	WGS-84
<b>a</b>	6 377 397 m	6 378 388 m	6 378 245 m	6 378 160 m	6 378 137 m
<b>b</b>	6 356 079 m	6 356 912 m	6 356 863 m	6 356 744 m	6 356 752 m
<b>f</b>	1 : 299,15	1 : 297,0	1 : 298,30	1 : 298,25	1 : 298,26

Matematická  
kartografie a její  
úkoly



Referenční plochy  
a tvar Země,  
geoid, sféroid,  
elipsoid a koule



Souřadnicové  
soustavy na  
referenčním  
elipsoidu a kouli



Zkreslení  
kartografických  
zobrazení



Ekvidistanční,  
ekvivalentní a  
konformní  
zobrazení



Kartografická  
zobrazení v ČR

# Selected Reference Ellipsoids

Ellipse	Semi-Major Axis (meters)	1/Flattening
Airy 1830	6377563.396	299.3249646
Bessel 1841	6377397.155	299.1528128
Clarke 1866	6378206.4	294.9786982
Clarke 1880	6378249.145	293.465
Everest 1830	6377276.345	300.8017
Fischer 1960 (Mercury)	6378166.0	298.3
Fischer 1968	6378150.0	298.3
G R S 1967	6378160.0	298.247167427
G R S 1975	6378140.0	298.257
G R S 1980	6378137.0	298.257222101
Hough 1956	6378270.0	297.0
International	6378388.0	297.0
Krassovsky 1940	6378245.0	298.3
South American 1969	6378160.0	298.25
WGS 60	6378165.0	298.3
WGS 66	6378145.0	298.25
WGS 72	6378135.0	298.26
WGS 84	6378137.0	298.257223563

Peter H. Dana 9/1/94

Matematická  
kartografie a její  
úkoly



Referenční plochy  
a tvar Země,  
geoid, sféroid,  
elipsoid a koule



Souřadnicové  
soustavy na  
referenčním  
elipsoidu a kouli



Zkreslení  
kartografických  
zobrazení



Ekvidistantní,  
ekvivalentní a  
konformní  
zobrazení

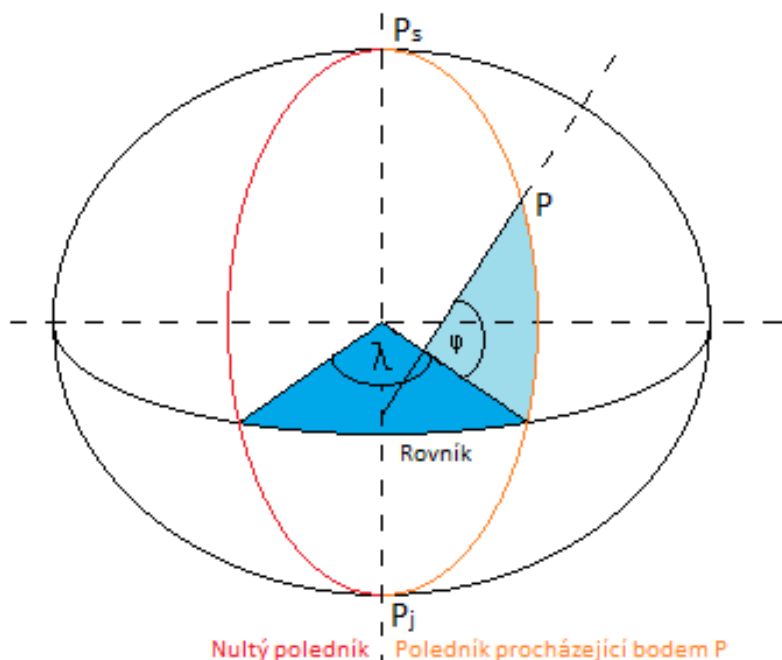


Kartografická  
zobrazení v ČR

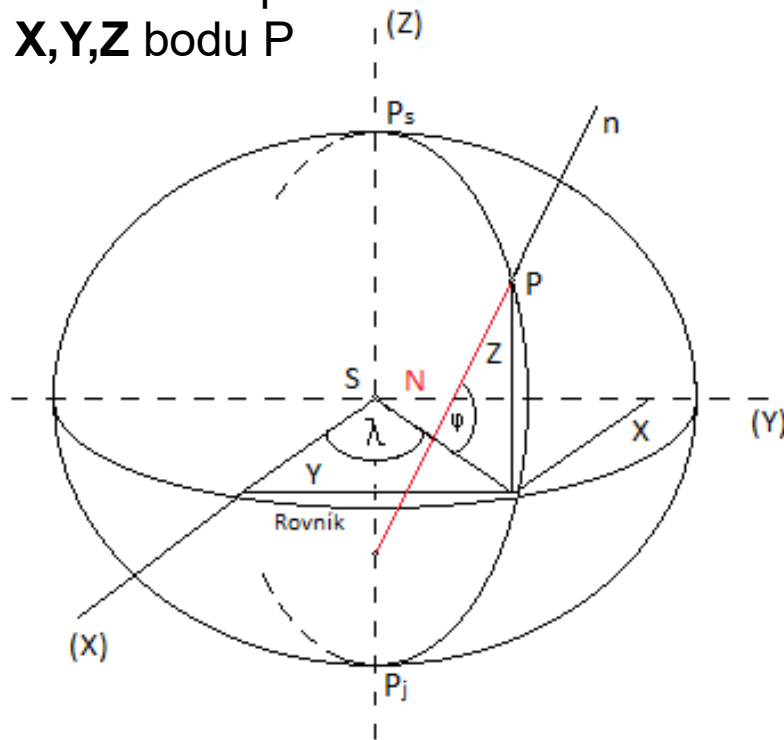


# Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu a kouli

Sférická zeměpisná šířka  $\varphi$   
a sférická zem. délka  $\lambda$



Prostorové pravouhlé souřadnice  
 $X, Y, Z$  bodu  $P$



Matematická  
kartografie a její  
úkoly



Referenční plochy  
a tvar Země,  
geoid, sféroid,  
elipsoid a koule



Souřadnicové  
soustavy na  
referenčním  
elipsoidu a kouli



Zkreslení  
kartografických  
zobrazení

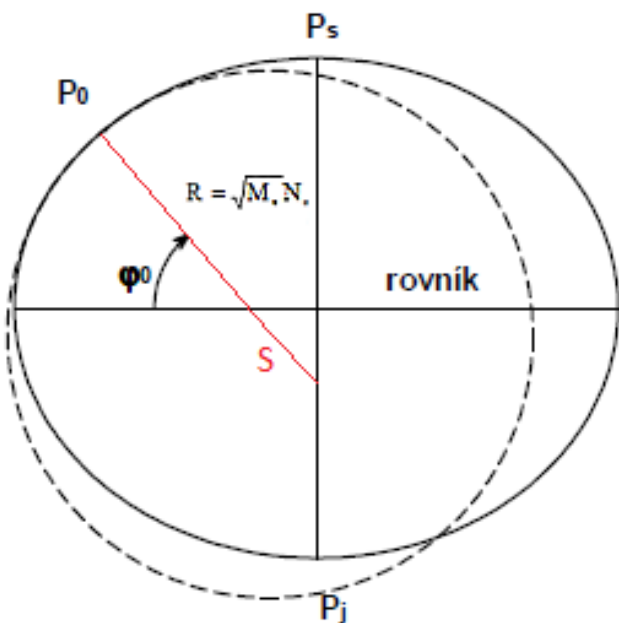


Ekvidistantní,  
ekvivalentní a  
konformní  
zobrazení



Kartografická  
zobrazení v ČR

## Přechod z referenčního elipsoidu na kouli



Nahrazení elipsoidu koulí o vhodném poloměru.  $S$  je střed referenční koule odvozené od elipsoidu.  $P_0$  je bod, kde se přesně ztotožňuje elipsoid a referenční koule. Poloměr se určí ze vztahu:

$$R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

Nejčastěji se používá náhradní koule, která má stejný povrch jako elipsoid. Platí

$$R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

Poloměr koule je pak dán vztahem

$$R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

Matematická kartografie a její úkoly



Referenční plochy a tvar Země, geoid, sféroid, elipsoid a koule



Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu a kouli



Zkreslení kartografických zobrazení

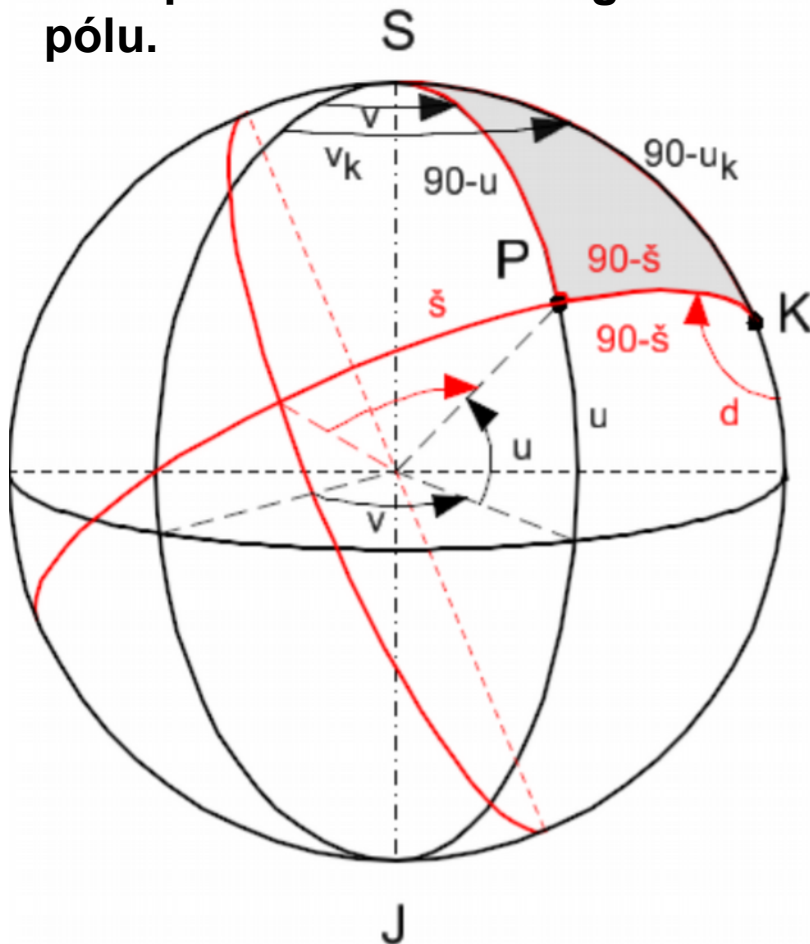


Ekvidistanční, ekvivalentní a konformní zobrazení



Kartografická zobrazení v ČR

Transformace zeměpisných souřadnic na souřadnice kartografické.  $\varphi$  je zeměpisná šířka,  $\lambda$  je zeměpisná délka,  $K$  je kartografický pól.  $V_k$  představuje zeměpisnou délku kartografického pólu.  $U_k$  je zeměpisná šířka kartografického pólu.



Transformační vztahy mezi zeměpisnými souřadnicemi  $\varphi$ ,  $\lambda$  a kartografickými souřadnicemi  $\check{S}$ ,  $D$  při známých zeměpisných souřadnicích nového pólu  $K$  se odvozují z kosinové a sinové věty, v které platí pro sférický trojúhelník  $SKP$ .

$$\sin \check{S} = \sin \varphi_p \sin \varphi_k + \cos \varphi_p \cos \varphi_k \cos (\lambda_p - \lambda_k)$$

;

$$\sin D = \frac{\cos \varphi_p}{\cos \check{S}} \sin (\lambda_p - \lambda_k)$$

Při označení zeměpisných souřadnic bodu  $P$ ,  $U_p$ ,  $V_p$  budou mít transformační rovnice tvar:

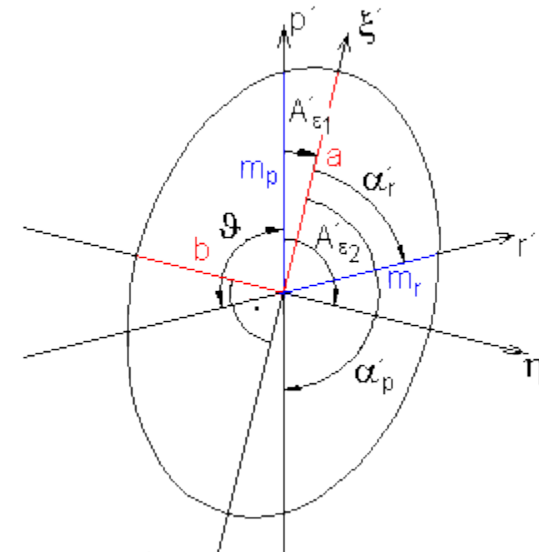
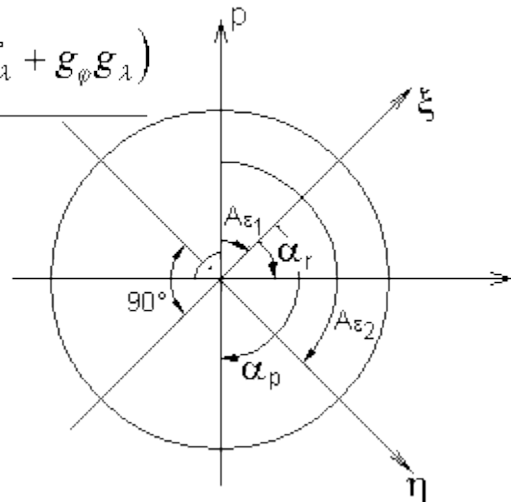
$$\sin \check{S} = \sin U_p \sin U_k + \cos U_p \cos U_k \cos (V_p - V_k)$$

$$\sin D = \frac{\cos U_p}{\cos \check{S}} \sin (V_p - V_k)$$

## Délková zkreslení

Základní vztahy a souvislosti délkové zkreslení s měřítkem mapy, elipsa zkreslení – Tissotova indikatrix

$$m_A^2 = \frac{(f_\varphi^2 + g_\varphi^2) + (f_\lambda^2 + g_\lambda^2) \cdot \frac{d\lambda^2}{d\varphi^2} + 2 \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} \cdot (f_\varphi f_\lambda + g_\varphi g_\lambda)}{M^2 + N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi}}$$



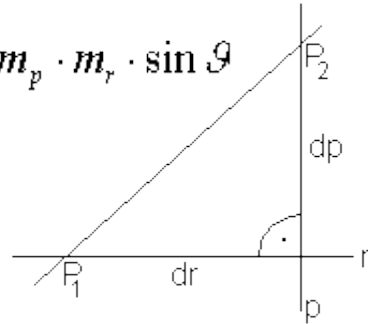
$$\frac{dm_A^2}{dA} = -2 \cdot m_p^2 \cdot \cos A_\varepsilon \cdot \sin A_\varepsilon + 2 \cdot m_r^2 \cdot \cos A_\varepsilon \cdot \sin A_\varepsilon + p \cdot (\cos^2 A_\varepsilon - \sin^2 A_\varepsilon) = 0$$

A konečně  $\operatorname{tg} 2A_\varepsilon = \frac{p}{m_p^2 - m_r^2}$

Dvoznačnost tangenty ....

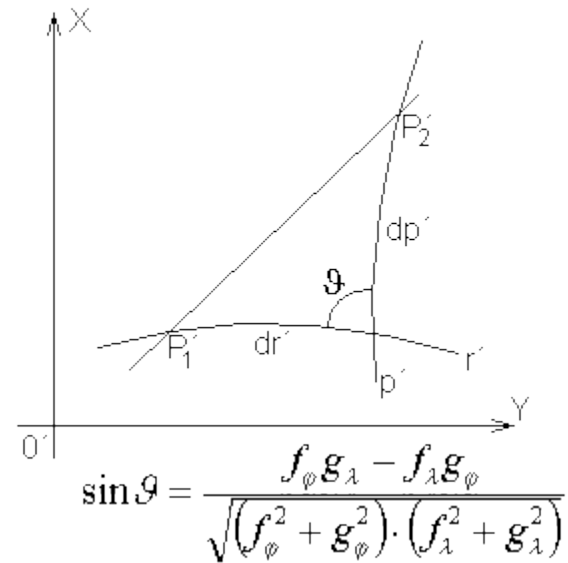
**Plošné zkreslení** je poměr plochy elementárního obrazce v obraze a originále.

$$P = \frac{\frac{1}{2} \cdot dp' \cdot dr' \cdot \sin \vartheta}{\frac{1}{2} \cdot dp \cdot dr} = m_p \cdot m_r \cdot \sin \vartheta$$



$$m_p = \frac{\sqrt{f_\varphi^2 + g_\varphi^2}}{M}$$

$$m_r = \frac{\sqrt{f_\lambda^2 + g_\lambda^2}}{N \cdot \cos \varphi}$$



$$\sin \vartheta = \frac{f_\varphi g_\lambda - f_\lambda g_\varphi}{\sqrt{(f_\varphi^2 + g_\varphi^2) \cdot (f_\lambda^2 + g_\lambda^2)}}$$

$$P = \frac{f_\varphi g_\lambda - f_\lambda g_\varphi}{MN \cdot \cos \varphi}$$

$$f_\varphi g_\lambda - f_\lambda g_\varphi = MN \cdot \cos \varphi$$

**Úhlové zkreslení** je poměr plochy elementárního obrazce v obraze a originále.

azimut  $A'$  je úhel, který svírá libovolná křivka  $k$  na elipsoidu se severní větví poledníku, pak bude platit:

$$180^\circ - A' = \mu_p - \mu$$

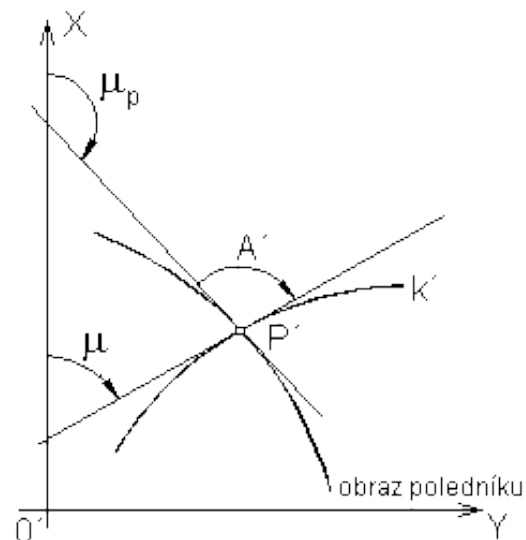
$$\operatorname{tg}(180^\circ - A') = \operatorname{tg}(\mu_p - \mu) = \frac{\operatorname{tg} \mu_p - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu_p \cdot \operatorname{tg} \mu}$$

kde  $\operatorname{tg} \mu_p$  a  $\operatorname{tg} \mu$  jsou směrnice tečen obrazu poledníku  $p'$  a křivky  $k'$  a tedy:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dY}{dX} = \frac{g_\varphi \cdot d\varphi + g_\lambda \cdot d\lambda}{f_\varphi \cdot d\varphi + f_\lambda \cdot d\lambda} = \frac{g_\varphi + g_\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi}}{f_\varphi + f_\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi}}$$

A po několika úpravách je výsledná hodnota úhlového zkreslení

$$\operatorname{tg}(180^\circ - A') = \frac{(f_\lambda g_\varphi - f_\varphi g_\lambda) \cdot M \cdot \sin A}{(f_\varphi^2 + g_\varphi^2) \cdot N \cdot \cos \varphi \cdot \cos A + (f_\lambda f_\varphi - g_\varphi g_\lambda) \cdot M \cdot \sin A}$$



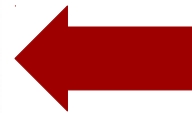
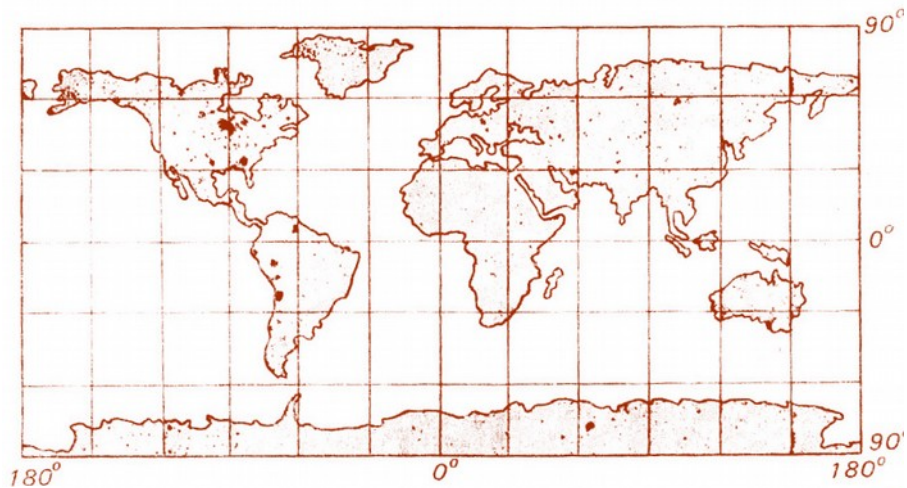
# Kartografická zobrazení dělíme na:

**Ekvidistantní (délkojevná)** zpravidla nezobrazuje zeměpisné poledníky nebo zeměpisné rovnoběžky, případně kartografické poledníky nebo kartografické rovnoběžky

**Ekvivalentní (stejnoplochá)** zachovává správnou velikost ploch, zobrazuje délky a poměrně značně úhly.

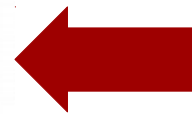
**Konformní (úhlojevná, stejnoúhlá)** zobrazení nezobrazuje úhly a zachovává tedy tvar zobrazených území na úkor zkreslení délek a velkého zkreslení ploch.

**Kompenzační zobrazení** jsou zobrazení, které zobrazuje vše - délky, plochy i úhly, ale tak, aby byly zmírněny hodnoty větších zkreslení, tedy jde např. o zobrazení blízká plochojevným zobrazením, na nichž jsou zmírněny hodnoty úhlového zkreslení, nebo o zobrazení blízká konformním zobrazením, kde je potlačeno na únosnou míru zkreslení ploch.

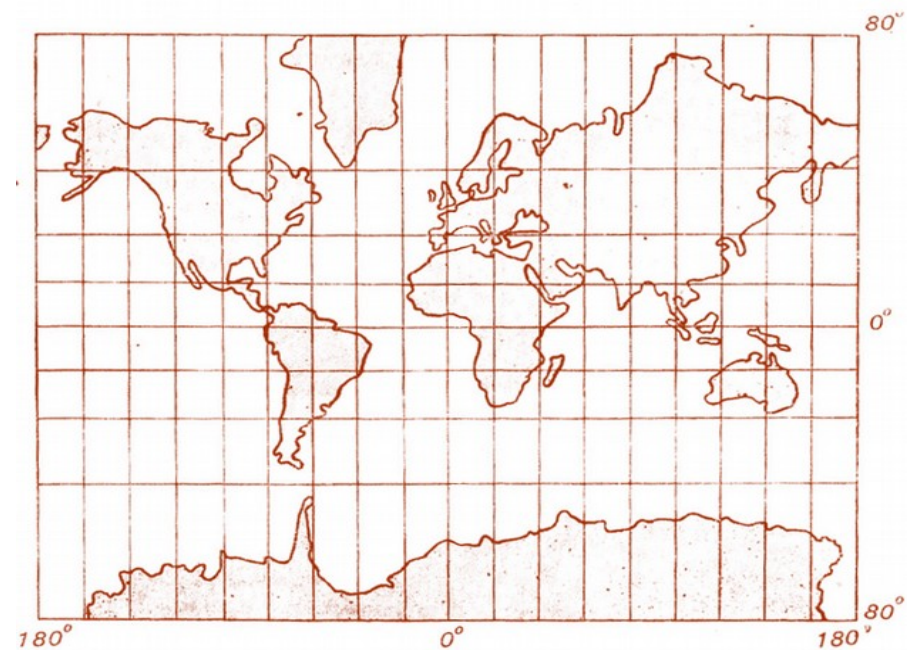


**Ekvivalentní zobrazení**

**Ekvidistantní zobrazení**



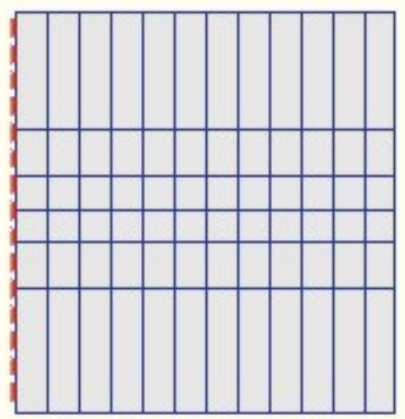
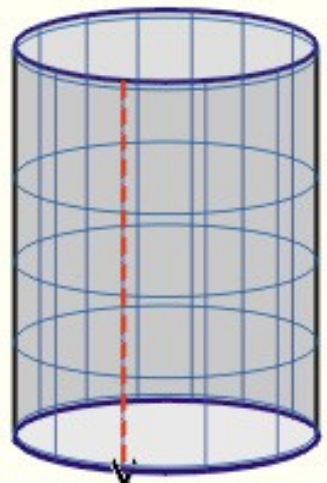
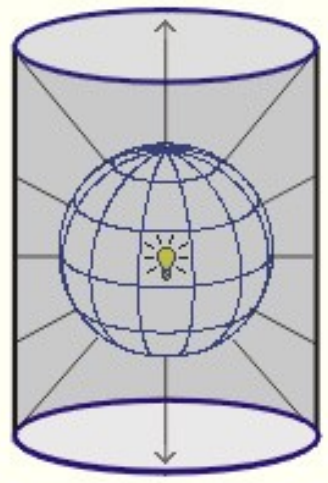
**Konformní zobrazení**





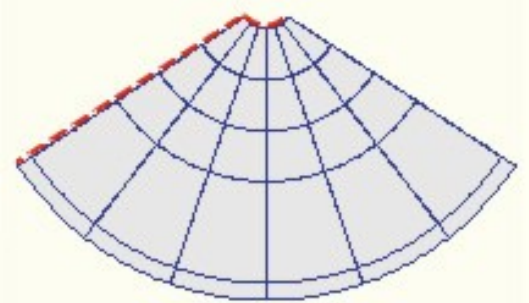
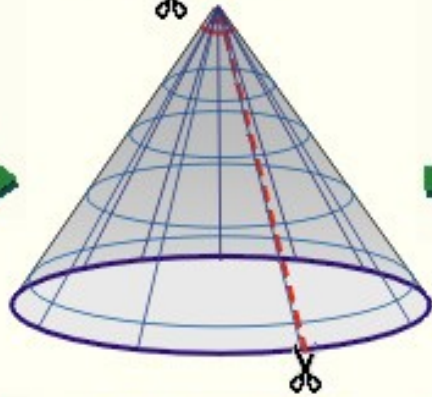
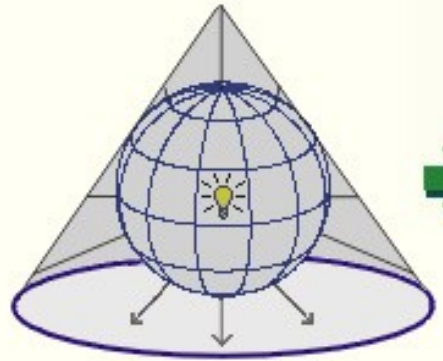
Cylindrical

Mercator



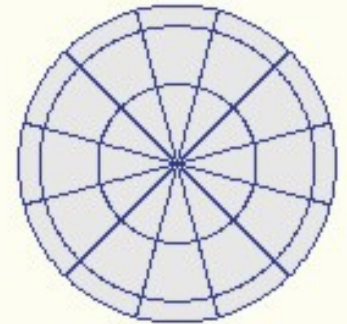
Conical

Perspective Conic



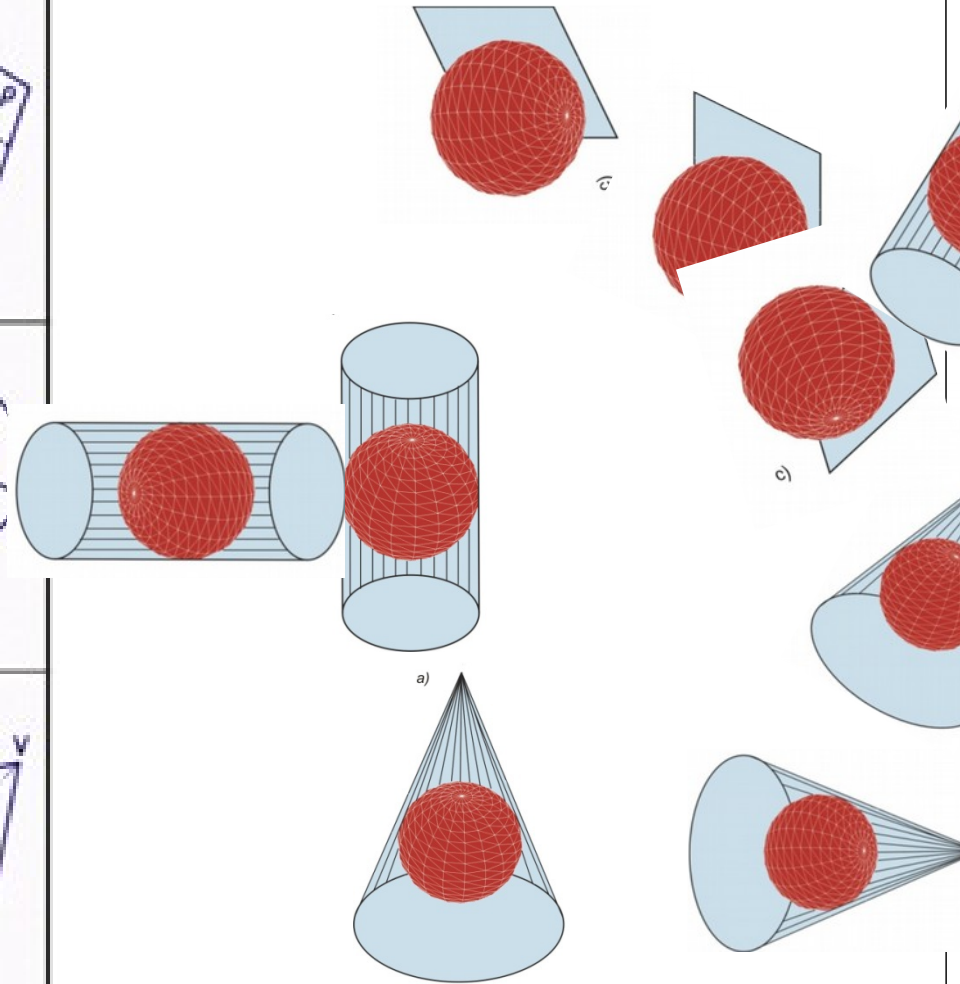
Planar

Orthographic



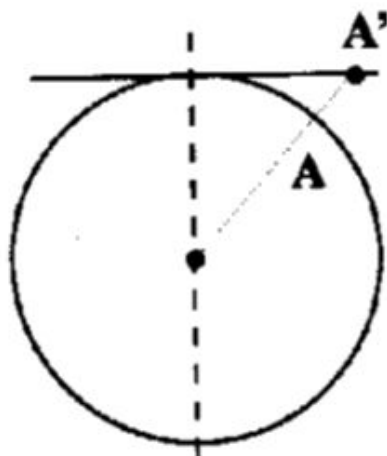
Projection Concepts  
Perspective Examples

		Poloha		
		normální	příčná	obecná
Zobrazení	azimutální			
	válcové			
	kuželové			



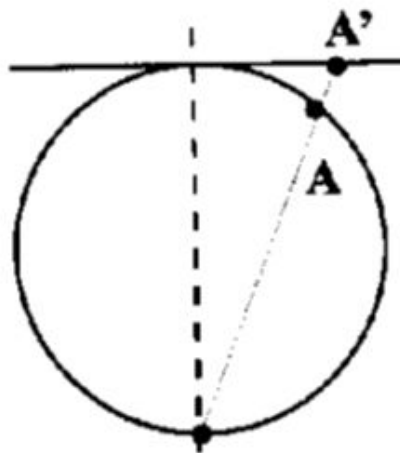
Podle promítacího způsobu a kulové referenční plochy lze podle polohy středu promítnutí získat projekci:

**gnómonickou**



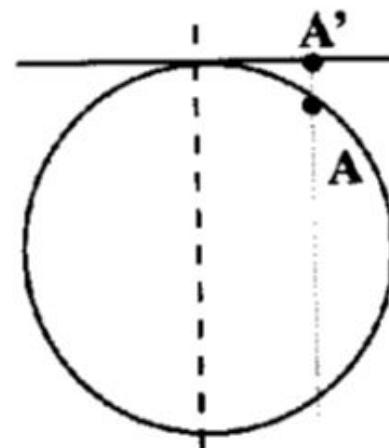
střed promítání je  
ve středu koule

**stereografickou**



střed promítání je  
v protipólu dotykového bodu  
zobrazovací plochy

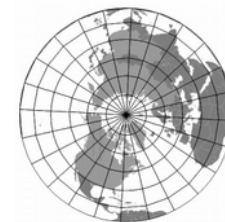
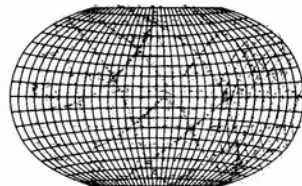
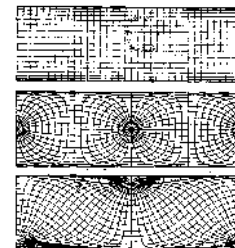
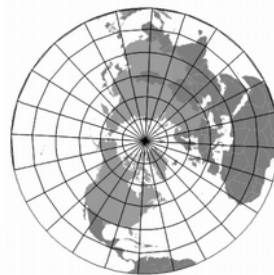
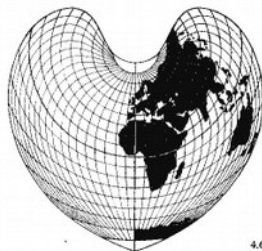
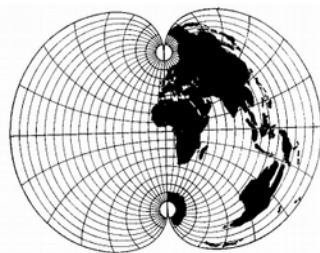
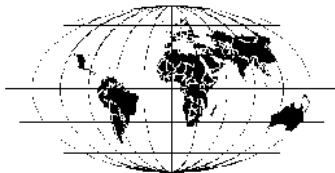
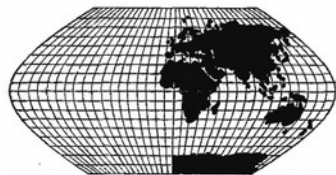
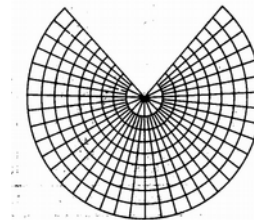
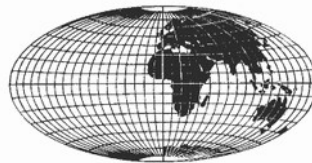
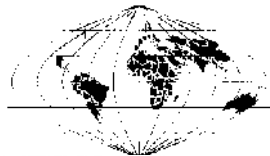
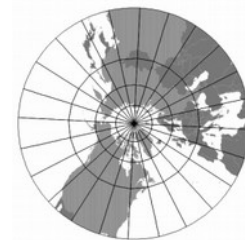
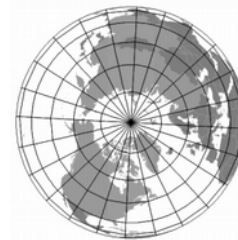
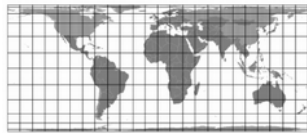
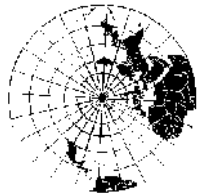
**ortografickou**



promítací paprsky  
jsou kolmé na  
zobrazovací plochu

## Další známá zobrazení:

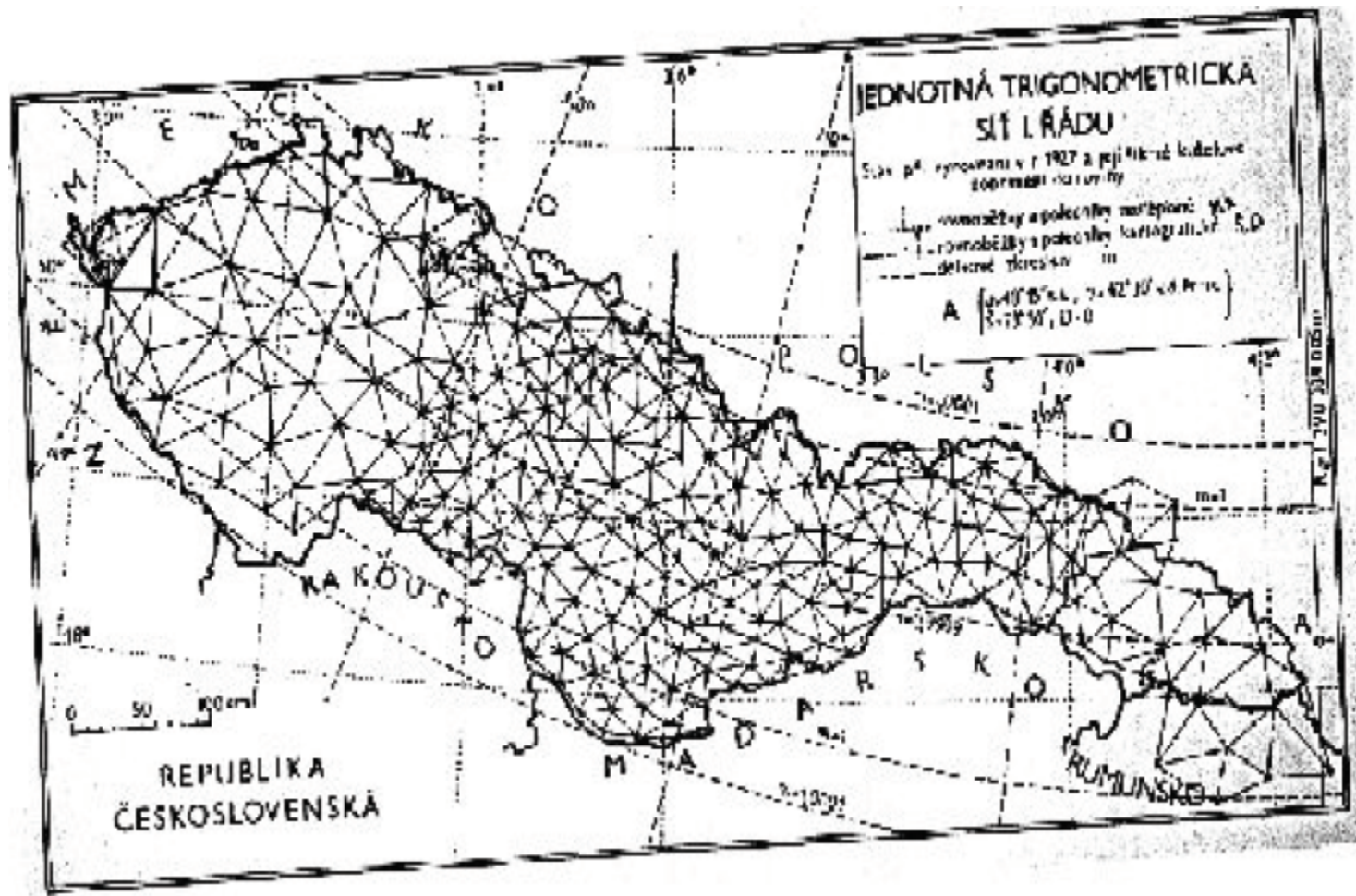
- Marinovo
- Cassini-Solderovo
- Obdélníková zobrazení sečným válcem
- Gauss-Kriggerovo
- **Ptolemaiovo**
- Robinsonovo
- Mercatorovo
- A dalších asi 350 zobrazení — v praktickém použití asi 50



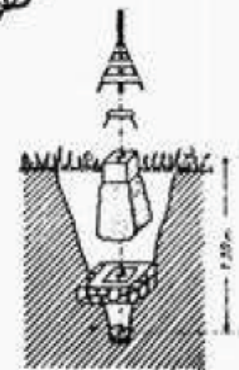
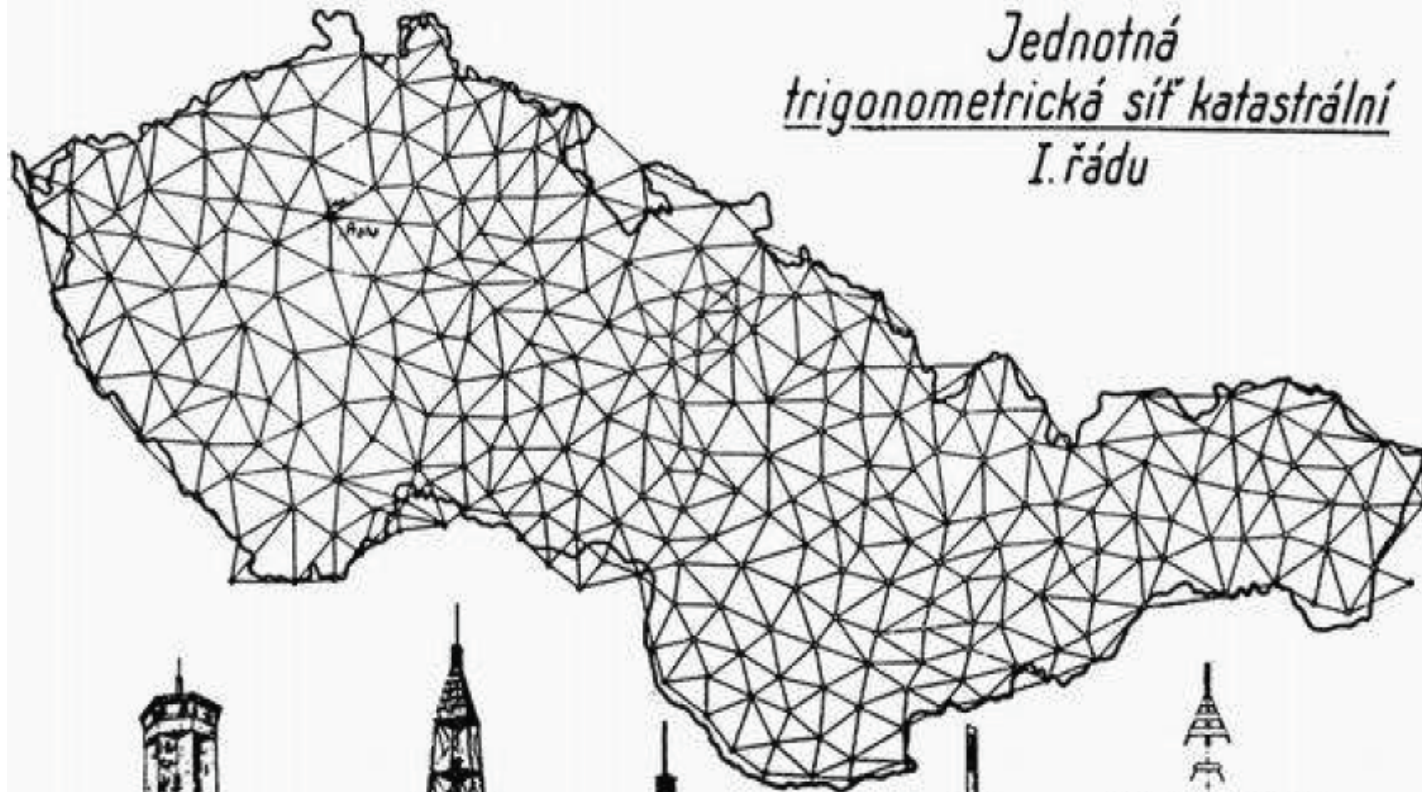
4.62

## **Křovákovo zobrazení**

- Jednotná trigonometrická síť katastrální.
- Po odtržení od nenáviděného Rakouska-Uherska (systém Cassini-Soldnerovo) byla potřeba zavést nový souřadný systém pro katastr, mapová díla, ....
- Veřejná soutěž.
- Zvítězil Josef Křovák



*Jednotná  
trigonometrická síť katastrální  
I. řádu*

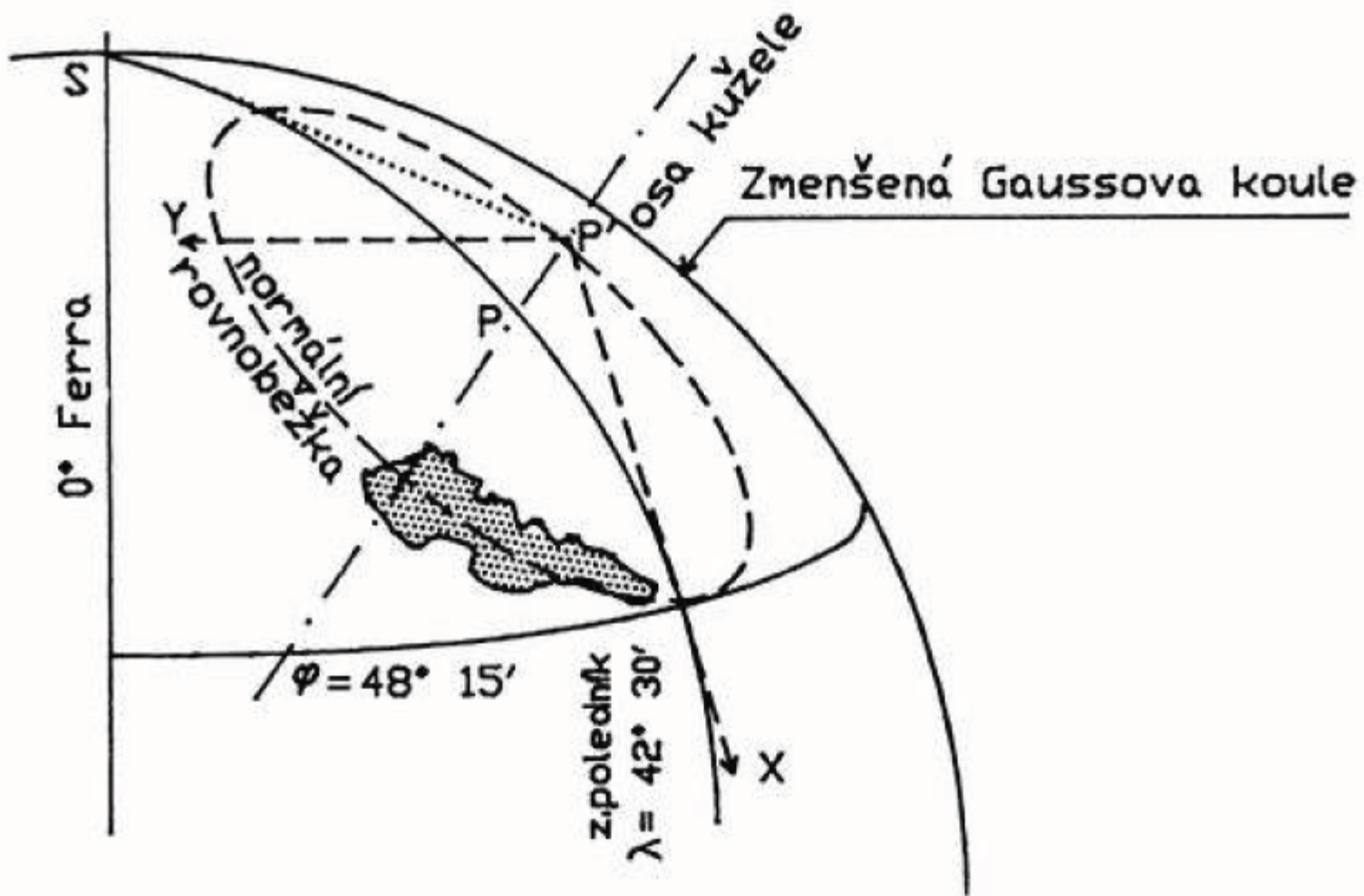


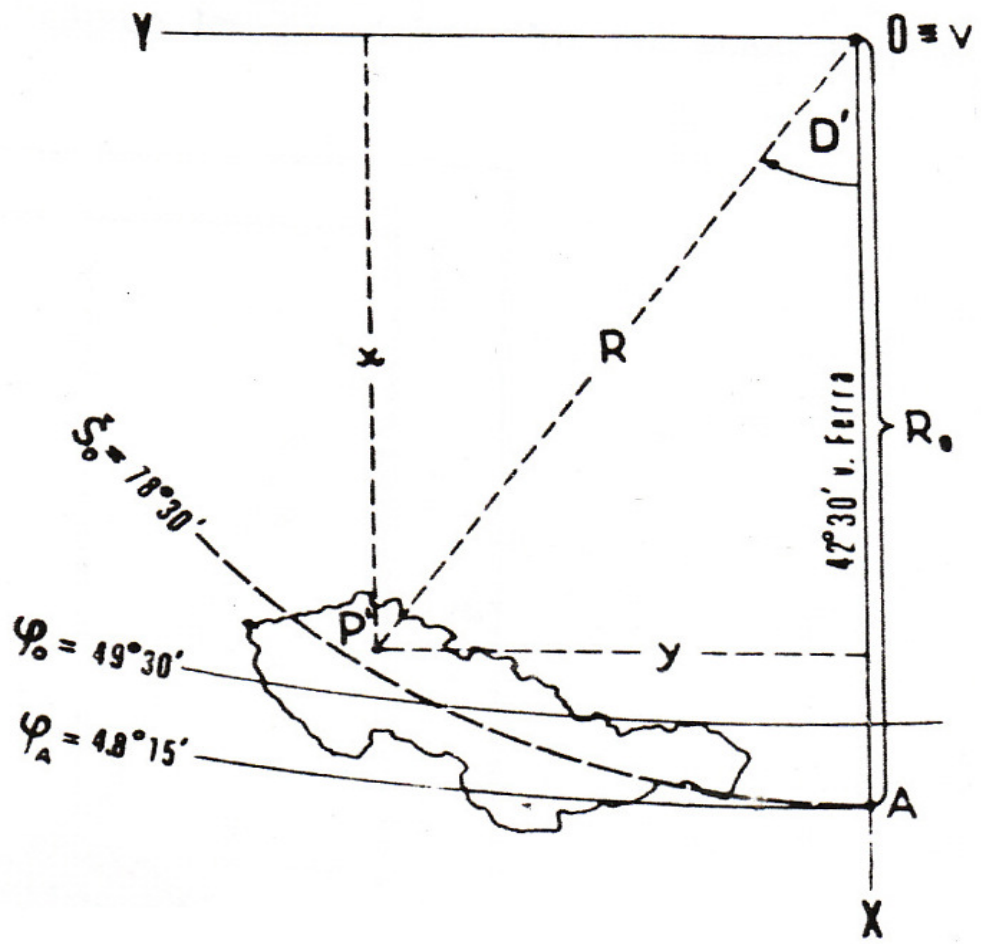
*Vytýčení a zajištění trigonometrických bodů katastrálního vyměřování*

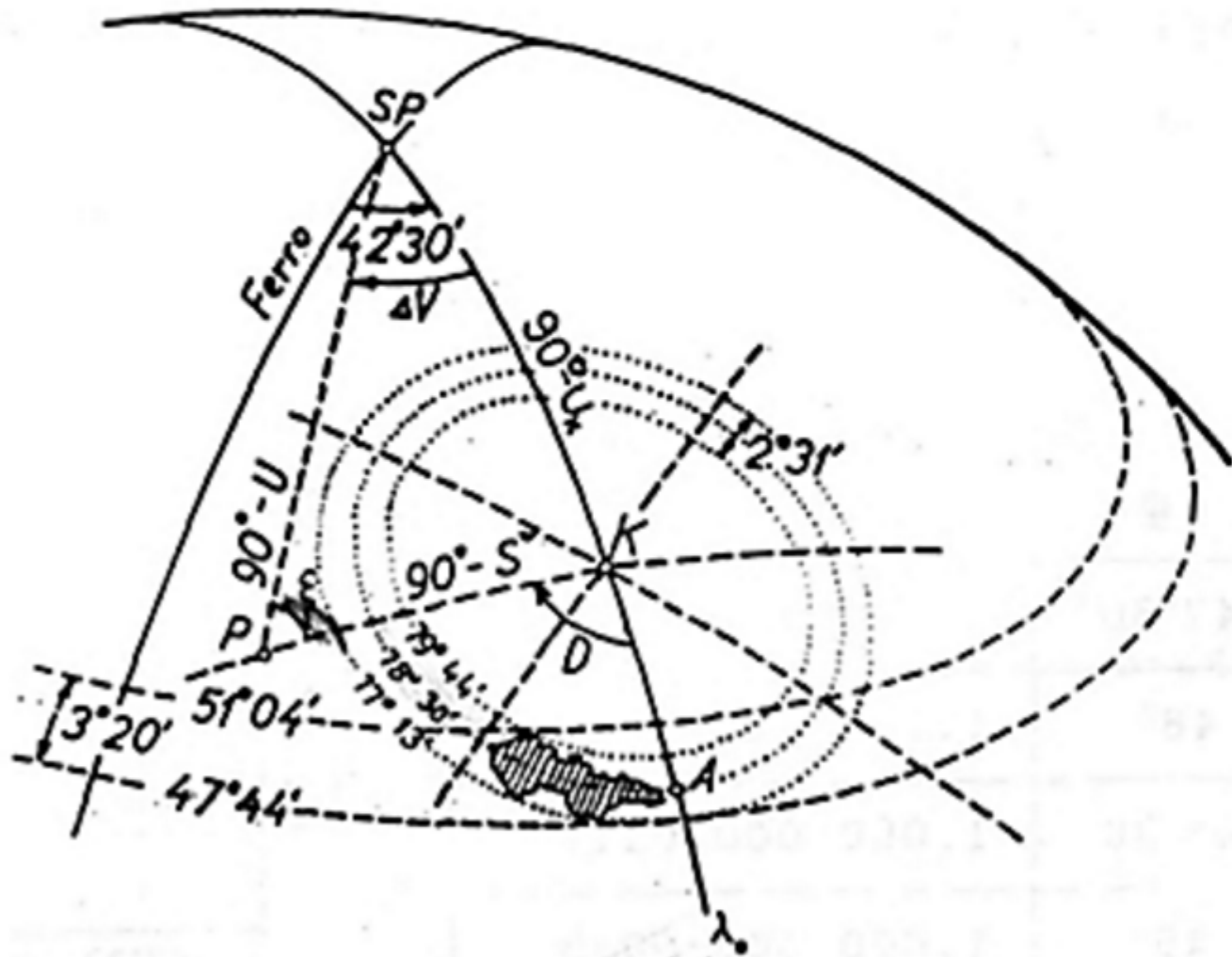


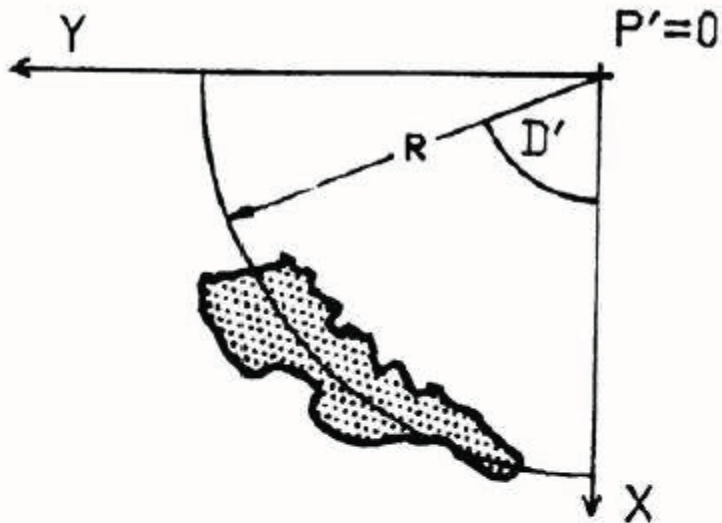
# Křovákovo zobrazení

- je dvojitě konformní kuželové zobrazení v obecné poloze
- Besselův elipsoid je konformně zobrazen na Gaussovu kouli (nebo též Gaussovým způsobem na kouli) a ta je konformně zobrazena na kuželovou plochu obecně položenou









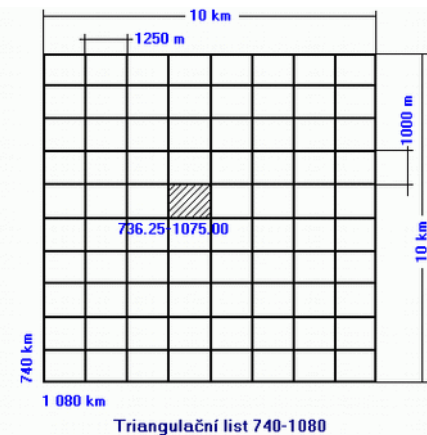
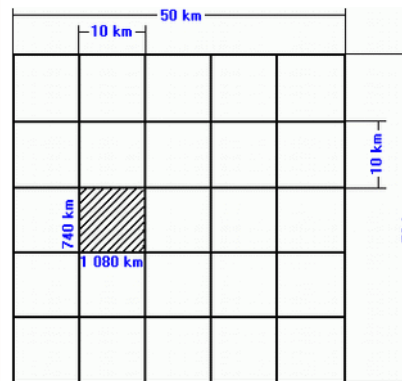
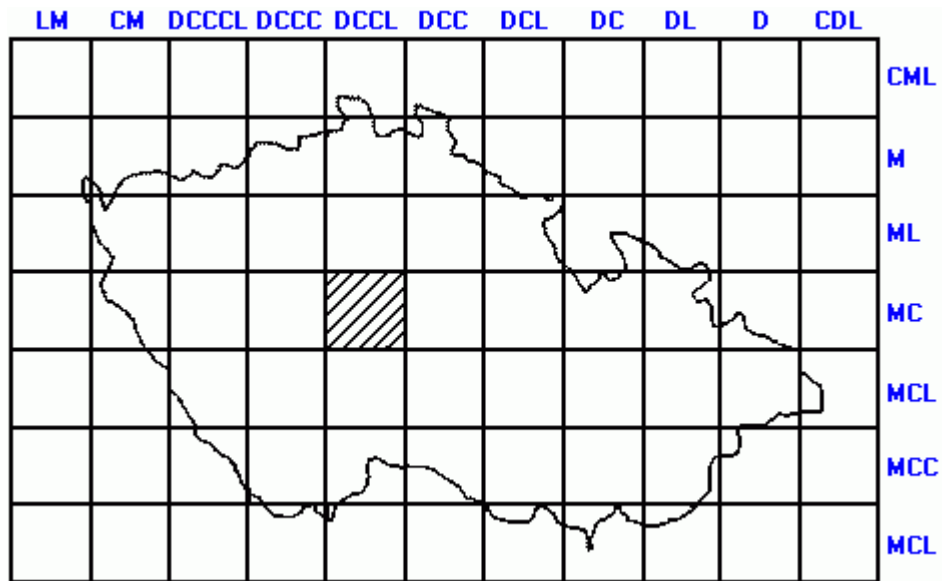
$$R = f(\check{S}) \text{ a } D' = \sin \check{S}_o D.$$

Pravouh\u011bl\u00e9 rovinn\u00e9 sou\u0159adnice  $y$  a  $x$  se ur\u010d\u00ed ze vztahu

$$y = R \sin D',$$

$$x = R \cos D',$$

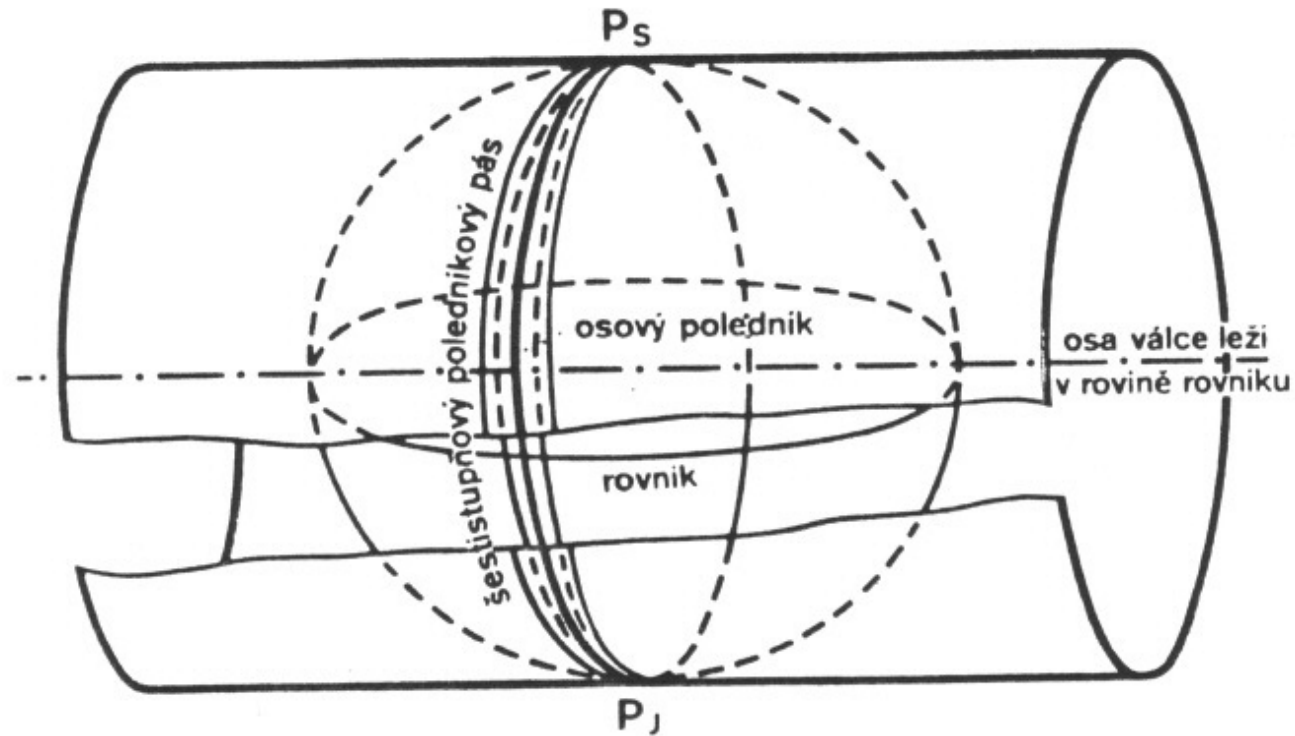
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



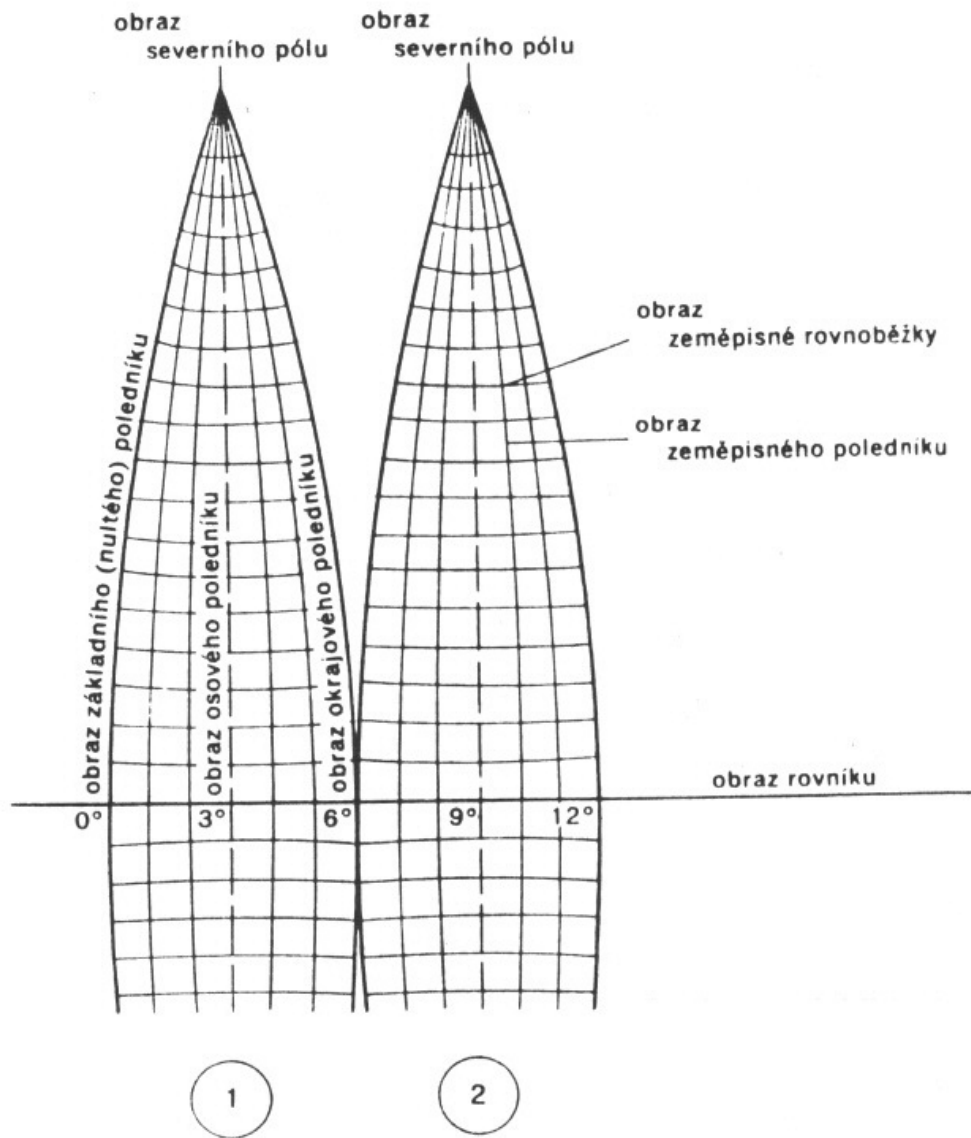
# Shrnutí

- Souřadný systém svázaný s Křovákovým zobrazením
- Navržen v době první republiky pro mapy nejvyšší přesnosti
- Kuželové zobrazení
- Počátek souřadnic ve vrcholu kužele => záporné souřadnice
- Prohozené osy  $x$  a  $y$
- Jednotky v m
- Jednotkou mapy – základní triangulační list v měřítku 1:100000

# Geometrická představa válcového příčného konformního zobrazení (Gauss-Krügerovo a Mercatorovo)

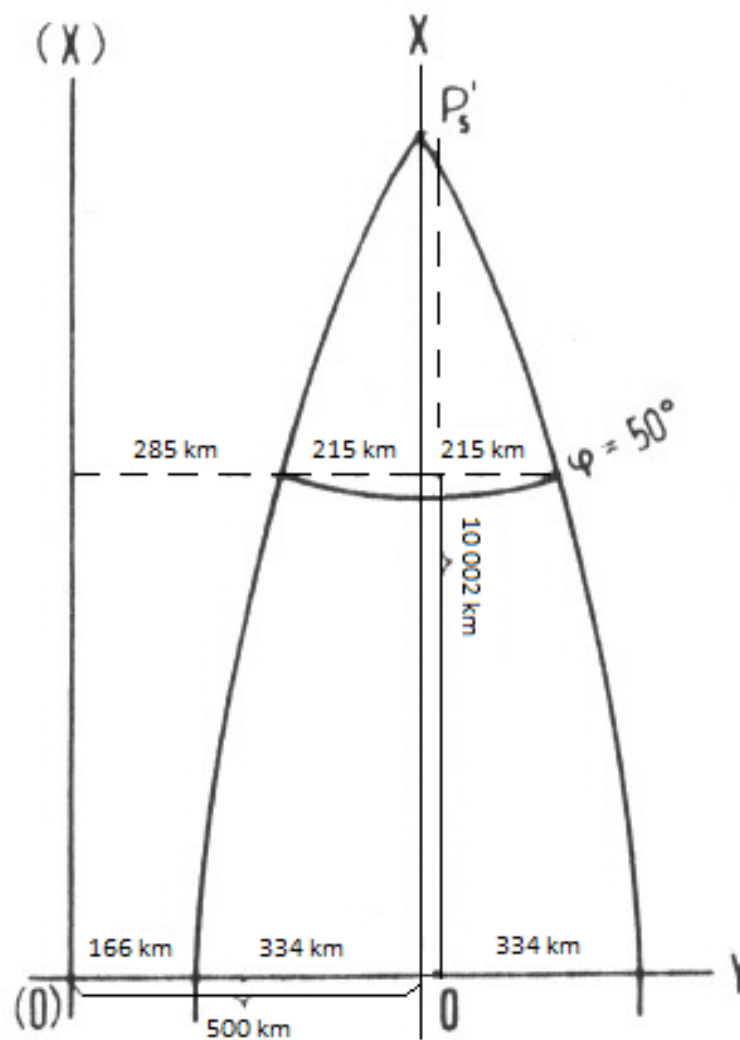


# Rozvinutí 6 stupňových pásů na povrch válce





**Odsunutí hodnot Y  
(osy X) o 500km  
západně**



# Závěr - volba kartografického zobrazení

Samotná volba kartografického zobrazení závisí na velikosti území, tvaru území, geografické poloze, obsahu a účelu mapy.

## Velikost území

- s narůstající velikostí území se zvětšuje zkreslení v okrajových částech, volí se jednoduchá zobrazení (azimutální nebo kuželová)
- pro mapy Země se používají nepravá nebo mnohokuželová zobrazení

## Tvar území

- malé hodnoty zkreslení jsou dosaženy co nejbližší k dotykovým nebo sečným křivkám
- pro okrouhlá území se azimutální zobrazení, pro protáhlá území jsou vhodnější kuželová nebo válcová zobrazení

## Geografická poloha

- co nejmenšího zkreslení se dosahuje na mapách malých území, pro která se volí jednoduchá zobrazení
- rovníkové oblasti – válcová zobrazení v normální poloze
- oblasti mírného pásu (zvláště jsou-li rozložena podél rovnoběžek) - kuželová zobrazení v normální poloze
- obecně geografické mapy - vyrovnávací zobrazení
- polární vrchlíky - azimutální zobrazení v normální poloze

## Obsah mapy

- topografické a navigační mapy - úhlojevná zobrazení,
- automapy a dopravní mapy - délkojevná zobrazení,
- kartogramy a mapy pro srovnání ploch - plochojevná zobrazení

## Účel mapy

- tematické mapy podrobného mapování (náročné na zkreslení), požadovaného zkreslení (úhly ploch, délky) se dosahuje dokonalým přimknutím zobrazovací plochy k referenční ploše
- mapy katastrální a topografické - jednoduchá úhlojevná zobrazení, kde o tvaru rozvinutelné zobrazovací plochy a její poloze rozhoduje tvar a rozsah zobrazovaného území a zobrazení po částech
- přehledné mapy - co nejméně zkreslený obraz referenční plochy
- atlasy a soubory tematických map - srovnatelné druhy zobrazení, nebo stejná zobrazení