

Mechanika VE FYZICE

JAN HORSKÝ • JAN NOVOTNÝ • MILAN ŠTEFANÍK

$$m a = F$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

ACADEMIA

Mechanika VE FYZICE

JAN HORSKÝ • JAN NOVOTNÝ • MILAN ŠTEFANÍK

ACADEMIA PRAHA 2001

OBSAH

Předmluva	9
Seznam symbolů	11

NERELATIVISTICKÁ MECHANIKA SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ

I Základy newtonovské mechaniky

I.1	Pohyb hmotného bodu v kartézské soustavě	17
I.2	Pohyb hmotného bodu v křivočarých souřadnicích	20
I.3	Rychlost a zrychlení relativního pohybu	25
I.4	Inerciální vztažné systémy. Galileiho transformace	28
I.5	Síla a hmotnost	31
I.6	Newtonovy pohybové rovnice	34
I.7	Hmotný bod v neinerciálním systému	36
I.8	Zákon zachování energie	37
I.9	Zákon zachování hybnosti. Střed hmotnosti	42
I.10	Zákon zachování momentu hybnosti	44
I.11	Příklady	46

II Lagrangeovská formulace mechaniky

II.1	Hmotný bod vázaný na plochu a křivku	52
II.2	Klasifikace vazeb. Virtuální posunutí	54
II.3	D'Alembertův princip	56
II.4	Lagrangeovy rovnice 1. druhu	57
II.5	Lagrangeovy rovnice 2. druhu	59
II.6	První integrály Lagrangeových rovnic. Cyklické souřadnice	63
II.7	Zobecněná energie	64
II.8	Základy variačního počtu. Hamiltonův princip	65
II.9	Teorem E. Noetherové	68
II.10	Příklady	73

III Hamiltonovská formulace mechaniky

III.1	Hamiltonova funkce. Hamiltonovy rovnice	79
III.2	Cyklické souřadnice. Routhova funkce	82
III.3	Kanonické transformace	84
III.4	Poissonovy závorky	88
III.5	Pohyb jako kanonická transformace	90
III.6	Liouvilleova věta	92
III.7	Příklady	94

IV Hamiltonova–Jacobiho teorie

IV.1	Hamiltonova–Jacobiho rovnice	97
IV.2	Separace času	98
IV.3	Separace proměnných	100
IV.4	Od klasické ke kvantové mechanice	101
IV.5	Příklady	106

V Tuhé těleso

V.1	Kinematika tuhého tělesa	109
V.2	Moment hybnosti a kinetická energie	111
V.3	Tenzor setrvačnosti	113
V.4	Pohybové rovnice	119
V.5	Volný setrvačnick	121
V.6	Příklady	124

VI Vybrané aplikace

VI.1	Pohyb hmotného bodu s proměnnou hmotností	128
VI.2	Malé kmity	130
VI.3	Těžký symetrický setrvačnick	133
VI.4	Srážky částic	136
VI.5	Problém dvou těles	141
VI.6	Příklady	146

NERELATIVISTICKÁ MECHANIKA KONTINUA

VII Pohybové rovnice kontinua

VII.1	Kinematika kontinua	155
VII.2	Deformace kontinua	158
VII.3	Tenzory a tenzorová pole	161
VII.4	Derivování tenzorových polí	165
VII.5	Integrovaní polí	169
VII.6	Gaussova a Stokesova věta	172
VII.7	Rovnice kontinuity	174
VII.8	Plošné a objemové síly. Tenzor napětí	177
VII.9	Symetrie tenzoru napětí	180
VII.10	Zákon zachování energie v kontinuu	182
VII.11	Termodynamické vztahy a veličiny	184
VII.12	Systém rovnic pro pohyb kontinua	187
VII.13	Příklady	188

VIII Teorie pružnosti

VIII.1	Základní rovnice	190
VIII.2	Hookův zákon	192
VIII.3	Rovnice rovnováhy izotropních těles	195
VIII.4	Pohybové rovnice izotropního pružného tělesa. Vlnění	198
VIII.5	Kmity struny	201
VIII.6	Příklady	204

IX Ideální tekutiny

IX.1	Pohybové rovnice	207
IX.2	Hydrostatika	209
IX.3	Izoentropický pohyb	212
IX.4	Eulerovy rovnice. Rovnice Bernoulliho	214
IX.5	Tok hybnosti a energie	217
IX.6	Cirkulace rychlosti. Potenciálový pohyb	218
IX.7	Obtékání tuhých těles. Odpor a vzlak	221
IX.8	Zvukové vlny	224
IX.9	Nadzvukové rychlosti. Rázové vlny	227
IX.10	Příklady	232

X Vazké tekutiny

X.1	Nedostatky teorie ideální tekutiny	234
X.2	Tenzor napětí vazké tekutiny	235
X.3	Navierovy–Stokesovy rovnice	237
X.4	Termodynamika vazkých tekutin	238
X.5	Proudění trubicí. Hagenův–Poiseuilleův zákon	239
X.6	Turbulentní proudění	242
X.7	Teorie podobnosti	244
X.8	Obtékání těles vazkou tekutinou	246
X.9	Příklady	250

RELATIVISTICKÁ MECHANIKA

XI Základní pojmy a zdroje speciální teorie relativity

XI.1	Princip relativity v předrelativistické fyzice	255
XI.2	Principy speciální teorie relativity	267
XI.3	Lorentzova transformace. Skládání rychlostí	269
XI.4	Časový interval. Prostorová vzdálenost	276
XI.5	Některé kinematické důsledky teorie relativity	281
XI.6	Pohybové rovnice. Energie částice	289
XI.7	Aplikace pohybových rovnic	295
XI.8	Zákon ekvivalence hmotnosti a energie	298
XI.9	Příklady	300

XII Speciální teorie relativity v Minkowského prostoročase

XII.1	Interval	304
XII.2	Geometrie Minkowského prostoru. Tenzory	311
XII.3	Lorentzova a Poincarého grupa	321
XII.4	Čtyřrozměrná mechanika	324
XII.5	Srážky částic	328
XII.6	Tenzorová pole	333
XII.7	Integrály tenzorových polí	338
XII.8	Tenzor energie a hybnosti	344
XII.9	Pohybové rovnice ideální tekutiny	348
XII.10	Variační princip v relativistické mechanice	351
XII.11	Příklady	355

XIII Mechanika v obecné teorii relativity

XIII.1	Gravitační pole v nerelativistické mechanice	357
XIII.2	Gravitační pole v relativistické mechanice	359
XIII.3	Tenzorová pole v křivočarých souřadnicích. Lokálně geodetická soustava	360
XIII.4	Vztažné soustavy a soustavy souřadnic	366
XIII.5	Měření času a délek	367
XIII.6	Měření metrických koeficientů	370
XIII.7	Riemannův tenzor křivosti	371
XIII.8	Einsteinovy gravitační rovnice	375
XIII.9	Pohyb částic v gravitačním poli	376
XIII.10	Rovnice geodetiky ve stacionárním a slabém gravitačním poli	377
XIII.11	Limitní tvar Einsteinova gravitačního zákona	379
XIII.12	Pohybové rovnice částic ve Schwarzschildově poli	380
XIII.13	Ohyb světla ve Schwarzschildově poli	386
XIII.14	Rudý posun spektrálních čar	389
XIII.15	Zpoždění radarových signálů	390
XIII.16	Příklady	391
Literatura		397
Rejstřík		401

PŘEDMLUVA

Teoretická mechanika vytváří vstupní bránu pro každého, kdo chce porozumět moderní teoretické fyzice. V mechanice vznikly jak základní fyzikální pojmy, tak i matematické metody, které umožňují s těmito pojmy pracovat. Každý, kdo zamýšlí hlouběji porozumět zákonitostem přírody, se proto musí podrobněji seznámit s obsahem teoretické mechaniky i s jejím matematickým aparátem.

Předkládaná kniha vznikla po mnohaletých zkušenostech autorů z jejich přednášek, seminářů, besed i diskuzí. Tyto zkušenosti nás vedly k rozhodnutí spojit do jediného textu různé oblasti mechaniky. Doufáme, že toto zpracování pomůže lépe osvětlit obecnost principů mechaniky a vzájemnou souvislost jejích různých oblastí. Tak rozsáhlou tematiku nelze ovšem vždy vyložit do všech podrobností a studium proto předpokládá aktivní přístup, samostatné uvažování, prověřování a řešení problémů. Laskavý čtenář nechtě se proto na nás nezlobí. Jeho případné upozornění na nedostatky či nejasnosti textu uvítáme.

Kniha je rozdělena do tří na sebe navazujících částí. Část první se zaměřuje na předrelativistickou mechaniku soustavy hmotných bodů. Na tuto část plynule navazuje mechanika spojitých prostředí a poslední část je věnována základům relativistické mechaniky.

I když rozvoj fyziky podstatně překročil hranice teoretické mechaniky, není mechanika ani zdaleka uzavřenou, již provždy hotovou oblastí vědy. Moderní matematika umožňuje nové hlubší pochopení jejích principů, výpočetní technika podstatně rozšiřuje oblast jejích aplikací. Žádná kniha pochopitelně nemůže zachytit všechny směry, v nichž se dnes mechanika rozvíjí. Řadu dalších informací najde čtenář uvedeny v literatuře. Zejména upozorňujeme na problematiku deterministického chaosu, kde můžeme zájemcům doporučit hlavně dvojdílné skriptum doc. J. Slavíka, CSc.

Autoři děkují předsedovi AV ČR prof. Ing. R. Zahradníkovi, DrSc., a předsedovi komise AV ČR prof. PhDr. P. Spunarovi, CSc., za jejich zcela fundamentální pomoc a stálou podporu. Za spoustu cenných rad děkujeme paní redaktorce Ing. J. Zykánové, paní sekretářce V. Langhamerové a panu redaktorovi Mgr. A. Baďurovi. Jsme přesvědčeni o tom, že naše poděkování

patří i radě našich přátel a kolegů, kteří nám svými poznámkami, technickou pomocí i podněty účinně a nezištně pomáhali.

Recenzent knihy, prof. RNDr. M. Brdička, vložil hodně svého úsilí do celkového vylepšení rukopisu. Za jeho rady, za jeho upozornění na řadu chyb děkujeme a jsme mu velmi vděční.

Autoři

SEZNAM SYMBOLŮ

Není-li uvedeno jinak (jak je tomu například v části B), indexy řecké abecedy nabývají hodnot 1, 2, 3 a indexy latinské abecedy hodnot 0, 1, 2, 3.

a	zrychlení částice (bodů)
a_n	normálová složka zrychlení
a_t	tečná složka zrychlení
c	rychlost světla ve vakuu
c^*	rychlost světla v prostředí s indexem lomu n
e	elektrický náboj
e_α	kovariantní báze
e^α	kontravariantní báze
e_i	čtyřrozměrné vektory kovariantní báze
$f = 0$	vazba
g	determinant metrického tenzoru
g	tíhové zrychlení
g^{ik}	kontravariantní komponenty metrického tenzoru
g_{ik}	kovariantní komponenty metrického tenzoru
h_α	Laméovy koeficienty
\hbar	Planckova konstanta
i, j, k	jednotkové vektory v systému S_k
j	hustota toku
$_{.j}$	parciální derivace podle souřadnice s indexem j
$_{:j}$	kovariantní derivace podle souřadnice s indexem j
k	koeficient tepelné vodivosti; gravitační (Newtonova) konstanta
\mathbf{k}	vlnový vektor
m	hmotnost bodu
m_0	klidová hmotnost bodu
p	tlak
p_i	hybnost částice; zobecněná hybnost (impulz)
q	tepelný tok
q^i	křivočaré souřadnice částice; zobecněné souřadnice
r	polohový vektor částice, průvodič
r_g	gravitační poloměr
δr	vektor virtuálního posunutí
s	dráha bodu

$ds^2, \Delta s^2$	čtverec prostoročasového intervalu; čtverec vzdálenosti
t	čas; souřadnicový čas
\mathbf{u}, u_i	čtyřrozměrná rychlost, složky čtyřrychlosti
u_α	složky vektoru posunutí
$[uv]$	Poissonova závorka funkcí u a v
\mathbf{v}	rychlost částice (bodu)
$x_\alpha; x, y, z$	kartézské souřadnice částice (bodu)
δx_i	složky vektoru virtuálního posunutí
A	amplituda
$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$	vektorový potenciál
A^{ik}	kontravariantní tenzor 2. řádu
A_{ik}	kovariantní tenzor 2. řádu
A^i_k	smíšený tenzor 2. řádu
\mathbf{B}	indukce magnetického pole
$C_{\alpha\beta\delta\gamma}$	tenzor pružnosti (elastické koeficienty)
D	disipativní funkce
\mathbf{D}	úhrnný moment síly
E	mechanická energie soustavy částic; Youngův modul
\mathbf{E}	intenzita elektrického pole
E_P	energie elektromagnetického pole
\mathcal{E}	celková energie systému; zobecněná energie
F	vytvorující funkce kanonické transformace
\mathbf{F}	síla působící na částici
\mathcal{F}	volná energie
\mathbf{F}_M	čtyřvektor Minkowskiho síly
G^{ik}	Einsteinův tenzor
\mathcal{G}	termodynamický potenciál
H	Hamiltonova funkce (hamiltonián)
\hat{H}	operátor energie (hamiltonián)
\mathcal{H}	entalpie
I	funkcionál
δI	variace funkcionálu
$I_{\alpha\beta}$	tenzor setrvačnosti
J	jakobián
\mathbf{J}	úhrnný moment hybnosti
K	koeficient všestranného stlačení
L	Lagrangeova funkce
M	úhrnná hmotnost; Machovo číslo
N	počet částic soustavy
\mathbf{P}	úhrnná hybnost
P^{3N}	konfigurační prostor
\mathbf{P}	čtyřrozměrná hybnost, čtyřhybnost, čtyřimpulz
Q_j	komponenty vektoru zobecněné síly, $j = 1, \dots, n$
R	Routhova funkce; skalární křivost
\mathbf{R}	střed hmotnosti daného systému; vazebná síla

R_{ik}	Ricciho tenzor křivosti
R^i_{klm}	Riemannův tenzor křivosti
\mathcal{R}	Reynoldsovo číslo
S	akce systému
S_0	redukovaná akce
S_k, K	kartézská soustava souřadnic
S	entropie
T	kinetická energie; teplota; čas
T^{ij}	tenzor energie a hybnosti
U	zobecněná potenciálová funkce
V, W	potenciální energie
V	rychlost hmotného středu
V_Ω	fázový objem oblasti Ω
X, Y, Z	kartézské souřadnice částice (bodu)
\mathbf{X}	čtyřrozměrný polohový vektor
α	strhávací koeficient
$\alpha_{\alpha\beta}$	koeficienty tepelné pružnosti (elastické koeficienty)
γ	Lorentzův faktor
δ_k^i	Kroneckerovo delta
ϵ	úhlové zrychlení
$\epsilon_{\alpha\beta}$	tenzor malé deformace
$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$	Levi-Civitův permutační symbol
ϵ_{ijkl}	Levi-Civitův permutační symbol
$\eta_{\alpha\beta}$	tenzor rychlosti deformace
κ	Einsteinova gravitační konstanta
λ	vlnová délka
λ_A, μ_B	Lagrangeův multiplikátor
μ	modul pružnosti ve smyku; klidová hustota klidové hmotnosti
μ_{turb}	koeficient turbulentní vazkosti
ν	frekvence
ξ	úhel rozptylu
ρ	hustota; záměrná vzdálenost
σ	Poissonův koeficient
$\sigma_{\alpha\beta}$	tenzor absolutních napětí
$d\sigma$	diferenciální účinný průřez
τ	vlastní čas
$\tau_{\alpha\beta}$	tenzor napětí
φ	fáze; Newtonovský gravitační potenciál
$\varphi(\mathbf{r}, t)$	skalární potenciál
φ, ψ, ϑ	Eulerovy úhly
ω	kruhová frekvence
ω	úhlová rychlost
Γ	cirkulace rychlosti
Γ^i_{jk}	Christoffelovy symboly
$\Delta; \Delta$	Laplaceův operátor; změna hodnoty veličiny

Λ	kosmologická konstanta
Φ	reaktivní síla
$\Psi(r, t)$	vlnová funkce
Ω	oblast fázového prostoru; oblast prostoročasu
$d\Omega$	integrační element v prostoročase
∂	parciální derivace
∇	operátor nabla

Část A

**NERELATIVISTICKÁ MECHANIKA
SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ**

I ZÁKLADY NEWTONOVSKÉ MECHANIKY

Nápadnou vlastností fyzikálního světa okolo nás je existence *těles*, která se v prostoru pohybují, přičemž si během pohybu zachovávají svou identitu. Vzájemně ovlivňují svůj pohyb jak přímými nárazy, tak i „působením na dálku“. Rozměry těles jsou často zanedbatelné vůči oblastem prostoru, v nichž se pohybují. Lze proto v abstrakci nahradit tělesa bezrozměrnými *částicemi* čili *hmotnými body*. Tato abstrakce má ovšem širší platnost. I tělesa, jejichž rozměry nelze zanedbat a která dokonce výrazně mění svůj tvar (kontinuum), mohou být v myšlenkách rozdělena na malé části, na něž můžeme v limitě nahlížet jako na hmotné body. Ukazuje se, že obecné fyzikální principy je nejlepší formulovat pro interagující hmotné body, zatímco eventuelní přechod od diskrétního ke spojitému se stává záležitostí matematiky. V této úvodní kapitole se budeme zabývat soustavami libovolného konečného počtu hmotných bodů, jejichž pohyby jsou v prostoru a v čase přesně určeny. Úkolem mechaniky je nalézt *zákony pohybu* těchto hmotných bodů.

Řešení této úlohy se přirozeně štěpí na dvě části. Nejprve si v *kinematice* vybudujeme prostředky pro matematický popis pohybu bez ohledu na to, odpovídá-li fyzikálním zákonům. Stanovením těchto zákonů, tj. omezením třídy kinematicky možných pohybů na pohyby dynamicky možné, se zabývá *dynamika*.

V rámci kinematiky studujeme pohyb hmotného bodu v kartézských a křivočarách souřadnicích a závislost popisu pohybu na volbě vztažného systému.

Zabýváme se otázkou rovnoprávnosti vztažných systémů a definujeme třídu inerciálních systémů, v nichž jsou zákony mechaniky nejprostší. Matematickým vyjádřením těchto zákonů jsou Newtonovy pohybové rovnice, které určují časový vývoj mechanických systémů. Tyto rovnice formulujeme i pro pohyb v neinerciálních systémech.

Všímáme si principů symetrie, jimiž se řídí silové působení mezi hmotnými body. Nakonec studujeme zákony zachování a podmínky jejich platnosti. Zavedeme nejdůležitější zachovávaní se veličiny: energii, hybnost a moment hybnosti.

1.1 Pohyb hmotného bodu v kartézské soustavě

Pro účely kinematiky stačí umět popsat pohyb kteréhokoliv hmotného bodu. Tento pohyb je spojitou řadou událostí (křivkou) v prostoročasovém kontinuu. Pro jeho kvantitativní popis můžeme v souladu s běžnou zkušeností předpokládat, že máme k dispozici tuhé tyče pro měření prostorových vzdáleností a ideální hodiny pro měření časových intervalů mezi událostmi. Pro newtonovskou fyziku je specifickým předpokladem, že existuje *absolutní sou-*

*časnost*¹. Údaje o vzdálenostech se pak odečítají v této absolutní současnosti, kterou tvoří *třírozměrný prostor* v daném okamžiku, zatímco *čas* je čtvrtým rozměrem prostoročasového kontinua. Dále se předpokládá, že geometrie prostoru je *euklidovská*.

Zaplníme-li prostor dostatečně hustě hmotnými body (které se vzájemně nesrážejí), vzniká *vztažná soustava*, resp. *vztažný systém*. V matematické abstrakci lze oddělit pojem vztažné soustavy od reálných hmotných bodů a nahradit je nekonečně hustě rozloženými body myšlenými. Zvláštní význam mají takové soustavy, v nichž se nemění vzájemné vzdálenosti vztažných bodů. Nazývají se *tuhými* a mohou být fyzikálně realizovány pomocí tuhých těles².

V dalším výkladu budeme předpokládat, že jednotka délky i jednotka času jsou pevně zadány. Přiřadíme-li bodům tuhého vztažného systému S trojice reálných čísel x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) tak, že pro vzdálenost mezi nimi platí

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (\Delta x_\alpha)^2, \quad (\text{I.1})$$

dostáváme *kartézskou souřadnicovou soustavu* S_k . Takováto soustava není zřejmě určena jednoznačně. K její specifikaci je třeba zvolit počátek O a orthonormální trojhran vektorů ve směrech souřadnicových os $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Pak polohu hmotného bodu X určuje *polohový vektor* \mathbf{r} mající počátek v bodu O a konec v X .

Platí

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (\text{I.2})$$

kde x_α jsou *souřadnice* daného hmotného bodu. Poloha hmotného bodu v S_k je obecně časově proměnná, tj.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (\text{I.3})$$

Koncové body $\mathbf{r}(t)$ tvoří *trajektorii* hmotného bodu, která je parametrizována časem t . Délku trajektorie (od jejího pevně zvoleného bodu) nazýváme *dráhou*.

¹ V části C ukážeme, že tento požadavek není dobře fyzikálně odůvodněn. Lze jej ovšem používat, pokud se všechna uvažovaná tělesa pohybují malými relativními rychlostmi v srovnání s rychlostí světla.

² Vztažný systém může být eventuálně zadán pouze lokálně. V praxi a historii jsou důležité zejména tyto tuhé vztažné systémy: a) soustava spojená se Zemí, jíž se užívá v běžném životě, b) soustava spojená se stálicemi (jež lze přibližně považovat za vzájemně nehybné), které se užívá v astronomii.

Pro formulaci pohybových zákonů je potřebné zavést kromě polohového vektoru jeho první a druhé derivace.

Rychlostí hmotného bodu nazýváme (časově proměnný) vektor

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{I.4})$$

a *zrychlením* vektor

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (\text{I.5})$$

Kartézské složky rychlosti a zrychlení jsou zřejmě

$$v_\alpha = \dot{x}_\alpha, \quad a_\alpha = \ddot{x}_\alpha = \dot{v}_\alpha. \quad (\text{I.6})$$

Pro fyzikální studium pohybu je často vhodné rozložit zrychlení na tečnou a normálovou složku. Nechť $s = s(t)$ značí dráhu hmotného bodu. Platí zřejmě

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{l}, \quad (\text{I.7})$$

kde $\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ je jednotkový tečný vektor k dané trajektorii v bodě \mathbf{r} . Zderivujeme-li (I.7) podle času, dostáváme

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{l} + \dot{s}\dot{\mathbf{l}} = \ddot{s}\mathbf{l} + \dot{s}^2 \frac{d\mathbf{l}}{ds} \quad (\text{I.8})$$

a užitím Frenetovy formule

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad (\text{I.9})$$

kde \mathbf{n} je jednotková normála k trajektorii v rovině tvořené vektory \mathbf{a} , \mathbf{v} (R je poloměr křivosti trajektorie), obdržíme

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{l} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}. \quad (\text{I.10})$$

Je tedy $a_t = \ddot{s} = \dot{v}$ *tečná* složka a $a_n = \frac{v^2}{R}$ *normálová* složka zrychlení. Vektor

$$\mathbf{b} = \mathbf{l} \times \mathbf{n} \quad (\text{I.11})$$

nazýváme *binormálovou*; ortonormální trojice \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{b} tvoří tzv. přirozený trojhran. Složka zrychlení ve směru binormály je zřejmě nulová.

I.2 Pohyb hmotného bodu v křivočarých souřadnicích

Konkrétní situace se často vyznačuje určitým typem symetrie, který může způsobit, že je výhodné užít jiné než kartézské soustavy (například soustavy souřadnic sférických či válcových). Je proto vhodné mít k dispozici aparát, který dovoluje pracovat s křivočarými souřadnicovými soustavami.

Bodům o kartézských souřadnicích x^α (jak dále uvidíme, bude z formálních důvodů výhodné psát indexy u souřadnic nahoře) přiřadíme trojice čísel q^β podle vztahů

$$q^\beta = q^\beta(x^\alpha) . \quad (\text{I.12})$$

Indexy řecké abecedy α, β, \dots nabývají hodnot od 1 do 3. Předpokládáme, že existuje i inverzní transformace

$$x^\alpha = x^\alpha(q^\beta) , \quad (\text{I.13})$$

takže čísla q^β umožňují odlišit jednotlivé body a hrají tak úlohu souřadnic³. V těchto nových souřadnicích však již obecně neplatí vztah (I.1), charakteristický pro kartézské souřadnice. Místo něho máme diferenciální vztah

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta , \quad (\text{I.14})$$

kde veličiny

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \quad (\text{I.15})$$

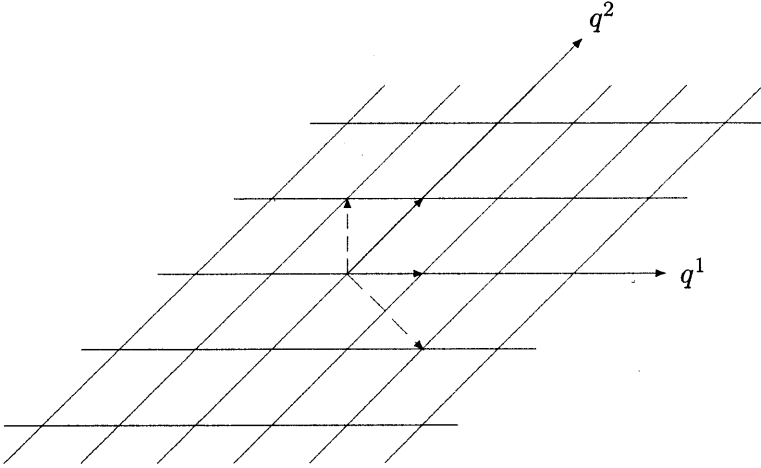
nazýváme kovariantními komponentami pole *metrického tenzoru*. Tyto komponenty jsou obecně funkcemi souřadnic q^α . V tomto případě nazýváme dané souřadnice *křivočarými*.

Rozebereme si nyní podrobněji geometrický význam křivočarých souřadnic. Každým bodem prostoru procházejí tři čáry, podél nichž se mění pouze jedna ze souřadnic q^α , zatímco zbývající mají konstantní hodnotu. Těmto čarám říkáme *souřadnicové čáry*. Tečné vektory \mathbf{e}_α k souřadnicovým čarám (vzhledem k parametrizaci dané souřadnicí q^α) tvoří *kovariantní bázi* příslušnou dané souřadnicové soustavě v daném bodě. Je tedy

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} . \quad (\text{I.16})$$

Obdobně každým bodem prostoru prochází trojice *souřadnicových ploch*, na nichž je konstantní jedna ze souřadnic q^α . Gradienty souřadnicových

³ Souřadnicová soustava může být eventuálně zadána pouze lokálně, tj. jen v jisté oblasti prostoru.



Obr. 1: Kovariantní a kontravariantní báze. Kovariantní (plně vytažená) a kontravariantní (čárkovaně vytažená) báze v kosouhlých souřadnicích v rovině. Vektory kovariantní báze e_1 , e_2 mají směr souřadnicových čar q^1 , q^2 , vektory kontravariantní báze e^1 , e^2 jsou kolmé k souřadnicovým „plochám“ $q^1 = \text{konst}$, $q^2 = \text{konst}$.

ploch tvoří v každém bodě *kontravariantní bázi* dané souřadnicové soustavy, kterou budeme značit e^α . Je tedy

$$e^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \mathbf{r}}. \quad (\text{I.17})$$

Je zřejmé, že mezi kovariantní a kontravariantní bázi platí vztahy duality⁴

$$e^\alpha e_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad (\text{I.18})$$

v nichž δ_β^α je jednotková matice (Kroneckerova). Obě báze pro dvojrozměrný případ znázorňuje obr. 1.

Srovnáním (I.15) a (I.16) vidíme, že kovariantní komponenty metrického tenzoru jsou definovány pomocí skalárních součinů vektorů kovariantní báze

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta. \quad (\text{I.19})$$

Je přirozené zavést také kontravariantní komponenty metrického tenzoru vztahy

$$g^{\alpha\beta} = e^\alpha e^\beta. \quad (\text{I.20})$$

⁴ Čtenáři lze doporučit, aby si význam souřadnicových čar a ploch a obou bází promyslel na konkrétním příkladě (například na sférických souřadnicích).

Ze vztahů (I.16) a (I.17) se snadno ukáže, že matice $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ jsou vzájemně inverzní, tj. že platí

$$\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad (\text{I.21})$$

Na tomto místě je vhodné zavést *Einsteinovo sumační pravidlo*. Nebudeme napříště vypisovat znamení sumy a budeme automaticky předpokládat, že opakování indexu znamená součet přes všechny jeho hodnoty (zde od 1 do 3). Je zřejmé, že *sčítací* (tzv. *němý index*) může být v průběhu výpočtu libovolně „přejmenován“, zatímco u *volných* indexů se musíme držet původního označení.

Mějme nyní libovolný vektor \mathbf{A} . Můžeme jej vyjádřit pomocí kovariantní a kontravariantní báze, tj.

$$\mathbf{A} = A_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha} = A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}. \quad (\text{I.22})$$

Komponenty A_{α} nazýváme kovariantními a A^{α} kontravariantními komponentami vektoru v dané souřadnicové soustavě v daném bodě. Vynásobením vztahu (I.22) vektorem \mathbf{e}_{β} , popř. \mathbf{e}^{β} , pro tyto komponenty dostáváme

$$A_{\alpha} = \mathbf{A} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad A^{\alpha} = \mathbf{A} \mathbf{e}^{\alpha}. \quad (\text{I.23})$$

Využitím (I.19) a (I.20) obdržíme, že skalární součin dvou vektorů \mathbf{A} a \mathbf{B} se vyjádří jako

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta} = g^{\alpha\beta} A_{\alpha} B_{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha} = A_{\alpha} B^{\alpha}. \quad (\text{I.24})$$

Speciálně, klademe-li $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, získáme odsud vyjádření kvadrátu *velikosti* vektoru.

Konečně vynásobením (I.20) komponentou A_{α} , resp. (I.19) komponentou A^{α} a užitím (I.22) a (I.23) dostáváme převodní vztahy mezi kovariantními a kontravariantními komponentami vektoru

$$A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta}, \quad A^{\alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta}. \quad (\text{I.25})$$

V kartézských souřadnicích je zřejmě $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$; kovariantní a kontravariantní báze a komponenty splývají a není tedy třeba rozlišovat horní a dolní polohu indexů.

Obdržené výsledky nyní aplikujeme na fyzikálně významné vektory rychlosti a zrychlení.

Kontravariantní komponenty rychlosti lze vypočítat podle (I.23) a (I.17)

$$\mathbf{v}^{\alpha} = \mathbf{v} \mathbf{e}^{\alpha} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{dq^{\alpha}}{dt} = \dot{q}^{\alpha}. \quad (\text{I.26})$$

Kovariantní komponenty rychlosti je odtud možné určit „spuštěním indexů“ podle (I.25) a využitím (I.24) pro $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$ dále přepsat do tvaru

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{1}{2} g_{\gamma\beta} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (\text{I.27})$$

Poslední tvar je velmi výhodný, poněvadž

$$v^2 = \mathbf{v}^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (\text{I.28})$$

a odtud lze snadno vypočítat rychlost jako funkci křivočarých souřadnic a jejich derivací.

Co se týče zrychlení, je třeba zdůraznit, že obecně $a^\alpha \neq \ddot{q}^\alpha$, poněvadž zrychlení je dáno nejen změnami křivočarých komponent rychlosti, ale i změnou báze při pohybu. Jednoduchý výraz dostáváme pro kovariantní komponenty zrychlení. Podle (I.23), (I.16) a užitím úpravy „per partes“ je

$$a_\alpha = \mathbf{a} \mathbf{e}_\alpha = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \right). \quad (\text{I.29})$$

Podle (I.23) a (I.16) obdržíme

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \mathbf{v} = v_\alpha. \quad (\text{I.30})$$

Dále je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\beta = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \mathbf{v}. \quad (\text{I.31})$$

Protože

$$\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} v^2 - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \mathbf{v}, \quad (\text{I.32})$$

je

$$\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (\text{I.33})$$

Užitím (I.30), (I.27) v prvním a (I.31), (I.33) v druhém členu (I.29) máme

$$a_\alpha = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right] \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (\text{I.34})$$

V praxi se často setkáváme s případem *ortogonálních souřadnic*. Vyznačují se tím, že je

$$g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta, \quad (\text{I.35})$$

jinými slovy souřadnicové čáry jsou kolmé k souřadnicovým plochám a vektory kovariantní a kontravariantní báze mají stejný směr. V tomto případě je vhodné zavést ortonormální, tzv. *fyzikální bázi*, která vznikne normováním vektorů kovariantní (eventuálně kontravariantní) báze. Označíme-li fyzikální komponenty libovolného vektoru \mathbf{A} vlnovkou, získáme⁵

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} A_\alpha = h_\alpha A^\alpha . \quad (\text{I.36})$$

Zde podle (I.24) s přihlédnutím k (I.35) a (I.15) jsme označili

$$h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^\alpha}\right)^2} . \quad (\text{I.37})$$

Veličiny h_α , které jsou funkcemi souřadnic q^α , označujeme jako *Laméovy koeficienty*.

V případě ortogonálních souřadnic je užití fyzikálních složek vhodné u rychlosti a zrychlení, a to jak z matematických důvodů (užití ortonormální báze zjednodušuje výpočty), tak i z důvodů fyzikálních (k této bázi se nejčastěji vztahují měřené veličiny).

Zavádíme proto

$$\tilde{v}_\alpha = h_\alpha \dot{q}^\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right) , \quad (\text{I.38})$$

$$\tilde{a}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right] \left(\frac{v^2}{2} \right) . \quad (\text{I.39})$$

Ilustrujme vyloženou teorii na případě válcových souřadnic, kde transformační vzorce (I.13) jsou ve tvaru

$$x = \rho \cos \varphi , \quad y = \rho \sin \varphi , \quad z = z . \quad (\text{I.40})$$

Vzorec (I.28) dává přepočtem do křivočarých souřadnic

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 . \quad (\text{I.41})$$

Odtud vidíme, že Laméovy koeficienty jsou

$$h_\rho = 1 , \quad h_\varphi = \rho , \quad h_z = 1 \quad (\text{I.42})$$

⁵ Zde se přes α nesčítá. I v dalších vztazích tohoto textu nebude opakování indexu znamenat sčítání v případě, kdy zřejmě jde o volný index a použití sumačního pravidla by vedlo ke sporu.

a podle (I.38) a (I.39) dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\rho &= \dot{\rho}, & \tilde{v}_\varphi &= \rho\dot{\varphi}, & \tilde{v}_z &= \dot{z}, \\ \tilde{a}_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, & \tilde{a}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi}), & \tilde{a}_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

I.3 Rychlost a zrychlení relativního pohybu

Mějme kartézské souřadnicové soustavy $S(O, \{\mathbf{e}_\alpha\})$ a $S'(O', \{\mathbf{e}'_\alpha\})$. Mezi průvodiči \mathbf{r} a \mathbf{r}' libovolného hmotného bodu platí zřejmě

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, \quad (\text{I.44})$$

kde \mathbf{r}_0 je vektor s počátkem v O a koncem v O' .

Transformační vztah mezi souřadnicemi obou soustav lze napsat jako

$$x_\alpha = c_{\beta\alpha} x'_\beta + b_\alpha, \quad (\text{I.45})$$

kde b_α souvisí se změnou počátku, zatímco $c_{\beta\alpha}$ se změnou směrů os. Jsou přitom splněny relace ortonormality

$$c_{\beta\alpha} c_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \quad (\text{I.46})$$

známé z analytické geometrie. Pokud se vztažné systémy S a S' vůči sobě pohybují, jsou koeficienty $c_{\beta\alpha}$ a b_α funkcemi času.

Mějme nyní libovolný časově proměnný vektor \mathbf{A} nezávislý na volbě počátku. Mezi jeho komponentami v S a S' platí vztah

$$A_\alpha = c_{\beta\alpha} A'_\beta. \quad (\text{I.47})$$

Derivací tohoto vztahu podle času dostaneme

$$\dot{A}_\alpha = \dot{c}_{\beta\alpha} A'_\beta + c_{\beta\alpha} \dot{A}'_\beta = \dot{c}_{\beta\alpha} c_{\beta\gamma} A_\gamma + c_{\beta\alpha} \dot{A}'_\beta, \quad (\text{I.48})$$

když jsme využili inverzního vztahu k (I.47)

$$A'_\beta = c_{\beta\gamma} A_\gamma. \quad (\text{I.49})$$

Porovnáním s (I.47) vidíme, že $c_{\beta\alpha} \dot{A}'_\beta$ představuje v soustavě S komponentu časové derivace vektoru \mathbf{A} určené vzhledem k soustavě S' . Označíme-li tuto derivaci čárkou, můžeme psát

$$\left(\frac{d'\mathbf{A}}{dt} \right)_\alpha = c_{\beta\alpha} \dot{A}'_\beta. \quad (\text{I.50})$$

Obdobně je

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_\alpha = \dot{A}_\alpha \quad (\text{I.51})$$

a vztah (I.48) tedy vyjadřuje skutečnost, že obecně $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \neq \frac{d'\mathbf{A}}{dt}$. Položíme-li

$$\dot{c}_{\beta\alpha}c_{\beta\gamma} = \omega_{\alpha\gamma}, \quad \omega_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma}, \quad (\text{I.52})$$

kde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ je Levi-Civitův permutační symbol (viz poznámka v dalším textu), můžeme psát, že

$$\dot{c}_{\beta\alpha}c_{\beta\gamma}A_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta A_\gamma = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})_\alpha. \quad (\text{I.53})$$

Vztah (I.48) lze tedy zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} + \frac{d'\mathbf{A}}{dt}. \quad (\text{I.54})$$

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ zavedený vztahy (I.52) nazýváme vektorem *úhlové rychlosti* systému S' vůči systému S . Uvažujeme-li vektory \mathbf{A} , které jsou pevné v S' , tj. pro něž je $\frac{d'\mathbf{A}}{dt} = 0$, vidíme z (I.54), že $\boldsymbol{\omega}$ má směr okamžité osy rotace a velikost rovnou úhlové rychlosti otáčení kolem této osy⁶.

Vzorec (I.54) nyní aplikujeme na rychlost a zrychlení. Přitom označíme

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_{tr}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = \mathbf{a}_{tr} \quad (\text{I.55})$$

jako *translační rychlost* a *translační zrychlení* počátku soustavy S' vůči soustavě S . Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \\ &= \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{tr}, \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

čímž je dán vztah mezi rychlostmi hmotného bodu \mathbf{v} v S a \mathbf{v}' v S' . Pro body pevně spojené s S' je $\mathbf{v}' = 0$, a tudíž jejich rychlost je

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{tr}. \quad (\text{I.57})$$

⁶ Přesně vzato, poněvadž $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ jakožto rozdíl dvou vektorů musí být vektorem a vektorový součin dvou vektorů je pseudovektor (jeho smysl závisí na volbě orientace), musí být $\boldsymbol{\omega}$ pseudovektor. Z (I.54) plyne, že v pravotočivé soustavě souvisí smysl $\boldsymbol{\omega}$ se smyslem otáčení podle pravidla pravotočivého šroubu.

Rychlost v_0 nazýváme *rychlostí unášivou*. Lze ji rozložit na rotační rychlost $\omega \times r'$ a translační rychlost v_{tr} .

Pro zrychlení dostaneme obdobným postupem

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{d(\omega \times r')}{dt} + \frac{dv_{tr}}{dt} = \\ &= \frac{d'v'}{dt} + \omega \times v' + \epsilon \times r' + \omega \times \left(\frac{d'r'}{dt} + \omega \times r' \right) + a_{tr} = \\ &= a' + 2\omega \times v' + \epsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r') + a_{tr}, \end{aligned} \quad (I.58)$$

kde $\epsilon = \dot{\omega}$ je *úhlové zrychlení* S' vůči S . Je tedy

$$a - a' = a_0, \quad (I.59)$$

kde a_0 se skládá z *Coriolisova zrychlení*

$$2\omega \times v' \quad (I.60)$$

a *unášivého zrychlení*

$$\epsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r') + a_{tr}. \quad (I.61)$$

Unášivé zrychlení se dělí na tři členy, které v uvedeném pořadí nazýváme Eulerovým, dostředivým a translačním zrychlením. Je ovšem třeba poznamenat, že tento rozklad (stejně jako rozklad (I.57)) závisí nejen na samotném pohybujícím se systému S' , ale i na tom, jak v něm zvolíme počátek. Vhodnou volbou počátku lze vždy dosáhnout toho, aby translační rychlost měla v daném okamžiku stejný směr jako rychlost úhlová. K tomu stačí posunout počátek do bodu

$$r' = \frac{-v_{tr} \times \omega}{\omega^2}, \quad (I.62)$$

v němž je podle (I.57) unášivá rychlost dána vztahem

$$v_0 = \frac{\omega v_{tr}}{\omega^2} \omega. \quad (I.63)$$

Unášivá rychlost počátku je však rovna rychlosti translační, takže vztah (I.63) dokazuje uvedené tvrzení. Pohyb tuhého vztazného systému (resp. tuhého tělesa) je tedy v každém okamžiku pohybem šroubovým (systém se pohybuje ve směru jisté osy a zároveň se kolem ní otáčí).

Poznámka: Levi-Civitův permutační symbol. Tento symbol $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ představuje 3^3 čísel, definovaných tímto způsobem

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \begin{cases} = 1 & \text{pro sudé permutace indexů 1, 2, 3} \\ = -1 & \text{pro liché permutace indexů 1, 2, 3} \\ = 0 & \text{pokud jsou aspoň dva indexy stejné.} \end{cases}$$

Z této definice je zřejmé, že Levi-Civitův symbol mění znaménko při libovolné výměně indexů, tj. je úplně antisymetrický. Je snadné ukázat, že součin dvou Levi-Civitových symbolů se dá vyjádřit pomocí determinantu z Kroneckerových matic

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}. \quad (\text{I.64})$$

Sečtením přes jeden či více indexů odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\gamma} &= \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\lambda}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 6. \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

Je také snadné se přesvědčit, že Levi-Civitův symbol umožňuje jednoduchý zápis komponent vektorového součinu

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta} B_{\gamma}. \quad (\text{I.66})$$

Užití Levi-Civitova symbolu ve spojení se vzorcí (I.65) je velmi výhodné při odvozování různých identit vektorové algebry a analýzy. Jako příklad si zde ukážeme převedení dvojnásobného vektorového součinu na skalární součiny, kterého jsme užili při výpočtu (I.63). Je

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta} \epsilon_{\gamma\delta\epsilon} B_{\delta} C_{\epsilon} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\delta\epsilon\gamma} A_{\beta} B_{\delta} C_{\epsilon} = \\ &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\epsilon} - \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\delta}) A_{\beta} B_{\delta} C_{\epsilon} = \\ &= B_{\alpha} (A_{\beta} C_{\beta}) - C_{\alpha} (A_{\beta} B_{\beta}), \end{aligned}$$

takže

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (\text{I.67})$$

1.4 Inerciální vztahné systémy. Galileiho transformace

Je zřejmé, že pro formulaci zákonů mechaniky budou nejvhodnější tuhé vztahné systémy a v jejich rámci zavedené kartézské souřadnice. Vzniká

ovšem otázka, zda mezi všemi tuhými systémy neexistují některé (popř. alespoň jeden), které jsou fyzikálně privilegovány. Tato otázka se vine celými dějinami fyziky, Newton ji řešil předpokladem o existenci *absolutního prostoru*. Podle toho by měl být jistý vztahový systém privilegován tím, že se nepohybuje vůči absolutnímu prostoru. Fyzikální charakteristiku tohoto systému (resp. samotného absolutního prostoru) podává 1. Newtonův zákon. Podle něho se *volný hmotný bod* vůči tomuto systému pohybuje bez zrychlení. K jeho praktickému nalezení je tedy třeba vědět, co je to volný hmotný bod. Rozumíme jím hmotný bod, na nějž nepůsobí *pravé* (tj. skutečné) *síly*, mající původ ve vzájemné interakci hmotných bodů. Lze předpokládat, že pravé síly se s rostoucí vzdáleností interagujících objektů blíží k nule, takže volné hmotné body mohou být v rozumném časovém intervalu s dostatečnou přesností realizovány, a lze se pak přesvědčit, že systém splňující požadavek 1. Newtonova zákona vskutku existuje. Podobným způsobem můžeme v astronomii zavést inerciální systém spojený se stálicemi a vztahovat k němu pohyby planet ve sluneční soustavě, anebo systém spojený se středy okolních galaxií a vztahovat k němu pohyby hvězd naší galaxie. Takovýto systém se nazývá *inerciální*. (Poznamenejme však, že toto zavedení inerciálního systému by bylo zcela uspokojivé, jen kdyby kosmické hmoty tvořily ostrovní systém v prázdném prostoru. Uvažujeme-li v rámci newtonovských představ nekonečný vesmír zaplněný hmotou, nelze gravitační působení jeho vzdálených částí nikdy zanedbat a uvedené inerciální systémy musíme proto považovat pouze za „místní“ a nerozšiřovat je na celý vesmír.)

Nyní ovšem vzniká otázka, je-li inerciální systém určen jednoznačně. To jest předpokládáme, že jsme našli systém, v němž jsou zrychlení všech volných hmotných bodů rovna nule, a tážeme se, existuje-li jiný systém o téže vlastnosti.

Pohlédneme-li na vzorec (I.59), vidíme, že je k tomu třeba, aby pro všechna \mathbf{r}' a \mathbf{v}' platilo

$$\mathbf{a}_0 = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_{\text{tr}} = 0. \quad (\text{I.68})$$

To je možné jen tehdy, když $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{a}_{tr} jsou rovny nule, takže vztah (I.56) se redukuje na

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (\text{I.69})$$

kde \mathbf{V} je konstantní vektor. Integrací (I.69) dostáváme (za předpokladu, že v čase $t = 0$ počátky obou soustav splývají)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (\text{I.70})$$

To je *Galileiho transformace* ve vektorovém tvaru. Doplňujeme ji ještě vztahem

$$t = t' \quad (\text{I.71})$$

vyjadřujícím v klasické nerelativistické mechanice předpokládanou existenci absolutní současnosti. Vzorec (I.70) vyjadřuje, že máme-li jeden inerciální systém, jsou inerciálními též všechny systémy, které se vzhledem k němu pohybují rovnoměrně a přímočaře libovolnou rychlostí \mathbf{V} . Skládání Galileiho transformací (I.70), (I.71) lze chápat jako operaci, která splňuje axiomy grupy (jednotkovým prvkem je identická transformace $\mathbf{V} = 0$ a inverzní prvek dostaneme záměnou \mathbf{V} za $-\mathbf{V}$). Lze říci, že vztah

$$\mathbf{a} = 0 \quad (\text{I.72})$$

je vůči této grupě invariantní.

Vzhledem k předešlému výkladu je vhodné nahradit 1. Newtonův zákon, vztahující se ve své původní formulaci k fyzikálně neprokázanému absolutnímu prostoru, *principem setrvačnosti*, tj. postulátem, že existuje inerciální systém. V tomto systému se pak obvykle pracuje při formulaci mechanických zákonů.

Dodejme ještě, že volíme-li souřadnicové soustavy v systémech spojených Galileiho transformací tak, aby v čase $t = 0$ splývaly a aby osa x měla směr rychlosti \mathbf{V} , pak z (I.70) dostaneme

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad (\text{I.73})$$

což je *speciální Galileiho transformace*.

Poznámka: Galileiho, Newtonovo a Machovo hledisko. Privilegovaná třída inerciálních systémů, odvozovaná z díla Galileiho, je jakousi střední cestou mezi dvěma krajními stanovisky, která se v dějinách fyziky objevují.

Jedním je již zmíněné původní stanovisko Newtonovo, jehož vzniku a udržování zřejmě napomáhala skutečnost, že z praktického hlediska vskutku existuje „privilegovaný“ systém (spojený se stálicemi, event. s galaxiemi). Bylo vyvíjeno značné, avšak zcela neúspěšné úsilí určit pohyb Země vůči absolutnímu prostoru pomocí laboratorních experimentů.

Jiné hledisko, zastávané zejména E. Machem, vycházelo z názoru, že fyzikální význam by měly mít pouze přímo pozorovatelné relativní vzdálenosti těles. Proto by měly být k formulaci zákonů mechaniky stejně vhodné všechny tuhé vztažné systémy. Nepochybná výlučnost inerciálních systémů by se

měla vysvětlit tím, že je vzhledem k nim (zhruba) nulové zrychlení kosmických hmot, jež jsou skutečným zdrojem setrvačných sil projevujících se v „neinerciálních“ systémech.

1.5 Síla a hmotnost

Pro formulaci pohybových zákonů je třeba dodat k již probraným kinematickým pojům dynamické pojmy hmotnosti a síly. Třebaže jde o pojmy tak základní a široce užívané, jejich přesný smysl není snadné vysvětlit. Nelze je totiž definovat „předem“, odděleně od zákonů, v nichž vystupují; jejich pravý význam je zřejmý jedině v rámci těchto zákonů, které je vlastně definují implicitně. Poněvadž teoretická mechanika je ve své podstatě fyzikální (na experimentu založenou) teorií, je vhodné se o povaze a zavedení těchto základních pojmů alespoň stručně zmínit.

Mějme soubor N hmotných bodů (částic), které budeme popisovat z hlediska inerciálního systému. Je prokázáno, že v širokém rozmezí naší zkušenosti platí se značnou přesností, že zrychlení kteréhokoliv (například prvního) bodu závisí jednak na poloze a rychlosti tohoto bodu samého, jednak na polohách a rychlostech bodů ostatních. Lze tedy psát

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \alpha_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \alpha_2; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, \alpha_N) , \quad (\text{I.74})$$

kde α_i (pro každý index i) znamená soubor parametrů⁷ charakterizujících i -tý hmotný bod. Mezi těmito parametry existuje jeden, který je univerzální, tj. má pro všechny body nenulovou hodnotu, a tato hodnota je vždy kladná. Zrychlení je tomuto parametru nepřímo úměrné, takže lze psát

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \alpha_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \alpha_2; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, \alpha_N)}{m_1} . \quad (\text{I.75})$$

Veličina m_1 se nazývá *hmotností* daného bodu a funkce \mathbf{F}_1 *silou* působící na tento bod se strany bodů ostatních. Ve vztahu (I.75) poznáváme 2. *Newtonův zákon*. Aby měl vskutku charakter zákona, který slouží k určení zrychlení z polohy a rychlosti částice, musíme být schopni přiřadit částici její hmotnost a sílu na ni působící bez ohledu na pozorované zrychlení.

V newtonovské mechanice se předpokládá platnost principu nezávislosti sil, podle něhož lze psát

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \\ &= \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \alpha_1, \alpha_2) + \dots + \mathbf{F}_{1N}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_N, \alpha_1, \alpha_N) , \quad (\text{I.76}) \end{aligned}$$

⁷ O těchto parametrech obvykle předpokládáme, že jsou to reálná čísla (skaláry), která se s časem nemění.

tj. síly působící mezi dvojicí částic nejsou ovlivněny přítomností dalších částic a sčítají se jako vektory. To znamená, že každou interakci můžeme rozložit na interakce párové. Pro tyto interakce předpokládáme platnost 3. Newtonova zákona, nazývaného tradičně zákonem akce a reakce

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (\text{I.77})$$

Tento zákon je pro výstavbu mechaniky velmi důležitý, neboť přepíšeme-li jej využitím vztahu (I.75) do tvaru

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 , \quad (\text{I.78})$$

vidíme, že ze znalosti zrychlení dvou interagujících částic (na něž jinak žádná síla nepůsobí) je možné určit poměr hmotností. Poněvadž jednotka hmotnosti může být volena libovolně, znamená to, že hmotnosti lze určit z pozorovaných zrychlení.

Před mechanikou pak stojí úkol určit jednotlivé typy sil, které mezi částicemi působí, a stanovit jejich zákony. Soustava Newtonových zákonů se tak stala obecným schématem, do něhož by měl být (podle představ přetrvávajících až do počátku tohoto století) uložen popis veškerých interakcí.

Další omezující požadavky na tento popis, a tedy na funkční tvar síly působící mezi dvojicí částic, kladou principy symetrie. Principu *homogeneity času* jsme již užili v (I.74), když jsme předpokládali, že zrychlení explicitně nezávisí na čase. Jinak řečeno, formulace fyzikálních zákonů nezávisí na tom, jak zvolíme počátek v čase. Obdobně *homogenita prostoru* znamená, že formulace těchto zákonů nezávisí na volbě počátku v prostoru, a *izotropie prostoru*, že nezávisí na volbě směru souřadnicových os.

Moderní fyzika jednoznačně rozhodla, že k těmto univerzálním principům symetrie je třeba přiřadit i *princip relativity* požadující fyzikální rovnoprávnost všech inerciálních soustav. Byla s tím ovšem spojena zásadní přestavba našich znalostí o prostoru a čase, jíž se budeme zabývat až v závěrečné části této knihy. Je však možné postulovat princip relativity i v rámci newtonovské mechaniky a uvažovat o důsledcích takového postulátu.

Tyto otázky můžeme formulovat ještě poněkud jinak. Lze zapsat vztahy pro transformace odpovídající příslušným symetriím, tj. pro posun v čase, posun v prostoru, otočení v prostoru a přechod k jiné inerciální soustavě, tj. v rámci newtonovské fyziky transformaci Galileiho, a požadovat, aby fyzikální zákony byly vůči těmto transformacím invariantní (tj. formálně stejně vyjádřeny). Je zřejmé, že všechny uvedené transformace tvoří grupu

— *grupu Galileiho*⁸. V rámci popsaného programu se již samotnému Newtonovi podařilo velmi dokonale vystihnout *gravitační interakci*. Newtonův gravitační zákon

$$\mathbf{F}_{12} = \kappa \frac{m_1 m_2}{(\mathbf{r}_{12})^3} \mathbf{r}_{12} \quad (\text{I.79})$$

(kde $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, κ je konstanta, jejíž hodnota závisí na volbě jednotek) zřejmě vyhovuje všem uvedeným požadavkům. Je velmi pozoruhodné a závažné, že parametr, který je mírou gravitace — *tíhová hmotnost* m — je identický s dříve zavedenou hmotností, která charakterizuje setrvačnost částice a může být proto nazvaná *hmotností setrvačnou*. To vede ve spojení s (I.75) ke vztahu

$$\mathbf{a}_1 = \kappa \frac{m_2}{(\mathbf{r}_{12})^3} \mathbf{r}_{12} = \mathbf{g} , \quad (\text{I.80})$$

takže zrychlení částice \mathbf{g} při gravitační interakci nezávisí na její hmotnosti a má význam intenzity gravitačního pole buzeného ostatními částicemi. Důvod rovnosti hmotnosti tíhové a setrvačné nebyl Newtonovi znám⁹.

Další interakcí, jejíž zákony se fyzikové snažili v rámci newtonovského programu formulovat, byla interakce elektromagnetická. Parametrem jí příslušným je elektrický náboj e . Coulombův zákon pro působení elektrických nábojů v klidu je formálně (až na odlišné znaménko) obdobou Newtonova gravitačního zákona. Pohybem nábojů vzniká navíc magnetické pole, které působí jen na pohybující se náboje. Toto působení vyjadřuje Lorentzova síla. Pro lineární nekonečný vodič protékáný elektrickým proudem je magnetické pole určeno Biotovým–Savartovým zákonem. Spojení všech uvedených zákonů napovídá, že síla vznikající vzájemným působením nábojů by mohla mít tvar

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi r^3} \left[\frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}) \right] = e_1 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) , \quad (\text{I.81})$$

v němž $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ϵ_0, μ_0 jsou konstanty, \mathbf{E} značí intenzitu elektrického pole a \mathbf{B} indukci magnetického pole buzeného nábojem e_2 . Takto konstruovaný vztah je však nevyhovující, nesplňuje zákon akce a reakce ani

⁸ Kromě uvedených transformací patří k transformacím symetrie prostoročasového kontinua ještě obrácení času a inverze (zrcadlení) prostoru. V rámci newtonovské fyziky je přirozené předpokládat invarianci fyzikálních zákonů i vůči těmto diskrétním transformacím a zahrnout je do grupy Galileiho. Podgrupu neobsahující diskrétní transformace pak nazýváme *vlastní grupou Galileiho*.

⁹ Newton určil $m_S/m_T = 1 \pm 10^{-2}$. Klasické Eötvösovo měření (1889) dalo pro tuto veličinu 1 ± 10^{-9} , nejnovější měření dosáhla přesnosti 1 ± 10^{-12} .

princip relativity. Snahy o vyjádření elektromagnetické interakce pomocí sil okamžitě působících na dálku nebyly úspěšné a ukázalo se, že její zákony lze uspokojivě formulovat pomocí Maxwellovy teorie elektromagnetického pole. Tato teorie dává možnost formulovat zákony elektromagnetické interakce pomocí retardovaného (časově zpožděného) vzájemného působení nábojů. Pouze v případě relativních rychlostí nábojů malých ve srovnání s rychlostí světla lze z Maxwellovy teorie obdržet popis interakce nabitých částic „na dálku“, který je ovšem pouze přibližný.

V klasické mechanice se často setkáváme se silovým působením, jehož zákony nejsme schopni odvodit ze znalosti zákonů základních interakcí. V těchto případech se opíráme o empirické poznatky a o úvahy na nich založené. Musíme přirozeně počítat s tím, že rovnice, k nimž takto dospějeme, budou mít jen přibližnou platnost.

1.6 Newtonovy pohybové rovnice

Rovnice (I.76) popisují, jak se interakce hmotných bodů projevují na jejich pohybu. Často však nastává situace, kdy se zajímáme o pohyb jediného hmotného bodu, jehož vliv na ostatní objekty můžeme považovat za zanedbatelný. To znamená, že v (I.76) jsou $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ zadanými funkcemi času a pro náš hmotný bod máme prostě

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (\text{I.82})$$

(index 1 vynecháváme). Mluvíme pak o pohybu hmotného bodu vlivem vnější síly $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, popřípadě ve vnějším silovém poli. Přitom často není třeba vědět, jak $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ závisí na elementárních interakcích, a lze se spokojit s tím, že tvar této funkce byl určen experimentálně.

Vektorová rovnice (I.82) představuje soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) , \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) , \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) , \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

v nichž jsme kartézské souřadnice daného bodu označili x, y, z . Je to tedy soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou lineární vzhledem ke druhým derivacím. Tyto rovnice se nazývají *Newtonovými pohybovými rovnicemi* pro hmotný bod. Z těchto rovnic je třeba určit $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, čili $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, tj. pohyb daného hmotného bodu. Tento

pohyb je dán partikulárním řešením rovnic (I.82), popř. (I.83), splňujícím počáteční podmínky

$$\mathbf{r} |_{t=t_0} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v} |_{t=t_0} = \mathbf{v}_0. \quad (\text{I.84})$$

Obvykle je nejvýhodnější brát $t_0 = 0$.

Jak víme z teorie soustav obyčejných diferenciálních rovnic, obecné řešení rovnic (I.83) obsahuje 6 libovolných konstant a lze je psát jako

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_1, \dots, c_6). \quad (\text{I.85})$$

Hodnoty těchto konstant v závislosti na počátečních podmínkách lze zjistit ze šesti rovnic (I.84) a obdržet tak z obecného řešení partikulární řešení pro daný konkrétní případ. Zderivováním (I.85) obdržíme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, c_1, \dots, c_6). \quad (\text{I.86})$$

Z rovnic (I.85) a (I.86) lze určit 6 funkcí

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ &\vdots \\ c_6 &= c_6(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (\text{I.87})$$

kteří v důsledku platnosti pohybových rovnic (I.82) nabývají pro skutečný pohyb konstantních, tj. na čase nezávislých, hodnot. Funkce o této vlastnosti se nazývají *první integrály pohybových rovnic*.

Prvních integrálů se často využívá při řešení pohybových rovnic. Podaří-li se z pohybových rovnic vyvodit, že

$$\frac{d}{dt} \varphi(x_\beta, \dot{x}_\beta, t) = 0, \quad (\text{I.88})$$

plyne odtud zřejmě, že

$$\varphi(x_\beta, \dot{x}_\beta, t) = c, \quad (\text{I.89})$$

kde c je konstanta — první integrál pohybových rovnic. Rovnice (I.89) je 1. řádu, což usnadňuje její řešení. Někdy se podaří (zpravidla využitím poznatků o symetriích systému, jak o tom budeme mluvit později) nahradit úvodní pohybové rovnice stejným počtem prvních integrálů, z nichž pak „druhou integrací“ obdržíme řešení původních rovnic.

Vše, co bylo řečeno o soustavě tří Newtonových rovnic (I.82), se dá přenést i na obecný případ rovnic (I.76) pro interagující soustavu N hmotných bodů (které se eventuálně mohou nacházet ve vnějším silovém poli). Máme pak N vektorových rovnic

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j, t), \quad (\text{I.90})$$

kde $i = 1, \dots, N$, což reprezentuje po rozepsání do složek $3N$ diferenciálních rovnic 2. řádu, jež jsou lineární vzhledem ke druhým derivacím. Obecné řešení takovýchto rovnic obsahuje $6N$ libovolných konstant, jež opět můžeme vyjádřit jako funkce počátečních podmínek.

Existence a jednoznačnost řešení Newtonových rovnic fyzikálně znamená, že polohy a rychlosti systému v čase t_0 determinují jeho další časový vývoj. Tato forma determinace, která je charakteristickým rysem klasické mechaniky, se často nazývá *laplaceovským determinismem*.

1.7 Hmotný bod v neinerciálním systému

Vraťme se k odstavci I.4 a považujme S za inerciální a S' za neinerciální vztažný systém. Nechť hmotný bod má v systému S zrychlení \mathbf{a} a v systému S' zrychlení \mathbf{a}' . Vztah mezi oběma zrychleními vyjadřuje rovnice (I.59). Znásobíme-li ji hmotností, dostáváme

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{a} - m \mathbf{a}_0 \quad (\text{I.91})$$

a užitím (I.82) získáme

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_0. \quad (\text{I.92})$$

Hmotný bod se tedy v neinerciální soustavě pohybuje tak, jako by na něj kromě výslednice pravých sil způsobených interakcemi s jinými hmotnými body působila ještě síla

$$\mathbf{F}_0 = -m \mathbf{a}_0 \quad (\text{I.93})$$

daná neinerciálností systému. Nazýváme ji *silou fiktivní*, poněvadž ji lze odstranit přechodem k inerciálnímu systému. Tato síla se skládá ze *síly Coriolisovy* (srv.(I.60))

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (\text{I.94})$$

působící pouze na hmotné body, které se vzhledem k S' pohybují, a ze *síly setrvačné*

$$\mathbf{F}_{\text{setr}} = -m [\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_{\text{tr}}]. \quad (\text{I.95})$$

Setrvačná síla se (relativně vzhledem k volbě počátku v S') rozkládá na sílu Eulerovu $-m(\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}')$, sílu odstředivou $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ a na sílu translační $-m\mathbf{a}_{\text{tr}}$. Fiktivní síla \mathbf{F}_0 je podle (I.93) úměrná hmotnosti, což ji činí analogickou gravitační síle. Zrychlení volných hmotných bodů v neinerciálním systému, právě tak jako v gravitačním poli, nezávisí na jejich hmotnostech. Tato podobnost neinerciálního systému a gravitačního pole je důsledkem rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti a posloužila jako východisko k obecné teorii relativity.

Pro praxi nejdůležitějším neinerciálním systémem je systém pevně spojený se Zemí. Jeho neinerciálnost je v podstatě způsobena tím, že se Země otáčí okolo své osy úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = 2\pi/\text{hvězdný den}$. Položme

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\text{setr}}}{m} = \mathbf{g} . \quad (\text{I.96})$$

Zde \mathbf{g} je *efektivní* gravitační zrychlení (měřené například reverzním kyvadlem); v důsledku rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti nelze lokálními experimenty rozeznat, jaká část tohoto zrychlení je dána gravitací a jaká neinerciálností systému (tzv. princip lokální ekvivalence). Rovnice pro pohyb hmotného bodu v gravitačním poli Země je tedy¹⁰

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} , \quad (\text{I.97})$$

kde \mathbf{F} značí výslednici pravých sil negravitačního původu. V malých oblastech prostoru lze zřejmě \mathbf{g} považovat za konstantní.

Přítomnost Coriolisova členu v rovnici (I.97) má řadu známých geografických a meteorologických následků (vymílání pravých břehů řek na severní polokouli a levých na jižní polokouli, stáčení větrů a mořských proudů).

I.8 Zákon zachování energie

Mezi prvními integrály pohybových rovnic, o kterých jsme se zmiňovali, mají zvláštní význam ty, jejichž existence vyplývá z jistých obecných principů. Jsou to integrály energie, hybnosti (impulzu) a momentu hybnosti (momentu impulzu, resp. točivosti).

Mějme systém N interagujících částic a jejich pohybové rovnice (I.90). Vynásobme každou rovnici skalárně rychlostí příslušné částice \mathbf{v}_i a takto

¹⁰ U vektorů \mathbf{a} a \mathbf{v} vynecháme čárky, kterými jsme předtím vyznačovali neinerciálnost.

vzniklé rovnice sečteme. Dostáváme tak

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i . \quad (\text{I.98})$$

Levou stranu (I.98) můžeme napsat ve tvaru časové derivace

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{v}_i^2}{2} . \quad (\text{I.99})$$

Veličinu

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (\text{I.100})$$

nazýváme *kinetickou energií* daného systému částic. Je to zřejmě veličina aditivní, tj. platí

$$T = \sum_{i=1}^N T_i , \quad T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 . \quad (\text{I.101})$$

Provedeme-li integraci (I.98) v čase od počátečního okamžiku po libovolný okamžik t , dostáváme v důsledku (I.100)

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^N \int_A^B \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i , \quad (\text{I.102})$$

kde A značí počáteční, B koncovou polohu systému a integrál se počítá podél křivky spojující body A a B , jde tedy o křivkový integrál. Jednotlivé křivkové integrály se počítají podél skutečných trajektorií jednotlivých částic systému. Vztah (I.102) říká, že přírůstek kinetické energie systému je roven součtu *prací* všech sil, které v systému působí.

Jestliže pro síly F_i existuje funkce $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ taková, že

$$\mathbf{F}_i = -\text{grad}_i V = - \left(\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) , \quad (\text{I.103})$$

řekneme, že tyto síly jsou *potenciálové*, a funkci $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ nazveme *potenciální energií*. Pokud tato funkce závisí pouze na průvodičích, což lze v důsledku homogenity času a izolovanosti systému očekávat, nazýváme síly odvozené z potenciální energie podle (I.103) *konzervativní*.

Jsou-li síly konzervativní, obdržíme pro pravou stranu vztahu (I.102) výraz $V(A) - V(B)$, čili potenciální energie v libovolné zvolené poloze B je

$$V = - \sum_{i=1}^N \int_A^B \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + V(A) . \quad (\text{I.104})$$

Potenciální energie je tedy určena až na aditivní konstantu $V(A)$, což je potenciální energie, kterou můžeme libovolně připsat nějaké „výchozí“ poloze systému. Je-li tato výchozí poloha polohou v čase t_0 , je $V(A) = V_0$ a spojením s (I.102) dostáváme

$$T + V = T_0 + V_0 , \quad \frac{d(T + V)}{dt} = 0 . \quad (\text{I.105})$$

Mechanická energie soustavy částic, tj. veličina $E = T + V$, se v tomto případě zachovává.

Na i -tý hmotný bod nechť působí konzervativní síly \mathbf{F}_i^I a nekonzervativní síly \mathbf{F}_i^{II} , takže výsledná síla \mathbf{F}_i je jejich součtem. Protože nekonzervativním silám nemůžeme připsat potenciální energii, ze vztahu (I.102) nyní dostáváme

$$E - E_0 = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i^{II} \mathbf{v}_i dt , \quad (\text{I.106})$$

což znamená, že změna (mechanické) energie soustavy hmotných bodů je rovna práci nekonzervativních sil. Je patrné, že v tomto případě zákon zachování mechanické energie soustavy hmotných bodů neplatí. Zkušenost i fyzikální teorie na nich založené však učí, že zákon zachování energie je univerzálně platným přírodním zákonem. Nezachování mechanické energie můžeme připsat několika faktorům. Předně náš systém nemusí být izolovaný a může si vyměňovat energii se svým okolím. Dále náš makroskopický popis nemusí zachycovat mikroskopické formy energie spojené s pohybem a interakcemi přímo nepozorovatelných složek systému. Konečně se nelze vždy omezit na mechanickou energii a v bilanci energie je třeba uvažovat též energii polí, jejichž prostřednictvím na sebe hmotné body působí. Například uzavřený systém elektricky nabitých částic může být v rámci mechaniky popsán pouze přibližně. Přesnější popis musí počítat se samostatnou existencí elektromagnetického pole a jeho energie E_P , přičemž platí

$$E_M + E_P = \text{konst} , \quad (\text{I.107})$$

kde E_M značí mechanickou energii částic, jíž je v tomto případě energie kinetická. Z předchozího vztahu snadno dostaneme, že

$$\frac{dE_M}{dt} = \sum \mathbf{F}_i^{II} \mathbf{v}_i dt = -\frac{dE_P}{dt}. \quad (\text{I.108})$$

Práce nekonzervativních sil se tedy děje na účet změny nemechanické energie a působí změnu mechanické energie soustavy.

Podle předpokladu o párovém charakteru interakcí je potenciální energie systému součtem potenciálních energií jednotlivých dvojic hmotných bodů

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V_{ij}, \quad (\text{I.109})$$

kde $V_{ij} = V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. Stačí se proto omezit na určení potenciální energie dvojice hmotných bodů 1 a 2, kterou budeme značit prostě V . Podle zákona akce a reakce je

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_2}. \quad (\text{I.110})$$

Zaveďme nové proměnné $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$. Přepisem (I.110) do těchto proměných zjistíme, že V nezávisí na \mathbf{b} a je tedy funkcí pouze relativního polohového vektoru

$$V = V(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (\text{I.111})$$

Speciálně důležitý je případ, kdy potenciální energie párové interakce závisí pouze na velikosti relativního polohového vektoru, tj. $V = V(r)$. Pak platí

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \boldsymbol{\nu} = F(r) \boldsymbol{\nu}, \quad (\text{I.112})$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor ve směru spojnice bodů 1 a 2. To znamená, že jde o *sílu centrální*. Potenciální energii dvojice bodů působících na sebe silami typu (I.112) snadno vypočítáme jako

$$V - V(A) = -\int_A^B (\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2) = -\int_{r_0}^r F(r) dr. \quad (\text{I.113})$$

Konstantu $V(A)$ často volíme tak, aby byla nulová při nekonečné vzdálenosti interagujících částic. Například pro gravitační sílu (I.79) potom je

$$V = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (\text{I.114})$$

Sledujme dále pohyb jediného hmotného bodu popsany rovnicí (I.82), působení ostatních objektů je vyjádřeno pomocí zadané funkční závislosti síly $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. V tomto případě (I.98) dává

$$\frac{d}{dt}T = \mathbf{F}\mathbf{v} . \quad (\text{I.115})$$

Veličinu na pravé straně nazýváme *výkonem* síly. Pokud síla \mathbf{F} v tomto vztahu nezávisí na rychlostech, vzniká otázka, kdy lze tuto sílu odvodit z potenciální energie, tj. psát

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V(\mathbf{r}, t) . \quad (\text{I.116})$$

Ze vztahu (I.116) vyplývá (pokud lze druhé derivace V podle prostorových souřadnic považovat za záměnné), že

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0 . \quad (\text{I.117})$$

Tento vztah je tedy nutnou podmínkou pro existenci potenciální energie. Naopak předpokládejme, že platí (I.117). Spojme dva body \mathbf{r}_0, \mathbf{r} dvěma různými křivkami α, β . Platí

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} d\mathbf{r} - \int_{\beta} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0 , \quad (\text{I.118})$$

když jsme užili Stokesovy věty převádějící křivkový integrál po uzavřené křivce na plošný integrál přes plochu, kterou tato křivka ohraničuje¹¹ (aby bylo možné tuto plochu křivkou proložit, musí být zkoumaná oblast prostoru, v níž platí (I.117), jednoduše souvislá, což budeme dále předpokládat). Z rovnice (I.118) plyne, že křivkový integrál síly nezávisí na integrační cestě a potenciální energie může tedy být určena jako

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} . \quad (\text{I.119})$$

Podmínka (I.117) je tedy pro existenci potenciální energie (v jednoduše souvislé oblasti) též postačující. Tuto podmínku lze použít také na případ interakce dvou částic, je-li síla mezi nimi působící závislá pouze na relativním polohovém vektoru $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

¹¹ O diferenciálních operátorech grad, rot, div a o Stokesově větě pojednáváme podrobněji později.

Nezávisí-li silové pole \mathbf{F} , resp. potenciální energie V na čase, lze pak přepsat (I.115) na zákon zachování energie pro daný bod

$$\frac{d(T + V)}{dt} = 0, \quad \text{čili } T + V = \text{konst.} \quad (\text{I.120})$$

Často je výhodné psát potenciální energii ve formě $V = \alpha\phi$, kde α je parametr odpovídající dané interakci (hmotnost v gravitačním poli, náboj v poli elektrostatickém). Funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$ pak nezávisí na zkoumané částici, ale jen na silovém poli, v němž se pohybuje. Této funkci říkáme *potenciál* daného pole.

Poznamenejme ovšem, že i když formálně mluvíme o V jako o potenciální energii daného hmotného bodu, jde fakticky o interakční energii popisující jeho interakci s ostatními objekty. Platnost zákona zachování energie (I.120) předpokládá, že lze zanedbat změny kinetických energií těchto objektů.

I.9 Zákon zachování hybnosti. Střed hmotnosti

Sečtěme pohybové rovnice (I.76) izolovaného systému N interagujících částic. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}, \quad i \neq j. \quad (\text{I.121})$$

V důsledku zákona akce a reakce je pravá strana rovna nule. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (\text{I.122})$$

neboli vektor

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (\text{I.123})$$

zůstává konstantní. Tento vektor se nazývá (úhrnnou) *hybností* systému a rovnice

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad (\text{I.124})$$

vyjadřuje zákon zachování (úhrnné) hybnosti. Hybnost je zřejmě veličinou aditivní, tj.

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i. \quad (\text{I.125})$$

Využitím pojmu hybnosti můžeme 2. Newtonův zákon zapisovat jako

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i . \quad (\text{I.126})$$

Ze vztahu (I.126) vidíme, že hybnost hmotného bodu se zachovává pouze tehdy, není-li podroben působení síly, tj. jde-li o volný hmotný bod.

Obecněji můžeme předpokládat, že náš systém N částic není izolovaný a že na jeho hmotné body působí kromě vnitřních sil interakcí \mathbf{F}_{ij} ještě vnější síly \mathbf{F}_i . Pak sečtením pohybových rovnic dostaneme namísto (I.124) vztah

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{F} , \quad (\text{I.127})$$

kde \mathbf{F} je výslednice vnějších sil působících na systém. Vztahu (I.127) říkáme *1. impulzová věta*.

Úhrnnou hybnost systému můžeme přepsat na tvar

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M \frac{d}{dt} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i , \quad (\text{I.128})$$

kde jsme jako M označili úhrnnou hmotnost systému

$$M = \sum_{i=1}^N m_i . \quad (\text{I.129})$$

Vektor

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (\text{I.130})$$

nazýváme polohovým vektorem *středu hmotnosti* daného systému.

Dále označíme $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}$ rychlost hmotného středu, takže úhrnnou hybnost lze psát jako

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V} . \quad (\text{I.131})$$

Pomocí středu hmotnosti lze 1. impulzovou větu přepsat do tvaru

$$\dot{\mathbf{P}} = M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} , \quad (\text{I.132})$$

který se formálně shoduje s 2. Newtonovým zákonem pro hmotný bod. Lze tedy říci, že zákon pro částice se reprodukuje na úrovni systému. Tato shoda nám umožňuje aproximovat složité systémy (například planety) hmotnými

body. Ze vzorce (I.132) plyne i obdoba zákona setrvačnosti pro hmotný bod: v nepřítomnosti vnějších sil se střed hmotnosti systému pohybuje rovnoměrně a přímočaře.

Povšimněme si ještě, že v homogenním tíhovém poli o intenzitě g je potenciální energie systému částic rovna

$$V = \text{konst} - \sum_{i=1}^N m_i g r_i = \text{konst} - M g R, \quad (\text{I.133})$$

tj. je rovna potenciální energii středu hmotnosti. Proto se pro střed hmotnosti užívá v tomto případě názvu *těžiště*.

Zvolíme-li počátek ve středu hmotnosti, pak pro polohové vektory vedené z tohoto počátku a označené hvězdičkou zřejmě platí

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* = 0. \quad (\text{I.134})$$

Využijeme tohoto vztahu k úpravě výrazu pro kinetickou energii systému částic. Protože je

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i^*, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i^*, \quad (\text{I.135})$$

lze psát

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^{*2}, \quad (\text{I.136})$$

když jsme využili (I.134). Kinetická energie systému je tedy rovna součtu kinetické energie středu hmotnosti a kinetické energie systému vůči středu hmotnosti.

I.10 Zákon zachování momentu hybnosti

Vynásobme každou rovnici (I.76) vektorově zleva vektorem \mathbf{r}_i a obdržené vztahy sečtěme. Na levé straně dostaneme

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d\mathbf{J}}{dt}, \quad (\text{I.137})$$

kde

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \quad (\text{I.138})$$

je vektor úhrnného *momentu hybnosti* systému. Na pravé straně dostáváme za předpokladu párových interakcí a platnosti zákona akce a reakce součet členů typu

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} . \quad (\text{I.139})$$

Pokud jsou síly centrální, jsou tyto členy rovny nule a platí tedy zákon zachování momentu hybnosti

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 . \quad (\text{I.140})$$

Stejně jako kinetická energie a hybnost je i moment hybnosti veličinou aditivní. Na rozdíl od nich však závisí na volbě počátku. Pro jediný hmotný bod ve vnějším silovém poli se moment hybnosti zachovává tehdy, je-li toto pole vzhledem k danému počátku centrální.

V případě, že je náš systém podroben také působení vnějších sil \mathbf{F}_i , dostáváme namísto (I.140) vztah

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{D} , \quad (\text{I.141})$$

kde \mathbf{D} je úhrnný *moment síly* působící na systém. Vztah (I.141) je označován jako *2. impulzová věta*.

Vyjádříme-li moment hybnosti pomocí středu hmotnosti, pak užitím (I.136), (I.131) a (I.134) dostaneme

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i^*) \times (m_i \mathbf{V} + m_i \mathbf{v}_i^*) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*) , \quad (\text{I.142})$$

čili moment hybnosti je roven součtu momentu hybnosti středu hmotnosti a momentu hybnosti vzhledem k tomuto středu. Podobně i moment síly lze rozepsat jako

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i) , \quad (\text{I.143})$$

tj. jako součet momentu výslednice s působišťem ve středu hmotnosti a úhrnného momentu sil vzhledem k tomuto středu.

Stejně jako zákon zachování energie mají i zákony zachování hybnosti a momentu hybnosti význam a platnost daleko přesahující oblast klasické mechaniky.

I.11 Příklady

1. Empiricky bylo zjištěno, že při pohybu tělesa v zemské atmosféře je odpor vzduchu přibližně úměrný druhé mocnině rychlosti pohybujícího se tělesa. Integrujte za tohoto předpokladu pohybové rovnice pro svislý volný pád.

Řešení: Orientujeme osu x svisle vzhůru. Pohybová rovnice je pak ve tvaru

$$\ddot{x} = \dot{v} = -g(1 - \beta^2 v^2), \quad (\text{I.144})$$

kde β je pro dané těleso konstantní. První integraci provedeme separací proměnných. Získáme

$$\begin{aligned} -g(t - t_0) &= \frac{1}{2} \left[\int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + \beta v} + \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - \beta v} \right] = \\ &= \frac{1}{2\beta} \left[\ln \left| \frac{1 + \beta v}{1 - \beta v} \right| - \ln \left| \frac{1 + \beta v_0}{1 - \beta v_0} \right| \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.145})$$

Volíme-li počáteční podmínky $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, máme

$$\frac{1 + \beta v}{1 - \beta v} = e^{-2\beta g t}, \quad v = \dot{x} = -\frac{1}{\beta} \operatorname{tgh}(\beta g t) \quad (\text{I.146})$$

a integrací dostaneme

$$x = x_0 - \frac{1}{g\beta^2} \ln \cosh(\beta g t). \quad (\text{I.147})$$

Pro malé $\beta g t$ se můžeme omezit na první členy Taylorových řad a obdržíme

$$x = x_0 - \frac{1}{2} g t^2 \left[1 - \frac{1}{6} (\beta g t)^2 \right], \quad (\text{I.148})$$

$$v = -g t \left[1 - \frac{1}{3} (\beta g t)^2 \right]. \quad (\text{I.149})$$

Ze vztahu (I.149) plyne, že rychlost je shora omezena a konverguje k limitní hodnotě $v(\infty) = -(\beta)^{-1}$.

2. Uvažujme prostor mezi dvěma souosými válci o poloměrech R_0, R . Mezi válci je elektrické pole \mathbf{E} kolmé na osu, jehož velikost je nepřímou úměrná vzdálenosti od osy, tj. $E = k/r$, a magnetické pole \mathbf{B} o konstantní velikosti ve směru osy. Jakou rychlostí musí vylétnout elektron z povrchu vnitřního válce kolmo na osu, aby dosáhl pláště vnějšího válce?

Řešení: Pohybové rovnice částice v elektromagnetickém poli jsou

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (\text{I.150})$$

kde e je náboj částice. Tyto rovnice by bylo nejjvýhodnější rozepsat a řešit ve válcových souřadnicích. Daná úloha si však jejich řešení nevyžaduje, poněvadž pro ni stačí znalost dvou prvních integrálů. Protože Lorentzova síla (druhý člen na pravé straně vztahu (I.150)) nekoná práci, platí zákon zachování energie ve tvaru

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 - ek \ln \frac{r}{R_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 , \quad (\text{I.151})$$

kde r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejme nyní časovou změnu momentu hybnosti. Platí (jde o rovinný pohyb)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -e\mathbf{B} \frac{d}{dt} \frac{r^2}{2} . \quad (\text{I.152})$$

Je proto

$$mvr \sin \alpha - eB \frac{r^2}{2} = \text{konst} = -eB \frac{R_0^2}{2} , \quad (\text{I.153})$$

kde α je úhel mezi \mathbf{r} a \mathbf{v} . Hodnota konstanty je určena z počátečních podmínek. Na plášti válce je $r = R$ a pro mezní případ pohybu, kdy se částice právě dotkne válce, $\sin \alpha = 1$. Takto ze (I.151) a (I.153) dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{e}{m} \left[\frac{eB^2}{4mR^2} (R^2 - R_0^2)^2 - 2k \ln \frac{R}{R_0} \right]} . \quad (\text{I.154})$$

Hlubší důvod existence integrálu (I.153) se vyjasní později.

3. Řešte rovnice pro pohyb hmotného bodu v neinerciálním systému spojeném se Zemí.

Řešení: Příslušné rovnice jsou podle předchozího výkladu

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} . \quad (\text{I.155})$$

První integrace dává

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) . \quad (\text{I.156})$$

Po zvolení vhodného vztažného systému by bylo možné tuto rovnici vyřešit. Toto přesné řešení by však bylo zdlouhavé a jeho formální zápis by nedával

žádnou přímou informací. Použijeme proto *iterační* metodu. Zanedbáme-li vliv zemské rotace, dostáváme integrací (I.156) řešení v „nultém přiblížení“

$${}^0\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \quad (\text{I.157})$$

Dosadíme-li toto nulté přiblížení do (I.156), dostáváme první přiblížení pro rychlost

$${}^1\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \right), \quad (\text{I.158})$$

odtud integrací

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - \boldsymbol{\omega}t \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3}\mathbf{g}t^2 \right). \quad (\text{I.159})$$

Pokračováním tohoto postupu bychom mohli získat libovolně přesné řešení. Fakticky je ovšem možné se spokojit s (I.159), poněvadž další opravy jsou už překrývány faktory, jež rovnice (I.155) nebere v úvahu (nehomogenita zemského gravitačního pole, vliv Měsíce apod.).

4. Posuďte správnost tohoto vysvětlení jevů přílivu a odlivu, které se někdy vyskytuje v učebnicích geografie: „Měsíc a Země obíhají kolem společného těžiště, které je blízko povrchu Země. Pod Měsícem je tíhové zrychlení menší o přitažlivou sílu Měsíce a na protilehlém místě o odstředivou sílu, která je tu dvakrát větší než měsíční gravitace.“

Řešení: Dané vysvětlení předpokládá, že pro vysvětlení podstaty jevu stačí pokládat gravitační pole Měsíce za homogenní. Složíme-li toto homogenní pole s polem odstředivé síly, zjistíme, že výsledné pole má válcovou symetrii vzhledem k ose procházející středem Země kolmo na rovinu oběhu Měsíce. Toto pole nemůže způsobovat příliv a odliv již proto, že je vzhledem k Zemi časově neproměnné. Je fakticky součástí odstředivé síly, která vzniká rotačním pohybem Země a nemá k jevům mořského dmutí žádný vztah. Pro správné vysvětlení těchto jevů je třeba se omezit pouze na translační část pohybu Země (tj. na pohyb, při němž střed Země obíhá kolem společného těžiště, ale Země sama se přitom neotáčí vůči inerciálnímu systému). Ve středu Země se pak pole fiktivní síly vyvolané jejím pohybem ruší s měsíční gravitací a je zřejmé, že pohyb mořských vod ovlivňuje pouze nehomogenita gravitačního pole Měsíce, která v systému spojeném se Zemí vyvolá sílu o intenzitě

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{g} &= \mathbf{g} - \mathbf{g}_0 = -\kappa M \left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{R}}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cong \\ &\cong -\frac{\kappa M}{r^3} \left(\mathbf{R} - \frac{3\mathbf{R}\mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{I.160})$$

kde M je hmotnost Měsíce, \mathbf{r} vektor spojující středu Měsíce a Země, \mathbf{R} polohový vektor vůči středu Země. Mluvíme o *slapové síle*. Povšimněme si, že tato síla ubývá jako r^{-3} , čímž se vysvětluje, proč má Měsíc na mořská dmutí větší vliv než Slunce.

Příklady k samostatnému řešení

1. Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v . S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času. Může být rychlost v určitě okamžiku nulová?

2. Pes běžící rychlostí v honí zajíce běžícího rychlostí c po přímce. Pes neustále běží ve směru k zajíci. Počáteční polohy jsou zadány. Určete pohyb psa a dobu, po níž dohoní zajíce.

[Užijte vztahu pro délku křivky $y(x)$ pomocí integrálního počtu. Hledaná doba je $(vL + bc) / (v^2 - c^2)$, kde L je vzdálenost psa a zajíce, b její průmět do směru pohybu zajíce.]

3. Při pohybu hmotného bodu platí $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{P}$, kde \mathbf{P} je konstantní vektor. Ukažte, že tento vztah vyjadřuje zachování plošné rychlosti a najděte vyjádření P pomocí kartézských souřadnic v rovině pohybu.

$$\left[P = \frac{1}{2} (xy - yx) \right]$$

4. Určete Laméovy koeficienty, složky rychlosti a zrychlení ve sférických souřadnicích.

$$\left[\begin{aligned} \tilde{a}_\rho &= \ddot{\rho} - \rho (\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2), & \tilde{a}_\varphi &= \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{d}{dt} (\rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}), \\ \tilde{a}_\vartheta &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\vartheta}) - \frac{1}{2} \rho \sin(2\vartheta) \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \right]$$

5. Ukažte, že dvě koule o sféricky symetrických rozloženíh hmotnosti na sebe gravitačně působí stejným způsobem, jako by jejich hmotnosti byly soustředěny v centrech.

[Uvažujte nejprve působení bodu na kouli.]

6. Kolem kosmického tělesa hmotnosti M obíhají po kružnici tři satelity o stejných hmotnostech tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Rychlost pohybu satelitů je v . Určete jejich hmotnosti.

7. Povšimněte si ekvivalence mezi rovnoměrně zrychleným systémem a homogenním gravitačním polem

a) Střelec míří na terč, který v daném okamžiku začíná volně padat. Pod jakým úhlem musí vystřelit?

b) Na stropě výtahu, jehož kabina má výšku L a který je zvedán kon-

stantní tažnou silou F , visí břemeno. Za jak dlouho dopadne na podlahu kabiny, jestliže se závěs přetrhne?

c) V rychle jedoucím vozidle se vznáší u stropu balonek naplněný vodíkem. Kterým směrem se pohne, jestliže vozidlo prudce zabrzdí?

8. Představme si, že Zemí je provrtán tunel od pólu k pólu. Do tunelu spadne předmět. Za jak dlouho se opět objeví (je-li v tunelu vakuum)?

[Rozložení hmotnosti Země charakterizujte pomocí $M(r)$.
Proveďte dolní a horní odhad.]

9. Elektrický dipól vzniká v limitě, přibližujeme-li k sobě dva elektrické náboje opačné velikosti tak, že součin této velikosti a vzdálenosti zůstává konstantní $e\Delta r = p$. Dokažte, že silové působení mezi dipólem a nábojem (v klidu) splňuje zákon akce a reakce, ačkoliv síly nejsou centrální.

[Užijte Taylorova rozvoje a zanedbání členů vyššího řádu.
Intenzita pole dipólu je $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$.]

10. Na hmotný bod pohybující se rychlostí v působí síla odporu prostředí úměrná rychlosti. Určete pohyb bodu. Jakou dráhu urazí, než se zastaví?

11. Elektricky nabitá částice se pohybuje v homogenním elektrickém a magnetickém poli, která mají stejný směr. Určete pohyb částice.

12. S ohledem na neinerciálnost systému spojeného se Zemí určete pro zeměpisnou šířku φ

a) Místo dopadu hmotného bodu, který je puštěn z výšky h .

b) Místo jeho dopadu a rychlost v maximální výšce h , je-li vržen kolmo vzhůru rychlostí v_0 .

[Užijte (I.158). Při stejném h je západní odchylna v případě
b) čtyřikrát větší než východní odchylna v případě a).]

13. Vysvětlete tento „paradox“: Pohybuje-li se stroj (automobil, raketa) rychlostí v a jeho motor vyvíjí tažnou sílu \mathbf{F} , je výkon motoru (práce vykonaná za jednotku času) $\mathbf{F}v$. Vhodnou volbou inerciálního vztažného systému lze této veličině dát libovolnou hodnotu. Na druhé straně výkon by měl být roven energii získané z paliva za jednotku času, která nezávisí na volbě vztažného systému.

14. Dokažte, že při pohybu v poli Coulombova potenciálu $\phi = \frac{\alpha}{r}$ se zachovává veličina $\mathbf{v} \times \mathbf{J} + \frac{\alpha e \mathbf{r}}{r}$, kde \mathbf{J} je moment hybnosti částice, e její náboj.

15. Vypočítejte potenciální energii částice

a) v silovém poli $\mathbf{F} = -C \frac{\mathbf{r}}{r^n}$,

b) v poli odstředivé síly $\mathbf{F} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

c) Jaký je vztah mezi Newtonovým gravitačním potenciálem $\phi = -\kappa \frac{M}{r}$ a „školským“ vzorcem pro potenciální energii částice v gravitačním poli $W = mgh$.

16. Hmotný bod se pohybuje po nakloněné rovině, která přechází ve svislý závit o poloměru R . Z jaké výšky musí být spuštěn, aby od závitu neodpadl?

$$\left[H = 2,5 R. \right]$$

17. Určete malé kmity dvojitého rovinného kyvadla.

II LAGRANGEOVSKÁ FORMULACE MECHANIKY

Newtonovy rovnice, jak byly probrány v minulé kapitole, umožňují úplný popis pohybu soustav hmotných bodů a v tomto smyslu vyčerpávají fyzikální stránku tematiky. Ukazuje se však, že je možné dát mechanice podstatně odlišné a velmi efektivní matematické zpracování, které lze navíc zobecnit i do oblastí, v nichž Newtonovy rovnice již nejsou použitelné. Prvním takovýmto zpracováním je *lagrangeovská formulace mechaniky*, jejíž základy byly vytvořeny J. L. Lagrangem na konci 18. století.

Jak již bylo řečeno, fyzikální systémy se speciálními symetriemi je výhodné popisovat v křivočarých souřadnicích. Často se také setkáváme se situací, kdy kartézské souřadnice soustav hmotných bodů jsou vázány předem zadanými podmínkami (tzv. vazbami) a nejsou vzájemně nezávislé. Chceme-li úsporně popsat pohyb systému nezávislými parametry, jsme nuceni zavést křivočaré souřadnice. Z předchozí kapitoly vyplývá, že přepis Newtonových rovnic do křivočarých souřadnic je obecně velmi komplikovaná záležitost. Navíc v případě vazeb je třeba učinit jisté hypotézy o silách, jimiž tyto vazby na systém působí. Všechny tyto komplikace nám ušetří lagrangeovská formulace, která umožňuje najít pohybové rovnice v křivočarých souřadnicích formálně jednotným a prostým způsobem. Kromě toho se ukazuje, že tato formulace mechaniky těsně souvisí s *variačním počtem*, což zařazuje klasickou mechaniku do širší třídy fyzikálních teorií vyvoditelných z variačních principů. Konečně nám lagrangeovská formulace mechaniky poskytuje účinné metody integrace pohybových rovnic.

Náš výklad vede od nejprostších typů vazeb k obecnému diferenciálnímu principu mechaniky, k *d'Alembertovu principu*, z něhož odvodíme Lagrangeovy rovnice 1. a 2. druhu. Rovnicemi 2. druhu, platnými v libovolných křivočarých souřadnicích, se budeme zabývat podrobněji. Ukazujeme, že vyplývají z integrálního principu: *Hamiltonova principu minimální akce*. Tato souvislost je aplikací variačního počtu, v jehož rámci dospíváme k *1. teorému E. Noetherové*, vyjadřujícímu souvislost mezi Hamiltonovým principem, symetriemi zkoumaného mechanického systému a platností zákonů zachování.

II.1 Hmotný bod vázaný na plochu a křivku

Nejprostší typy vazeb, vazbu hmotného bodu na plochu a křivku, je vhodné probrat zvlášť, poněvadž nám dají vodítko pro obecnější postup.

Vazba hmotného bodu na plochu je vyjádřena rovnicí této plochy¹²

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (\text{II.1})$$

¹² Pro obecnost zahrnujeme v (II.1) i případnou závislost vazby na čase, tj. pohyb vazebné plochy.

kterou musejí být souřadnice bodu x, y, z vázány. Nepřihlížíme-li k tření (jež může být eventuálně započítáno zvlášť), působí vazebná plocha na hmotný bod silou \mathbf{R} , která je k této ploše kolmá, tj.

$$\mathbf{R} = \lambda \operatorname{grad} f . \quad (\text{II.2})$$

Pohybové rovnice bodu na ploše jsou tedy

$$\mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} f = m \mathbf{a} , \quad (\text{II.3})$$

v nichž \mathbf{F} je výslednice všech dalších sil na hmotný bod působících. V rovnicích (II.3) vystupuje kromě neznámých x, y, z ještě další neurčená funkce času λ . Máme však navíc k dispozici rovnici (II.1), takže počet neznámých je stejný jako počet rovnic a lze najít řešení.

Upozorníme, že by nebylo správné představovat si bod vázaný na plochu jako kuličku, která se po této ploše kutálí. Taková kulička by si i v limitním případě podržela nenulovou kinetickou energii své rotace, kterou u hmotného bodu nepředpokládáme. Hmotný bod přibližně odpovídá tělísku, které po ploše klouže.

Dále je třeba poznamenat, že někdy má podmínka vazby tvar nerovnosti

$$f(x, y, z, t) \leq 0 . \quad (\text{II.4})$$

Jde o vazbu *jednostrannou* na rozdíl od *oboustranné* vazby (II.1). Pokud se jednostranná vazba projevuje na pohybu, její efekt se neliší od působení vazby oboustranné, a můžeme se proto v dalším výkladu omezit na oboustranné vazby vyjadřované rovnostmi.

Přejdeme nyní k hmotnému bodu vázanému na křivku. Tuto vazbu lze vyjádřit rovnicemi

$$f_1(x, y, z, t) = 0 , \quad f_2(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{II.5})$$

pro dvě plochy f_1, f_2 , jejichž průsečnicí je daná křivka. Nepřihlížíme-li k tření, působí vazba na hmotný bod silou (vazebná síla), která je kolmá na křivku, a je tudíž lineární kombinací vektorů kolmých k protínajícím se plochám

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 . \quad (\text{II.6})$$

Pohybové rovnice

$$\mathbf{F} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = m \mathbf{a} \quad (\text{II.7})$$

spolu se dvěma rovnicemi vazby (II.5) dávají úplný systém rovnic pro určení pohybu hmotného bodu vázaného na křivku.

II.2 Klasifikace vazeb. Virtuální posunutí

Zabývejme se nyní otázkou vazeb obecněji. Mějme soustavu N hmotných bodů; označme jejich kartézské souřadnice

$$x_i = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N).$$

Protože každý hmotný bod má tři souřadnice, bude index i probíhat hodnoty od 1 do $3N$. Prostor popsany souřadnicemi x_i se nazývá *konfiguračním prostorem* dané soustavy (za předpokladu, že není podrobena vazbám). Budeme jej označovat P^{3N} . V konfiguračním prostoru je poloha systému dána jediným bodem x_i . Obdobně můžeme v konfiguračním prostoru zavést rychlost o složkách $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}$, zrychlení o složkách $\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_{3N}$ a sílu o složkách F_1, \dots, F_{3N} .

V nejprostším případě jediného hmotného bodu je konfiguračním prostorem obyčejný třírozměrný prostor. Vazba v tomto prostoru omezuje pohyb systému (a tedy i konfigurační prostor) na plochu či křivku. Podobně mohou vazby omezovat i vícerozměrný konfigurační prostor. Fyzikálně jsou vazby v něm realizovány různými způsoby například spojovacími tyčemi, lany, kloubovými mechanismy. Pro „činku“, dva hmotné body o souřadnicích x_1, x_2, x_3 a x_4, x_5, x_6 , spojené tyčí délky L o zanedbatelné hmotnosti, je vazba vyjádřena rovnicí

$$(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - L^2 = 0. \quad (\text{II.8})$$

Obecně se vazba vyjádřená vazebnou podmínkou

$$f(x_i, t) = 0 \quad (\text{II.9})$$

nazývá vazbou *holonomní*. Pokud neobsahuje explicitně čas (podobně jako je tomu v (II.8)), mluvíme o vazbě *skleronomní*, v opačném případě jde o vazbu *rheonomní*.

Vazebním podmínkám mohou být podrobena také rychlosti hmotných bodů. Takovéto vazby se nazývají *anholonomní*¹³. Praktický význam mají pouze vazby lineární v rychlostech. Jsou vyjádřeny vztahy typu

$$\sum_{i=1}^{3N} \mathcal{A}_i(x_j, t) \dot{x}_i + \mathcal{K}(x_j, t) = 0. \quad (\text{II.10})$$

Pokud lze levou stranu rovnice (II.10) přepsat jako totální derivaci podle času, tedy $\frac{d\varphi(x_j, t)}{dt}$, můžeme (II.10) nahradit vztahem

$$f(x_j, t) = \varphi(x_j, t) - C = 0, \quad (\text{II.11})$$

¹³ Anholonomní vazby se vyskytují hlavně v mechanice tuhých těles (valení).

kde C je konstanta závislá na počátečních podmínkách. To znamená, že vazba byla integrací převedena na vazbu holonomní. V tomto případě nazýváme (II.10) *semiholonomní* vazbou. Platí zřejmě

$$\mathcal{A}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (\text{II.12})$$

V dalším textu budeme předpokládat, že eventuální semiholonomní vazby jsou již zintegrovány, a nebudeme je odlišovat od vazeb holonomních.

Mějme nyní r holonomních vazebních podmínek

$$f_A(x_i, t) = 0, \quad A = 1, \dots, r. \quad (\text{II.13})$$

Každá taková podmínka totiž představuje rovnici $(3N - 1)$ -rozměrné nadplochy v prostoru P^{3N} , r podmínek vymezuje v tomto prostoru nadplochu (varietu) dimenze $(3N - r)$, která je konfiguračním prostorem systému podrobeného vazbám¹⁴. Budeme jej značit Q^{3N-r} . Prostor Q^{3N-r} je tudíž vnořen do prostoru P^{3N} .

V každém bodě nadplochy Q^{3N-r} můžeme zavést r -tici $3N$ -rozměrných vektorů, z nichž každý je kolmý k jedné z vazebních nadploch. Jsou to vektory

$$\text{grad} f_A = \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_A}{\partial x_{3N}} \right). \quad (\text{II.14})$$

Označme δx_i složky vektoru, který je tečný ke konfigurační nadploše Q^{3N-r} (v daném časovém okamžiku). To znamená, že je kolmý na všechny gradienty vazebních ploch a splňuje proto r podmínek

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_A}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\text{II.15})$$

vyjadřujících nulovost skalárního součinu v prostoru P^{3N} . Vektor o této vlastnosti se nazývá vektorem *virtuálního posunutí*. V případě skleronomních vazeb se virtuální posunutí pro malé hodnoty δx_i blíží posunutí skutečnému.

Pojem virtuálního posunutí může být rozšířen i na anholonomní vazby typu (II.10). Mějme s anholonomních vazebních podmínek typu (II.10)

$$\sum_{i=1}^{3N} \mathcal{A}_{Bi} \dot{x}_i + \mathcal{K}_B = 0, \quad B = 1, \dots, s. \quad (\text{II.16})$$

¹⁴ Za předpokladu, že podmínky jsou vzájemně nezávislé a nejsou v rozporu.

První vztah (II.12) napovídá, že podmínky (II.15) definující virtuální posunutí v případě holonomních vazeb mohou být zobecněny doplněním o

$$\sum_{i=1}^{3N} \mathcal{A}_{B_i} \delta x_i = 0 . \quad (\text{II.17})$$

U nejjednodušších typů vazeb jsme předpokládali, že síly působené vazbami jsou kolmé k vazebním plochám, a tudíž i k virtuálním posunutím. Označíme-li virtuální posunutí v 3-rozměrném prostoru jako $\delta \mathbf{r}$, můžeme to zapsat jako

$$\mathbf{R} \delta \mathbf{r} = 0 , \quad (\text{II.18})$$

neboli *virtuální práce* vazebních sil je zde nulová. (Poznamenejme, že skutečná práce vazebních sil je obecně nulová pouze v případě skleronomních vazeb, poněvadž u rheonomních vazeb nemusejí být nekonečně malá skutečná posunutí tečná k vazebné ploše.) V souladu se zkušeností a výsledky experimentu budeme předpokládat, že omezení na vazební síly kladené vztahy (II.18) má univerzální platnost pro virtuální posunutí odpovídající libovolným vazbám typu (II.13) a (II.16). Je tudíž

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i \delta x_i = 0 . \quad (\text{II.19})$$

II.3 D'Alembertův princip

Newtonovy pohybové rovnice pro pohyb systému v P^{3N} můžeme psát jako

$$m_i a_i = F_i + R_i , \quad i = 1, 2, \dots, 3N , \quad (\text{II.20})$$

kde vždy $m_{3P} = m_{3P-1} = m_{3P-2}$ pro $P = 1, \dots, N$ značí hmotnost příslušného hmotného bodu. Síly na pravé straně dělíme na *vtištěné* síly F_i a *vazebné* síly R_i . Vynásobme (II.20) virtuálním posunutím δx_i a sečteme pro všechna i . S uvážením předpokladu (II.19) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i a_i) \delta x_i = 0 . \quad (\text{II.21})$$

Požadavek, aby (II.21) platilo pro všechna virtuální posunutí, vyjadřuje *d'Alembertův princip*. Pokud by systém nebyl podroben vazbám, byla by

virtuální posunutí δx_i vzájemně nezávislá a d'Alembertův princip by byl tudíž ekvivalentní Newtonovým pohybovým rovnicím pro vtištěné síly

$$F_i - m_i a_i = 0 . \quad (\text{II.22})$$

Za přítomnosti vazeb nejsou ovšem posunutí δx_i nezávislá a koeficienty (II.22) v nich tudíž nejsou rovny nule, což je přirozeným důsledkem existence vazebních sil. D'Alembertův princip nám umožňuje hledat řešení pohybových rovnic systému, aniž se musíme zabývat vazebními silami R_i , které v tomto principu vůbec nevystupují.

Předpokládáme-li existenci r vazeb (II.13) a s vazeb (II.16), máme celkem $k = s + r$ podmínek (II.15) a (II.17) na virtuální posunutí. Vybereme-li libovolně $3N - k$ nezávislých složek virtuálního posunutí δx_i , umožňují nám rovnice (II.15) a (II.17) vyjádřit zbývajících k složek jakožto funkce těchto $3N - k$ složek již nezávislých. Dosadíme-li tato vyjádření do (II.21), můžeme anulovat $3N - k$ koeficientů u nezávislých složek a obdržíme tak $3N - k$ diferenciálních rovnic 2. řádu pro $3N$ neznámých $x_1(t), \dots, x_{3N}(t)$. Abychom dostali soubor $3N$ rovnic pro $3N$ neznámých, doplníme je k rovnicemi vazeb (II.13) a (II.16)¹⁵.

Často nás speciálně zajímá rovnovážná poloha systému podrobeného skleronomním vazbám. V tom případě položíme v (II.21) $a_i = 0$ a dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = 0 , \quad (\text{II.23})$$

čili virtuální práce vtištěných sil je v rovnovážné poloze nulová. Toto tvrzení vyjadřuje *princip virtuální práce*. Nalezení rovnovážné polohy lze provést stejným postupem, jaký byl již popsán pro určení pohybu systému z d'Alembertova principu. Namísto diferenciálních rovnic dostáváme ovšem rovnice algebraické.

Na závěr poznamenejme, že d'Alembertův princip lze chápat jako princip virtuální práce pro *efektivní* síly $F_i - m_i a_i$ zahrnující i síly setrvačné.

II.4 Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Pohybové rovnice lze odvodit z d'Alembertova principu ve fyzikálně názorném a symetrickém tvaru, který je výhodný zejména tehdy, když chceme znát nejen pohyb systému, ale i velikosti vazebních sil.

¹⁵ Je vhodné konkretizovat si tento postup na příkladech.

Předpokládáme opět r holonomních vazeb (II.13) a s anholonomních vazeb (II.16). V důsledku definice virtuálního posunutí (II.15) a (II.17) můžeme d'Alembertův princip (II.21) přepsat do tvaru

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(F_i - m_i a_i + \sum_{A=1}^r \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial x_i} + \sum_{B=1}^s \mu_B \mathcal{A}_{Bi} \right) \delta x_i = 0, \quad (\text{II.24})$$

kde jsme zavedli $k = s + r$ tzv. *Lagrangeových multiplikátorů* λ_A, μ_B , jež jsou zatím neurčenými funkcemi času.

Za předpokladu nezávislosti vazeb lze vybrat $3N - k$ nezávislých komponent virtuálních posunutí δx_i . Koefficienty u zbývajících k komponent v součtu (II.24) anulujeme volbou multiplikátorů. Požadavek nulovosti těchto koeficientů dává k rovnic, z nichž lze vypočítat k neznámých λ_A, μ_B jako funkce poloh, rychlostí, zrychlení, popř. i času. Ze součtu (II.24) pak zbude lineární kombinace nezávislých složek, jejíž koeficienty musejí být rovny nule v důsledku této nezávislosti. Po dosazení multiplikátorů je to $3N - k$ rovnic, z nichž lze vypočítat $3N - k$ nezávislých složek zrychlení soustavy jako funkce poloh i rychlostí a popř. i času tak, že je splněn d'Alembertův princip. Rovnice

$$m_i a_i = F_i + \sum_{A=1}^r \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial x_i} + \sum_{B=1}^s \mu_B \mathcal{A}_{Bi}, \quad (\text{II.25})$$

kde $a_i = \ddot{x}_i$, jsou tedy pohybovými rovnicemi daného systému. Tyto rovnice nazýváme *Lagrangeovými rovnicemi 1. druhu*. Jako neznámé v nich vystupují souřadnice x_i a Lagrangeovy multiplikátory λ_A, μ_B , tedy celkem $3N + k$ neznámých funkcí. Pro jejich určení je třeba dodat k rovnicím (II.25) rovnice $s + r$ vazeb

$$f_A = 0, \quad \sum_{i=1}^{3N} \mathcal{A}_{Bi} \dot{x}_i + \mathcal{K}_B = 0. \quad (\text{II.26})$$

V případě, že existují pouze holonomní vazby, se Lagrangeovy rovnice 1. druhu často píší ve vektorovém tvaru

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j + \sum_{A=1}^r \lambda_A \text{grad}_j f_A, \quad (\text{II.27})$$

kde index $j = 1, \dots, N$ se vztahuje k hmotnému bodu a $\text{grad}_j = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}$.

Porovnáme-li (II.25) nebo (II.27) s (II.20), vidíme, že

$$R_i = \sum_{A=1}^r \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial x_i} + \sum_{B=1}^s \mu_B \mathcal{A}_{Bi} , \quad (\text{II.28})$$

resp.

$$\mathbf{R}_j = \sum_{A=1}^r \lambda_A \text{grad}_j f_A \quad (\text{II.29})$$

u holonomních vazeb. Členy s Lagrangeovými multiplikátory v rovnicích (II.25) a (II.27) tedy udávají vazebné síly.

Lagrangeových rovnic 1. druhu je možné užít i k určení rovnovážných poloh systémů, klademe-li v nich $\ddot{x}_i = 0$.

II.5 Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Pro systémy podrobené pouze holonomním vazbám mají dosud probrané metody řešení pohybových rovnic zřejmou nevýhodu. Popisujeme v nich pohyb systému pomocí $3N$ souřadnic konfiguračního prostoru P^{3N} a zavádíme navíc ještě r multiplikátorů, ačkoliv počet nezávisle proměnných určujících jednoznačně polohu systému je pouze

$$n = 3N - r . \quad (\text{II.30})$$

Číslo n nazýváme počtem *stupňů volnosti* daného systému. Za n nezávisle proměnných q^j můžeme zvolit libovolné křivočaré souřadnice na konfigurační varietě Q^n , na niž je pohyb systému omezen vazbami. V souřadnicích x^i na P^{3N} je tato varieta zapsána parametricky jako¹⁶

$$x^i = x^i(q^j, t) . \quad (\text{II.31})$$

Chceme nalézt formální aparát, který by umožňoval zapsat pohybové rovnice pouze pomocí zobecněných souřadnic q^j . Vyřešení této úlohy bude mít zřejmě význam i pro systémy bez vazeb, pro něž je z nějakých důvodů výhodné zavést křivočaré souřadnice.

Snažme se proto vyjádřit pomocí souřadnic q^i d'Alembertův princip. Z hlediska geometrie prostoru P^{3N} tento princip říká, že skalární součin vektoru efektivní síly a vektoru virtuálního posunutí vázaného vztahu (II.15) je nulový.

¹⁶ Tento zápis je obecně pouze lokální, poněvadž nemusí být možné pokrýt Q^n jedinou souřadnicovou soustavou.

K matematickému vyjádření tohoto faktu můžeme užít některých výsledků I.3, uvědomíme-li si, že jejich převážná většina nezávisí na dimenzi uvažovaného prostoru. Varieta Q^n je obecně zakřivena, takže v ní neexistují kartézské souřadnice. Nic nám však nebrání zavést na Q^n vektory kovariantní báze tečné k souřadnicovým čarám. Označíme tyto vektory e_j , kde $j = 1, \dots, n$. Poněvadž vztahy (II.15) požadují pouze tečnost vektoru virtuálního posunutí ke Q^n , jsou tyto složky vzájemně nezávislé.

Kartézské složky těchto vektorů jsou na základě (I.16)

$$(e_j)^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (\text{II.32})$$

Kontravariantní složky vektoru virtuálního posunutí v této bázi označíme δq^j . D'Alembertův princip (II.21) můžeme nyní zapsat jako¹⁷

$$[F_i - (ma)_i] \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \delta q^j = 0, \quad (\text{II.33})$$

kde výraz na levé straně můžeme buď chápat jako skalární součin vektoru efektivní síly s vektorem virtuálního posunutí v P^{3N} (sumace přes i), nebo jako skalární součin jeho průmětu do Q^N s vektorem virtuálního posunutí v Q^N (sumace přes j). Tento průmět je ovšem v důsledku libovolnosti složek virtuálního posunutí nulový, a tedy

$$F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} - (ma)_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = 0. \quad (\text{II.34})$$

Máme tak již pouze $3N - r$ rovnic, musíme z nich však ještě odstranit kartézské souřadnice. Zavedeme vektor

$$Q_j = F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad (\text{II.35})$$

který je průmětem vektoru síly z P^{3N} do Q^N , a nazveme jej vektorem *zobecněné síly*. Dále se budeme věnovat úpravě druhého členu na levé straně (II.34). K tomu si nejprve odvodíme několik pomocných vztahů. Derivováním (II.31) podle času dostáváme

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t}. \quad (\text{II.36})$$

¹⁷ Zde i v dalším výkladu opět užíváme Einsteinova sumačního pravidla. Přitom přes indexy vztahující se k P^{3N} se sčítá od 1 do $3N$, zatímco přes indexy vztahující se ke Q^n od 1 do n . Abychom mohli bez komplikací užívat sumační symboliky, položíme $(ma)_i = m_i a_i$.

Odtud plyne

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (\text{II.37})$$

Dále z (II.31) vyplývá

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right), \quad (\text{II.38})$$

což s uvážením (II.36) dává

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial q^j}. \quad (\text{II.39})$$

Dále lze na základě definice kinetické energie psát

$$(ma)_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \right). \quad (\text{II.40})$$

Využitím vztahů (II.40), (II.37) a (II.39) můžeme napsat

$$\begin{aligned} (ma)_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \right) \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j}. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Vztahy (II.35) a (II.41) po dosazení do (II.34) dávají

$$Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial T}{\partial q^j} = 0, \quad (\text{II.42})$$

což je nejobecnější tvar *Lagrangeových rovnic 2. druhu* pro mechanické systémy podrobené holonomním vazbám. Jde o n obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu, které jsou lineární v nejvyšších derivacích a z nichž je třeba určit neznámé funkce času $q^j(t)$.

Velkou výhodou Lagrangeových rovnic 2. druhu je, že namísto pracného přepisu $3N$ komponent zrychlení a_i do křivočarých souřadnic stačí provést tento přepis pro jedinou funkci T , což se provede dosazením (II.36) pro \dot{x}^i do výrazu pro kinetickou energii (I.100). Za jistých speciálních předpokladů o síle F_i se můžeme vyhnout rovněž přepočtu (II.35). Je tomu tak především tehdy, pokud lze k síle najít potenciální energii, tj. platí-li

$$F_i = - \frac{\partial V(x^k, t)}{\partial x^i}. \quad (\text{II.43})$$

Pak je rovněž

$$Q_j = F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V(q^k, t)}{\partial q^j}, \quad (\text{II.44})$$

z nichž potenciální energii v křivočarých souřadnicích určíme dosazením (II.31). Pak lze namísto vztahu (II.42) psát

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0, \quad (\text{II.45})$$

kde

$$L = T - V \quad (\text{II.46})$$

je *Lagrangeova funkce* daného mechanického systému.

Z Lagrangeovy funkce můžeme odvodit rovnice (II.45) i v obecnějším případě, když

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial x^i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i}, \quad (\text{II.47})$$

přičemž $U = U(\dot{x}^k, x^k, t)$ je *zobecněná potenciálová funkce*. Potenciální energii můžeme chápat jako její speciální případ, kdy U nezávisí na rychlostech.

Opět se snadno dokáže užitím (II.37) a (II.39), že

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q^j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^j}, \quad (\text{II.48})$$

v nichž zobecněnou potenciálovou funkci přepíšeme do křivočarých souřadnic pomocí (II.31) a (II.36). Lagrangeova funkce je pak

$$L = T - U. \quad (\text{II.49})$$

S tímto případem se setkáváme například při studiu pohybu nabitých částic v elektromagnetickém poli.

Konečně se vyskytuje případ, kdy

$$F_i = - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{x}^k, x^k, t)}{\partial \dot{x}^i}. \quad (\text{II.50})$$

Funkce \mathcal{R} se nazývá *disipativní funkce*. Setkáváme se s ní zejména u sil tření. V tomto případě lze dát Lagrangeovým rovnicím 2. druhu tvar¹⁸

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}^j}. \quad (\text{II.51})$$

¹⁸ Může ovšem nastat i případ, kdy část síly je odvoditelná z Lagrangeovy funkce a část z disipativní funkce.

Na závěr poznamenejme, že pro určení rovnovážných poloh v poli potenciálních sil se rovnice (II.45) redukují na

$$\frac{\partial V}{\partial q^j} = 0 \quad (\text{II.52})$$

a říkají tedy, že rovnovážná poloha odpovídá extrému potenciální energie. Před principem virtuální práce (II.23) má (II.52) tu výhodu, že umožňuje lehce rozhodnout i o stabilitě rovnovážné polohy, která odpovídá pouze minimu funkce V .

II.6 První integrály Lagrangeových rovnic. Cyklické souřadnice

V dalším výkladu se soustředíme téměř výhradně na Lagrangeovy rovnice ve tvaru (II.45). Řešení těchto rovnic je často usnadňováno nalezením prvních integrálů, tj. funkcí zobecněných souřadnic q^j , zobecněných rychlostí \dot{q}^j a (popřípadě) času t , které zůstávají během pohybu konstantní. Znalost Lagrangeovy funkce

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad (\text{II.53})$$

často umožňuje tyto integrály určit přímo bez vypisování rovnic. Tak je tomu zejména v případě, kdy funkce L nezávisí na některé ze souřadnic q^j (ale závisí ovšem na příslušné rychlosti \dot{q}^j). Takováto souřadnice se nazývá *cyklická*. Podle (II.45) je pak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = 0 \quad (\text{II.54})$$

a tedy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = C_j \quad (\text{II.55})$$

je konstantní v čase.

V kartézských souřadnicích v inerciálním systému v případě, že potenciálová funkce nezávisí na rychlostech, je

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{r}_i, t) \quad (\text{II.56})$$

a tudíž

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i, \quad (\text{II.57})$$

což je hybnost i -tého hmotného bodu. Tato hybnost se zachovává, je-li V nezávislé na souřadnicích tohoto bodu. Obecně proto nazýváme veličiny

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \quad (\text{II.58})$$

zachovávající se v případě cykličnosti q^j , *zobecněnými hybnostmi* či *impulzy*. Poznamenejme ovšem, že obecně mohou mít p_j velmi rozmanitý fyzikální význam, jak se lze přesvědčit propočtením konkrétních příkladů. V případě existence zobecněné potenciálové funkce závislé na rychlostech se zřejmě ani v kartézských souřadnicích neshodují zobecněné hybnosti s běžnými hybnostmi počítanými podle vztahu (I.128).

II.7 Zobecněná energie

Pokud Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, tj. platí-li

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (\text{II.59})$$

existuje mimořádně důležitý integrál pohybových rovnic

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L. \quad (\text{II.60})$$

Toto tvrzení lze snadno dokázat přímým výpočtem. Platí

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \dot{q}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} = \\ &= \dot{q}^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

v důsledku platnosti Lagrangeových rovnic 2. druhu a předpokladu (II.59). Existence prvního integrálu (II.60) neznamená tedy žádné omezení závislosti Lagrangeovy funkce na souřadnicích a rychlostech. Abychom poznali fyzikální význam tohoto integrálu, uvažujme běžný případ, kdy Lagrangeova funkce je rozdílem kinetické a potenciální energie. Pokud vztahy (II.31) neobsahují čas, stává se kinetická energie přepisem do křivočarých souřadnic q^j homogenní kvadratickou formou zobecněných rychlostí, tj.

$$T = a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (\text{II.62})$$

kde koeficienty $a_{ik} = a_{ki}$ jsou funkcemi zobecněných souřadnic. Je tedy

$$L = a_{ik} \left(\dot{q}^j \right) \dot{q}^i \dot{q}^k - V \left(q^j \right) . \quad (\text{II.63})$$

Dosazením (II.63) do (II.60) dostáváme po krátkém výpočtu

$$\mathcal{E} = T + V , \quad (\text{II.64})$$

čili první integrál (II.60) reprezentuje v tomto případě mechanickou energii systému. V případě Lagrangeovy funkce obecnějšího typu než (II.63) lze veličinu \mathcal{E} považovat za *zobecněnou energii* a uzavřít, že zobecněná energie se zachovává, nezávisí-li Lagrangeova funkce explicitně na čase.

II.8 Základy variačního počtu. Hamiltonův princip

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (II.45) jsme obdrželi z Newtonových rovnic (I.90) přepisem do křivočarých souřadnic a použitím předpokladu (II.19) o vazebných silách. Původní Newtonovy rovnice jsou v (II.45) zahrnuty jako speciální případ. Tvar rovnic (II.45) umožňuje odhalit hluboký princip, který lze matematicky formulovat v rámci variačního počtu. Tento princip jednak otvírá cestu k zobecněním mimo oblast klasické mechaniky, jednak umožňuje hlubší pochopení struktury samotné mechaniky.

Uvedeme proto elementární výklad o základech variačního počtu. Pro konkrétnost připomeňme jednu z prvních variačních úloh, jak byla formulována J. Bernoullim na konci 17. století. V homogenním gravitačním poli jsou zadány body A, B ; chceme určit křivku, tyto body spojující, která má tu vlastnost, že hmotný bod, který se podle ní pohybuje z počáteční klidové polohy A do polohy B , proběhne svou dráhu za nejkratší možnou dobu.

Je zřejmé, že hledaná křivka leží ve svislé rovině procházející oběma body. Orientujeme-li osu x vodorovně a osu y svisle dolů a připíšeme-li bodu A souřadnice $(0, 0)$ a bodu B souřadnice (X, Y) , bude hledaná křivka vyjádřena jako $y = y(x)$ s podmínkami $y(0) = 0, y(X) = Y$. Ze zákona zachování energie obdržíme, že hmotný bod proběhne z A do B za čas

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^X \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx , \quad (\text{II.65})$$

kde $y' = \frac{dy}{dx}$. Z matematického hlediska je tedy popsána úloha zvláštním

případem následující třídy úloh: Je dán výraz

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx, \quad (\text{II.66})$$

kde na funkci $y(x)$ pohlížíme jako na nezávisle proměnnou. I je tedy „funkce funkce“ neboli *funkcionál*. Hledáme funkci $y(x)$, pevně zadanou v hraničních bodech x_1 a x_2 tak, aby pro ni funkcionál nabýval extrémní (maximální či minimální) hodnoty. To je základní úloha variačního počtu, kterou lze ještě snadno rozšířit na případ, kdy funkcí $y_i(x)$ je libovolný počet, tj. na funkcionály typu

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y_i, y'_i, x) dx, \quad (\text{II.67})$$

kde opět funkce $y_i(x)$ jsou zadány v hraničních bodech.

Řešení této úlohy stručně nastíníme¹⁹. Mějme jistou třídu srovnávaných funkcí $y(x)$ a vybereme v ní jistou funkci $y_0(x)$. Pak funkci

$$\delta y = y(x) - y_0(x) \quad (\text{II.68})$$

nazýváme *variací* nezávisle proměnné vzhledem k „bodu“ $y_0(x)$ v daném prostoru funkcí. Platí

$$(\delta y)' = y' - y'_0 = \delta(y'), \quad (\text{II.69})$$

tj. pořadí derivace a variace lze zaměnit.

Úloha na hledání extrému funkcionálu $I(y_i)$ je analogická úloze na hledání extrému funkce $f(x_i)$. V tomto případě můžeme vytvořit diferenciál $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, který je lineární částí přírůstku funkce. Nutnou, nikoliv ovšem postačující, podmínkou extrému v bodě x_i je nulovost diferenciálu, tj. platnost rovnic $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

Veličinou analogickou diferenciálu funkce je *variace funkcionálu* I definovaná takto

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx, \quad (\text{II.70})$$

¹⁹ V tomto nástinu nejsou podrobně provedeny důkazy některých tvrzení a nejsou explicitně formulovány podmínky, které musí splňovat funkcionál I a funkce y_i a δy_i , aby bylo možné popsané kroky provést.

což je lineární část přírůstku funkcionálu. Nutnou podmínkou extrému na $y_i(x)$ je nulovost této variace. Využitím (II.69) lze psát

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i} (\delta y_i)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \delta y_i . \quad (\text{II.71})$$

Avšak variace funkcí y_i je podle předpokladu v hraničních bodech intervalu (x_1, x_2) nulová, takže

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \right) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \right]_{x_1}^{x_2} = 0 . \quad (\text{II.72})$$

Užitím (II.71) a (II.72) převedeme výraz (II.70) na tvar

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx . \quad (\text{II.73})$$

Má-li platit $\delta I = 0$ pro všechny variace δy_i , snadno se ukáže, že funkce $y_i(x)$ musejí splňovat *Eulerovy rovnice*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 . \quad (\text{II.74})$$

Eulerovy rovnice (II.74) jsou tedy nutnou podmínkou pro extrém funkcionálu (II.67). Představují soustavu diferenciálních rovnic 2. řádu pro funkce $y_i(x)$ realizující extrém. Protože ovšem nejde i o podmínky postačující, nemusí řešení těchto rovnic odpovídat extrému. Obecně určit postačující podmínky extrému a zjistit, zda jde o minimum či maximum, je úloha podstatně složitější nežli analogická úloha v případě extrému funkce.

Fakticky je platnost Eulerových rovnic ekvivalentní požadavku *stacionárnosti* funkcionálu I , tj. nulovosti jeho variace. Názorně řečeno to znamená, že změny funkcionálu jsou při malých změnách funkcí $y_i(x)$ „malé druhého řádu“, tj. asi jako v okolí vrcholu, sedla či dna prolákliny jsou změny nadmořské výšky při malých úkrocích vlastně nulové. Řada důležitých výsledků variačního počtu si vyžaduje pouze stacionárnost a nikoliv extrémálnost funkcionálu I .

Srovnáme-li nyní Eulerovy rovnice (II.74) s Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu (II.45), vidíme ihned, že (až na různost označení) jde o tytéž rovnice. Lagrangeovy rovnice 2. druhu (a speciálně i Newtonovy rovnice pro

síly splňující (II.43) či (II.47)) jsou tedy ekvivalentní *Hamiltonovu principu* stacionární akce

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt = 0, \quad \delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0, \quad (\text{II.75})$$

kde *akcí* mechanického systému v časovém intervalu (t_1, t_2) nazýváme funkcionál

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (\text{II.76})$$

V rámci klasické mechaniky se dá ukázat, že hodnota (II.76) je pro skutečný fyzikální děj popsany funkcemi $q^i(t)$ alespoň lokálním minimem, a proto také mluvíme o principu nejmenší akce.

Na rozdíl od d'Alembertova principu (II.21), který je principem *diferenciálním*, je Hamiltonův princip (II.75) principem *integrálním*. Poznamenejme, že v rámci klasické mechaniky lze formulovat ještě řadu dalších diferenciálních a integrálních principů, s nimiž se čtenář může seznámit v podrobnějších monografiích či učebnicích.

Cesta od pohybových rovnic k variačním principům má dlouhou a bohatou historii, která se neomezuje jen na mechaniku. Postupně se ukázalo, že všechny základní rovnice moderní fyziky lze vyvodit z principu stacionární akce. Proto se tento princip stává vodítkem i při hledání nových teorií v oblasti dosud ne zcela prozkoumaných fyzikálních jevů.

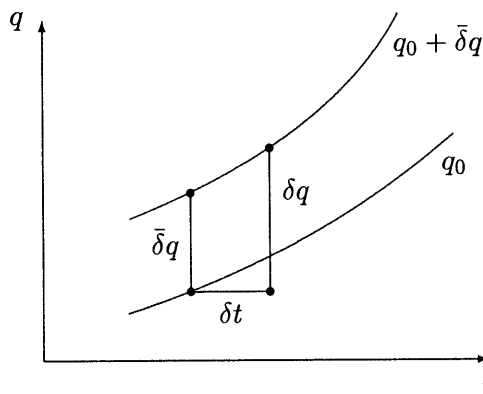
II.9 Teorém E. Noetherové

Důležitým obecným výsledkem spjatým s platností Hamiltonova principu je 1. teorém E. Noetherové²⁰, který udává souvislost mezi symetriemi fyzikálních systémů a zákony zachování. Omezíme se na stručný náčrt jeho odvození v rámci klasické mechaniky.

V předešlém odstavci jsme se zabývali pouze variacemi funkcionálů, jejichž hraniční body a hodnoty srovnávacích funkcí v těchto bodech byly pevně zadány (úloha s pevnými konci). Tento předpoklad nyní opustíme. Budeme uvažovat libovolné variace času $\delta t(t)$, které posunují bod t do bodu $t + \delta t$. Za variaci zobecněné souřadnice q budeme nyní považovat namísto (II.68) výraz

$$\delta q = q(t + \delta t) - q_0(t). \quad (\text{II.77})$$

²⁰ Existuje také 2. teorém E. Noetherové, který má význam zejména pro teorii pole.



Obr. 2: Izochronní a neizochronní variace. Variace funkce δq (rozdíl hodnot variované funkce ve variovaném čase a původní funkce v původním čase) se obecně liší od rozdílu hodnot variované a původní funkce $\bar{\delta}q \doteq \delta q - \dot{q} \delta t$ v témže čase. Rozlišujeme proto neizochronní variaci δq a izochronní variaci $\bar{\delta}q$. Pokud čas nepodléhá variování, obě variace splývají.

Rozdíl na pravé straně (II.77) se nepočítá v témže časovém okamžiku, a proto se mluví o *neizochronní* variaci. V prvním přiblížení Taylorova rozvoje platí

$$q(t + \delta t) = q(t) + \dot{q} \delta t, \quad (\text{II.78})$$

a proto *izochronní* variace $\bar{\delta}q$ je v témže přiblížení rovna

$$\bar{\delta}q = q(t) - q_0(t) = \delta q - \dot{q} \delta t. \quad (\text{II.79})$$

Pro $\delta t = 0$ (případ diskutovaný v II.8) zřejmě platí $\bar{\delta}q = \delta q$. Proto zde nebylo třeba izochronní a neizochronní variace rozlišovat, viz obr. 2.

Srovnajme nyní hodnoty funkcionálu akce pro případ, kdy se liší nejen funkce q_i , ale i hraniční body oboru, v kterém se funkcionál počítá. V tomto případě je změna funkcionálu akce při přechodu od funkcí q_i k funkcím $q_i + \bar{\delta}q_i$ rovna

$$\Delta S = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(q^i + \bar{\delta}q^i, \dot{q}^i + \bar{\delta}\dot{q}^i, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt, \quad (\text{II.80})$$

neboli $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, kde

$$\Delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} [L(q^i + \bar{\delta}q^i, \dot{q}^i + \bar{\delta}\dot{q}^i, t) - L(q^i, \dot{q}^i, t)] dt, \quad (\text{II.81})$$

$$\begin{aligned} \Delta S_2 = & \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L(q^i + \bar{\delta}q^i, \dot{q}^i + \bar{\delta}\dot{q}^i, t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(q^i + \bar{\delta}q^i, \dot{q}^i + \bar{\delta}\dot{q}^i, t) dt . \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

Chceme určit lineární část (II.80), tj. neizochronní variaci akce, kterou označíme δS . Pro její výpočet můžeme užít (II.70) a (II.71), přičemž máme na paměti, že v těchto vztazích jde o izochronní variace. Výraz na levé straně (II.72) již nemůžeme považovat za nulový, neboť se nadále nepředpokládá, že $\bar{\delta}q^i(t_2)$ a $\bar{\delta}q^i(t_1)$ jsou rovny nule. Máme tedy

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \bar{\delta}q^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta}q^i \right]_{t_1}^{t_2} . \quad (\text{II.83})$$

Pro výpočet lineární části ΔS_2 můžeme považovat L na intervalu δt_1 , popř. δt_2 , za konstantní a psát

$$\delta S_2 = [L\delta t]_{t_1}^{t_2} . \quad (\text{II.84})$$

Užijeme-li ještě vztahu (II.79) a definic zobecněných hybností p_i (II.58) a zobecněné energie \mathcal{E} (II.60), zapíšeme variaci akce jako

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \bar{\delta}q^i dt + [p_i \delta q^i - \mathcal{E} \delta t]_{t_1}^{t_2} , \quad (\text{II.85})$$

což pro $\delta t = 0$ a $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ přechází v již uvedený vztah (II.73). Pro tento případ jsme z Hamiltonova principu vyvodili Lagrangeovy rovnice 2. druhu.

Nyní budeme považovat Lagrangeovy rovnice 2. druhu za splněny, takže první člen na pravé straně (II.85) je nulový. Budeme však předpokládat, že $\delta S = 0$ i v případě, že hodnoty q^i nejsou v hraničních bodech pevně zadány, a to proto, že variace δt , δq^i vznikly tzv. *transformacemi invariance*.

Transformace zadaná vztahy

$$t^* = t^*(t) , \quad q^{*i} = q^{*i}(q^j, t) \quad (\text{II.86})$$

je transformací invariance, jestliže pro všechny časové intervaly a všechny funkce q^i platí

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} L(q^{*i}, \dot{q}^{*i}, t^*) dt^* = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt, \quad (\text{II.87})$$

tj. nemění-li akci systému. V důsledku Hamiltonova principu požadavek (II.87) zaručuje, že transformace (II.86) zachovává množinu řešení pohybových rovnic, tj. je-li $q^i(t)$ řešením těchto rovnic, je řešením i $q^{*i}(t^*)$ a platí to i naopak.

Podmínku (II.87) lze vzhledem k libovolnosti integračního oboru nahradit podmínkou na Lagrangeovu funkci

$$L(q^*(q, t), t^*(t)) \frac{dt^*}{dt} = L(q, t), \quad (\text{II.88})$$

kde pro stručnost píšeme $L(q, t)$ namísto podrobnějšího $L(q^i, \dot{q}^i, t)$. Faktor $\frac{dt}{dt^*}$ znamená, že při obecné transformaci času veličina L mění svou hodnotu, není tedy přesně řečeno funkcí, ale *hustotou*. Podle předchozího vztahu má tato hustota v případě transformace invariance v souřadnicích q^i, t a q^{*i}, t^* stejný funkční tvar. Omezíme-li změny časové souřadnice na posun počátku, není rozdíl mezi funkcí a hustotou podstatný.

Transformace invariance tvoří grupu. Teorem E. Noetherové se týká případu, kdy existuje jednoparametrická grupa transformací invariance, tj. každou transformaci této grupy lze obdržet spojitou změnou parametru η z identity. V prvním přiblížení Taylorova rozvoje lze psát (II.86) jako

$$t^* = t + \eta X(t), \quad q^{*i} = q^i + \eta Y^i(q^j, t), \quad (\text{II.89})$$

kde $X(t)$ a $Y^i(q^j, t)$ jsou *generující funkce (generátory)* dané transformace. Je tedy

$$\delta t = \eta X, \quad \delta q^i = \eta Y^i \quad (\text{II.90})$$

a po dosazení do (II.85) obdržíme v důsledku vztahu $\delta S = 0$ zákon zachování

$$\frac{d}{dt}(p_i Y^i - \mathcal{E} X) = 0 \quad (\text{II.91})$$

pro každou jednoparametrickou grupu transformací invariance (II.89). Jinými slovy veličina

$$Z = p_i Y^i - \mathcal{E} X \quad (\text{II.92})$$

je prvním integrálem pohybových rovnic. Toto tvrzení tvoří obsah 1. teóremu E. Noetherové umožňujícího systematické vyvození zákonů zachování.

V důsledku homogenity času je transformací invariance transformace

$$t^* = t + \eta \quad (\text{II.93})$$

s generujícími funkcemi $X = 1$, $Y^i = 0$. Pak veličina (II.92) je (až na znaménko) zobecněnou energií.

Obdobně homogenitě prostoru odpovídá transformace invariance

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i + \eta \boldsymbol{\nu}, \quad X = 0, \quad \mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\nu} \quad (\text{II.94})$$

pro všechny polohové vektory \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$, přičemž $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor udávající směr prostorové translace. Zachovávají se veličina je

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \boldsymbol{\nu}, \quad (\text{II.95})$$

vzhledem k libovolnosti $\boldsymbol{\nu}$ to značí, že se zachovává vektor hybnosti

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}, \quad (\text{II.96})$$

což pro Lagrangeovu funkci typu (II.56) vede k běžnému výrazu pro hybnost.

Obdobně izotropii prostoru odpovídá transformace invariance

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \eta (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_i), \quad X = 0, \quad \mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_i, \quad (\text{II.97})$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor ve směru osy otáčení. Odtud snadno dostáváme zákon zachování pro vektor momentu hybnosti

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (\text{II.98})$$

Konečně zachování zobecněné hybnosti p_i je spojeno s transformací invariance

$$q^{*i} = q^i + \eta^i \quad (\text{II.99})$$

pro cyklickou souřadnici q^i .

Je třeba ještě upozornit, že transformace invariance zachovává množinu řešení pohybových rovnic, opačné tvrzení však neplatí (transformace zachovávající množinu řešení pohybových rovnic nemusí být transformací invariance). Například pro jednorozměrný pohyb volné částice při transformaci Galileiho platí

$$L(v^*) = \frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{1}{2} m (v - V)^2 \neq L(v). \quad (\text{II.100})$$

V tomto případě se „transformovaná“ a „původní“ Lagrangeova funkce (levá a pravá strana (II.88)) liší o totální derivaci podle času. Snadno se ověří, že to nemá vliv na pohybové rovnice, neboť po dosazení

$$L = \frac{d}{dt} f(q^i, t) \quad (\text{II.101})$$

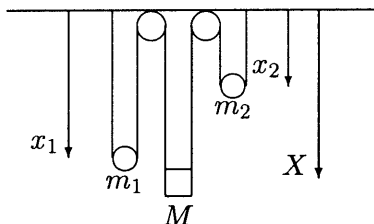
do levé strany (II.45) vychází identicky nula. Lagrangeovy funkce lišící se o totální časovou derivaci, resp. výrazy Ldt lišící se o totální diferenciál vedou tedy ke stejným pohybovým rovnicím. Transformace zachovávající tvar pohybových rovnic nazýváme *zobecněnými transformacemi invariance*. 1. teorém E. Noetherové se dá snadno zobecnit i na tuto situaci.

Podrobnější rozbor v případě Galileiho transformace vede k zákonu zachování, který vyjadřuje rovnoměrnost a přímočarost pohybu středu hmotnosti izolované soustavy.

II.10 Příklady

1. Určete zrychlení tělesa z obr. 3. Hmotnosti lan, rozměry kladek a tření zanedbáme.

Řešení: Na tomto příkladě ukážeme všechny tři popsané metody řešení pohybových rovnic.



Obr. 3: Soustava kladek. Těleso o hmotnosti M je zavěšeno na dvou lanech. Levé lano má délku L_1 , pravé L_2 , odpovídající hmotnosti volných kladek jsou m_1 a m_2 .

Označíme x_1 , x_2 souřadnice volných kladek, X souřadnici břemene. Vazebné podmínky jsou vyjádřeny rovnicemi

$$f_1 = 2x_1 + X - L_1 = 0, \quad (\text{II.102})$$

$$f_2 = 2x_2 + X - L_2 = 0. \quad (\text{II.103})$$

Systém má tedy jeden stupeň volnosti. Jako nezávislou souřadnici zvolíme X . Virtuální posunutí volných kladek jsou podle podmínek (II.15)

$$\delta x_1 = -\frac{\delta X}{2}, \quad \delta x_2 = -\frac{\delta X}{2} \quad (\text{II.104})$$

a pro jejich zrychlení dostaneme derivováním vazebných podmínek

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\ddot{X}}{2}, \quad \ddot{x}_2 = -\frac{\ddot{X}}{2}. \quad (\text{II.105})$$

D'Alembertův princip

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{II.106})$$

po rozepsání dává

$$m_1 (g - \ddot{x}_1) \delta x_1 + M (g - \ddot{X}) \delta X + m_2 (g - \ddot{x}_2) \delta x_2 = 0, \quad (\text{II.107})$$

což po dosazení (II.104) a anulování koeficientu u δX vede k řešení

$$\ddot{X} = \frac{4M - 2(m_1 + m_2)}{4M + m_1 + m_2} g. \quad (\text{II.108})$$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

$$\mathbf{F}_i + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad } f_A = m_i \mathbf{a}_i \quad (\text{II.109})$$

dávají

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g + 2\lambda_1, \\ M \ddot{X} &= Mg + \lambda_1 + \lambda_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g + 2\lambda_2. \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

Rovnice (II.110) spolu s rovnicemi (II.105) vzniklými derivováním vazebných podmínek tvoří úplnou soustavu pro neznámé $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{X}, \lambda_1, \lambda_2$. Jejím řešením dostáváme opět výsledek (II.108) a navíc pro napětí lan

$$\lambda_1 = -m_1 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}, \quad \lambda_2 = -m_2 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}. \quad (\text{II.111})$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu se pro náš případ redukuje na jedinou rovnici tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = 0. \quad (\text{II.112})$$

Využitím vazebných podmínek (II.102) a (II.103) dostáváme pro kinetickou energii

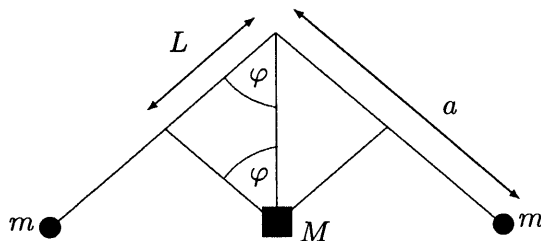
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 = \frac{1}{8}(4M + m_1 + m_2)\dot{X}^2 \quad (\text{II.113})$$

a pro potenciální energii

$$V = g(m_1x_1 + m_2x_2 + MX) = \frac{gx}{2}(2M - m_1 - m_2) + \text{konst} , \quad (\text{II.114})$$

což po dosazení do (II.112) vede ihned k výsledku (II.108).

2. Kloubový mechanismus (odstředivý regulátor) znázorněný na obr. 4 se točí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω . Hmotnosti spojovacích tyčí a kloubů lze zanedbat. Určete úhel φ , který budou svírat ramena s osou.



Obr. 4: Odstředivý regulátor. Veličiny L, a udávají geometrické rozměry regulátoru, ramena jsou zatížena hmotnostmi m , osa hmotností M .

Řešení: Je nejvhodnější užít neinerciálního systému otáčejícího se úhlovou rychlostí ω a hledat v něm rovnovážnou polohu pomocí minima potenciální energie. Na mechanismus působí gravitace a odstředivá síla, takže výsledná potenciální energie je

$$V = -2g(ML + ma)\cos\varphi + m\omega^2a^2\sin^2\varphi . \quad (\text{II.115})$$

Platí

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2g(ML + ma)\sin\varphi - 2m\omega^2a^2\cos\varphi\sin\varphi = 0 . \quad (\text{II.116})$$

Tato rovnice má tři řešení

$$\cos\varphi = -1 , \quad (\text{II.117})$$

$$\cos\varphi = 1 , \quad (\text{II.118})$$

$$\cos \varphi = \zeta = \frac{ML + ma}{m\omega^2 a^2} g. \quad (\text{II.119})$$

Třetí řešení existuje pouze pro $\zeta \leq 1$.

Druhou derivací V je

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -4m\omega^2 a^2 \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \zeta \cos \varphi - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{II.120})$$

Aby šlo o stabilní rovnováhu, musí být (II.120) kladné, tzn.

$$\cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \zeta \cos \varphi - \frac{1}{2} < 0. \quad (\text{II.121})$$

Odtud plyne, že řešení (II.117) je vždy nestabilní; pokud je $\zeta > 1$, je stabilní řešení (II.118), a pokud je $\zeta < 1$, je stabilní řešení (II.119).

3. Dokažte, že pohybové rovnice pro částici v elektromagnetickém poli

$$m\mathbf{a} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II.122})$$

plynou z Lagrangeovy funkce

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (\text{II.123})$$

kde $\phi(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ jsou tzv. *skalární* a *vektorový potenciál* pole. Užijte tohoto výsledku k řešení příkladu 2, který jsme v předešlé kapitole řešili pomocí Newtonových rovnic.

Řešení: Výpočet pohybových rovnic z Lagrangeovy funkce (II.123) dává

$$m\ddot{x}_i = e \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) v_j. \quad (\text{II.124})$$

Užitím prvního ze vzorců (I.65) dostáváme

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ikj} \epsilon_{kmn} \frac{\partial A_m}{\partial x_n}, \quad (\text{II.125})$$

takže užitím (I.66) a definice operace rotace

$$[\text{rot}\mathbf{A}]_i = [\nabla \times \mathbf{A}]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \quad (\text{II.126})$$

přepíšeme (II.124) do vektorového tvaru

$$m\mathbf{a} = e \left(-\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + e(\mathbf{v} \times \text{rot}\mathbf{A}). \quad (\text{II.127})$$

Je tedy

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{II.128})$$

pro vztah intenzit a potenciálů. Snadno se dokáže, že v důsledku (II.128) musejí intenzity splňovat 1. pár Maxwellových rovnic

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{II.129})$$

Nyní se zabýváme příkladem 2. Omezme se na pohyb v rovině kolmé k ose válce. Vzhledem k symetrii úlohy lze předpokládat, že vektorový potenciál je tečný ke kružnicím se středem v ose a jeho velikost závisí pouze na vzdálenosti od osy. Vzhledem k druhé rovnici (II.128) můžeme užít Stokesovy věty

$$\oint_s \mathbf{A} ds = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (\text{II.130})$$

kde s je hranice kruhu S se středem v ose. Velikost vektoru \mathbf{A} pak je

$$A = \frac{rB}{2}. \quad (\text{II.131})$$

Skalární potenciál ϕ se určí snadno jako

$$\phi = -\int_{R_0}^r E dr = -ek \ln \frac{r}{R_0}. \quad (\text{II.132})$$

Dosazením (II.131) a (II.132) do (II.123) a přepisem do polárních souřadnic r, ψ dostáváme

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) + ek \ln \frac{r}{R_0} + e\frac{r^2 B}{2}\dot{\psi}. \quad (\text{II.133})$$

První integrály této Lagrangeovy funkce jsou

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - ek \ln \frac{r}{R_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (\text{II.134})$$

$$p_\psi = mr^2\dot{\psi} + e\frac{r^2 B}{2} = eB\frac{R_0^2}{2}, \quad (\text{II.135})$$

kde konstantám dáváme hodnotu odpovídající zadaným počátečním podmínkám. Dosazením z (II.135) do (II.134) dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + \frac{e^2 r^2 B^2}{4m^2} \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right)^2 \right] - ek \ln \frac{r}{R_0}, \quad (\text{II.136})$$

což pro pohyb s nulovou radiální složkou rychlosti na plášti válce, tj. $\dot{r} = 0$, $r = R$, dává výsledek (I.154).

Další příklady k řešení Lagrangeových rovnic nalezneme čtenář ve „Vybraných aplikacích“ těchto učebních textů.

Příklady k samostatnému řešení

1. Žebřík váhy G je opřen o svislou hladkou stěnu, se kterou svírá úhel φ . Jaká vodorovná síla musí působit na dolním konci žebříku, aby jej udržela v rovnováze?

[Podle předchozí úlohy lze žebřík nahradit nehmotnou tyčí, jejíž konce jsou zatíženy vahami $\frac{G}{2}$. Potřebná síla je $F = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \varphi$.]

2. Hmotný bod klouže bez tření z nejvyššího bodu koule o poloměru R . Má počáteční rychlost v_0 . Určete, v kterém místě se odpoutá od povrchu koule.

[Lze užít Lagrangeových rovnic 1. druhu a hledat podmínku nulovosti multiplikátoru. K odtržení dojde ve výšce $z = \frac{v_0^2}{3g} + \frac{2R}{3}$ nad středem koule.]

3. Najděte Lagrangeovu funkci volné částice v neinerciálním systému.

Užijeme vztahu (I.56) a přepisu

$$\mathbf{v}' \mathbf{v}_{\text{tr}} = \frac{d'}{dt} (\mathbf{r}' \mathbf{v}_{\text{tr}}) - \mathbf{r}' (\mathbf{a}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{tr}}) .$$

Výsledek

$$L = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{m}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 - m \mathbf{r}' \mathbf{a}_{\text{tr}} + m \mathbf{v}' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') .$$

[(Čárky znamenají, že příslušné veličiny a operace se vztahují k neinerciálnímu systému.)]

4. Homogenní provaz délky L a hmotnosti μ leží napjat na stole. Na jeho koncích jsou upevněny hmotnosti m a M tak, že m je právě na okraji stolu a začíná padat. Určete dráhu h jako funkci času.

$$\left[h = \frac{mL}{\mu} (\cosh \lambda t - 1) , \quad \text{kde} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\mu g}{L(m + M + \mu)}} . \right]$$

III HAMILTONOVSKÁ FORMULACE MECHANIKY

V první polovině minulého století našel W. Hamilton novou formulaci klasické mechaniky, v níž pohybové rovnice nabývají mimořádně prostého tvaru. *Hamiltonovská formulace* se stala pro další rozvoj teoretické fyziky stejně významnou jako formulace lagrangeovská. Čtenář se s ní bude setkávat při dalším studiu zejména v oblasti kvantové mechaniky a statistické fyziky.

V Hamiltonově formulaci vystupují souřadnice a jim příslušné zobecněné hybnosti jako rovnoprávné dvojice proměnných ve *fázovém prostoru*. Zatímco v Lagrangeově formulaci bylo možné libovolně zaměňovat křivočaré souřadnice, v Hamiltonově formulaci lze transformacemi „mísit“ souřadnice a hybnosti za podmínky, že Hamiltonovy rovnice si zachovají svůj obecný tvar. Příslušným transformacím se říká *kanonické*. Charakterizujeme kanonické transformace a zavádíme jejich důležitý invariant, Poissonovy závorky. Ukazujeme, že i pohyb třídy mechanických systémů může být chápán jako kanonická transformace, a dospíváme k Liouvilleově větě, o níž se opírá statistická fyzika.

III.1 Hamiltonova funkce. Hamiltonovy rovnice

Hamiltonův formalismus se vztahuje na tytéž příklady, v nichž je možné odvodit pohybové rovnice z Lagrangeovy funkce podle (II.45). Namísto Lagrangeovy funkce se však stává základem nové formulace zobecněná energie \mathcal{E} z (II.60), v níž ovšem z rovnic

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{III.1})$$

vyjádříme zobecněné rychlosti \dot{q}^i jako funkce zobecněných souřadnic q^i , zobecněných hybností p_i a (popřípadě) času t , tj. ²¹

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^j, p_j, t). \quad (\text{III.2})$$

²¹ Podmínka řešitelnosti rovnic (III.1) vzhledem ke \dot{q}^i je $\text{Det} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0$. Z Lagrangeových rovnic vidíme, že je to zároveň podmínka pro to, aby zrychlení \ddot{q}^i byla určena polohami q^i a rychlostmi \dot{q}^i . V případech, kterými se zabývá klasická mechanika, je tato podmínka regularity obvykle splněna.

Zobecněná energie v nových základních proměnných q^j, p_j, t se značí H a nazývá se *Hamiltonovou funkcí* mechanického systému. Je tedy

$$H(q^j, p_j, t) = p_i \dot{q}^i - L. \quad (\text{III.3})$$

Vypočtíme diferenciál funkce H z levé i pravé strany rovnice (III.3). Jednak je

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{III.4})$$

a jednak platí

$$dH = \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (\text{III.5})$$

kde druhý a čtvrtý člen na pravé straně by bylo možné vyjádřit pomocí diferenciálů q^j, p_j a t na základě (III.2). Vzhledem k platnosti Lagrangeových rovnic (II.45) se však tyto členy ruší a vzhledem k (III.1) lze tedy psát

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (\text{III.6})$$

Porovnáním (III.4) a (III.6) zjišťujeme, že platí

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} \quad (\text{III.7})$$

a dále

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (\text{III.8})$$

Pro mechanický systém s n stupni volnosti představují rovnice (III.8) $2n$ diferenciálních rovnic 1. řádu pro $2n$ neznámých funkcí času $q^i(t)$ a $p_i(t)$. Jsou to tedy rovnice nižšího řádu než rovnice Lagrangeovy, navíc jde o rovnice mimořádně jednoduché, poněvadž pravé strany (III.8) nezávisí na derivacích hledaných funkcí. Rovnice (III.8) se nazývají *Hamiltonovými kanonickými rovnicemi* daného systému. $2n$ -rozměrný prostor proměnných q^i, p_i se nazývá *fázovým prostorem* a o dvojici q^i, p_i se stejným indexem i se mluví jako o *kanonicky sdružených veličinách*.

Pro ilustraci uvedeme nejjednodušší případ jednorozměrného pohybu volného hmotného bodu. Zde

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{III.9})$$

a Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = 0. \quad (\text{III.10})$$

Další příklady nalezneme čtenář na konci kapitoly.

Opačně z Hamiltonovy funkce $H(q^j, p_j, t)$ můžeme vypočítat Lagrangeovu funkci $L(q^j, \dot{q}^j, t)$

$$L = p_i \dot{q}^i - H, \quad (\text{III.11})$$

kde za p_i dosadíme funkci zobecněných souřadnic, rychlosti a času určenou z prvního páru rovnic (III.8)²². Vypočteme diferenciál L a užitím Hamiltonových rovnic lze pak odvodit Lagrangeovy rovnice 2. druhu; tím je dokázána ekvivalence obou druhů pohybových rovnic. Popsaný přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově funkci a od proměnných q^i, \dot{q}^i k proměnným q^i, p_i se nazývá *Legendreovou duální transformací* a setkáváme se s ní i mimo klasickou mechaniku.

Snadno se přesvědčíme, že Hamiltonovy rovnice (III.8) mohou být odvozeny z variačního principu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = 0, \quad (\text{III.12})$$

kde

$$F(q^j, \dot{q}^j, p_j, t) = p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t). \quad (\text{III.13})$$

Zde δ značí izochronní variaci a v okamžicích t_1, t_2 se požaduje $\delta q^i = 0$. Na rozdíl od Hamiltonova principu (II.75) se tento princip vztahuje k fázovému a nikoliv ke konfiguračnímu prostoru.

V případě, že Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase a platí tedy zákon zachování energie, je pro pohyby se stejnou energií \mathcal{E}

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}^i dt - \mathcal{E} (t_2 - t_1) = S_0 - \mathcal{E} (t_2 - t_1). \quad (\text{III.14})$$

Veličinu S_0 nazýváme *redukovanou akcí*.

Uvažujme nyní o pohybech splňujících zákon zachování energie při pevné počáteční a koncové poloze v libovolných časech. Variace (III.14) je

$$\delta S = \delta S_0 - \mathcal{E} (\delta t_2 - \delta t_1), \quad (\text{III.15})$$

²² Příslušná podmínka řešitelnosti rovnic vzhledem k p_i je nyní $\text{Det} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$. Tato podmínka nemusí být splněna ani ve fyzikálně zajímavých případech, viz IV.4.

zatímco podle (II.85) je (protože jsou splněny Lagrangeovy rovnice a $\delta q^i = 0$ na okrajích)

$$\delta S = -\mathcal{E} (\delta t_2 - \delta t_1) . \quad (\text{III.16})$$

Srovnáním obou předchozích vztahů dostáváme

$$\delta S_0 = \delta \int_C p_i dq^i = 0 , \quad (\text{III.17})$$

kde C je křivka v konfiguračním prostoru spojující počáteční a koncovou polohu systému. Zapišeme ji jako $q^i = q^i(\sigma)$, kde σ je parametr. Pak vyjádříme z (III.2)

$$p_i = p_i \left(\frac{dq^j}{dt}, q^j \right) = p_i \left(\frac{dq^j}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt}, q^j \right) \quad (\text{III.18})$$

a z (III.3)

$$H(q^j, \dot{q}^j) = H \left(\frac{dq^j}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt}, q^j \right) = \mathcal{E} . \quad (\text{III.19})$$

Ze vztahu (III.19) vypočteme $d\sigma/dt$ jako funkci q^j , $dq^j/d\sigma$ a \mathcal{E} a tu dosadíme do (III.18) a poté do (III.17). Tak dostaneme variační princip ve tvaru

$$\delta \int f \left(q^j, \frac{dq^j}{d\sigma}, \mathcal{E} \right) d\sigma = 0 \quad (\text{III.20})$$

pro určení trajektorie systému $q^i(\sigma)$ mezi počáteční a koncovou polohou při dané energii \mathcal{E} . Čtenář si může ověřit, že pro Lagrangeovu funkci (II.63) je

$$f = \sqrt{2(\mathcal{E} - V) a_{ik} \frac{dq^i}{d\sigma} \frac{dq^k}{d\sigma}} , \quad (\text{III.21})$$

kde V i a_{ik} jsou funkcemi q^i .

Vztah (III.17), resp. (III.20) je historicky nejstarší podobou variačního principu mechaniky a nazývá se *Maupertuisův princip*.

III.2 Cyklické souřadnice. Routhova funkce

Integrace Hamiltonových rovnic je usnadněna v případě, že se mezi souřadnicemi q^i vyskytují souřadnice cyklické, tj. takové, že na nich Hamiltonova funkce nezávisí. Ze vztahu (III.3) mezi Hamiltonovou a Lagrangeovou funkcí

vyplývá, že souřadnice je cyklická vzhledem k Hamiltonově funkci právě tehdy, když je cyklická vzhledem k funkci Lagrangeově. Podle (III.8) pro cyklickou souřadnici q^j platí

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j = 0 \quad (\text{III.22})$$

a kanonicky sdruženou zobecněnou hybností je

$$p_j = \alpha_j, \quad (\text{III.23})$$

kde α_j je konstanta určená počátečními podmínkami. V případě, že všechny souřadnice jsou cyklické a Hamiltonova funkce nezávisí na čase, platí

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = \omega_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (\text{III.24})$$

$$q^i = \omega^i t + \beta^i, \quad (\text{III.25})$$

kde ω^i a β^i jsou konstanty. Rovnice (III.23) a (III.25) představují řešení Hamiltonových rovnic.

V případě, že jsou cyklické pouze souřadnice q^1, \dots, q^s , kde $s < n$, ukazuje se výhodným zavést *Routhovu funkci*

$$R(q^{s+1}, \dots, q^n, p_1, \dots, p_s, \dot{q}^{s+1}, \dots, \dot{q}^n, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}^i - L. \quad (\text{III.26})$$

Výpočtem diferenciálu obou stran (III.26) a porovnáním koeficientů máme

$$\dot{q}^i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q^i} \quad (\text{III.27})$$

pro $i = 1, \dots, s$ a

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \frac{\partial R}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (\text{III.28})$$

pro $i = s + 1, \dots, n$. Užitím Lagrangeových rovnic 2. druhu lze (III.28) přepsat na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q^i} = 0 \quad (\text{III.29})$$

pro necyklické souřadnice.

Úplný systém pohybových rovnic je tak představován rovnicemi (III.27), které mají formu Hamiltonových rovnic, a rovnicemi (III.29), které mají formu rovnic Lagrangeových. Poněvadž q^1, \dots, q^s jsou podle předpokladu

cyklické souřadnice, jsou s nimi sdružené hybnosti p_1, \dots, p_s konstantní a lze proto v (III.29) brát Routhovu funkci jako

$$R = R(q^{s+1}, \dots, q^n, \dot{q}^{s+1}, \dots, \dot{q}^n, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t), \quad (\text{III.30})$$

kde se (na rozdíl od Lagrangeovy funkce) nevyskytuje závislost ani na derivacích cyklických souřadnic. Tento fakt zřejmě usnadňuje řešení rovnic (III.29).

III.3 Kanonické transformace

Lagrangeův formalismus nám dovoľoval provádět libovolné záměny křivočarých souřadnic typu

$$Q^i = Q^i(q^j, t). \quad (\text{III.31})$$

Transformací (III.31) se sice obecně (pokud nešlo o transformaci invariance) mění funkční tvar Lagrangeovy funkce na

$$\bar{L}(Q^j, \dot{Q}^j, t) = L(q^i(Q^j, t), \dot{q}^i(Q^j, \dot{Q}^j, t), t), \quad (\text{III.32})$$

avšak Lagrangeovy rovnice 2. druhu si zachovají svůj tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q^i} = 0, \quad (\text{III.33})$$

což je patrné z toho, že tvrzení Hamiltonova principu, z něhož rovnice (III.33) vyplývají, nezávisí na použitých souřadnicích²³.

Hamiltonův formalismus, v němž souřadnice q^i a hybnosti p_i vystupují rovnoprávným způsobem, nás vede k úvahám o širší třídě transformací

$$P_i = P_i(q^j, p_j, t), \quad Q^i = Q^i(q^j, p_j, t). \quad (\text{III.34})$$

Je rozumné požadovat, aby transformace (III.34) neměnily tvar Hamiltonových rovnic, tj. aby pro novou Hamiltonovu funkci $\bar{H}(Q^i, P_j, t)$ platilo

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q^i}. \quad (\text{III.35})$$

Požadavek (III.35) třídu transformací (III.34) podstatně zužuje. Transformace splňující požadavek (III.35) se nazývají *kanonické transformace*. Jinými slovy ve fázovém prostoru existuje jistá speciální třída souřadnicových systémů spojených kanonickými transformacemi.

²³ Konkrétní podoba rovnic po rozepsání parciálních derivací je ovšem různá.

Abychom charakterizovali kanonické transformace, vyjdeme proto z variačního principu (III.12). Musí platit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}^i - \bar{H}) dt = 0. \quad (\text{III.36})$$

Víme již (viz vzorec (II.101) a komentář k němu), že funkce za integrálem ve variačním principu se mohou lišit o totální derivaci podle času. Protože $\dot{q}^i = dq^i/dt$, $\dot{Q}^i = dQ^i/dt$, můžeme namísto (III.36) psát

$$p_i dq^i - P_i dQ^i + (\bar{H} - H) dt = d\psi(P, Q, t). \quad (\text{III.37})$$

Funkci $\psi(P, Q, t)$ nazýváme *vytvorující funkcí* kanonické transformace.

Předpokládejme, že je možné z inverzní transformace k (III.34)

$$p_i = p_i(P_j, Q^j, t), \quad q^i = q^i(P_j, Q^j, t) \quad (\text{III.38})$$

vyjádřit nové hybnosti P jako funkce q, Q, t . Pak lze psát

$$\psi(P(q, Q, t), Q, t) = F(Q, q, t), \quad (\text{III.39})$$

čímž zavádíme vytvorující funkci $F(Q, q, t)$. Nahradíme-li funkci ψ na pravé straně (III.37) funkcí F , můžeme porovnat koeficienty u diferenciálů na obou stranách a dostáváme

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (\text{III.40})$$

První dvě sady rovnic (III.40) udávají kanonickou transformaci příslušnou vytvorující funkci F , poslední vztah umožňuje určit novou Hamiltonovu funkci.

Popsaný postup vyžadoval, aby byl $\text{Det} \left(\frac{\partial q^i}{\partial P_j} \right) \neq 0$, což nemusí být vždy splněno. Existence inverzní transformace (III.38) si žádá pouze splnění podmínky

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} & \frac{\partial q^i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q^j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{III.41})$$

Pokud $\text{Det} \left(\frac{\partial q^i}{\partial P_j} \right) = 0$, ale je nenulový subdeterminant $\text{Det} \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \right)$, lze z (III.38) vypočítat Q jako funkce q, P, t . Vztah (III.37) přepíšeme na tvar

$$p_i dq^i + Q^i dP_i + (\bar{H} - H) dt = d(P_i Q^i + \psi) \quad (\text{III.42})$$

a položíme

$$P_i Q^i(q, P, t) + \psi(P, Q(q, P, t), t) = \bar{F}(q, P, t), \quad (\text{III.43})$$

kde $\bar{F}(q, P, t)$ je další typ vytvořující funkce. V tomto případě bude

$$p_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}. \quad (\text{III.44})$$

Bylo by možné zavést ještě vytvořující funkce $\bar{\bar{F}}(P, p, t)$ a $\bar{\bar{F}}(p, Q, t)$, což ponecháváme na čtenáři.

Uveďme nyní příklady kanonických transformací:

a) Z vytvořující funkce

$$\bar{F} = f^i(q, t) P_i \quad (\text{III.45})$$

dostáváme podle (III.44)

$$Q^i = f^i, \quad p_i = \frac{\partial f^j}{\partial q^i} P_j, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial f^i}{\partial t} P_i, \quad (\text{III.46})$$

což jsou již uvedené transformace (III.31) v konfiguračním prostoru, doplněné odpovídajícími transformacemi hybnosti a Hamiltonovy funkce. Pověsim si, že zatímco pro Lagrangeovu funkci platilo $\bar{L} = L$, viz (III.32), hodnoty Hamiltonovy funkce \bar{H} a H se pro transformace závislé na čase liší.

b) Z vytvořující funkce

$$F = q^i Q^i \quad (\text{III.47})$$

dostáváme podle (III.40)

$$p_i = Q^i, \quad P_i = -q^i, \quad \bar{H} = H. \quad (\text{III.48})$$

Transformace tedy vede (až na znaménko) k vzájemné výměně souřadnic a hybností. Vidíme tedy, že rozdělení na souřadnice a hybnosti nemá v Hamiltonově teorii absolutní význam.

c) Z vytvořující funkce

$$F = \frac{m}{2} \omega q^2 \cotg Q \quad (\text{III.49})$$

získáme podle (III.47) po malé úpravě

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (\text{III.50})$$

Pro Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (\text{III.51})$$

dostáváme

$$\bar{H} = \omega P . \quad (\text{III.52})$$

Nová souřadnice Q je vzhledem k nové Hamiltonově funkci \bar{H} cyklická a řešením Hamiltonových rovnic je tedy

$$P = \alpha , \quad Q = \omega t + \beta , \quad (\text{III.53})$$

kde α, β jsou konstanty. Pro původní souřadnici získáme dosazením do (III.50)

$$q = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) , \quad (\text{III.54})$$

kde $\mathcal{E} = \omega\alpha$ je konstantní energie oscilátoru.

Z posledního příkladu vidíme, že kanonickou transformací je možné dát Hamiltonově funkci a tím i Hamiltonovým rovnicím mimořádně jednoduchý tvar, který usnadní jejich řešení. Aby bylo možné této výhody využívat, je třeba umět vhodnou kanonickou transformaci nalézt.

Na závěr si ukážme, že kanonické transformace tvoří grupu. Především je zřejmé, že identická transformace je kanonická. Složíme-li dvě kanonické transformace $(p, q) \rightarrow (P^*, Q^*) \rightarrow (P, Q)$, máme

$$p_i dq^i - P_i^* dQ^{*i} + (\bar{H}^* - H) dt = d\psi^* , \quad (\text{III.55})$$

$$P_i^* dQ^{*i} - P_i dQ^i + (\bar{H} - \bar{H}^*) dt = d\psi^{**} \quad (\text{III.56})$$

a sečtením obou vztahů dostaneme

$$p_i dq^i - P_i dQ^i + (\bar{H} - H) dt = d(\psi^* + \psi^{**}) . \quad (\text{III.57})$$

Odtud vidíme, že i výsledná transformace je kanonická s vytvářející funkcí $\psi = \psi^* + \psi^{**}$. Konečně inverzní transformace ke kanonické transformaci (III.34) splňuje vztah

$$P_i dQ^i - p_i dq^i + (H - \bar{H}) dt = d(-\psi) \quad (\text{III.58})$$

a je tedy rovněž kanonickou transformací s vytvářející funkcí $-\psi$.

III.4 Poissonovy závorky

Mějme dvě funkce ve fázovém prostoru, které se eventuálně mění s časem, označme je $u(p, q, t)$ a $v(p, q, t)$. Poissonovou závorkou těchto funkcí nazýváme funkci²⁴

$$[uv]_{p,q} = \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q^i} - \frac{\partial u}{\partial q^i} \frac{\partial v}{\partial p_i} . \quad (\text{III.59})$$

Později ukážeme, že hodnota funkce $[uv]$ je invariantní vůči kanonickým transformacím, tj.

$$[uv]_{p,q} = [uv]_{P,Q} \quad (\text{III.60})$$

pro libovolné souřadnice a hybnosti spojené kanonickou transformací. V následujících obecných úvahách není proto třeba specifikovat, pro jaké kanonické proměnné se Poissonova závorka počítá. Poissonovy závorky umožňují jednoduché formální vyjádření základních tvrzení Hamiltonovy mechaniky a sehrály velmi důležitou roli při budování kvantové mechaniky.

Na základě definice (III.59) je snadné dokázat algebraické vlastnosti závorek

$$[uv] = -[vu] , \quad \text{speciálně pak} \quad [uu] = 0 , \quad (\text{III.61})$$

$$[(u_1 + u_2)v] = [u_1v] + [u_2v] , \quad (\text{III.62})$$

$$[(u_1u_2)v] = u_1[u_2v] + u_2[u_1v] , \quad (\text{III.63})$$

$$[u[vw]] + [v[wu]] + [w[uv]] = 0 . \quad (\text{III.64})$$

Antikomutativnost (III.61) a tzv. Jacobiho identita (III.64) znamenají, že Poissonovy závorky tvoří na daném prostoru funkcí Lieovu algebru. Dále se snadno dokáže, že platí

$$\frac{\partial}{\partial t} [uv] = \left[\frac{\partial u}{\partial t} v \right] + \left[u \frac{\partial v}{\partial t} \right] . \quad (\text{III.65})$$

Totální derivaci libovolné funkce podle času můžeme s ohledem na Hamiltonovy rovnice (III.8) zapsat jako

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial u}{\partial t} + [Hu] . \quad (\text{III.66})$$

²⁴ V literatuře bývá někdy zaváděna s opačným znaménkem.

Vidíme tedy, že funkce u je integrálem pohybových rovnic, právě když

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [Hu] = 0, \quad (\text{III.67})$$

a nezávisí-li u explicitně na čase, pak

$$[Hu] = 0. \quad (\text{III.68})$$

Zvolíme-li za u Hamiltonovu funkci H , dostaneme vzhledem k (III.61)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (\text{III.69})$$

čili Hamiltonova funkce se zachovává, právě když nezávisí explicitně na čase.

Platí věta: Jsou-li u a v integrály pohybových rovnic, je integrálem pohybových rovnic i jejich Poissonova závorka $[uv]$.

Důkaz provedeme využitím vztahů (III.61)–(III.66)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[uv] &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} v \right] + \left[u \frac{\partial v}{\partial t} \right] - [u[vH]] - [v[Hu]] = \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + [Hu] \right) v \right] + \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial t} + [Hv] \right) \right] = \\ &= \left[\frac{du}{dt} v \right] + \left[u \frac{dv}{dt} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Je třeba upozornit na to, že takto získaný integrál může být funkcí již známých integrálů u , v , anebo konstantou, takže aplikace dokázané věty nevede vždy k nalezení nového nezávislého integrálu pohybových rovnic.

Povšimněme si nyní tzv. „fundamentálních závorek“, kde úlohu funkcí u , v hrají souřadnice a hybnosti. Vezměme například

$$[Q^i P_j] = \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q^k}. \quad (\text{III.71})$$

Avšak podle (III.40) platí

$$\frac{\partial P_j}{\partial q^i} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial Q^j} = -\frac{\partial p_i}{\partial Q^j} \quad (\text{III.72})$$

a obdobně (využitím dalších vytvářejících funkcí)²⁵ by se dokázaly vztahy

$$\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q^i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q^j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i}. \quad (\text{III.73})$$

²⁵ V případě, že některá z vytvářejících funkcí neexistuje, platí vztahy rovněž, ale jejich důkaz je poněkud složitější.

Využitím (III.71) a (III.72) lze psát například

$$[Q^i P_j] = \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q^j} = \frac{\partial Q^i}{\partial Q^j} = \delta_j^i. \quad (\text{III.74})$$

Analogicky lze dokázat

$$[Q^i Q^k] = 0, \quad [P_i P_k] = 0. \quad (\text{III.75})$$

Vztahy (III.74) a (III.75) jsou předobrazem komutačních relací a principu neurčitosti v kvantové mechanice.

Nyní dokážeme tvrzení (III.60). Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} [uv]_{p,q} &= \left(\frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q^i} + \frac{\partial v}{\partial Q^k} \frac{\partial Q^k}{\partial q^i} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q^i} + \frac{\partial u}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial Q^k} \frac{\partial Q^k}{\partial p_i} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial Q^j} \frac{\partial v}{\partial P_k} [Q^j P_k] + \frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial Q^k} [P_j Q^k] + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial Q^j} \frac{\partial v}{\partial Q^k} [Q^j Q^k] + \frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial P_k} [P_j P_k] = [uv]_{P,Q}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro Poissonovy závorky souřadnic a hybností s Hamiltonovou funkcí lze přímo z definice (III.59) obdržet

$$[H q^i] = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad [H p_i] = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (\text{III.76})$$

Tyto vztahy platí nezávisle na tom, jsou-li splněny Hamiltonovy rovnice. Pokud však platí, jsou levé strany (III.76) na základě (III.66) rovny \dot{q}^i , popř. \dot{p}_i , takže (III.76) lze považovat za zápis Hamiltonových rovnic.

III.5 Pohyb jako kanonická transformace

Bod ve fázovém prostoru odpovídá stavu²⁶ systému o daných počátečních podmínkách pro Hamiltonovy rovnice (III.8). To znamená, že je-li zadána

²⁶ Stav v tomto smyslu odpovídá zadání poloh i hybností.

Hamiltonova funkce, pak Hamiltonovy rovnice určují časový vývoj systému jako pohyb bodu fázového prostoru, tj.

$$p_i = p_i(p_{0j}, q_0^j, t), \quad q^i = q^i(p_{0j}, q_0^j, t). \quad (\text{III.77})$$

Vzhledem k jednoznačnosti řešení pohybových rovnic existuje i inverzní transformace

$$p_{0i} = p_{0i}(p_j, q^j, t), \quad q_0^i = q_0^i(p_j, q^j, t), \quad (\text{III.78})$$

kde p_{0i}, q_0^i jsou prvními integrály pohybových rovnic. Ukážeme, že předcházející vztahy (III.77), popř. (III.78), představují kanonickou transformaci od proměnných q^j, p_j k proměnným q_0^j, p_{0j} . Důkaz provedeme tak, že konstruueme vytvářející funkci.

Mějme zadánu počáteční polohu systému, tj. souřadnice q_0^i v čase t_0 . Hamiltonův princip umožňuje určit pohyb, kterým systém dosáhne v čase t polohy o souřadnicích q^i . Pro tento pohyb vypočteme akci systému

$$S = \int_{t_0}^t L dt, \quad (\text{III.79})$$

která tudíž bude funkcí počáteční a koncové polohy a počátečního a koncového času²⁷, tj.

$$S = S(q_0^i, t_0, q^i, t). \quad (\text{III.80})$$

Například pro jednorozměrný pohyb volného hmotného bodu je akce jako funkce souřadnice a času dána vztahem

$$S = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} m v^2 (t - t_0) = \frac{1}{2} m \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}. \quad (\text{III.81})$$

Omezíme-li se na skutečné pohyby, přechází tedy funkcionál akce ve funkci (III.80), a tudíž neizochronní variace akce určená vztahem (II.85) přechází v diferenciál

$$dS = p_i dq^i - H dt - p_{0i} dq_0^i + H_0 dt_0. \quad (\text{III.82})$$

Je proto

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad p_{0i} = -\frac{\partial S}{\partial q_0^i} \quad (\text{III.83})$$

²⁷ Pro q_0^i, t_0 dostatečně blízké q^i, t je pohyb a tudíž i akce jako funkce souřadnic a času určena jednoznačně. Obecně může ovšem existovat více extrémálních drah mezi q_0^i, t_0 a q^i, t , takže funkce akce (III.80) může být víceznačná.

a

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad H_0 = \frac{\partial S}{\partial t_0}. \quad (\text{III.84})$$

Porovnáme-li (III.83) s (III.40), vidíme, že vztah (III.77) představuje kanonickou transformaci s vytvořující funkcí $(-S)$, zatímco inverzní transformace (III.78) má podle (III.58) vytvořující funkci S .

Podle posledního vztahu (III.40) a prvního vztahu (III.84) je nová Hamiltonova funkce pro transformaci (III.78) ve tvaru

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (\text{III.85})$$

což je v souladu s tím, že „nové souřadnice“ q_0^i a „nové hybnosti“ p_{0i} jsou konstanty (srovnej s Hamiltonovými rovnicemi (III.8)). Pokud by akce ve tvaru (III.80) byla známa, dostali bychom z druhé sady vztahů (III.83) ihned obecné řešení pohybových rovnic, obsahující $2n$ integračních konstant p_{0i}, q_0^i . Můžeme si to ověřit na příkladu (III.81), kde

$$p_0 = \frac{m(x - x_0)}{t - t_0}, \quad \text{čili} \quad x = x_0 + \frac{p_0}{m}(t - t_0). \quad (\text{III.86})$$

Namísto přímého řešení pohybových rovnic je proto možné postavit si úlohu nalezení akce ve tvaru (III.80).

III.6 Liouvilleova věta

Mějme ve fázovém prostoru oblast Ω . Pak integrál

$$V_\Omega = \int_\Omega dq^1 \dots dq^n dp_1 \dots dp_n \quad (\text{III.87})$$

je nezávislý na volbě kanonických proměnných, tj. platí (při užití stručnějšího zápisu)

$$\int_\Omega dqdp = \int_\Omega dQdP. \quad (\text{III.88})$$

Můžeme proto hovořit o V_Ω jako o *fázovém objemu* oblasti Ω . Fázový objem je důležitým příkladem *integrálního invariantu* kanonických transformací.

Tvrzení vyjádřené vztahem (III.88) se nazývá *Liouvilleovou větou*. Pro její důkaz postačí ukázat, že jakobián libovolné kanonické transformace, který stručně zapíšeme jako

$$J = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}, \quad (\text{III.89})$$

je roven jedné. S uvážením, že

$$\frac{\partial Q^i}{\partial P_j} = 0, \quad \frac{\partial P_i}{\partial P_j} = \delta_i^j, \quad (\text{III.90})$$

lze psát (doporučujeme čtenáři, aby se o tom přesvědčil podrobným rozepsáním determinantů)

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} \frac{\partial(q, P)}{\partial(q, p)} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)_q. \quad (\text{III.91})$$

Podle (III.44) je však

$$\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial q^j \partial p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \quad (\text{III.92})$$

pro všechny prvky determinantu J , a tudíž z (III.91) plyne

$$J = 1 \quad (\text{III.93})$$

(obdobný důkaz by bylo možné provést i v případě, že musíme použít jiného typu vytvářející funkce). Tvrzení Liouvilleovy věty je fyzikálně zvlášť zajímavé v souvislosti s tím, co bylo uvedeno v předchozím odstavci. Zde jsme dokázali, že řešení pohybových rovnic zapsané ve tvaru (III.77) představuje kanonickou transformaci. Dosud jsme interpretovali kanonické transformace jako záměny souřadnic ve fázovém prostoru, tj. P, Q byly nové souřadnice bodu, který měl předtím souřadnice p, q . U vztahu (III.77) je však názornější tzv. aktivní interpretace. Představujeme si množinu systémů (množinu mechanických soustav) o všech možných počátečních podmínkách z jisté oblasti Ω_0 fázového prostoru v čase t_0 . Pak časový vývoj těchto systémů popsany rovnicemi (III.77) představuje pro každý čas t zobrazení oblasti Ω_0 na jinou oblast $\Omega(t)$. Podle Liouvilleovy věty však toto zobrazení zachovává fázový objem, tj. platí

$$V_{\Omega(t)} = V_{\Omega_0} \quad (\text{III.94})$$

pro všechna t .

Toto tvrzení můžeme vyjádřit také v diferenciálním tvaru. Zavedeme-li *rozdělovací funkci* $\rho(p, q, t)$ udávající počet (mechanických) systémů na jednotkový objem fázového prostoru, platí pro ni obecný vztah (III.66), tj.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [H\rho]. \quad (\text{III.95})$$

Zachování fázového objemu během pohybu znamená, že ρ se nemění podél trajektorií systémů ve fázovém prostoru, jinými slovy rozdělovací funkce je integrálem pohybových rovnic

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (\text{III.96})$$

Je-li uvažovaný soubor systémů v rovnovážném stavu, nemění se rozdělovací funkce s časem ani v daném bodě fázového prostoru, proto je i

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.97})$$

a tedy

$$[H\rho] = 0. \quad (\text{III.98})$$

Nejprostší způsob, jak splnit vztah (III.98), je volba $\rho = \rho(H)$, tj. rozdělovací funkce závisí pouze na energii. Tohoto předpokladu se využívá ve statistické fyzice. Platnost Liouvilleovy věty pro pohyb souboru systémů je ovšem omezena na případ, že pohybové rovnice lze vyvodit z Hamiltonovy funkce. Pro disipativní systémy se silami tření věta neplatí. Tak například pohybová rovnice pro tlumený pohyb

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad (\text{III.99})$$

má obecné řešení

$$x = x_0 + \frac{\tau p_0}{m} (1 - e^{-t/\tau}), \quad p = p_0 e^{-t/\tau}, \quad (\text{III.100})$$

kde $\tau = \frac{m}{\gamma}$ a výpočet jakobiánu dává

$$J = e^{-t/\tau}, \quad (\text{III.101})$$

tj. fázový objem exponenciálně klesá s časem.

III.7 Příklady

1. Určete Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy rovnice pro matematické kyvadlo délky l .

Řešení: Máme

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi, \quad (\text{III.102})$$

kde l je délka kyvadla. Z (III.1) dostaneme

$$p_\varphi = ml\dot{\varphi}. \quad (\text{III.103})$$

Hamiltonova funkce podle (III.3) anebo (II.64) je

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml} - mgl \cos \varphi. \quad (\text{III.104})$$

Hamiltonovy rovnice (III.8) dávají

$$mgl \sin \varphi = -\dot{p}_\varphi, \quad \frac{p_\varphi}{ml} = \dot{\varphi}. \quad (\text{III.105})$$

Řešení je v tomto případě nejsnazší převedením soustavy (III.105) na jedinou rovnici 2. řádu, kterou bychom přímo dostali z Lagrangeovy metody.

2. Uvažujme prostor mezi dvěma sousými válci o poloměrech R_0, R . Mezi válci je elektrické pole \mathbf{E} kolmé na osu, jehož velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy, tj. $E = k/r$, a magnetické pole \mathbf{B} o konstantní velikosti ve směru osy. Jakou rychlostí musí vyletět elektron z povrchu vnitřního válce kolmo na osu, aby dosáhl pláště vnějšího válce? Řešte Routhovou metodou.

Řešení: Lagrangeova funkce byla určena vztahem (II.133). Routhova funkce je podle (III.26)

$$R = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + \frac{r^2}{m^2} \left(\frac{p_\psi}{r^2} - \frac{eB}{2} \right)^2 \right] - ek \ln \frac{r}{R_0}. \quad (\text{III.106})$$

Zde p_ψ je konstanta, kterou na základě počátečních podmínek dané úlohy klademe rovnu výrazu $\frac{eBR_0^2}{2}$. Za tohoto předpokladu má Routhova rovnice (III.29) první integrál

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{r^2 e^2 B^2}{8m} \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right)^2 - ek \ln \frac{r}{R_0}, \quad (\text{III.107})$$

odkud s uvážením podmínek úlohy plyne snadno výsledek (I.154).

3. Určete Hamiltonovu funkci pro případ částice v elektromagnetickém poli.

Řešení: Lagrangeova funkce je dána vztahem (II.123). Odtud dostáváme

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (\text{III.108})$$

Povšimněte si, že zobecněná hybnost se nerovná „obyčejné“. Hamiltonova funkce je

$$H = \mathbf{p} \mathbf{v} - L = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi. \quad (\text{III.109})$$

Příklady k samostatnému řešení

1. Najděte Hamiltonovu funkci pro pohyb částice v neinerciálním systému.

$$\left[H' = \frac{p'^2}{2m} - \mathbf{p}' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + m\mathbf{r}' \mathbf{a}_{\text{tr}}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p}' = m (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right]$$

2. Ve speciální teorii relativity je Lagrangeova funkce pro volnou částici

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \text{kde } c \text{ je rychlost světla. Najděte Hamiltonovu funkci.}$$

$$\left[H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

3. Dokažte vztahy pro Poissonovy závorky kartézských komponent hybnosti p_i a momentu hybnosti j_i

$$[j_b p_c] = -\epsilon_{abc} p_a, \quad [j_b j_c] = -\epsilon_{abc} j_a.$$

Čtenář se dále může pokusit řešit metodami vyloženými v této kapitole řadu jiných příkladů.

IV HAMILTONOVA–JACOBIHO TEORIE

Nalezli jsme již nejprostší diferenciální rovnice vyjadřující zákony klasické mechaniky — Hamiltonovy rovnice — a třídu transformací, které zachovávají tvar těchto rovnic. Zbývá ještě nalézt obecnou a účinnou metodu integrace pohybových rovnic. Tato úloha je řešena *Hamiltonovou–Jacobiho teorií*.

Teorie vede k parciální diferenciální rovnici — Hamiltonově–Jacobiho rovnici, jejímž řešením dospějeme k akci jako funkci souřadnic a času a odtud využitím poznatků o kanonických transformacích k obecnému řešení pohybových rovnic. Explicitní vyřešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice je možné v případě, že proměnné lze separovat. Pokud je separovatelnou proměnnou čas, dospíváme k speciálnímu tvaru Hamiltonovy–Jacobiho rovnice. Na závěr stručně diskutujeme vztah Hamiltonovy–Jacobiho teorie k základní rovnici kvantové mechaniky — Schrödingerově rovnici.

IV.1 Hamiltonova–Jacobiho rovnice

Hlavní myšlenka byla již nastíněna v závěru III.5. Jde v ní o nalezení akce mechanického systému jakožto funkce souřadnic a času, z níž se pak získá řešení pohybových rovnic. Akce splňuje rovnici (III.85), do níž můžeme dosadit z první série vztahů (III.83), takže dostáváme

$$H \left(\frac{\partial S}{\partial q^i}, q^i, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (\text{IV.1})$$

když jsme v Hamiltonově funkci zaměnili hybnosti parciálními derivacemi akce podle souřadnic. Rovnice (IV.1) se nazývá *Hamiltonovou–Jacobiho rovnicí*. Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic, s nimiž jsme se dosud setkávali, je to parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $S(q^i, t)$. Jak známo, obecné řešení parciální diferenciální rovnice obsahuje libovolné funkce, které se pak určují z počátečních a okrajových podmínek. Zde nám však stačí nalézt *úplné řešení*, obsahující tolik libovolných konstant, kolik je nezávisle proměnných, tj. v tomto případě $n + 1$. Hledáme tedy řešení ve tvaru

$$S = S(q^i, t, \alpha_j) + A \quad (\text{IV.2})$$

(jedna z konstant může být vždy volena jako aditivní). Zvolíme-li S za vytvořující funkci kanonické transformace a α_j budeme považovat za nové hybnosti, bude podle (III.44)

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad \beta^j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad \bar{H} = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Protože nová Hamiltonova funkce je rovna nule, jsou podle Hamiltonových rovnic β^j konstantami. Vztahy

$$\beta^j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (\text{IV.4})$$

představují n algebraických rovnic, které implicitně udávají

$$q^i = q^i(t, \alpha_j, \beta^j), \quad (\text{IV.5})$$

tj. obecné řešení daného mechanického problému obsahující $2n$ libovolných konstant.

Na závěr se přesvědčme, že S vskutku představuje akci systému. Využitím (IV.1), první série (IV.3) a (III.11) vypočteme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i = -H + p_i \dot{q}^i = L, \quad (\text{IV.6})$$

a tudíž $S = \int L dt$.

IV.2 Separace času

Hamiltonova funkce často neobsahuje explicitně čas. V tomto případě lze Hamiltonovu–Jacobiho rovnici zjednodušit. Hledejme akci v separovaném tvaru

$$S = S_0(q^i) + S_t(t). \quad (\text{IV.7})$$

Dosazením do (IV.1) dostáváme

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q^i}, q^i\right) = -\frac{dS_t}{dt}. \quad (\text{IV.8})$$

Pravá strana je pouze funkcí času, zatímco levá je funkcí pouze souřadnic. To znamená, že (IV.8) může platit pro všechna q^i, t pouze v případě, že obě

strany se rovnají téže konstantě, kterou označíme \mathcal{E} . Namísto (IV.8) tak dostáváme

$$-\frac{dS_t}{dt} = \mathcal{E}, \quad (\text{IV.9})$$

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q^i}, q^i, t\right) = \mathcal{E}. \quad (\text{IV.10})$$

Vztah (IV.10) představuje Hamiltonovu–Jacobiho rovnici pro funkci souřadnic S_0 , přičemž pro úplnou akci podle (IV.7) a (IV.9) platí

$$S = -\mathcal{E}t + S_0(q^i). \quad (\text{IV.11})$$

Z rovnice (IV.10) je navíc vidět, že \mathcal{E} má význam zachovávaní se energie daného systému.

Ukažme si nyní jako nejjednodušší ilustraci řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice pro jednorozměrný volný pohyb. Zde je rovnice (IV.10) tvaru

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 = \mathcal{E}. \quad (\text{IV.12})$$

Její řešení je

$$S_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} x. \quad (\text{IV.13})$$

(Vynechali jsme aditivní konstantu A , která nemá zřejmě vliv na výsledek.) Celková akce je tedy

$$S = -\mathcal{E}t + \sqrt{2m\mathcal{E}} x. \quad (\text{IV.14})$$

Řešení pohybové rovnice v implicitním tvaru je dáno vztahem

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}},$$

odkud jednoduchou úpravou dostaneme

$$x = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} (t + \beta), \quad (\text{IV.15})$$

což je zřejmě obecné řešení úlohy.

IV.3 Separace proměnných

V předešlém odstavci popsaná separace času je speciálním případem obecnějšího postupu. Pro funkci $S(\xi_1, \dots, \xi_s, \eta)$ nechť má parciální diferenciální rovnice tvar

$$\phi\left(\xi_i, \frac{\partial S}{\partial \xi_i}, \varphi\left(\eta, \frac{\partial S}{\partial \eta}\right)\right) = 0, \quad (\text{IV.16})$$

kde nezávisle proměnná η a derivace podle ní se vyskytuje pouze ve funkci φ . Pak hledáme řešení v separovaném tvaru

$$S = S_0(\xi_i) + S_\eta(\eta), \quad (\text{IV.17})$$

což po dosazení do (IV.16) dává

$$\phi\left(\xi_i, \frac{\partial S_0}{\partial \xi_i}, \varphi\left(\eta, \frac{dS_\eta}{d\eta}\right)\right) = 0. \quad (\text{IV.18})$$

Aby vztah (IV.18) platil pro všechna ξ_i, η , musí být funkce φ konstantní, tj.

$$\varphi\left(\eta, \frac{dS_\eta}{d\eta}\right) = \alpha_\eta, \quad (\text{IV.19})$$

kde α_η je konstanta a

$$\phi\left(\xi_i, \frac{\partial S_0}{\partial \xi_i}, \alpha_\eta\right) = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Rovnice (IV.16) se tak rozpadla na obyčejnou diferenciální rovnici (IV.19) pro S_η , jejíž řešení obsahuje konstantu α_η , a na parciální diferenciální rovnici (IV.20) pro S_0 , která již nezávisí na proměnné η .

Ve speciálním případě, kdy η v (IV.16) explicitně nevystupuje (jde tedy o cyklickou souřadnici), lze klást

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad S_\eta = \alpha_\eta \eta. \quad (\text{IV.21})$$

V řadě důležitých problémů klasické mechaniky můžeme vhodnou volbou křivočarých souřadnic dosáhnout toho, že po separaci času je popsáním způsobem postupně proveditelná i separace všech zbývajících proměnných, takže akce je ve tvaru

$$S = -\mathcal{E}t + \sum_{i=1}^n S_i(q^i), \quad (\text{IV.22})$$

v němž každá funkce S_i závisí pouze na jedné proměnné q^i . V případě, že jde o cyklickou souřadnici, je podle (IV.21)

$$S_i(q^i) = p_i q^i, \quad (\text{IV.23})$$

kde p_i je zachovávající se zobecněná hybnost.

IV.4 Od klasické ke kvantové mechanice

Význam Hamiltonovy–Jacobiho teorie není jen v tom, že poskytuje efektivní metodu integrace pohybových rovnic. S hrála také historicky významnou roli, když posloužila E. Schrödingerovi jako odrazový můstek k formulaci rovnice, která je základem nerelativistické *kvantové (vlnové) mechaniky*. Pokusíme se jednu z možných cest od klasické ke kvantové mechanice alespoň nastínit.

Uvažujme nejprve o částicích stejného druhu, které „startují“ z daného místa v daném čase s různými rychlostmi. Na svém pohybu přiřazují bodům \mathbf{r} v čase t akci, která jim v té chvíli přísluší. Tak je definována akce jako funkce souřadnic a času, splňující Hamiltonovu–Jacobiho rovnici

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_i, t\right) = 0, \quad (\text{IV.24})$$

v níž jsme v Hamiltonově funkci nahradili hybnosti p_i výrazy $\frac{\partial S}{\partial x_i}$. Určíme-li z (IV.24) akci $S(\mathbf{r}, t)$, jsou hybnosti a energie částic určeny vztahy²⁸

$$\mathbf{p} = \nabla S, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (\text{IV.25})$$

Plochy konstantní akce S se pohybují v čase a hybnosti jsou gradienty těchto ploch. (Například v nejprostším případě prostoru bez silového pole jsou plochy $S = \text{konst}$ soustřednými rozpínajícími se kulovými plochami, jejichž poloměr roste úměrně odmocnině z času.)

S pohybem částic v daném silovém poli tak můžeme spojit obraz vln šířících se prostorem. Není ovšem zřejmé, jaký fyzikální význam by mohly tyto vlny mít, zvláště uvážíme-li, že předešlý výklad lze snadno rozšířit na

²⁸ Pro zkrácení zde budeme užívat operátoru nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$ a Laplaceova operátoru $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$. O těchto operátorech podrobněji pojednáváme v dalším výkladu.

systemy s větším počtem stupňů volnosti, kde se příslušné vlny pohybují nikoliv ve fyzikálním třírozměrném prostoru, ale v konfiguračním prostoru daného systému.

V minulém století se však rozvinulo odvětví fyziky, v němž vlnový a částicový obraz plodně koexistují. Byla to *optika* či obecněji *teorie elektromagnetického pole*. Pro šíření elektromagnetického vlnění v izotropním, ale obecně nehomogenním prostředí platí vlnová rovnice

$$\Delta f - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{IV.26})$$

kde f představuje kteroukoli z komponent pole či jeho potenciálu, c je rychlost světla ve vakuu a n index lomu daného prostředí, jehož změny v prostoru a čase jsou pomalé ve srovnání se změnami elektromagnetického pole. V případě, že je tento index konstantní, je nejprostším řešením vlnové rovnice rovinná monochromatická vlna²⁹

$$f = Ae^{i(kr - \omega t)} = Ae^{i\varphi}. \quad (\text{IV.27})$$

Zde $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\nu}$ je vlnový vektor, λ vlnová délka, $\boldsymbol{\nu}$ jednotkový vektor ve směru šíření vlny, ω kruhová frekvence. Vlnový vektor je spojen s frekvencí *disperzní relací*

$$\omega = \frac{k}{n} c \quad (\text{IV.28})$$

a platí

$$\mathbf{k} = \nabla\varphi, \quad \omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (\text{IV.29})$$

Uvažujme nyní o vlně, která je jen přibližně rovinná a monochromatická. Tato vlna může existovat i v prostředí s proměnným indexem lomu, pokud jsou jeho změny zanedbatelné v intervalu vlnové délky a periody kmitů. Pro vlnu f lze pak psát

$$f = Ae^{i\varphi}, \quad (\text{IV.30})$$

kde A i φ jsou reálné funkce souřadnic, *amplituda* A se však mění v prostoru i v čase mnohem pomaleji než *fáze* φ . Dosadíme-li (IV.30) do vlnové rovnice (IV.26), členem podělíme ji $e^{i\varphi}$ a omezíme se na reálnou část výrazu na levé straně, dostáváme rovnici

$$\Delta A - A(\nabla\varphi)^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{n^2}{c^2} A \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (\text{IV.31})$$

²⁹ Fyzikální význam má jen reálná část výrazu (IV.27).

Vzhledem k uvedeným vlastnostem A, φ lze zanedbat první a třetí člen, takže

$$(\nabla\varphi)^2 - \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Tato rovnice pro fázi čili eikonál φ , nazývaná *rovnici eikonálu*, je základní rovnicí *geometrické optiky*. Známe-li eikonál $\varphi(\mathbf{r}, t)$, můžeme z něho určit vlnový vektor a frekvenci podle vztahů (IV.29). Porovnejme (IV.29) se vztahy (IV.25) a zjistíme tak pozoruhodnou analogii mezi mechanikou a geometrickou optikou. Fáze φ je zřejmě analogií akce S , vlnový vektor \mathbf{k} analogií hybnosti \mathbf{p} , frekvence ω analogií energie H . Zapišeme-li disperzní relaci obecně jako

$$\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t), \quad (\text{IV.33})$$

stává se ω analogií Hamiltonovy funkce H , což znamená platnost Hamiltonových rovnic

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \quad (\text{IV.34})$$

pro pohyby „částic“ světla čili světelné paprsky. Povšimněme si, že pro homogenní prostředí odtud dostáváme přímočaré šíření světla rychlostí $\frac{c}{n}$. Konečně rovnice (IV.32) je Hamiltonova–Jacobiho rovnice (popř. vzniká z ní jednoduchou úpravou).

Čtenáři může napadnout myšlenka přenést do geometrické optiky Hamiltonův princip nejmenší akce. To však nelze přímo provést, protože disperzní relace (IV.28) nedovoluje vyjádřit z druhého vztahu (IV.34) \mathbf{k} jako funkci $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t$ a uskutečnit tak přechod k Lagrangeově formulaci. Můžeme se však odvolat na variační princip mechaniky v podobě (III.13), speciálně pak na jeho podobu pro případ konstantní energie, tj. na Maupertuisův princip (III.17)

$$\delta \int \mathbf{p} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{IV.35})$$

V prostředí s časově neproměnným indexem lomu a tedy s konstantní frekvencí ω daného paprsku, tedy v geometrické optice, je jeho obdobou *Fermatův princip*

$$\delta \int \mathbf{k} \, d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{IV.36})$$

nejkratší optické dráhy. Pro případ disperzní relace (IV.28) vede druhý vztah (IV.34) k závěru, že \mathbf{k} má směr tečný k paprsku a Fermatův princip lze přepsat do tvaru

$$\delta \int \frac{dl}{c^*} = 0, \quad (\text{IV.37})$$

kde c^* je rychlost světla v daném prostředí. Paprsek si tedy „volí“ mezi počátečním a koncovým bodem dráhu odpovídající nejkratšímu času — v homogenním prostředí je to zřejmě přímka. V této podobě formuloval svůj princip P. Fermat v 17. století. Jeho prací začíná bohatá historie využívání variačního počtu ve fyzice, s níž se může čtenář seznámit ve sborníku „Variační principy mechaniky“, citovaném v seznamu literatury. Do této historie patří i Schrödingerovy stati, v nichž dospěl k základní rovnici vlnové mechaniky, nazvané dnes jeho jménem. Opíral se přitom o Hamiltonovu–Jacobiho teorii. Tuto souvislost v dalším výkladu stručně naznačíme³⁰. Rozvoj experimentální fyziky mikrosvěta v prvních desetiletích našeho století napovídal, že by měla existovat teorie chování objektů mikrosvěta, která by byla ke klasické mechanice v podobném vztahu jako teorie elektromagnetického pole ke geometrické optice. Příslušnou rovnici analogickou rovnici (IV.26) lze „uhodnout“ touto úvahou:

Z disperzní relace (IV.28) lze dospět k vlnové rovnici (IV.26), umocníme-li vztah (IV.28) na druhou a nahradíme veličiny ω^2, k^2 operátory $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\Delta$ působícími na proměnnou pole f . (Záporná znaménka souvisejí s tím, že pro rovinnou monochromatickou vlnu (IV.27) je $\Delta f = -k^2 f, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$.) Analogií disperzní relace (IV.28) je v klasické mechanice vztah

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \quad (\text{IV.38})$$

spojující energii a hybnost. Budeme předpokládat úměrnost³¹ mezi „vlnovými“ a mechanickými veličinami

$$H = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (\text{IV.39})$$

takže (IV.38) přejde v

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (\text{IV.40})$$

Nahradíme k^2 operátorem $-\Delta$ a ω operátorem $i\frac{\partial}{\partial t}$, který je „odmocninou“ z operátoru $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Funkci, na niž operátory působí, označíme Ψ .

³⁰ Schrödinger publikoval řadu různých zdůvodnění své rovnice, založených na analogiích s klasickou mechanikou. Nejlepší poučení o tom poskytují samotné Schrödingerovy práce, shrnuté v jeho spisech.

³¹ Veličina \hbar se nazývá Planckova konstanta. Její hodnota je $1,054 \cdot 10^{-34}$ J.s. Má rozměr akce, popř. momentu hybnosti, a je tedy významná při dějích, při nichž akce či moment hybnosti nejsou podstatně větší než \hbar .

Máme

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi, \quad (\text{IV.41})$$

což je hledaná *Schrödingerova rovnice* pro *vlnovou funkci* $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Obecněji můžeme tuto rovnici psát jako

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (\text{IV.42})$$

kde \hat{H} je operátor energie (hamiltonián). V jednoduchých případech vzniká tento operátor z klasické Hamiltonovy funkce záměnou komponent hybností p_i operátory $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}$, v hamiltoniánu mohou ovšem existovat i čistě kvantové členy.

Předchozí výklad nelze pochopitelně považovat za odvození či důkaz platnosti Schrödingerovy rovnice. Stejně jako jiné základní rovnice fyziky, nemůže být tato rovnice odvozena z předpokladů, které jsou podstatně zřejmější či jednodušší než ona sama. Opravňuje se především souhlasem svých důsledků s výsledky experimentů a korespondencí se závěry klasické mechaniky v situacích, kdy se tato mechanika osvědčila.

Všimneme si této korespondence, což nám naznačí i cestu k fyzikální interpretaci vlnové funkce Ψ . S přihlédnutím k analogii mezi (IV.25) a (IV.29) a s přihlédnutím k úměrnosti s (IV.39) můžeme najít analogii k (IV.30)

$$\Psi = a(\mathbf{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (\text{IV.43})$$

Budeme předpokládat, že tento vztah platí v situacích blízkých klasickým, přitom S je klasická akce.

Dosadíme-li (IV.43) do Schrödingerovy rovnice (IV.41) a rozdělíme-li vzniklé výrazy na reálnou a imaginární část, dospíváme k rovnicím

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2ma} \Delta a = 0, \quad (\text{IV.44})$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m} \Delta S + \frac{1}{m} \nabla S \nabla a = 0. \quad (\text{IV.45})$$

První z nich přechází v Hamiltonovu–Jacobiho rovnici po zanedbání posledního, kvantového členu, tj. v limitě $\hbar \rightarrow 0$. Druhou rovnici můžeme po vynásobení výrazem $2a$ přepsat na tvar

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \text{div} \left(a^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (\text{IV.46})$$

což je rovnice kontinuity³². Tato rovnice znamená, že integrál $\int_V a^2 dV$ přes daný objem se může měnit jen tokem

$$j = a^2 \frac{\nabla S}{m} = a^2 \frac{\mathbf{p}}{m} \quad (\text{IV.47})$$

přes hranice objemu, a vyjadřuje tak zákon zachování. To naznačuje fyzikální interpretaci veličiny

$$a^2 = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* \quad (\text{IV.48})$$

(povšimněme si, že na rozdíl od optiky je v kvantové mechanice i imaginární část vlnové funkce fyzikálně podstatná). Je to hustota pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě a čase, přičemž v případě systému o více stupních volnosti se „místo“ vztahuje ke konfiguračnímu prostoru daného systému.

Podle této Bornovy interpretace, která byla nalezena až po zformulování Schrödingerovy rovnice, popisuje vlnová funkce „vlnu pravděpodobnosti“ v konfiguračním prostoru. Vlnová funkce udává stav kvantového systému a nahrazuje tak klasický popis stavu zadáním veličin q^i, p_i . Obdobně Schrödingerova rovnice pro časový vývoj vlnové funkce nahrazuje pohybové rovnice klasické mechaniky.

IV.5 Příklady

1. Řešte problém volného pádu v homogenním gravitačním poli pomocí Hamiltonovy–Jacobiho rovnice.

Řešení: Orientujeme osy x, y vodorovně a osu z svisle vzhůru. Pak Hamiltonova–Jacobiho rovnice (IV.10) je

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = \mathcal{E}. \quad (\text{IV.49})$$

Napišeme akci v separovaném tvaru $S = -\mathcal{E}t + p_x x + p_y y + S_z(z)$ a řešením rovnice pro $S_z(z)$, kterou získáme dosazením do (IV.49), obdržíme

$$S = -\mathcal{E}t + p_x x + p_y y + \frac{(2m\mathcal{E} - p_x^2 - p_y^2 - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g}. \quad (\text{IV.50})$$

³² O rovnici kontinuity a jejím významu pojednává VII.7.

Konstanty \mathcal{E}, p_x, p_y považujeme za nové hybnosti; s nimi spojené nové souřadnice označme β, β_x, β_y . Podle (IV.4) platí

$$\beta = -t + \frac{1}{mg}N, \quad \beta_x = x - \frac{p_x}{m^2g}N, \quad \beta_y = y - \frac{p_y}{m^2g}N, \quad (\text{IV.51})$$

kde

$$N = \sqrt{2m\mathcal{E} - p_x^2 - p_y^2 - 2m^2gz}. \quad (\text{IV.52})$$

Odtud vypočteme

$$\begin{aligned} x &= \beta_x + \frac{p_x\beta}{m} + \frac{p_x}{m}t, & y &= \beta_y + \frac{p_y\beta}{m} + \frac{p_y}{m}t, \\ z &= \frac{2m\mathcal{E} - p_x^2 - p_y^2 + (\beta gm)^2}{2m^2g} - g\beta t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.53})$$

2. Nabitá částice se pohybuje v elektromagnetickém poli, které je superpozicí centrálního elektrického pole a homogenního magnetického pole. Ukažte, že Hamiltonovu–Jacobiho rovnici je možné separovat ve sférických souřadnicích za předpokladu, že magnetické pole je slabé (lze zanedbat členy obsahující mocniny velikosti pole).

Řešení: Homogenní magnetické pole má vektorový potenciál

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}),$$

elektrické pole skalární potenciál

$$\phi = \frac{\alpha}{r}.$$

Nyní můžeme využít Lagrangeovy funkce (II.123) a provést její přepočítání do sférických souřadnic, načež podle (III.3) přejdeme k Hamiltonově funkci. Anebo vyjdeme z Hamiltonovy funkce (III.109), kterou prepíšeme do sférických souřadnic užitím transformačních vztahů (III.46). V obou případech máme

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 \right) - \\ &\quad - \frac{e\alpha}{r} - \frac{eB}{2m} p_\varphi + \frac{e^2}{8m} (Br \sin \vartheta)^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Poslední člen podle předpokladu zanedbáváme, takže Hamiltonova–Jacobiho rovnice je

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] -$$

$$-\frac{\alpha e}{r} - \frac{eB}{2m} \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = \mathcal{E}. \quad (\text{IV.55})$$

Řešením této rovnice dostáváme

$$S = -\mathcal{E}t + p_\varphi \varphi + \int O_\vartheta d\vartheta + \int O_r dr, \quad (\text{IV.56})$$

kde

$$O_\vartheta = \sqrt{K - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}},$$

$$O_r = \sqrt{2m \left(\mathcal{E} + \frac{eB}{2m} p_\varphi \right) + \frac{2\alpha m e}{r} - \frac{k}{r^2}}.$$

Akce (IV.56) obsahuje konstanty \mathcal{E} , p_φ , K . Podle (IV.4) bychom odtud dostali (v implicitním tvaru) řešení pohybových rovnic, obsahující šest konstant.

Příklady k samostatnému řešení

1. Nabitá částice se pohybuje v elektrickém poli, které je superpozicí centrálního a homogenního pole. Ukažte, že Hamiltonovu–Jacobiho rovnici lze separovat v parabolických souřadnicích.

$$\left[x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} (\xi - \eta) \right].$$

2. Řešte pomocí Hamiltonovy–Jacobiho rovnice příklad 1 z kapitoly I.11. a podle vlastního uvážení další příklady z prvních dvou kapitol.

3. Řešte pomocí Hamiltonovy–Jacobiho rovnice Keplerův problém (pohyb částice v poli Newtonova gravitačního potenciálu).

V TUHÉ TĚLESO

Mechanika tuhého tělesa patří k nejstarším, ale přitom stále ve skutečnosti nejvyužívanějším částem mechaniky. I nejmodernější experimenty v oblasti kvantové mechaniky a teorie relativity využívají přístrojů, jejichž součásti lze v uspokojivém přiblížení považovat za tuhá tělesa, a dobrá znalost klasické teorie je proto nezbytná pro interpretaci výsledků experimentů. Některé efekty mechaniky tuhých těles jsou důležité i pro astronomii.

Začínáme kinematikou tuhého tělesa a popisujeme jeho rotační stupně volnosti pomocí *Eulerových úhlů*. Vyjádření kinetické energie a momentu hybnosti tuhého tělesa vede k pojmu *tenzoru setrvačnosti*, který charakterizuje základní mechanické vlastnosti těles. Diskutujeme vlastnosti tenzoru setrvačnosti, jeho pomocí formulujeme *pohybové rovnice tuhého tělesa* a řešíme v geometrické podobě úlohu o pohybu volného setrvačnicku.

V.1 Kinematika tuhého tělesa

Tuhé těleso definujeme jako soustavu nejméně tří hmotných bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti se v čase nemění. Jde tedy o jistý speciální typ vazebných podmínek, které však (pokud je bodů více než tři) nejsou vzájemně nezávislé. Nejvhodnějším způsobem popisu pohybu tuhého tělesa je jeho ztotožnění s tuhým vztazným systémem (srovnej I.3), v němž je zavedena kartézská souřadná soustava S' . Sledujeme pak pohyb S' vůči soustavě S , která je zpravidla inerciální. V daném okamžiku je poloha počátku O' určena vůči S třemi čísly a další tři čísla určují směry os x', y', z' , takže tuhé těleso má 6 stupňů volnosti (devět komponent matice a_{ik} ve vztahu (I.45) je vázáno šesti relacemi ortonormality (I.46)).

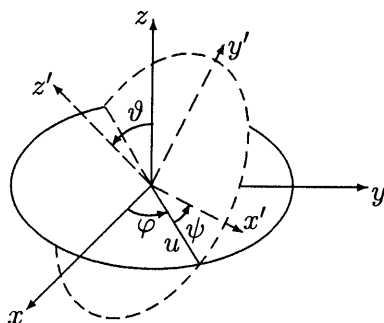
Většinou si představujeme, že tuhé těleso spojitě vyplňuje jistou část prostoru s hustotou hmotnosti $\rho(x', y', z')$. Z kinematického hlediska to nic nemění na tom, že poloha tuhého tělesa je určena šesti parametry. Později uvidíme, že i pro určení dynamických vlastností tuhého tělesa často vystačíme s malým počtem parametrů.

Jak plyne z předchozího výkladu, je vhodné popisovat pohyb tuhého tělesa jako superpozici translačního pohybu počátku O' a rotace tělesa vůči tomuto počátku. Translační pohyb je zadán časovou závislostí souřadnic

počátku. Většinou je nejvhodnější volit počátek ve středu hmotnosti. V případě, že tuhé těleso je v nějakém bodě upevněno, je vhodné volit počátek v tomto bodě.

Obtížnějším úkolem je nalezení parametrů souvisejících s rotačním pohybem. Tento úkol řešíme zavedením tzv. Eulerových úhlů, viz obr. 5.

Zpravidla volíme osu z tak, aby měla jistý význačný směr v systému S (například směr vnějšího homogenního silového pole), zatímco osa z' má význačný směr vzhledem k tělesu (je například jeho osou symetrie). Průsečnici rovin xy a $x'y'$, kolmou na osu z i z' , označíme u a nazveme *uzlovou přímkou*. Orientujeme ji tak, aby z, z', u tvořily pravotočivý systém.



Obr. 5: Eulerovy úhly. Eulerovy úhly φ, ψ, ϑ reprezentují ideální způsob, jak přiřadit rotačnímu pohybu tělesa tři stupně volnosti.

Úhel osy x a uzlové přímky měřený v kladném smyslu otáčení okolo osy z označíme φ . Úhel od uzlové přímky k ose x' , měřený v kladném smyslu otáčení okolo osy z' , označíme ψ . Konečně úhel os z a z' označíme ϑ . Intervaly takto definovaných úhlů jsou zřejmě $\varphi \in (0, 2\pi), \psi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi)$. Parametrům φ, ψ, ϑ jednoznačně určujícím polohu tělesa při zadané poloze bodu O' říkáme *Eulerovy úhly*. Přitom změna úhlu φ se nazývá *precese* a změna úhlu ϑ *nutací*. Okamžitý pohyb tuhého tělesa je podle I.3 charakterizován vektory \mathbf{v}_{tr} a $\boldsymbol{\omega}$, kde \mathbf{v}_{tr} je rychlost počátku O' a $\boldsymbol{\omega}$ úhlová rychlost tělesa. Jak později uvidíme, je výhodné vyjádřit složky vektoru $\boldsymbol{\omega}$ v soustavě S' pomocí Eulerových úhlů a jejich derivací. K tomuto vyjádření nám pomůže obr. 5. Označíme $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}; \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ jednotkové vektory ve směru os soustav S a S' . Pomocí obrázků zjistíme, že

$$\mathbf{k}\mathbf{i}' = \sin \vartheta \sin \psi, \quad \mathbf{k}\mathbf{j}' = \sin \vartheta \cos \psi, \quad \mathbf{k}\mathbf{k}' = \cos \vartheta. \quad (\text{V.1})$$

Označíme-li ještě \mathbf{u} jednotkový vektor ve směru uzlové přímky, zjistíme, že

$$\mathbf{u}\mathbf{i}' = \cos \psi, \quad \mathbf{u}\mathbf{j}' = -\sin \psi, \quad \mathbf{u}\mathbf{k}' = 0. \quad (\text{V.2})$$

Změna úhlu φ je otočením kolem osy z , příslušná úhlová rychlost je tedy

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}\mathbf{k} = \dot{\varphi} [(\mathbf{k}\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\mathbf{k}')\mathbf{k}'] = \\ &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \mathbf{i}' + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \mathbf{j}' + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Změna úhlu ψ je otočením kolem osy z' , tedy

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}\mathbf{k}', \quad (\text{V.4})$$

a změna úhlu ϑ je otočením okolo uzlové přímky, tedy

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}\mathbf{u} = \dot{\vartheta} [(\mathbf{u}\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{u}\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{u}\mathbf{k}')\mathbf{k}'] = \dot{\vartheta} \cos \psi \mathbf{i}' - \dot{\vartheta} \sin \psi \mathbf{j}'. \quad (\text{V.5})$$

Sečtením obdržíme

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\vartheta} \quad (\text{V.6})$$

a tedy

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\vartheta}, \\ \omega'_y &= \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\vartheta}, \\ \omega'_z &= \cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Tyto vztahy se nazývají *Eulerovy kinematické rovnice*.

V.2 Moment hybnosti a kinetická energie

Důležitou charakteristikou rotačního pohybu tuhého tělesa je jeho moment hybnosti vzhledem k vybranému pevnému bodu, určený jako

$$\mathbf{J} = \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV, \quad (\text{V.8})$$

když uvedený výraz integrujeme přes celý objem tuhého tělesa. Užijeme nyní vzorce (I.44) a vztahu (I.56), v němž položíme $\mathbf{v}' = 0$. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \times M \mathbf{v}_{\text{tr}} + \mathbf{r}_0 \times M (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') + \mathbf{J}^{\text{rot}}(\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{V.9})$$

kde

$$M = \int_V \rho dV \quad (\text{V.10})$$

je úhrnná hmotnost tělesa,

$$\mathbf{R} = \int_V \frac{\rho \mathbf{r}}{M} dV, \quad \mathbf{R}' = \int_V \frac{\rho \mathbf{r}'}{M} dV \quad (\text{V.11})$$

jsou polohové vektory středu hmotnosti vzhledem k O a k O' , \mathbf{r}_0 značí polohový vektor O' vzhledem k O a $\mathbf{J}^{\text{rot}}(\boldsymbol{\omega})$ je vektor o složkách

$$J_{\alpha}^{\text{rot}} = I_{\alpha\beta} \omega_{\beta}, \quad (\text{V.12})$$

kde

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \left(x'_{\gamma} x'_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} - x'_{\alpha} x'_{\beta} \right) \rho dV. \quad (\text{V.13})$$

Veličiny $I_{\alpha\beta}$ se nazývají komponentami *tenzoru setrvačnosti* tuhého tělesa vzhledem k bodu O' . Vzhledem k symetrii výrazů $I_{\alpha\beta}$ jde celkem o šest veličin. Volíme-li počátek O' ve středu hmotnosti, prostřední člen v (V.9) vypadne a vzorec představuje rozklad momentu hybnosti na translační a rotační část. V případě, že je v tělese nehybný bod, v němž zvolíme společný počátek S i S' , redukuje se moment hybnosti na rotační část.

S veličinami $I_{\alpha\beta}$ se setkáme také při výpočtu kinetické energie tuhého tělesa

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV, \quad (\text{V.14})$$

kde opět uijeme vzorce (I.56) s $\mathbf{v}' = 0$. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$T = \frac{M v_{\text{tr}}^2}{2} + M \mathbf{v}_{\text{tr}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}. \quad (\text{V.15})$$

Volíme-li O' ve středu hmotnosti, prostřední člen opět vypadne a dostáváme, že kinetická energie je součtem translační a rotační části, přičemž

$$T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}. \quad (\text{V.16})$$

Při volbě počátku v nehybném bodě se kinetická energie redukuje na T^{rot} . Je zřejmé, že veličiny $I_{\alpha\beta}$ jsou důležitými charakteristikami rozložení hmotnosti v tuhém tělese. Proto se jim budeme věnovat podrobněji.

V.3 Tenzor setrvačnosti

Komponenty $I_{\alpha\beta}$ reprezentují matematický objekt, který se nazývá *tenzorem druhého řádu*. Podrobnější seznámení s tenzory libovolného řádu odložíme do části B. Tenzor 2. řádu definujeme jako *bilineární formu* T na vektorovém prostoru, která přiřazuje libovolné dvojici vektorů \mathbf{A}, \mathbf{B} reálné číslo $T(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Přitom platí, že

$$T = (m\mathbf{P} + n\mathbf{Q}, \mathbf{B}) = mT(\mathbf{P}, \mathbf{B}) + nT(\mathbf{Q}, \mathbf{B}) , \quad (\text{V.17})$$

kde m, n jsou reálná čísla, $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{B}$ jsou libovolné vektory, totéž platí i pro druhý argument. Speciálně důležité jsou *symetrické tenzory*, pro něž

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = T(\mathbf{B}, \mathbf{A}) . \quad (\text{V.18})$$

S jedním příkladem symetrického tenzoru jsme se již seznámili. Byl to metrický tenzor, jehož působení na dvojici vektorů udávalo speciální bilineární symetrickou formu, skalární součin

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{B} , \quad (\text{V.19})$$

srovnej se vztahem (I.24). Forma g je pozitivně definitní, tj. platí

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{A}) > 0 , \quad \text{pokud } \mathbf{A} \neq 0 . \quad (\text{V.20})$$

Díky tomu je možné zvolit ortonormální bázi vektorů \mathbf{e}_α , pro něž

$$g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{V.21})$$

Nadále budeme pracovat pouze s ortonormálními bázemi. Vzhledem k linearitě (V.17) je tenzor určen svým působením na vektory báze. Označíme

$$T(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = T_{\alpha\beta} \quad (\text{V.22})$$

a nazveme soubor veličin $T_{\alpha\beta}$ komponentami tenzoru 2. řádu v dané bázi³³. Pak působení tenzoru na libovolnou dvojici vektorů lze vyjádřit jako

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = T(A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, B_\beta \mathbf{e}_\beta) = T_{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta . \quad (\text{V.23})$$

³³ Upozorňujeme čtenáře, že existují různé definice tenzoru, které jsou sice vzájemně ekvivalentní, ale na první pohled mohou působit značně odlišně. Zejména v dřívější fyzikální literatuře se tenzory definují pomocí transformačních vztahů (V.25), které u nás vyplývají z definice.

Při záměně báze

$$\mathbf{e}'_{\alpha} = c_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\beta} \quad (\text{V.24})$$

se komponenty tenzoru mění podle vztahu

$$T'_{\alpha\beta} = T(\mathbf{e}'_{\alpha}, \mathbf{e}'_{\beta}) = c_{\alpha\mu} c_{\beta\nu} T_{\mu\nu} . \quad (\text{V.25})$$

Povšimněme si, že komponenty metrického tenzoru jsou podle (V.20) v ortonormální bázi rovny $\delta_{\alpha\beta}$ a vzhledem k relacím ortonormality (I.46) se při záměně báze nemění (izotropní tenzory).

Symetrický tenzor se vyznačuje tím, že

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} . \quad (\text{V.26})$$

Každý tenzor 2. řádu lze rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{\text{sym}} + T_{\alpha\beta}^{\text{ant}} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}) . \quad (\text{V.27})$$

S bilineární formou spojená kvadratická forma

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = T_{\alpha\beta} A_{\alpha} A_{\beta} \quad (\text{V.28})$$

závisí zřejmě pouze na symetrické části bilineární formy. Existuje proto vzájemně jednoznačná korespondence mezi symetrickými bilineárními formami a kvadratickými formami. Můžeme tedy ztotožnit symetrický tenzor 2. řádu s kvadratickou formou.

Tato skutečnost umožňuje podat názornou geometrickou interpretaci symetrického tenzoru 2. řádu. Rovnice

$$T_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} = \pm 1 \quad (\text{V.29})$$

představuje rovnici kvadriky (plochy druhého stupně) se středem v počátku. Podle věty o převedení dvojice kvadratických forem na diagonální tvar (uvezené v dalším výkladu) lze vždy k danému symetrickému tenzoru $T_{\alpha\beta}$ najít takovou ortonormální bázi, že v ní budou všechny nediagonální komponenty nulové. Směry vektorů báze se v tomto případě nazývají *hlavními osami* symetrického tenzoru.

Nyní se vraťme ke konkrétnímu případu tenzoru setrvačnosti $I_{\alpha\beta}$. Tenzorový charakter veličin $I_{\alpha\beta}$ je patrný například ze vztahu (V.16), kde tenzor vystupuje jako kvadratická forma přiřazující vektoru úhlové rychlosti číslo,

jímž je dvojnásobek kinetické energie. Jak již bylo řečeno, je $I_{\alpha\beta}$ tenzor symetrický. Jeho komponenty³⁴ se rovnají

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \int_V (y^2 + z^2) \rho dV & -\int_V xy\rho dV & -\int_V xz\rho dV \\ -\int_V xy\rho dV & \int_V (x^2 + z^2) \rho dV & -\int_V yz\rho dV \\ -\int_V xz\rho dV & -\int_V yz\rho dV & \int_V (y^2 + x^2) \rho dV \end{pmatrix}. \quad (\text{V.30})$$

Veličiny v diagonále jsou *momenty setrvačnosti* vzhledem k osám x, y, z , veličiny mimo diagonálu se nazývají *deviačními momenty*. Podle již vyložené obecné teorie může být tenzor setrvačnosti převeden k hlavním osám, kde

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \quad (\text{V.31})$$

Protože momenty setrvačnosti jsou zřejmě vždy kladné, je kvadratická forma příslušná tenzoru setrvačnosti pozitivně definitivní, představuje tedy elipsoid

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1. \quad (\text{V.32})$$

Tento elipsoid se nazývá *elipsoidem setrvačnosti*. Veličiny I_x, I_y, I_z jsou zřejmě převrácené hodnoty kvadrátů velikostí hlavních poloos. Nazývají se *hlavními momenty setrvačnosti*. Jak se snadno ukáže, je součet dvou hlavních momentů setrvačnosti vždy větší než třetí hlavní moment. (Rovnost může nastat jen v degenerovaném případě *rotátoru*, tvořeného částicemi rozloženými na přímce, takže jeden z hlavních momentů setrvačnosti je nulový.)

Ukažme na závěr, že je-li znám tenzor setrvačnosti vzhledem ke středu hmotnosti, lze již snadno určit tento tenzor vzhledem ke každému jinému bodu, aniž bychom museli znovu počítat integrály (V.30). Označme \mathbf{R} polohový vektor středu hmotnosti O^* vzhledem ke zvolenému počátku O . Pak mezi polohovými vektory \mathbf{r} vzhledem k O a \mathbf{r}^* vzhledem k O^* platí vztah

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}^*. \quad (\text{V.33})$$

Po dosazení do (V.13) bez obtíží dostaneme

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}^* + M (X_\gamma X_\gamma \delta_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta), \quad (\text{V.34})$$

³⁴ Čárky ve výrazech (V.13) vyznačovaly, že veličiny se vztahují k počátku O' pevně danému v tělese. Ve zbývajících částech tohoto odstavce užíváme vždy jen soustavy spojené s tělesem a proto čárky vynecháváme.

kde X_γ jsou složky vektoru \mathbf{R} . Znamená to, že tenzor setrvačnosti vůči bodu O je součtem tenzoru setrvačnosti vůči středu hmotnosti a tenzoru setrvačnosti hmotnosti M soustředěné ve středu hmotnosti vůči bodu O . Toto často užívané tvrzení se nazývá *Steinerova věta*.

Poznámka: Převedení dvojice kvadratických forem na diagonální tvar. V teoretické fyzice se často využívá obsahu této věty: Nechť T, V jsou dvě kvadratické formy na reálném vektorovém prostoru libovolné dimenze n , přičemž forma T je pozitivně definitní. Pak lze najít bázi, v níž T i V mají současně diagonální tvar. Podáme důkaz této věty, který je zároveň návodem, jak najít transformaci k dané bázi.

Připomeňme nejprve, že

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = T_{ik} A^i B^k, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (\text{V.35})$$

kde

$$T_{ik} = T_{ki} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \quad (\text{V.36})$$

přičemž $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k$ jsou vektory kovariantní báze. Obdobné vztahy platí pro formu V . Pro T máme navíc požadavek pozitivní definitnosti, tj.

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{A}) > 0, \quad \text{pokud } \mathbf{A} \neq 0. \quad (\text{V.37})$$

Poznamenejme, že T_{ik} můžeme chápat jako kovariantní komponenty metrického tenzoru, jehož kontravariantní komponenty jsou dány inverzní maticí T^{ik} , vzorec (V.35) je pak vyjádřením skalárního součinu.

Budeme hledat vektory A^k splňující podmínku

$$(V_{ik} - \lambda T_{ik}) A^k = 0, \quad (\text{V.38})$$

kde λ je zatím neurčeno. Aby rovnice (V.38) měly netriviální řešení, musí platit

$$\text{Det}(V_{ik} - \lambda T_{ik}) = 0. \quad (\text{V.39})$$

Rovnice (V.39) se nazývá *sekulární rovnicí*. Je to algebraická rovnice n -tého stupně a má tedy obecně n kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ukažme, že všechny tyto kořeny jsou reálné.

Vynásobme proto (V.38) komplexně sdruženými veličinami A^{i*} . Pak lze psát

$$\lambda = \frac{V_{ik} A^k A^{i*}}{T_{ik} A^k A^{i*}} \quad (\text{V.40})$$

za předpokladu, že jmenovatel ve vztahu (V.40) není nulový, což však snadno dokážeme. Napišme

$$A^k = \alpha^k + i\beta^k, \quad (\text{V.41})$$

kde α^k, β^k jsou reálná čísla. Využitím pozitivní definitnosti (V.37) zjišťujeme, že vskutku platí

$$T_{ik} A^k A^{i*} = T_{ik} (\alpha^i \alpha^k + \beta^i \beta^k) > 0. \quad (\text{V.42})$$

Protože T_{ik}, V_{ik} jsou symetrické a reálné matice, dostáváme, aplikací komplexního sdružení na (V.40), že

$$\lambda^* = \frac{V_{ik} A^{k*} A^i}{T_{ik} A^{k*} A^i} = \lambda, \quad (\text{V.43})$$

což jsme chtěli dokázat. Protože kořeny sekulární rovnice jsou reálné, je možné hledat v oboru reálných čísel i komponenty vektorů A^k .

Předpokládejme nejprve, že všechny kořeny sekulární rovnice jsou různé. Pak ke každému kořenu určíme jeden vektor \mathbf{A} (který může být vynásoben libovolnou konstantou). Vektory příslušné různým kořenům sekulární rovnice nemohou být stejné. Kdyby totiž bylo například

$$(V_{ik} - \lambda_1 T_{ik}) A^k = 0 \quad \text{a} \quad (V_{ik} - \lambda_2 T_{ik}) A^k = 0,$$

platilo by i

$$(\lambda_1 - \lambda_2) T_{ik} A^k = 0$$

a vynásobením A^i bychom se dostali do sporu s požadavkem pozitivní definitnosti. Můžeme proto zvolit vektory \mathbf{A}_α za vektory nové báze; složky vektorů a tenzorů v této bázi budeme označovat vodorovnou čarou nad příslušným symbolem. V této nové bázi bude

$$\overline{A}_\alpha^k = \delta_\alpha^k, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (\text{V.44})$$

Podle vzorce (V.38) musí v této bázi platit

$$\begin{aligned} \overline{V}_{11} - \lambda_1 \overline{T}_{11} &= 0, & \overline{V}_{12} - \lambda_2 \overline{T}_{12} &= 0, & \dots \\ \overline{V}_{21} - \lambda_1 \overline{T}_{21} &= 0, & \overline{V}_{22} - \lambda_2 \overline{T}_{22} &= 0, & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

což znamená, že

$$\overline{V}_{11} = \lambda_1 \overline{T}_{11}, \quad \dots \quad \overline{V}_{nn} = \lambda_n \overline{T}_{nn}, \quad (\text{V.46})$$

$$\bar{V}_{ik} = \bar{T}_{ik} = 0 \quad \text{pro každé } i \neq k. \quad (\text{V.47})$$

Po vhodném normování vektorů \mathbf{A}_α mají tedy matice forem T a V tvar

$$\bar{T}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (\text{V.48})$$

Veličiny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se nazývají *vlastními hodnotami* formy V vzhledem k formě T , vektory \mathbf{A}_α jsou *vlastní vektory*. Směry vlastních vektorů určují hlavní osy. Komponentám vektorů v bázi určené vlastními vektory se říká *normální komponenty*. Je zřejmé, že vlastní vektory jsou vzájemně ortogonální vzhledem k formě T , tj. platí

$$T_{ik} A_\alpha^i A_\beta^k = 0 \quad \text{pro } \alpha \neq \beta. \quad (\text{V.49})$$

Může se ovšem stát, že sekulární rovnice má jeden či více násobných kořenů. Pak lze uvažovat takto: Podle základní věty algebry má sekulární rovnice vždy alespoň jeden kořen. Najdeme vlastní vektor \mathbf{A} odpovídající tomuto kořenu λ_1 a budeme se zabývat podprostorem vektorů k němu ortogonálních, tj. takových vektorů \mathbf{B} , pro něž platí $T_{ik} A^i B^k = 0$. V tomto podprostoru řešíme rovnici (V.38), tj. $(V_{ik} - \lambda T_{ik}) B^k = 0$. Ukažme, že vektory $V_{ik} B^k, T_{ik} B^k$ leží v tomto podprostoru, tj. že jejich skalární součin s vektorem \mathbf{A} je nulový. Vskutku užitím vztahů (V.35), (I.25) a (I.21) získáme

$$T_{ik} A^i T^{kl} V_{lm} B^m = V_{lm} A^l B^m = \lambda_1 T_{lm} A^l B^m = 0,$$

$$T_{ik} A^i T^{kl} T_{lm} B^m = T_{lm} A^l B^m = 0.$$

T i V tedy působí v rámci uvažovaného podprostoru. Můžeme proto opět najít alespoň jeden kořen příslušné sekulární rovnice, jemu příslušný vlastní vektor a ortogonální podprostor k oběma zatím nalezeným vlastním vektorům. Tak lze postupovat, dokud nevyčerpáme všechny kořeny, takže bez ohledu na násobnost kořenů dospíváme opět k n -tici vlastních vektorů, které jsou vzájemně ortogonální vzhledem k formě T . Jinými slovy matice T_{ik} je v dané bázi diagonální a podle (V.46) musí totéž platit i pro matici V_{ik} . Kořenu sekulární rovnice s násobností k odpovídá k lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinace je opět vlastním vektorem, takže vlastní vektory k -násobného kořene tvoří podprostor dimenze k .

Věta vyslovená v úvodu je nyní úplně dokázána. Ukažme ještě, jak jsou spojeny komponenty libovolného vektoru X^i s jeho normálními komponentami Θ^α . Je $\mathbf{X} = \Theta^\alpha \mathbf{A}_\alpha = X^i \mathbf{e}_i$ a podle předchozího výkladu $\mathbf{A}_\alpha = A_\alpha^i \mathbf{e}_i$. Proto

$$\Theta^\alpha = B_i^\alpha X^i, \quad (\text{V.50})$$

kde matice B_i^α je inverzní k matici A_β^i udávající i -tou komponentu β -tého vektoru ve výchozí bázi, tj.

$$B_i^\alpha A_\beta^i = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{V.51})$$

Častý je případ, kdy jednou z uvažovaných kvadratických forem je metrický tenzor 3-rozměrného euklidovského prostoru. V kartézských souřadnicích má tento tenzor automaticky diagonální tvar a naše věta tedy říká, že libovolné kvadratické formě v euklidovském prostoru lze dát diagonální tvar ortogonální transformací. Převádění symetrických tenzorů (anebo z geometrického hlediska kvadrik) k hlavním osám je tedy aplikací diskutované věty. Jejím dalším důležitým použitím je teorie kmitů.

V.4 Pohybové rovnice

Jako pro každou soustavu hmotných bodů platí i pro tuhé těleso první a druhá impulzová věta (I.127) a (I.141), tj.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (\text{V.52})$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{D}, \quad (\text{V.53})$$

kde \mathbf{F} je úhrnná síla a \mathbf{D} úhrnný moment síly působící na těleso. Protože má tuhé těleso 6 stupňů volnosti, stačí šest rovnic (V.52) a (V.53) k určení jeho pohybu. Je-li tuhé těleso podrobena vazbám, jsou v pravých stranách rovnic zahrnuty i vazebné síly a momenty vazebných sil a rovnice musíme doplnit vazebnými podmínkami, aby mohly být určeny i tyto síly a momenty. Obtížnost řešení rovnic (V.52) a (V.53) závisí na složitosti výrazů pro síly a momenty na pravých stranách. Mohou nastat případy velmi komplikované, například nehomogenní silové pole působící na každý element tělesa či odpor prostředí působící na každý element povrchu, kdy síly a momenty jsou zadány objemovými a plošnými integrály. V řadě případů je však možné zapsat pravé strany rovnic relativně jednoduchým způsobem.

Tak je tomu zejména v nejdůležitějším případě, kdy se těleso nachází v homogenním gravitačním poli. Pak je

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{g} dV = M \mathbf{g} , \quad (\text{V.54})$$

$$\mathbf{D} = \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}) dV = \mathbf{R} \times M \mathbf{g} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} , \quad (\text{V.55})$$

kde \mathbf{R} představuje polohový vektor středu hmotnosti.

Protože úhrnná hybnost je

$$\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}} , \quad (\text{V.56})$$

můžeme rovnice (V.52) zapsat jako

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} . \quad (\text{V.57})$$

Volíme-li počátek S' ve středu hmotnosti, lze podle (V.9) a (V.56) zapsat levou stranu rovnic (V.53) jako

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{J}^{\text{rot}}}{dt} . \quad (\text{V.58})$$

Vynásobíme-li (V.52) vektorově zleva \mathbf{R} a odečteme od (V.53), dostaneme

$$\frac{d\mathbf{J}^{\text{rot}}}{dt} = \mathbf{D}^{\text{rot}} , \quad (\text{V.59})$$

kde

$$\mathbf{D}^{\text{rot}} = \mathbf{D} - \mathbf{R} \times \mathbf{F} \quad (\text{V.60})$$

představuje moment síly vzhledem ke středu hmotnosti. V případě, že rovnice (V.53) vztahujeme k nehybnému bodu, je podle (V.9) $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{\text{rot}}$ a označíme-li v tomto případě \mathbf{D}^{rot} moment síly vzhledem k nehybnému bodu, platí opět (V.59).

Nahradíme proto rovnice (V.53) rovnicemi (V.59) vztahujícími se pouze k rotační složce pohybu. Pro rotační část momentu hybnosti uijeme vzorce (V.12). Je patrné, že derivaci podle času je výhodné počítat v systému S' spjatém s tělesem, kde komponenty tenzoru setrvačnosti zůstávají konstantní. Musíme si ovšem připomenout vzorec (I.54) pro rozdíl časových derivací vektoru v systémech S a S' . S jeho uvážením zapíšeme (V.59) ve složkách systému S' (nadále vynecháváme čárky a index „rot“) jako

$$I_{\alpha\beta} \frac{d\omega_\beta}{dt} + \epsilon_{\alpha\gamma\beta} I_{\beta\sigma} \omega_\gamma \omega_\sigma = D_\alpha . \quad (\text{V.61})$$

Osy spjaté s tělesem je vhodné zvolit tak, aby byly hlavními osami tenzoru setrvačnosti. Pak je tenzor setrvačnosti vyjádřen trojicí hlavních momentů (V.31) a rovnice (V.61) tedy dávají

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= D_x, \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= D_y, \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= D_z. \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

Tyto rovnice se nazývají *Eulerovými dynamickými rovnicemi* pro pohyb tuhého tělesa. Představují soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu pro určení časové závislosti složek vektoru ω v systému spojeném s tuhým tělesem. Chceme-li popsat pohyb tuhého tělesa pomocí časové závislosti Eulerových úhlů, užijeme vztahy (V.7), čímž převedeme Eulerovy rovnice na diferenciální rovnice 2. řádu pro Eulerovy úhly.

Často je výhodné konstruovat pohybové rovnice tuhého tělesa nikoliv způsobem zde popsaným, ale pomocí Lagrangeovy funkce. Klíčovým krokem je přitom napsání rotační části kinetické energie (V.16) a vyjádření komponent úhlové rychlosti ω pomocí Eulerových úhlů a jejich derivací z Eulerových kinematických rovnic (V.7). Je zřejmé, že toto vyjádření se velmi zjednoduší, v případě, že jde o osově symetrické těleso a použije-li se soustavu souřadnic spojenou s tělesem. V této soustavě souřadnic je jedna z os (obvykle osa z) osou symetrie a pak

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left[I_x (\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + I_z (\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right]. \quad (\text{V.63})$$

Potenciální energie tuhého tělesa je obvykle potenciální energií v homogenním gravitačním poli, která je určena polohou jeho hmotného středu. V případě tělesa upevněného mimo hmotný střed ji pak lze vyjádřit pomocí Eulerových úhlů, zatímco v případě, že těleso není upevněno, potenciální energie na jeho rotačních stupních volnosti nezávisí.

Lagrangeovu funkci lze popřípadě vyjádřit i pomocí jiných parametrů. Od Lagrangeovy funkce je možné přejít také k Hamiltonově funkci a Hamiltonovým rovnicím či k Hamiltonově–Jacobiho rovnici cestou již dříve popsanou. Některé aplikace Lagrangeovy metody jsou uvedeny v příkladech za touto kapitolou. Její využití představuje také případ těžkého setrvačníku.

V.5 Volný setrvačník

Nejprostší úlohou mechaniky tuhého tělesa je určení pohybu tělesa, na něž nepůsobí žádné vnější síly (a tedy ani momenty). Takovému tělesu se říká

volný setrvačnick. Z rovnic (V.57) je zřejmé, že jeho střed hmotnosti se pohybuje rovnoměrně a přímočaře. Zbývá proto určit jeho rotační pohyb, což je již úloha značně složitější. Z uvedeného výkladu je zřejmé, že její řešení bude možné aplikovat i na případ, kdy se těleso otáčí okolo pevného bodu a kromě příslušné vazby na ně nepůsobí žádné další síly. Pokud se ovšem těleso nachází v zemském gravitačním poli, je obecně podrobeno jejich momentu a mluvíme pak o *těžkém setrvačnicku*, jímž se budeme zabývat později. Moment gravitační síly vymizí pouze v případě, že nehybným bodem tělesa je jeho střed hmotnosti, což lze uskutečnit pomocí Cardanova závěsu. Volný setrvačnick lze tak realizovat i v pozemských podmínkách.

Ukážeme si, že kvalitativní představu o pohybu volného setrvačnicku lze získat i bez řešení Eulerových rovnic na základě zákonů zachování a rozboru jejich geometrického významu. Je zřejmé, že při rotačním pohybu volného setrvačnicku se zachovává jeho moment hybnosti daný vztahy (V.12) a kinetická energie daná vztahem (V.16). Vztahy (V.12) můžeme přepsat jako

$$2J_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \omega_{\alpha}} (I_{\beta\gamma} \omega_{\beta} \omega_{\gamma}) , \quad (\text{V.64})$$

což z geometrického hlediska znamená, že vektor momentu hybnosti je kolmý k elipsoidu setrvačnosti v koncovém bodě vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Pro průmět vektoru úhlové rychlosti do směru momentu hybnosti platí

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \mathbf{J}}{J} = \frac{I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}}{J} = \frac{2T}{J} , \quad (\text{V.65})$$

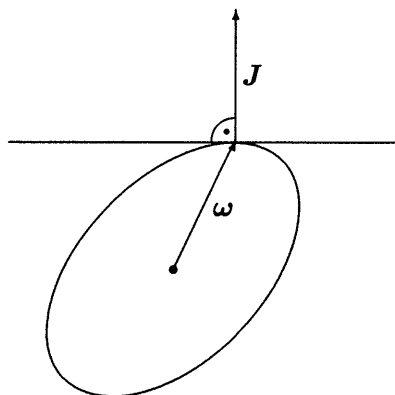
což je konstanta. Zachování veličin (V.64) a (V.65) znamená, že s tělesem spojený elipsoid setrvačnosti proložený koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{\omega}$ v počátečním okamžiku a upevněný ve středu otáčení se valí po rovině, jejíž normála je dána konstantním vektorem momentu hybnosti \mathbf{J} . Dotykový bod elipsoidu a roviny stále udává koncový bod vektoru $\boldsymbol{\omega}$, viz obr. 6.

Odtud vidíme, že změna vektoru $\boldsymbol{\omega}$ vůči tělesu je periodickým dějem. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ si zachovává svůj směr (v prostoru i v tělese) pouze tehdy, jde-li o směr některé z hlavních os. Pak platí

$$\mathbf{J} = I \boldsymbol{\omega} , \quad (\text{V.66})$$

kde I je příslušný hlavní moment setrvačnosti. Dá se rovněž ukázat, že stabilní je rotace pouze okolo osy s největším či nejmenším hlavním momentem setrvačnosti.

V případě, že je setrvačnick symetrický (dva hlavní momenty setrvačnosti jsou si rovny), velikost vektoru úhlové rychlosti a jeho úhel s vektorem \mathbf{J} se nemění. Dochází k jevu tzv. *regulární precese* osy setrvačnicku.



Obr. 6: Rotační pohyb volného setrvačnicku. J je zachovávající se moment hybnosti, ω je úhlová rychlost tělesa, jejíž průmět do směru J se zachovává.

Analytické řešení pohybu volného setrvačnicku pomocí Eulerových rovnic (V.61) je v obecném případě dosti komplikované a vyjadřuje se pomocí eliptických funkcí. Zde si uvedeme pouze řešení jednoduchého případu symetrického setrvačnicku. Položíme-li $I_x = I_y$, dostáváme z Eulerových rovnic pro složky úhlové rychlosti v systému spojeném s tělesem

$$\omega_x = -\Omega\omega_y, \quad \omega_y = -\Omega\omega_x, \quad \omega_z = \text{konst}, \quad (\text{V.67})$$

kde

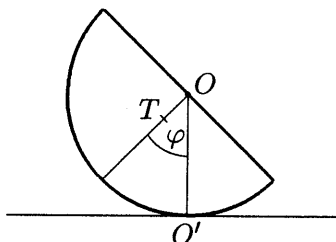
$$\Omega = \omega_z \frac{I_z - I_x}{I_x}. \quad (\text{V.68})$$

Výraz (V.68) udává zřejmě kruhovou frekvenci již zmíněné regulární precese osy otáčení v tělese. Je zajímavé, že k popsanému jevu dochází i u naší Země, avšak její rotační osa se jen velmi málo odchyluje od osy hlavní, proto je její precese zjištělná jen přesnými astronomickými měřeními. Perioda jevu (asi 14 měsíců) se poněkud liší od periody vypočtené ze vztahu (V.68), v němž se hlavní momenty setrvačnosti určují z geofyzikálních dat a jež činí asi 10 měsíců. Tato diference a značné nepravidelnosti, jimiž je jev doprovázen, svědčí o tom, že se Země svými vlastnostmi zdatně odlišuje od tuhého tělesa. Pohyb setrvačnicku vůči inerciálnímu systému, vyjádřený pomocí změny Eulerových úhlů, bychom mohli zjistit na základě (V.7).

Zájem o setrvačnickové jevy v poslední době vzrůstá v souvislosti s plánovanými experimenty na družicích a s objevem velmi rychle rotujících astronomických objektů — pulsarů.

V.6 Příklady

1. Určete frekvenci malých kmitů homogenního poloválce ležícího na vodorovné rovině, viz obr. 7.



Obr. 7: Kmitů poloválce na rovině. Poloměr poloválce je r , M jeho hmotnost. Obrázek zachycuje svislý řez poloválcem ve vychýlené poloze, φ je úhel vychýlení, body O, O', T odpovídají geometrické ose, okamžité ose otáčení a ose procházející středem hmotnosti.

Řešení: Standardními výpočty obdržíme (popř. nalezneme v příručce)

$$\begin{aligned} \overline{OT} &= \frac{4r}{3\pi}, \quad h = r \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos \varphi \right), \\ \tau^2 &= \overline{TO'}^2 = \frac{16r^2}{9\pi^2} + r^2 - \frac{8r^2}{3\pi} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (\text{V.69})$$

kde h je výška středu hmotnosti nad vodorovnou rovinou. Moment setrvačnosti vůči ose O je

$$J_0 = \frac{M}{2} r^2, \quad (\text{V.70})$$

odkud podle Steinerovy věty vychází pro moment setrvačnosti vůči osce jdoucí středem hmotnosti

$$J_T = Mr^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{V.71})$$

Uvedených vztahů užijeme pro vyjádření kinetické a potenciální energie.

Je

$$V = Mgh = mgr \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos \varphi \right) = \text{konst} + \frac{2Mgr}{3\pi} \varphi^2 \quad (\text{V.72})$$

(v přiblížení malých kmitů se omezujeme na členy druhého řádu). Dále platí (protože těleso se v každém okamžiku otáčí kolem bodu O' , v němž

má nulovou rychlost)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_{O'} \dot{\varphi}^2 = \frac{J_T + M\tau^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} Mr^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8 \cos \varphi}{3\pi} \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{12\pi} Mr^2 (9\pi - 16) \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (\text{V.73})$$

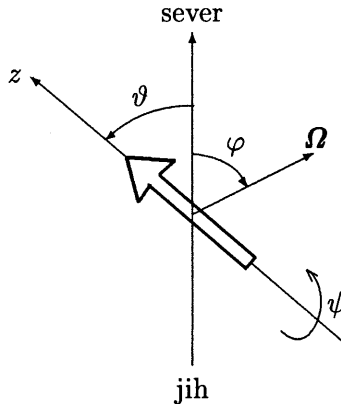
Je tedy v přiblížení teorie malých kmitů

$$L = \frac{Mr^2}{3} \frac{9\pi - 16}{4} \dot{\varphi}^2 - \frac{2Mgr}{3} \varphi^2, \quad (\text{V.74})$$

takže kruhová frekvence malých kmitů vychází jako

$$\omega = 2\sqrt{\frac{2g}{r(9\pi - 16)}}. \quad (\text{V.75})$$

2. Vysvětlete funkci setrvačnickového kompasu (gyroskopu), viz obr. 8.



Obr. 8: Setrvačnickový kompas. Setrvačnickový kompas je symetrický setrvačnick upevněný ve středu hmotnosti, pohyb jeho osy je omezen na rovinu. Nechť je tato rovina vodorovná. Pak situaci znázorňuje obrázek. Ω je vektor úhlové rychlosti Země, který neleží v rovině obrázku, φ udává zeměpisnou šířku, okamžitý stav setrvačnicku popisují úhly ϑ a ψ .

Řešení: Pro úhlovou rychlost setrvačnicku vůči inerciálnímu systému platí

$$\omega = \Omega + w, \quad (\text{V.76})$$

kde

$$w = \dot{\vartheta} j + \dot{\psi} k \quad (\text{V.77})$$

je úhlová rychlost setrvačnicku vzhledem k Zemi. Úhlová rychlost Země je v soustavě dané obrázkem rovna

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{i} + \Omega \sin \varphi \mathbf{j} + \Omega \cos \varphi \cos \vartheta \mathbf{k} . \quad (\text{V.78})$$

Označíme-li ještě A moment setrvačnosti setrvačnicku vůči ose symetrie a dále B moment setrvačnosti setrvačnicku vůči ose x , dostáváme pro kinetickou energii setrvačnicku

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = \frac{B}{2} \left[(\Omega \cos \varphi \sin \vartheta)^2 + (\Omega \sin \varphi + \dot{\vartheta})^2 \right] + \frac{A}{2} (\Omega \cos \varphi \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 . \quad (\text{V.79})$$

Protože je setrvačnick upevněn ve středu hmotnosti, je to zároveň Lagrangeova funkce. Lagrangeovy rovnice 2. druhu jsou

$$A \frac{d}{dt} (\Omega \cos \varphi \cos \vartheta + \dot{\psi}) = 0 , \quad (\text{V.80})$$

$$B\ddot{\vartheta} - B\Omega^2 \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta + A (\Omega \cos \varphi \cos \vartheta + \dot{\psi}) \Omega \cos \varphi \sin \vartheta = 0 . \quad (\text{V.81})$$

Vzhledem k pomalosti zemské rotace můžeme zanedbat člen s Ω^2 . Z první rovnice plyne, že

$$u = \Omega \cos \varphi \cos \vartheta + \dot{\psi} = \text{konst} \quad (\text{V.82})$$

a druhá rovnice po dosazení dává rovnici kmitů

$$\ddot{\vartheta} + \alpha \sin \vartheta = 0 , \quad (\text{V.83})$$

kde

$$\alpha = \frac{A\Omega u \cos \varphi}{B} . \quad (\text{V.84})$$

Odtud je patrné, že osa gyroskopu kmitá kolem severojižního směru. Která z obou poloh je stabilní, závisí na znaménku veličiny u .

Příklady k samostatnému řešení

1. Určete frekvenci malých kmitů homogenní polokoule ležící na vodorovné rovině.

$$\left[\omega = \sqrt{\frac{15g}{26r}} \right]$$

2. Ukažte, že gyroskop vázaný na svislou rovinu umožní určit zeměpisnou šířku.

3. Po nakloněné rovině o sklonu α se pohybuje a) homogenní válec, b) homogenní koule. Určete zrychlení těchto těles.

$$\left[\frac{2g}{3} \sin \alpha ; \quad \frac{5g}{7} \sin \alpha \right]$$

VI VYBRANÉ APLIKACE

Klasická mechanika má řadu aplikací, které měly velký význam jak pro prohloubení našeho poznání fyzikálního světa, tak i z praktického hlediska. Dále uvedeme oblasti aplikace, které byly zvláště významné historicky a neztrácejí svůj význam ani dnes, kdy výpočetní technika umožňuje řešit i velmi složité případy.

Pohyb těles s *proměnnou hmotností* je důležitý zejména pro raketovou techniku. *Teorie malých kmitů* se zabývá pohyby mechanických soustav v blízkosti rovnovážné polohy. Případ *těžkého symetrického setrvačnicku* je ukázkou klasické úlohy, která je ve všech detailech analyticky řešitelná. *Problém dvou těles*, která na sebe působí centrální silou, zahrnuje Keplerův problém, jehož řešení umožnilo pochopit základní vlastnosti sluneční soustavy. *Problém srážek* ukazuje důležitost zákonů zachování a pojmy a metody užívané při jeho řešení mají velký význam i v kvantové teorii mikrosvěta.

VI.1 Pohyb hmotného bodu s proměnnou hmotností

V přírodě i v technice se často setkáváme s tělesy, jejichž hmotnost se spojitě mění. V praxi nejdůležitějším případem je nepochybně let rakety, lze však najít řadu příkladů dalších (hořící meteor v zemské atmosféře, padající kapka, na níž kondenzuje pára aj.). Při studiu problémů tohoto druhu budeme předpokládat, že rozměry a rotaci tělesa lze zanedbat, takže je můžeme považovat za hmotný bod, jehož hmotnost $m(t)$ je proměnnou veličinou. Předpokládejme, že je známa časová změna hmotnosti dm/dt a relativní rychlost \mathbf{v}_{rel} , kterou má odlučovaná či připojovaná hmotnost vůči studovanému objektu³⁵. Pro přímé využití Newtonových pohybových rovnic, budeme pokládat uvažovaný proces za limitní případ děje, při němž se od zkoumaného bodu odlučují v intervalech Δt částice o hmotnostech Δm .

V čase t má tedy náš hmotný bod hmotnost $m + \Delta m$ a hybnost

$$\mathbf{p}_t = (m + \Delta m) \mathbf{v} , \quad (\text{VI.1})$$

zatímco v čase $t + \Delta t$ je celková hybnost hmotného bodu a odloučené částice

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t} = m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) , \quad (\text{VI.2})$$

³⁵ V nejobecnějším případě jsou tyto veličiny funkcemi polohy, rychlosti a času.

kde \mathbf{v}_{rel} je relativní rychlost odloučené částice vůči danému bodu. Pro rozdíl hybností platí

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t = m\Delta\mathbf{v} + \Delta m\mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (\text{VI.3})$$

a tedy

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t}{\Delta t} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (\text{VI.4})$$

(znaménko minus před druhým členem je dáno tím, že jde o úbytek hmotnosti). Zcela analogickou úvahou lze ukázat, že vztah (VI.4) je správný i pro připojovanou hmotnost.

Podle 2. Newtonova zákona tedy platí

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}}, \quad (\text{VI.5})$$

což je základní rovnice pro pohyb s proměnnou hmotností za působení vnější síly \mathbf{F} . Tuto rovnici lze také přepsat jako

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \Phi, \quad (\text{VI.6})$$

kde vektor

$$\Phi = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (\text{VI.7})$$

interpretujeme jako *reaktivní sílu*.

Fyzikálně významnými případy aplikace rovnice (VI.5) jsou:

- $\mathbf{v}_{\text{rel}} = 0$, tj. hmotnost se odlučuje či připojuje beze změny rychlosti,
- $\mathbf{v}_{\text{rel}} = -\mathbf{v}$, tj. odlučovaná či připojovaná hmotnost je v klidu vůči prostředí, v němž se studovaný objekt pohybuje.

V případě a) je

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{VI.8})$$

a v případě b) je

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad (\text{VI.9})$$

což jsou tvary formálně analogické 2. Newtonovu zákonu. Rozdíl je ovšem v tom, že ve vztazích (VI.8) a (VI.9) je hmotnost proměnnou veličinou.

Často se uvažuje případ, kdy současně dochází k odlučování hmotnosti (relativní rychlostí $\mathbf{v}_{1\text{rel}}$) i k připojování hmotnosti (relativní rychlostí $\mathbf{v}_{2\text{rel}}$). Odlučovanou hmotnost za čas dt přitom označíme dm_1 ($dm_1 = -|dm_1|$),

dm_2 budiž za tento časový interval připojená hmotnost ($dm_2 > 0$). Pohybová rovnice zřejmě nabude tvaru

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{v}_{1\text{rel}} \frac{dm_1}{dt} + \mathbf{v}_{2\text{rel}} \frac{dm_2}{dt} \quad (\text{VI.10})$$

a nazývá se *rovnici Mešcherského*. Proměnná hmotnost „základní částice“ v čase t je rovna

$$m(t) = m_0 + \int_0^t \left(\frac{dm_2}{dt} - \left| \frac{dm_1}{dt} \right| \right) dt. \quad (\text{VI.11})$$

VI.2 Malé kmity

Uvažujme o konzervativní soustavě o n stupních volnosti a takové, že pro ni existuje stabilní rovnovážná konfigurace. Zobecněné souřadnice q^i zavedme tak, že jsou rovny nule právě v rovnovážné konfiguraci. Potenciální energii soustavy, která má v rovnovážném stavu minimum, rozložíme v řadu podle mocnin q^i a omezíme se pouze na první tři členy, tj. budeme psát

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial q^i} \right)_0 q^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^k} \right)_0 q^i q^k, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (\text{VI.12})$$

kde se index „0“ vztahuje k rovnovážné poloze, v níž má potenciální energie minimum. Druhý člen na pravé straně (VI.12) je proto roven nule a zvolíme-li minimální hodnotu U za její nulovou hladinu, bude

$$U = \frac{\kappa_{ik}}{2} q^i q^k, \quad (\text{VI.13})$$

kde

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^k} \right)_0. \quad (\text{VI.14})$$

V případě, že vazby nejsou závislé na čase, má kinetická energie tvar

$$T = \frac{\gamma_{ik}}{2} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (\text{VI.15})$$

kde γ_{ik} jsou funkce proměnných q^i . V námi uvažovaném přiblížení budeme výraz (VI.15) psát ve tvaru

$$T = \frac{\mu_{ik}}{2} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (\text{VI.16})$$

kde

$$\mu_{ik} = \gamma_{ik}(0) \quad (\text{VI.17})$$

jsou konstanty získané jakožto hodnoty funkcí γ_{ik} v rovnovážné poloze. Lagrangeova funkce má tedy tvar

$$L = \frac{\mu_{ik}}{2} \dot{q}^i \dot{q}^k - \frac{\kappa_{ik}}{2} q^i q^k, \quad (\text{VI.18})$$

odtud zjistíme, že

$$dL = d\dot{q}^i (\mu_{ik} \dot{q}^k) - dq^i (\kappa_{ik} q^k), \quad (\text{VI.19})$$

neboli

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \mu_{ik} \dot{q}^k, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\kappa_{ik} q^k. \quad (\text{VI.20})$$

Lagrangeovy rovnice jsou tedy

$$\mu_{ik} \ddot{q}^k + \kappa_{ik} q^k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI.21})$$

Obdržená soustava rovnic je systémem lineárních a homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Z tvaru těchto rovnic je vidět, že hledané funkce $q^k(t)$ lze psát ve tvaru

$$q^k(t) = A^k e^{i\omega t}, \quad (\text{VI.22})$$

kde A^k jsou (komplexní) konstanty, které je třeba určit. Dosazením (VI.22) do (VI.21) dostaneme soustavu n lineárních homogenních algebraických rovnic pro funkce A^k

$$(\kappa_{ik} - \omega^2 \mu_{ik}) A^k = 0, \quad (\text{VI.23})$$

což je rovnice (V.38), o níž jsme mluvili v souvislosti se současným převedením dvou kvadratických forem na diagonální tvar. Příslušná sekulární rovnice (V.39), jejíž splnění je nutnou a postačující podmínkou pro existenci nenulového řešení soustavy (VI.23), je

$$\begin{vmatrix} \kappa_{11} - \omega^2 \mu_{11} & \kappa_{12} - \omega^2 \mu_{12} & \dots & \kappa_{1n} - \omega^2 \mu_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{n1} - \omega^2 \mu_{n1} & \kappa_{n2} - \omega^2 \mu_{n2} & \dots & \kappa_{nn} - \omega^2 \mu_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{VI.24})$$

V teorii kmitů se tato rovnice nazývá *charakteristickou*. Jak již víme, její kořeny jsou reálné a vzhledem k pozitivní definitnosti formy U kladné. Obecně má rovnice n kořenů $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, některé z nich se ovšem mohou

vzájemně rovnat. Veličiny ω_α ($\alpha = 1, \dots, n$) se nazývají *vlastními frekvencemi* soustavy.

Jakmile jsou hodnoty ω_α nalezeny, dosazujeme je postupně do (VI.23) a získáme postupně koeficienty A^k (vlastní vektory). Jsou-li všechny kořeny vzájemně různé, jsou (jak známo z algebry) koeficienty A^k úměrné minorům Δ_α^k , které odpovídají prvkům $(\kappa_{ik} - \omega_\alpha^2 \mu_{ik})$ v determinantu soustavy (přitom i musí být voleno tak, aby všechny minory nebyly rovny nule, což je v případě různých kořenů splnitelné). Protože fyzikální význam má pouze reálná část výrazů, lze psát obecné řešení soustavy (VI.21) jako

$$q^k = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k C^{\alpha} e^{i\omega_{\alpha} t} \right\} = \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k \Theta^{\alpha}. \quad (\text{VI.25})$$

Tento tvar zůstává v platnosti i v případě násobných kořenů, kdy ovšem již koeficienty Δ_{α}^k nemají význam minorů (tyto minory jsou rovny nule). Veličiny C^{α} značí libovolné komplexní konstanty, veličiny Θ^{α} jsme zavedli vztahem

$$\Theta^{\alpha} = \operatorname{Re} \left\{ C^{\alpha} e^{i\omega_{\alpha} t} \right\}. \quad (\text{VI.26})$$

Z (VI.25) tedy plyne, že časová změna každé ze zobecněných souřadnic představuje superpozici n harmonických kmitů $\Theta^1, \dots, \Theta^n$ s libovolnými amplitudami a fázemi, avšak s určitými frekvencemi. Hodnoty amplitud a fází se určí z počátečních podmínek.

Vraťme se zpět k výrazu

$$q^k = \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k \Theta^{\alpha} \quad (\text{VI.27})$$

a veličiny Θ^{α} považujeme za nové zobecněné souřadnice. Jsou to normální souřadnice, jak jsme o nich mluvili v poznámce o převedení kvadratických forem na diagonální tvar. V těchto nových souřadnicích mají pohybové rovnice (VI.21) tvar

$$\ddot{\Theta}^{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \Theta^{\alpha} = 0 \quad (\text{VI.28})$$

a odpovídající Lagrangeova funkce je

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \left[(\dot{\Theta}^{\alpha})^2 - \omega_{\alpha}^2 (\Theta^{\alpha})^2 \right], \quad (\text{VI.29})$$

kde m_{α} jsou kladné konstanty. V normálních souřadnicích Θ^{α} se tedy původní úloha převedla na řešení soustavy n nezávislých diferenciálních rovnic pro n harmonických oscilátorů.

Užití normálních souřadnic rovněž dovoluje převést úlohu o vynucených malých kmitech soustavy s více stupni volnosti k úlohám o jednorozměrných vynucených kmitech. Lagrangeovu funkci naší soustavy, na kterou působí vnější síly, můžeme totiž najít a zapsat ve tvaru

$$L = L_0 - \sum_k F_k(t) q^k, \quad (\text{VI.30})$$

kde L_0 je Lagrangeova funkce „volných“ kmitů a $F_k(t)$ jsou působící vnější síly. Po zavedení normálních souřadnic Q_α pro ni obdržíme

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha, \quad (\text{VI.31})$$

kde jsme zavedli označení

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta^\alpha, \quad f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_\alpha^k}{\sqrt{m_\alpha}}. \quad (\text{VI.32})$$

Odpovídající pohybové rovnice jsou opět jednoduché

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t). \quad (\text{VI.33})$$

Připomeňme, že vzhledem ke kinetické energii, která zde hraje roli metrického tenzoru, jsou souřadnice Θ^α souřadnicemi ortogonálními a jejich zvláštní případ Q_α je obdobou souřadnic kartézských, což naznačujeme dolní polohou indexu.

VI.3 Těžký symetrický setrvačnick

Těžký setrvačnick je tuhé těleso v homogenním gravitačním poli upevněné mimo střed hmotnosti. Studium pohybu tohoto setrvačnicku si zjednodušíme předpokladem, že má osu symetrie a že je upevněn v bodě ležícím na této ose. Zvolíme počátek v pevném bodě, osu z orientujeme kolmo vzhůru a osu z' položíme do osy symetrie tělesa, R představuje vzdálenost středu hmotnosti od počátku, moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie tělesa označíme A a vzhledem k ose x' (resp. y') B .

Užijeme Lagrangeovy funkce. Využitím vztahů (V.16) a (V.9) dostáváme pro kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2} \left[B \left(\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) + A \left(\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right)^2 \right], \quad (\text{VI.34})$$

zatímco potenciální energie je

$$V = \int_V \rho g z \, dV = MgR \cos \vartheta . \quad (\text{VI.35})$$

K Lagrangeově funkci $L = T - V$ lze najít první tři integrály. Prvním je integrál energie

$$E = \frac{1}{2} \left[B \left(\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) + A \left(\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right)^2 \right] + MgR \cos \vartheta , \quad (\text{VI.36})$$

dalšími jsou zobecněné hybnosti příslušné cyklickým souřadnicím ψ a φ , které označíme jako μ a ν . Platí

$$\nu = A \left(\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right) , \quad (\text{VI.37})$$

$$\mu = B \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + A \left(\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right) \cos \vartheta . \quad (\text{VI.38})$$

Poznamenejme, že ν resp. μ mají význam průmětů momentu hybnosti do os z' resp. z . Tyto průměty se zachovávají, poněvadž moment síly je na obě osy kolmý. Vztahy (VI.36) až (VI.38) představují soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu, které máme řešit. Z posledních dvou rovnic lze vypočítat $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ a dosadit do první rovnice, čímž dostaneme rovnici obsahující pouze ϑ

$$\frac{B}{2} \left[\left(\frac{\mu - \nu \cos \vartheta}{B \sin \vartheta} \right)^2 + \dot{\vartheta}^2 \right] + \frac{\nu^2}{2A} + MgR \cos \vartheta = E . \quad (\text{VI.39})$$

Zbývající dvě rovnice přepíšeme na tvar

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{B \sin^2 \vartheta} (\mu - \nu \cos \vartheta) , \quad (\text{VI.40})$$

$$\dot{\psi} = \frac{\nu}{A} - \dot{\varphi} \cos \vartheta . \quad (\text{VI.41})$$

Věnujme se rovnici (VI.39). Substitucí

$$\xi = \cos \vartheta , \quad \dot{\xi}^2 = (1 - \xi^2) \dot{\vartheta}^2 \quad (\text{VI.42})$$

ji převedeme na tvar

$$\dot{\xi}^2 = \frac{2}{B} \left(E - \frac{\nu^2}{2A} - MgR\xi \right) (1 - \xi^2) - \left(\frac{\mu - \nu\xi}{B} \right)^2 . \quad (\text{VI.43})$$

Polynom třetího stupně na pravé straně lze zřejmě zapsat jako

$$f(\xi) = \frac{2MgR}{B} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3), \quad (\text{VI.44})$$

kde ξ_1, ξ_2, ξ_3 jsou kořeny polynomu. Vzhledem k (VI.42) musí zřejmě být

$$|\xi| \leq 1, \quad f(\xi) \geq 0. \quad (\text{VI.45})$$

Podle (VI.43) v bodech $-1, 1$ je však $f(\xi) \leq 0$. Aby bylo možné splnit (VI.45), musejí v uzavřeném intervalu mezi -1 a $+1$ ležet dva kořeny rovnice $f(\xi) = 0$, jež označíme ξ_1, ξ_2 . Příslušné úhly ϑ_1 a ϑ_2 udávají hranice, mezi nimiž se pohybuje osa tělesa z' . Řešení rovnice (VI.39) lze zapsat jako

$$t - t_0 = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}, \quad \vartheta = \arccos \xi. \quad (\text{VI.46})$$

Po uplynutí doby

$$T = 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} \quad (\text{VI.47})$$

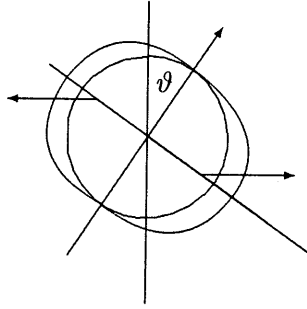
se vrací úhel ϑ ke své dřívější hodnotě. Ze vztahů (VI.40) a (VI.41) je vidět, že dřívějších hodnot nabývají i $\dot{\varphi}$ a $\dot{\psi}$. To znamená, že dochází k opakování děje s úhlem φ posunutým o veličinu

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\mu - \nu\xi}{B(1 - \xi^2)} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}. \quad (\text{VI.48})$$

V závislosti na tom, zda výraz $\mu - \nu\xi$ v intervalu mezi ξ_1 a ξ_2 nemění či mění znaménko, je přírůstek úhlu monotónní anebo dochází k obdobím „retrográdního“ pohybu.

Vcelku lze říci, že pohyb osy těžkého setrvačnicku je složen z precese (změny úhlu φ) a nutace (změny úhlu ϑ). Je-li nutace malá (úhly ϑ_1 a ϑ_2 jsou si blízké), mluvíme o *pseudoregulární precеси*.

K obdobnému jevu dochází u naší Země. Rotace Země vyvolává její zploštění. Sklon zemské osy (úhel $\vartheta = 23,5^\circ$) vzhledem k ekliptice (rovině jejího oběhu kolem Slunce) pak působí, že Slunce v dlouhodobém průměru působí na Zemi momentem síly, který je kolmý jak na normálu k ekliptice, tak i na zemskou osu, a který je úměrný $\sin \vartheta$, viz obr. 9.



Obr. 9: Působení Měsíce a Slunce na rotující Zemi. Moment síly vzniká působením Měsíce a Slunce v těžištích „přebytečných“ hmot, jež jsou dány zploštěním rotující Země. Měsíc i Slunce si vzhledem k dlouhé časové periodě precesního jevu můžeme představit rozmazaný do „pneumatik“ obklopujících Zemi zhruba v horizontální rovině.

Z formálního hlediska je to stejná situace jako v případě těžkého setrvačnicku, moment se snaží „vzpřímit“ zemskou osu a ta „uhýbá“. Obdobně jako Slunce působí na Zemi i Měsíc. Protože rovina oběhu Měsíce kolem Slunce není shodná s ekliptikou (odchylka asi 5°), není výsledný jev totožný s pseudoregulární precesí, jaká nastává u těžkého setrvačnicku, jde však rovněž o precesi zemské osy doprovázenou malou nutací. Mluvíme o *astronomické precesi*, která se projevuje změnou polohy pólu otáčení na obloze a pohybem jarního bodu (bodů, v němž se Slunce v době jarní rovnodennosti nachází mezi souhvězdími). Perioda tohoto jevu je asi 26 000 let (platónský rok).

Pohybové rovnice nesymetrického těžkého setrvačnicku se zdařilo efektivně integrovat jen za jistých speciálních předpokladů. Případy integrace pohybových rovnic tuhého tělesa získané Lagrangem a Eulerem byly dlouho jedinými známými. Jiný a nový způsob integrace pochází od S. Kovalevské z 80. let minulého století. Výsledky Kovalevské tuto kapitolu mechaniky uzavřely.

VI.4 Srážky částic

Pozorujeme-li srážku dvou částic v laboratoři, je tomu obvykle tak, že jedna z částic je do srážky v klidu v soustavě souřadnic pevně spojené s laboratoří. Tato soustava se nazývá laboratorní, hovoří se o ní jako o L -soustavě. Vedle L -soustavy se při studiu srážek užívá ještě tzv. těžišťové soustavy, T -soustavy, která je pevně spojena se středem hmotnosti srážejících se částic.

V T -soustavě je úhrnná hybnost srážejících se částic rovna nule. Částice před srážkou a veličiny k nim se vztahující označíme indexy 1, 2, částice po srážce indexy 3, 4. Nechť je před srážkou v L -soustavě druhá částice v klidu a první má rychlost v_0 (je to tedy relativní rychlost částic před srážkou). Rychlost T -soustavy vůči L -soustavě je rovna

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_0 . \quad (\text{VI.49})$$

Všimneme si nejprve nepružných srážek. Nepružnou srážkou se rozumí taková srážka, při které část kinetické energie srážejících se částic přechází na vnitřní stupně volnosti. Budeme uvažovat obecný případ, kdy srážkou dojde k přestavbě vnitřní struktury (proběhnou například jaderné reakce), takže částice po srážce mohou mít jiné hmotnosti, než měly před srážkou. Rychlost první částice vzhledem k T -soustavě před srážkou je

$$\mathbf{v}_{1T} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{V} = \frac{m_2 \mathbf{v}_0}{m_1 + m_2} \quad (\text{VI.50})$$

a pro rychlost druhé částice v této soustavě dostáváme

$$\mathbf{v}_{2T} = -\mathbf{V} = -\frac{m_1 \mathbf{v}_0}{m_1 + m_2} , \quad (\text{VI.51})$$

takže platí

$$m_1 \mathbf{v}_{1T} + m_2 \mathbf{v}_{2T} = 0 , \quad (\text{VI.52})$$

jak musí být.

Kinetická energie částic v T -soustavě je rovna

$$E_0 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2 = \frac{\mu v_0^2}{2} , \quad (\text{VI.53})$$

kde jsme redukovanou hmotnost μ označili indexem proto, že se podle předchozí úvahy může v důsledku srážky změnit. V důsledku například probíhající reakce se uvolní či pohltí jistá energie Q , tato energie „přejde“ z vnitřní energie (odpovídající vnitřním stupňům volnosti) v kinetickou energii částic ($Q > 0$) nebo naopak z kinetické energie částic v energii vnitřního stavu ($Q < 0$).

S ohledem na energii Q má zákon zachování energie tvar

$$\frac{\mu_0 v_0^2}{2} + Q = \frac{\mu v^2}{2} , \quad (\text{VI.54})$$

kde

$$\mu = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4} \quad (\text{VI.55})$$

je redukována hmotnost částic po srážce, v značí jejich novou relativní rychlost. Vektory v_{3T} a v_{4T} jsou rychlosti obou částic po srážce a máme po něm

$$v_{3T} = \frac{m_3 v}{m_3 + m_4}, \quad v_{4T} = -\frac{m_3 v}{m_3 + m_4}, \quad (\text{VI.56})$$

takže opět platí

$$m_3 v_{3T} + m_4 v_{4T} = 0, \quad \frac{m_1 v_{3T}^2}{2} + \frac{m_4 v_{4T}^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2}. \quad (\text{VI.57})$$

označíme Z předchozího textu je zřejmé, že k určení vektorů v_{3T} a v_{4T} je třeba znát vektor v a hmotnosti m_3, m_4 .

Vrátit se zpět k laboratorní soustavě je jednoduché. Rychlosti obou částic po srážce zde budou

$$\begin{aligned} v_3 &= v_{3T} + \mathbf{V} = \frac{m_4 v}{m_3 + m_4} + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \\ v_4 &= v_{4T} + \mathbf{V} = -\frac{m_3 v}{m_3 + m_4} + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

Podle klasické fyziky by se měl součet hmotností částic před srážkou rovnat součtu hmotností po srážce. V důsledku relativistických jevů může být část hmotnosti při jaderných reakcích předána záření, většinou však rozdíl činí ne více než desetiny procenta původní hodnoty a lze proto i v takovýchto případech zaměnit $m_3 + m_4$ za $m_1 + m_2$.

Výpočty se zjednoduší, budou-li srážky pružnými, bude $Q = 0$ a hmotnosti částic se nezmění. Ze vztahu (VI.54) potom plyne, že $v_0 = v$, takže se velikost relativní rychlosti částic nezmění. Vektor v nechť je natočen vzhledem k vektoru v_0 o úhel ξ . Osu x položíme do směru vektoru v_0 a osa y budiž v rovině určené vektory v_0 a v . Zřejmě platí

$$v_x = v_0 \cos \xi, \quad v_y = v_0 \sin \xi \quad (\text{VI.59})$$

a pro složky rychlosti v_3 a v_4 dostáváme

$$\begin{aligned} v_{3x} &= \frac{(m_1 + m_2 \cos \xi) v_0}{m_1 + m_2}, & v_{3y} &= \frac{m_2 v_0 \sin \xi}{m_1 + m_2}, \\ v_{4x} &= \frac{m_1 (1 - \cos \xi) v_0}{m_1 + m_2}, & v_{4y} &= -\frac{m_1 v_0 \sin \xi}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

Pomocí těchto vzorců lze spojit úhel odchýlení první částice při srážce v laboratorní soustavě, který označíme θ , s úhlem ξ (tj. s úhlem jejího odklonu v těžiškové soustavě) vztahem

$$\text{tg } \theta = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{m_2 \sin \xi}{m_1 + m_2 \cos \xi}. \quad (\text{VI.61})$$

Druhá částice, která se v laboratorní soustavě nacházela před srážkou v klidu, bude mít po srážce rychlost, jejíž směr je určen vztahem

$$\operatorname{tg} \theta' = -\frac{v_{4y}}{v_{4z}} = \frac{\sin \xi}{1 - \cos \xi} = \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2}, \quad \theta' = \frac{\pi - \xi}{2}. \quad (\text{VI.62})$$

Znaménko „minus“ užitě při zavedení funkce $\operatorname{tg} \theta'$ bylo vybráno proto, že projekce v_{3y} a v_{4y} mají opačné znaménko.

Vzorec (VI.61) bude ještě jednodušší v případě srážky dvou stejně hmotných částic. V tomto případě dostaneme, že

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \xi}{2}, \quad \theta = \frac{\xi}{2}, \quad \theta + \theta' = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{VI.63})$$

Částice se rozletí pod pravým úhlem a úhel odchýlení v laboratorní soustavě je roven polovině úhlu odchýlení v těžišťové soustavě.

Energie, kterou získá druhá částice při srážce, se rovná

$$E_4 = \frac{m_2}{2} (v_{4x}^2 + v_{4y}^2) = \frac{m_2 m_1^2 (1 - \cos \xi) v_0^2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (\text{VI.64})$$

Její poměr k energii první částice je

$$\frac{E_4}{E_0} = \frac{2m_1 m_2 (1 - \cos \xi)}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (\text{VI.65})$$

Bude-li $m_1 = m_2$, obdržíme odtud

$$\frac{E_4}{E_0} = \sin^2 \frac{\xi}{2} = \sin^2 \theta \quad (\text{VI.66})$$

a tedy

$$\frac{E_3}{E_0} = \cos^2 \theta. \quad (\text{VI.67})$$

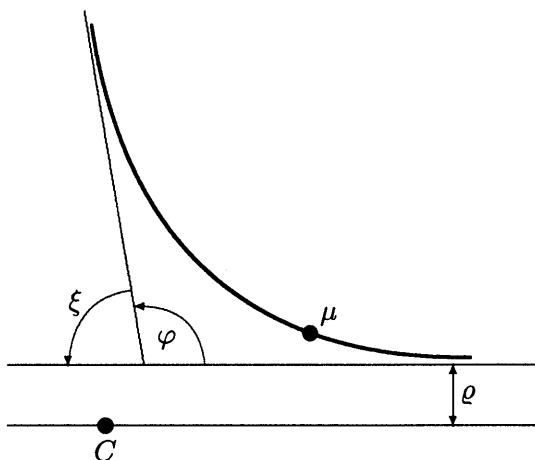
Pro čelní srážku, kdy $\xi = 180^\circ$, je $E_3 = 0$ a $E_4 = E_0$, jak je možné očekávat.

Všimneme si poněkud podrobněji pružných srážek v T -soustavě. Na centrální pole nechť z nekonečna nalétá částice s hmotností μ , viz obr. 10. Její trajektorii charakterizujeme záměrnou vzdáleností ρ a polárním úhlem φ . Dále se zavádí úhel rozptylu (odklonu, odchýlení) ξ vztahem

$$\xi = |\pi - \varphi|. \quad (\text{VI.68})$$

Úhel φ určíme ze vztahu (VI.94). Energii a moment hybnosti nalétávající částice vyjádříme pomocí rychlosti částice v nekonečnu a pomocí záměrné vzdálenosti

$$E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \quad J = \mu v_\infty \rho. \quad (\text{VI.69})$$



Obr. 10: Rozptyl částic silovým centrem. Částice o hmotnosti μ nalétá na silové centrum C se záměrnou vzdáleností ρ .

Obdržíme tak

$$\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_{\infty}^2}}}. \quad (\text{VI.70})$$

V praxi se setkáváme s rozptylem ne jedné částice, ale celého souboru částic dopadajících na terč se stejnými rychlostmi v_{∞} . Pozoruje se (měří se) rozložení těchto částic v závislosti na úhlu rozptylu ξ . Pro popis tohoto procesu se zavádí diferenciální účinný průřez $d\sigma$.

Nechť dN je počet částic rozptýlených za jednotku času do úhlu ležícího mezi ξ a $\xi + d\xi$. Nechť n značí počet částic procházejících za jednotku času jednotkovou plochou kolmou ke svazku částic. *Diferenciální účinný průřez* se definuje vztahem

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (\text{VI.71})$$

a je zřejmě určen charakterem rozptylujícího centra C .

Předpokládejme, že se do úhlu ležícího mezi ξ a $\xi + d\xi$ rozptýlí jen ty částice, které mají záměrnou vzdálenost mezi $\rho(\xi)$ a $\rho(\xi + d\xi)$. Počet takových částic za jednotku času je

$$dN = 2\pi\rho \, d\rho \, n, \quad (\text{VI.72})$$

takže

$$d\sigma = 2\pi\rho \, d\rho. \quad (\text{VI.73})$$

K určení závislosti $d\sigma$ na úhlu rozptylu budeme místo (VI.73) psát

$$d\sigma = 2\pi\rho(\xi) \left| \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} \right| d\xi, \quad (\text{VI.74})$$

kde jsme absolutní hodnoty užili proto, že ρ obvykle klesá s růstem ξ .

Vztah pro $d\sigma$ se v praxi často vyjadřuje pomocí objemového úhlu. Protože je

$$d\Omega = 2\pi \sin \xi d\xi, \quad (\text{VI.75})$$

platí

$$d\sigma = \frac{\rho(\xi)}{\sin \xi} \left| \frac{d\rho}{d\xi} \right| d\Omega. \quad (\text{VI.76})$$

Veličina $d\sigma$ má rozměr plochy. Je to plocha prstence se středem v rozptylujícím centru a postaveného kolmo na počáteční rychlost částic, kterým musí částice proletět, aby se rozptýlila do elementu úhlu $d\Omega$. K výpočtu diferenciálního účinného průřezu je třeba znát funkci $U(r)$. Z experimentální znalosti $d\sigma$ se získávají informace o charakteru interakce.

Pokud by bylo třeba nalézt závislost účinného průřezu na rozptylovém úhlu v L -soustavě, musíme zřejmě ve vzorci (VI.74) provést odpovídající úpravu, tj. užít vzorců (VI.61) a (VI.62) pro přechod od úhlu ξ k úhlům θ, θ' .

VI.5 Problém dvou těles

Hledejme pohyb dvou hmotných bodů tvořících uzavřenou soustavu. Řešení úlohy rozdělíme do několika částí.

a) Lagrangeova funkce této soustavy má tvar

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (\text{VI.77})$$

Zavedeme relativní polohový vektor první částice vůči druhé

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (\text{VI.78})$$

a radius-vektor středu hmotnosti

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{VI.79})$$

Z předchozích rovnic dostaneme, že

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (\text{VI.80})$$

a pro Lagrangeovu funkci plyne

$$L = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \left(\frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r) \right), \quad (\text{VI.81})$$

kde M značí celkovou hmotnost soustavy $M = m_1 + m_2$ a μ je tzv. *redukovávaná hmotnost*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{VI.82})$$

Vidíme, že se Lagrangeova funkce rozpadla na dva členy, obsahující rozdílné proměnné, tj. došlo k separaci proměnných. První člen

$$\frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 \quad (\text{VI.83})$$

odpovídá rovnoměrnému a přímočarému pohybu hmotného středu a druhý člen

$$\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) \quad (\text{VI.84})$$

udává pohyb jednoho hmotného bodu o hmotnosti μ ve vnějším centrálním poli $U(r)$. Najdeme-li řešení této úlohy, tj. najdeme-li funkci $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, pak se řešení $\mathbf{r}_1(t)$ a $\mathbf{r}_2(t)$ získají z (VI.80).

b) Lagrangeova funkce (VI.84) nezávisí na čase, zachovává se tedy energie

$$E = \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r) = \text{konst}, \quad (\text{VI.85})$$

a protože jde o centrální silová pole, zachovává se i moment hybnosti částice \mathbf{J} vzhledem k centru. Tato částice se tedy musí stále pohybovat v rovině kolmé k vektoru \mathbf{J} .

Zavedeme-li v této rovině x, y polární souřadnice r, φ , pro Lagrangeovu funkci (VI.84) dostaneme

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (\text{VI.86})$$

a pro energii analogicky

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{konst}. \quad (\text{VI.87})$$

Pro moment hybnosti částice obdržíme

$$J = J_z = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konst}, \quad (\text{VI.88})$$

takže

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (\text{VI.89})$$

Z předchozího vztahu plyne, že

$$dt = \pm \frac{\sqrt{\mu} dr}{\sqrt{2(E - U_{\text{ef}})}}, \quad (\text{VI.90})$$

kde jsme označili jako

$$U_{\text{ef}} = U(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2} \quad (\text{VI.91})$$

tzv. *efektivní potenciální energii*. Druhý člen lze interpretovat jako potenciální energii odstředivé síly v neinerciálním systému, který se otáčí okolo centra spolu s danou částicí. Rovnice (VI.90) určuje závislost $t(r)$.

Ze vztahů (VI.88) a (VI.90) obdržíme

$$d\varphi = \pm \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{ef}})}}. \quad (\text{VI.92})$$

Rovnice popisuje trajektorii částice. Integrace rovnic (VI.90) a (VI.92) dává

$$t - t_0 = \pm \int \frac{\sqrt{\mu} dr}{\sqrt{2(E - U_{\text{ef}})}}, \quad (\text{VI.93})$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{ef}})}}. \quad (\text{VI.94})$$

c) Z rovnice (VI.89) plyne, že radiální část pohybu se dá vyšetřovat jako jednorozměrný pohyb bodu v poli s potenciálem U_{ef} . Při tomto pohybu může radiální souřadnice r nabývat pouze hodnot, pro něž platí

$$E - \frac{J^2}{2\mu r^2} - U(r) \geq 0. \quad (\text{VI.95})$$

Rovnost přitom nastává zřejmě v bodech obratu.

V případě finitního pohybu existují dva takové body obratu, $r_0 = r_{\min}$ a $r_0 = r_{\max}$, $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. Finitní pohyb se tedy děje v mezikruží omezeném hodnotami r_{\min} a r_{\max} . Za čas, který odpovídá změně r právě od r_{\min} do r_{\max} , se radius-vektor otočí o úhel

$$\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{J dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{ef}})}}. \quad (\text{VI.96})$$

Odpovídající trajektorie však obecně nemusí být uzavřenou křivkou. Pro uzavřenou křivku musí být úhel ϕ racionálním násobkem čísla 2π . Tato situace nastává v případě, kdy $U(r)$ je úměrno $\frac{1}{r}$, a v případě, kdy $U(r)$ je úměrno r^2 .

Je-li oblast možných hodnot proměnné r omezena pouze podmínkou $r \geq r_{\min}$, hovoří se o infinitním pohybu částice, částice se pohybuje z nekonečna a do nekonečna se vrací.

Vraťme se nyní ke vztahu (VI.95), který přepíšeme na tvar

$$r^2 U(r) + \frac{J^2}{2\mu} < E r^2. \quad (\text{VI.97})$$

Znaménko rovnosti neuvažujeme, neboť nás zajímá situace, kdy bod může spadnout do středu. Je patrné, že proměnná r může nabývat hodnoty $r = 0$ pouze při splnění podmínky

$$r^2 U(r)|_{r \rightarrow 0} < -\frac{J^2}{2\mu}. \quad (\text{VI.98})$$

Odtud plyne, že $U(r)$ se musí při $r \rightarrow 0$ blížit k $-\infty$ buď jako $-\frac{\alpha}{r^2}$ s $\alpha > \frac{J^2}{2\mu}$, nebo úměrně $-\frac{1}{r^n}$ s $n > 2$.

d) Zvláště důležitým příkladem je Keplerův problém, kdy potenciální energie má tvar

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (\text{VI.99})$$

přičemž $\alpha > 0$ odpovídá vzájemnému přitahování a $\alpha < 0$ vzájemnému odpuzování.

V prvním případě ($\alpha > 0$) má efektivní potenciální energie $U_{\text{ef}}(r)$ tvar křivky z obr. 11. V případě, kdy bude $E \geq 0$, jde zřejmě o pohyb infinitní, bude-li $E < 0$, půjde o pohyb finitní.

Konkrétní tvar trajektorie se zřejmě získá dosazením

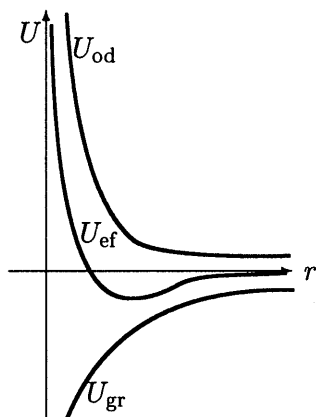
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

do (VI.94) a provedením naznačené integrace. Výsledkem je vzorec

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (\text{VI.100})$$

položíme-li $\varphi_0 = 0$. Přitom bylo zavedeno označení

$$p = \frac{J^2}{\mu\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (\text{VI.101})$$



Obr. 11: Závislost efektivní potenciální energie na vzdálenosti těles. Složením potenciální energie gravitační síly a odstředivé síly v neinerciálním systému dostáváme efektivní potenciální energii, jejíž graf má minimum odpovídající stabilnímu kruhovému pohybu.

Je to rovnice kuželosečky s ohniskem v počátku souřadnic. Veličina p je parametrem a e excentricitou této kuželosečky. Bod s $\varphi = 0$ je bod nejbližší k centru, nazývá se periheliem této trajektorie.

Bude-li (při $\alpha > 0$) platit, že

$$E < 0, \quad 0 \leq e < 1, \quad (\text{VI.102})$$

půjde o elipsu, bude-li však $e = 0$, půjde o kružnici.

Bude-li (při $\alpha > 0$)

$$E > 0, \quad (\text{VI.103})$$

bude $e > 1$ a trajektorií bude větev hyperboly bližší k ohnisku.

Bude-li (při $\alpha > 0$)

$$E = 0, \quad (\text{VI.104})$$

bude $e = 1$ a trajektorií je parabola. V tomto případě infinitního pohybu se rychlost unikající částice bude asymptoticky blížit k nule.

Bude-li $\alpha < 0$, bude energie částice pouze kladná a pohyb vždy bude infinitní, trajektorií bude (protože se jedná o odpudivou sílu) vzdálenější větev hyperboly.

Konkrétnější rozbor včetně vyvození Keplerových zákonů lze již přenechat každému čtenáři.

VI.6 Příklady

1. Odvoďte rovnici určující časovou závislost rychlosti rakety při působení výlučně reaktivní síly za stálé relativní rychlosti vyhořelého paliva.

Řešení: Raketa se potom bude pohybovat přímočaře a pohybovou rovnicí (VI.6) je

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} . \quad (\text{VI.105})$$

Po integraci odtud dostaneme

$$v = v_0 - \int_0^t \frac{v_{\text{rel}}}{m} dm . \quad (\text{VI.106})$$

Bude-li reaktivní rychlost v_{rel} konstantní, bude

$$v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \frac{m_0}{m(t)} , \quad (\text{VI.107})$$

což je hledaná Ciolkovského rovnice.

2. Zkoumejte charakter pohybu v centrálním poli

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3} . \quad (\text{VI.108})$$

Řešení: Energií částice o hmotnosti m a momentu hybnosti J je

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3} \quad (\text{VI.109})$$

a pro efektivní potenciální energii tedy platí

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3} , \quad (\text{VI.110})$$

přičemž

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{\text{ef}}(r) = -\infty , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U_{\text{ef}} = 0 . \quad (\text{VI.111})$$

Rovnice $U_{\text{ef}}(r) = 0$ má kořeny

$$r_{1,2} = \frac{\frac{J^2}{2m} \pm \sqrt{\frac{J^4}{4m^2} - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \quad (\text{VI.112})$$

a rovnice $\frac{dU_{\text{ef}}(r)}{dr} = 0$ má kořeny

$$r_{1,2} = \frac{\frac{J^2}{2m} \pm \sqrt{\frac{J^4}{m^2} - 12\alpha\beta}}{2\alpha}. \quad (\text{VI.113})$$

Sledujeme-li polohu nulových bodů a extrémů funkce $U_{\text{ef}}(r)$, zjišťujeme, že v závislosti na hodnotách parametru $\frac{J^4}{m^2}$ nastává pět kvalitativně odlišných případů.

Můžeme je konkrétně popsat, získáme-li tvar křivek $U_{\text{ef}}(r)$, což lze pro konkrétní hodnoty parametrů učinit pomocí počítače. Na základě postupu uvedeného v textu lze určit i příslušné trajektorie.

3. Dokažte platnost viriálové věty³⁶

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_a \mathbf{F}_a \mathbf{r}_a} \quad (\text{VI.114})$$

pro střední hodnotu kinetické energie T systému částic, jehož pohyby se dějí v omezené oblasti prostoru s omezenými rychlostmi. Dále dokažte, že je-li potenciální energie U systému homogenní funkcí souřadnic k -tého stupně³⁷, je

$$\bar{T} = \frac{k}{2} \bar{U}. \quad (\text{VI.115})$$

K jakému výsledku vede viriálový teorém pro newtonovskou gravitační interakci? Při důkazu užitě Eulerovy věty o homogenních funkcích

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f. \quad (\text{VI.116})$$

Řešení: Protože kinetická energie T je homogenní, kvadratickou funkcí rychlostí, platí podle Eulerovy věty (VI.116)

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T \quad (\text{VI.117})$$

³⁶ Viriálem se nazývá veličina na pravé straně (VI.114)

³⁷ Připomeňme definici homogenní funkce k -tého stupně

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n).$$

čili

$$\begin{aligned} 2T &= \sum \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a - \sum \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a = \\ &= \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a - \sum \mathbf{r}_a \mathbf{F}_a . \end{aligned} \quad (\text{VI.118})$$

Aby platila viriálová věta, musí být střední hodnota prvního členu na pravé straně (VI.118) rovna nule. To však skutečně platí, je-li $f = \frac{dF}{dt}$, lze pro časovou střední hodnotu funkce f psát

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dF}{dt} dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{VI.119})$$

Pokud se pohyb děje v omezené oblasti prostoru omezenými rychlostmi, je $F(\tau)$ konečná veličina a příslušná limita je rovna nule. Jestli máme pro sílu výraz $\mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$, plyne užitím Eulerovy věty v případě gravitační energie, kdy $k = -1$,

$$2\bar{T} = -\bar{U} . \quad (\text{VI.120})$$

4. Vyšetřujte malé kmity dvou matematických kyvadel vázaných pružinou o zanedbatelné hmotnosti, viz obr. 12.

Řešení: Nejdříve je třeba najít výraz pro potenciální energii U ; v rovnovážné poloze ji budeme klást rovnu nule. Obdržíme, že

$$\begin{aligned} U &= mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2) + \\ &+ \frac{1}{2}k(b \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_1)^2 . \end{aligned} \quad (\text{VI.121})$$

V případě malých kmitů lze položit

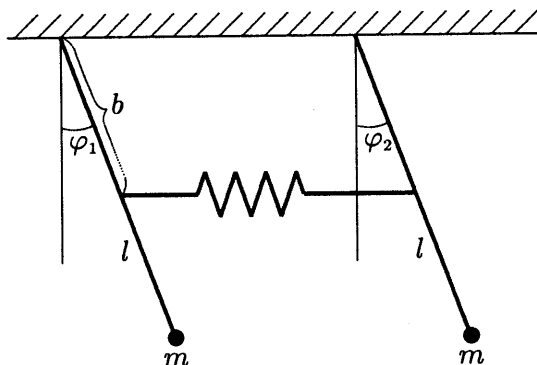
$$\sin \varphi = \varphi , \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad (\text{VI.122})$$

a bude tedy

$$U = \frac{1}{2} \left[(mgl + 2kb^2) \varphi_1^2 - kb^2 \varphi_2 \varphi_1 + (mgl + kb^2) \varphi_2^2 \right] . \quad (\text{VI.123})$$

Pro kinetickou energii ve stejném přiblížení dostáváme

$$T = \frac{1}{2} \left[ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \right] \quad (\text{VI.124})$$



Obr. 12: Spřažená matematická kyvadla. Kyvadla kývají ve svislé rovině. Význam parametrů je zřejmý z obrázku.

a pohybové rovnice (Lagrangeovy rovnice) mají tvar

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + (mgl + kb^2) \varphi_1 - kb^2 \varphi_2 &= 0, \\ ml^2 \ddot{\varphi}_2 - kb^2 \varphi_1 + (mgl + kb^2) \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.125})$$

Řešení těchto rovnic hledejme ve tvaru

$$\varphi_1 = C_1 e^{i\omega t}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{i\omega t}. \quad (\text{VI.126})$$

Sekulární rovnice je

$$\begin{vmatrix} mgl + kb^2 - ml^2\omega^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & mgl + kb^2 - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{VI.127})$$

musí tedy být splněna podmínka

$$(mgl + kb^2 - ml^2\omega^2)^2 - (-kb^2)^2 = 0. \quad (\text{VI.128})$$

Vlastní frekvence tedy jsou

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \frac{b^2}{l^2}}. \quad (\text{VI.129})$$

Do rovnice odpovídající (VI.23) dosadíme za ω^2 čtverec první frekvence ω_1^2 . Rovnice nabude tvaru

$$\begin{aligned} kb^2 C_1 - kb^2 C_2 &= 0, \\ -kb^2 C_1 + kb^2 C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.130})$$

Její řešení je jednoduché

$$C_1 = C_2 = c_1 = a_1 e^{i\delta_1}, \quad (\text{VI.131})$$

kde c_1 je libovolná komplexní konstanta, a_1 je její modul, δ_1 je její argument. Reálné části řešení odpovídající ω_1 tedy jsou

$$\varphi_1^{(1)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \quad \varphi_2^{(1)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1). \quad (\text{VI.132})$$

Stejně musíme nyní postupovat pro frekvenci ω_2 . Pro reálné části obdržíme

$$\varphi_1^{(2)} = a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \quad (\text{VI.133})$$

takže obecné řešení má tvar

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \\ \varphi_2 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \end{aligned} \quad (\text{VI.134})$$

Dále je možné si všimnout speciálních případů, zvláště případu slabé vazby, kdy k je velmi malé,

$$\left(\frac{k}{m}\right) \ll \left(\frac{g}{2}\right), \quad \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1. \quad (\text{VI.135})$$

Můžeme nyní ukázat, vychýlíme-li například první kyvadlo o nějaký malý úhel a druhé podržíme v nulové poloze, že při následujících kyvech situace vypadá tak, že každé z kyvadel koná harmonické kmity s frekvencí přibližně rovnou ω_1 , ale s pomalu se měnící amplitudou. Amplitudy se mění s fázovým posunem rovným $\pi/2$, což má za následek existenci zajímavého efektu týkajícího se rozložení energie na podsystémy. Užití počítače umožňuje sledovat i jiné velmi zajímavé situace.

5. Odvoďte vztah pro $d\sigma$ při rozptylu částic v coulombovském poli (Rutherfordův vzorec).

Řešení: Po dosazení výrazu

$$U = \frac{\alpha}{r} \quad (\text{VI.136})$$

do (VI.70) a po integraci obdržíme

$$\varphi = 2 \arccos \frac{\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}\right)^2}}, \quad (\text{VI.137})$$

odkud

$$\rho = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\xi}{2}. \quad (\text{VI.138})$$

Derivací tohoto výrazu podle ξ a po dosazení do (VI.76) obdržíme

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\xi}{2}}, \quad (\text{VI.139})$$

což je slavný Rutherfordův vzorec, který posloužil k důkazu existence atomových jader na základě jejich rozptylového působení na částice α .

6. Nalezněte účinný průřez $d\sigma$ pro rozptyl částic neproniknutelnou koulí poloměru r_0 .

Řešení: V případě neproniknutelné koule je

$$\begin{aligned} U(r) &= 0 & \text{pro} & \quad r > r_0 & \text{vně koule,} \\ U(r) &= \infty & \text{pro} & \quad r \leq r_0 & \text{uvnitř koule.} \end{aligned} \quad (\text{VI.140})$$

Ať je kinetická energie rozptylující se částice jakákoliv, nemůže proniknout do oblasti $r < r_0$.

Zachování kinetické energie a momentu hybnosti při odrazu od povrchu koule vede ke vztahu

$$\rho = r_0 \cos \frac{\xi}{2} \quad (\text{VI.141})$$

pro $\rho \leq r_0$. Z obecného vzorce (VI.76) dostáváme výsledek

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} d\Omega. \quad (\text{VI.142})$$

Uvažovaný rozptyl je izotropní, $d\sigma$ nezávisí na úhlu. Celkový (integrální) účinný průřez

$$\sigma = \int d\sigma, \quad (\text{VI.143})$$

v němž se integrace provádí přes všechny možné úhly, vede v našem případě k výsledku, že

$$\sigma = \pi r_0^2, \quad (\text{VI.144})$$

jak se dalo očekávat.

Příklady k samostatnému řešení

1. Proveďte detailní klasifikaci pohybu částice v poli s Newtonovým potenciálem.

2. Odvoďte Keplerovy zákony a naopak odvoďte z Keplerových zákonů zákon Newtonův.

3. Jak se bude pohybovat raketa ve směru homogenního gravitačního pole o intenzitě g , jestliže

a) V okamžiku spuštění motorů je její rychlost nulová, hmotnost rakety lineárně klesá podle vztahu $m = m_0 - kt$, výtoková rychlost plynů z rakety má konstantní velikost w a motory pracují až do okamžiku, kdy hmotnost rakety klesne na polovinu počáteční hmotnosti m_0 . Při jaké podmínce bude počáteční zrychlení rakety kladné?

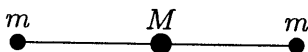
b) V okamžiku spuštění motorů je rychlost rakety v_0 , hmotnost rakety klesá podle vztahu $m = \frac{m_0}{(1 + kt)}$, výtoková rychlost má konstantní velikost w a motory pracují až do okamžiku, kdy $m = qm_0$, kde $0 < q < 1$. Za jaké podmínky bude v okamžiku zastavení motorů rychlost rakety nulová?

4. Najděte řešení a proveďte jeho úplnou diskuzi pro diferenciální rovnici tvaru

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

odpovídající tlumeným kmitům ($\alpha = \text{konst}$).

5. Najděte vlastní frekvence a normální souřadnice pro lineární kmity tříatomové symetrické molekuly, viz obr. 13.



Obr. 13: Lineární tříatomová symetrická molekula. Obrázek zachycuje rovnovážný stav molekuly. Molekula může kmitat podélně, ale i příčně.

6. Nalezněte efektivní průřez pro pád částic o hmotnostech m_1 na povrch sférického tělesa o hmotnosti m_2 a poloměru R , ke kterému jsou přitahovány podle Newtonova gravitačního zákona.

$$\left[\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2} \right) \right]$$

Část B

**NERELATIVISTICKÁ MECHANIKA
KONTINUA**

VII POHYBOVÉ ROVNICE KONTINUA

Kontinuum, spojité látkové prostředí, je matematicky zobrazeno jako soustava hmotných bodů, které hustě vyplňují prostor a pohybují se v něm, takže libovolně vybraná oblast kontinua obecně mění svůj tvar i objem. Na rozdíl od mechanických systémů studovaných v první části knihy má tedy kontinuum nekonečný počet stupňů volnosti a zákony jeho pohybu jsou vyjádřeny *parciálními diferenciálními rovnicemi* obsahujícími derivace jak podle času, tak i podle prostorových proměnných. V této kapitole ukazujeme, jak je možné popsat pohyb kontinua, a poté vyvozujeme systematickým způsobem obecné rovnice, jimiž se jeho pohyb řídí. Tyto rovnice vyjadřují *zákony zachování* hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a energie. Dále se ukazuje, že pro úplný popis pohybu kontinua je nutné užít termodynamických vztahů. Souběžně rozvíjíme matematický aparát potřebný pro mechaniku kontinua, zejména *tenzorový počet*. S jeho pomocí zavádíme *tenzor deformace* a *tenzor napětí*, které vystupují v pohybových rovnicích kontinua.

VII.1 Kinematika kontinua

Z běžné zkušenosti víme, že působení sil na tělesa vede obvykle ke změně jejich tvaru i objemu. Pro toto chování reálných těles není v modelu tuhého tělesa místo, je s tímto modelem neslučitelné. Abychom vystihli elastické vlastnosti těles, je třeba vypracovat jiný model. Především je patrné, že vlastně není možné sledovat pohyb všech atomů či molekul daného tělesa, ani kdybychom předpokládali, že jej vůbec lze popsat pomocí klasické mechaniky. Nebudeme proto uvažovat o skutečném mikroskopickém složení tělesa, nýbrž o tzv. *fyzikálně nekonečně malých částicích*. Těmi budeme rozumět soubor mikročástic, jejichž počet ΔN je na jedné straně dostatečně velký ($\Delta N \gg 1$) a na druhé straně velmi malý ve srovnání s počtem N molekul makroskopické části daného tělesa ($\Delta N \ll N$).

Fyzikálně nekonečně malé částice musí zaujímat fyzikálně nekonečně malý objem ΔV , tj. objem, který je dostatečně velký k tomu, aby obsahoval větší počet molekul, ale přitom dostatečně malý, aby se v jeho dimenzích již neprojevovala závislost makroskopických parametrů tělesa na poloze.

Poloha konkrétní fyzikálně nekonečně malé částice v čase t se zadá průvodičem jejího hmotného středu ve *fyzikálně nekonečně malém časovém in-*

tervalu Δt , v němž okamžik t leží. Tímto časovým intervalem se zřejmě rozumí interval, který je dostatečně velký ve srovnání s charakteristickými dobami zhruba periodických pohybů molekuly, způsobených vlivem jejího bezprostředního okolí, a zároveň dostatečně malý ve srovnání s dobou, v níž se již projeví změny v makroskopických parametrech soustavy.

Dospíváme tak k modelu *kontinua* (spojitého prostředí) jako soustavy složené z fyzikálně nekonečně malých částic, které hustě zaplňují určitý objem V třírozměrného euklidovského prostoru, takže v každém bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} (vzhledem k libovolně zvolenému počátku) se nachází jistá částice. Nechť za čas Δt se částice přemístí z bodu \mathbf{r} do bodu $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$. Pak lze zavést její rychlost a zrychlení jako

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (\text{VII.1})$$

kde limitní přechod je abstrakcí, která je fyzikálně uskutečnitelná jen v jistém přiblížení a znamená vlastně nahrazení fyzikálně nekonečně malých veličin veličinami nekonečně malými ve smyslu matematické analýzy. Tato abstrakce je základním krokem k vytvoření matematického modelu kontinua, v němž nadále pracujeme s fyzikálně nekonečně malými částicemi, jako by to byly hmotné body o přesně určené poloze v přesně určeném okamžiku.

V analogii s mechanikou soustavy hmotných bodů, kde pohyb soustavy byl určen zadáním časové závislosti průvodičů, můžeme proto v mechanice kontinua popsat pohyb pomocí závislostí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (\text{VII.2})$$

čili v souřadnicích

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t), \quad (\text{VII.3})$$

anebo stručněji³⁸

$$x_i = x_i(x_{0i}, t), \quad (\text{VII.4})$$

kde $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ udává počáteční polohy částic kontinua spojitě vyplňujících jistou oblast prostoru. Veličiny x_{0i} se nemění s časem a hrají roli

³⁸ Latinských indexů užíváme v každé části knihy pro souřadnice 3-rozměrného prostoru, který má pro danou partii základní význam. V mechanice systému o konečném počtu stupňů volnosti to byl configurační prostor daného systému, na odlišení jsme proto užívali pro 3-rozměrný euklidovský prostor řeckých indexů. Při výkladu nerelativistické mechaniky kontinua vystačíme s 3-rozměrným euklidovským prostorem a budeme proto jeho souřadnice značit latinskými indexy.

„spojitého indexu“ označujícího jednotlivé částice kontinua. Nahrazují tak diskrétní index, kterým jsme odlišovali hmotné body v první části knihy. Kontinuum je tedy soustavou o nekonečném počtu stupňů volnosti, což vede k tomu, že matematický aparát mechaniky kontinua je podstatně složitější než matematický aparát mechaniky soustavy hmotných bodů či tuhých těles.

Rychlostmi a zrychleními částic kontinua jsou podle (VII.1) vztahy

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{x_{0i}}, \quad a_i = \frac{dv_i}{dt} = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right)_{x_{0i}}. \quad (\text{VII.5})$$

Tyto veličiny závisí na počátečních polohách a na čase. Uvedenému popisu pohybu kontinua se říká *Lagrangeův*.

Informace o pohybu jednotlivých částic, obsažená v Lagrangeově popisu, není mnohdy pro řešení konkrétních problémů potřebná. Budeme proto často užívat *Eulerova* popisu, který udává, jak se mění rychlost kontinua v prostoru a čase.

Je tedy dáno *rychlostní pole*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad \text{čili} \quad v_i = v_i(x_j, t). \quad (\text{VII.6})$$

Protože polohy částic kontinua \mathbf{r} se obecně mění s časem, je pole zrychlení kontinua (VII.1)

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad (\text{VII.7})$$

což můžeme po zavedení označení $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}. \quad (\text{VII.8})$$

Zrychlení částice kontinua dané *totální* derivací rychlosti podle času se tedy obecně liší od změny rychlosti v daném místě vyjádřené *parciální* derivací.

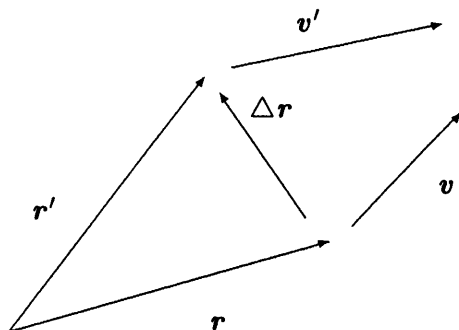
Eulerův popis je možné získat z popisu Lagrangeova, zderivujeme-li vztahy (VII.3) podle času a poté v nich vyjádříme x_{0i} pomocí x_i, t užitím inverzních vztahů k (VII.3). Naopak z Eulerova popisu získáme Lagrangeův popis integrací rovnic $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ za počátečních podmínek $x_i = x_{0i}$.

Křivky, jejichž tečné vektory mají směr rychlostního pole, nazýváme *proudnicemi*. Proudnice jsou totožné s trajektoriemi částic pouze pro případ *stacionárního proudění*, kdy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (\text{VII.9})$$

VII.2 Deformace kontinua

Jak již víme, tuhé těleso koná obecně translační a rotační pohyb. Kontinuum se může navíc *deformovat*, tj. měnit svůj tvar a objem. Pro posouzení elastických vlastností kontinua je potřebné oddělit tuto část jeho pohybu od pohybu celkového.



Obr. 14: Rychlostní pole v v kontinuu. Rychlosti v bodech r , r' se obecně liší. Obdobně bychom mohli znázornit i pole posunutí u .

Porovnejme proto rychlosti v a v' kontinua ve dvou blízkých bodech r a $r' = r + \Delta r$, viz obr. 14. Omezíme-li se na lineární členy Taylorova rozvoje, platí

$$v_i' = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta x_j . \quad (\text{VII.10})$$

Rozkladem matice $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ na část symetrickou a antisymetrickou dostáváme

$$v_i' = v_i + \eta_{ij} \Delta x_j + \omega_{ij} \Delta x_j , \quad (\text{VII.11})$$

kde

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) , \quad (\text{VII.12})$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) . \quad (\text{VII.13})$$

Pro stručnost zde označujeme parciální derivaci podle souřadnice čárkou a indexem této souřadnice, tj. klademe³⁹

$$_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (\text{VII.14})$$

³⁹ Tohoto výhodného označení budeme v dalším výkladu často využívat.

Všimněme si nejprve posledního členu na pravé straně (VII.11). Lze jej zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{r} \quad (\text{VII.15})$$

a odpovídá tedy otáčení kontinua s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Pohyb, při němž je $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$, se nazývá *vířivým*.

Protože první člen v (VII.10) představuje zřejmě translační pohyb (stejná rychlost ve všech místech), dospíváme k rozkladu rychlostního pole na část translační, rotační a deformační. Při čisté deformaci je

$$v_i' = \eta_{ik} \Delta x_k, \quad (\text{VII.16})$$

veličiny

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (\text{VII.17})$$

nazýváme složkami *tenzoru rychlosti deformace*. Tento tenzor je zřejmě symetrický a vytváří v prostoru tenzorové pole, které se obecně mění v čase. Pro součet jeho diagonálních členů platí

$$\eta_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (\text{VII.18})$$

Uvažujme nyní o kontinuu, které se působením vnějších sil vychýlilo ze své původní rovnovážné polohy, takže každý jeho bod se posunul o vektor \mathbf{u} . Pole vektoru \mathbf{u} , které se obecně mění v čase, nazýváme polem *posunutí*. Abychom z něj oddělili část způsobenou deformací, budeme opět uvažovat situaci z obr. 14, v němž však nahradíme rychlostní pole \mathbf{v} polem posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Deformační část posunutí se vyznačuje tím, že se při ní mění vzdálenosti mezi jednotlivými body kontinua (zatímco při translačním a rotačním pohybu se zachovávají). Porovnejme kvadrát vzdálenosti dvou blízkých bodů kontinua po deformaci a před deformací. Protože v prvním přiblížení Taylorova rozvoje platí

$$u_i' = u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j, \quad (\text{VII.19})$$

je

$$(\Delta \mathbf{r} + \mathbf{u}' - \mathbf{u})^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = 2e_{ij} \Delta x_i \Delta x_j, \quad (\text{VII.20})$$

kde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (\text{VII.21})$$

jsou složky symetrického tenzoru deformace tvořícího v prostoru pole, které se obecně mění v čase. Analogicky k (VII.11) lze proto psát

$$u_i' = u_i + e_{ij}\Delta x_j + \varphi_{ij}\Delta x_j, \quad (\text{VII.22})$$

kde

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}). \quad (\text{VII.23})$$

Povšimněme si, že na rozdíl od matice ω_{ij} není již matice φ_{ij} antisymetrická.

Často se ovšem setkáváme s případem, kdy se pole posunutí mění v prostoru jen pomalu, takže hodnoty derivací v (VII.21) jsou malé ve srovnání s jedničkou a jejich kvadrát lze zanedbat. Pak mluvíme o *tenzoru malé deformace*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{VII.24})$$

Nadále se budeme zabývat jen tímto případem a slovo „malé“ budeme obvykle vynechávat.

Poznamenejme, že rychlost a zrychlení částic deformovaného kontinua počítáme jako

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i}, \quad a_i = \frac{dv_i}{dt} = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i}, \quad (\text{VII.25})$$

protože nyní se souřadnice x_i vztahují k rovnovážné poloze, která se s časem nemění. Pro malé deformace je tedy tenzor rychlosti deformace dán časovou derivací tenzoru deformace

$$\eta_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{x_i}. \quad (\text{VII.26})$$

Vysvětleme geometrický význam tenzoru deformace. Mějme v daném bodě kontinua ortonormální trojhran e_1, e_2, e_3 . Deformací se každý bod kontinua o poloze Δx_i posune do bodu

$$\Delta x_i + \varepsilon_{ij}\Delta x_j \quad (\text{VII.27})$$

a vektory $e_1^{\text{def}}, e_2^{\text{def}}, e_3^{\text{def}}$ vytvoří trojhran o komponentách

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.28})$$

Jde-li o malou deformaci, jsou všechny komponenty ε_{ik} malé oproti jedničce. Vidíme, že diagonální komponenty tenzoru deformace mají význam relativních prodloužení ve směru souřadnicových os a nediagonální komponenty určují odchýlení těchto os od původního směru. Trojhran v původně jednotkovém objemu má po deformaci objem rovný determinantu matice (VII.28), tedy (po zanedbání členů vyššího řádu) je relativní přírůstek objemu

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} . \quad (\text{VII.29})$$

Důležitý je rozklad tenzoru deformace

$$\varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{aa} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{aa} . \quad (\text{VII.30})$$

První člen má nulovou stopu (součet diagonálních prvků) a odpovídá proto deformaci beze změny objemu — čistému smyku. Tento člen se nazývá *deviátorem* příslušného tenzoru. Druhý člen má nulové nediagonální prvky a odpovídá proto čistě objemové deformaci.

Při řešení praktických problémů teorie pružnosti se často setkáváme s úlohou rozřešit rovnici (VII.24) vzhledem k neznámým složkám posunutí u_i . Tato úloha není řešitelná pro libovolný tvar ε_{ij} , ale vyžaduje splnění *rovníc kompatibility*

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jrs} \frac{\partial^2 \varepsilon_{lr}}{\partial x_m \partial x_s} = 0 . \quad (\text{VII.31})$$

Prímým výpočtem lze ověřit, že tyto rovnice plynou z definice (VII.24). Důkaz, že rovnice kompatibility jsou také postačujícími podmínkami pro řešitelnost dané úlohy, najde čtenář v rozsáhlejších učebnicích mechaniky kontinua.

VII.3 Tenzory a tenzorová pole

Jak jsme viděli v předchozích odstavcích, hrají v mechanice kontinua významnou úlohu časově proměnná vektorová a tenzorová pole, z nichž můžeme pomocí algebraických a diferenciálních operací vytvářet pole další. Než přejdeme k dynamice kontinua, bude proto vhodné seznámit se s tenzorovým počtem poněkud podrobněji. Neklademe si ovšem za cíl nahradit speciální literaturu tomuto předmětu věnovanou. Čtenář s hlubším zájmem o teoretickou fyziku nepochybně dříve či později dospěje k nutnosti si své znalosti doplnit a prohloubit. Je vhodné upozornit, že existuje řada rozdílných přístupů

k tomuto tématu, které jsou sice matematicky ekvivalentní, ale značně se liší stylem, postupem i použitou symbolikou. Každý z těchto přístupů má své specifické přednosti i nevýhody a je proto vhodné, když se fyzik neváže na přístup jediný, ale osvojí si postupně schopnost vidět jejich společnou podstatu a dovede si volit nejvhodnější formulaci podle vlastních potřeb.

Tenzor 2. řádu jsme definovali v V.3. Rozšíření definice na libovolný řád je zřejmé: *Tenzorem* p -tého řádu a dimenze n nazveme multilineární zobrazení z kartézského součinu p n -rozměrných vektorových prostorů⁴⁰ do prostoru reálných čísel. Tedy tenzor p -tého řádu přiřazuje uspořádané p -tici vektorů $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_p$ číslo $T(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_p)$, přičemž

$$T(\dots, a\mathbf{A} + b\mathbf{B}, \dots) = aT(\dots, \mathbf{A}, \dots) + bT(\dots, \mathbf{B}, \dots) \quad (\text{VII.32})$$

pro libovolný argument. Tenzor lze tedy chápat jako „černou skříňku“ s p vstupními kanály, které zaplníme vektory a na výstupu dostáváme číslo, přičemž platí uvedený vztah multilinearity. Proto je tenzor plně určen svým působením na vektory báze, tj. svými komponentami v dané bázi. Abychom se vyhnuli komplikovanému značení tenzoru libovolného řádu, vezmeme konkrétní případ tenzoru 4. řádu. Jeho komponenty jsou

$$T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = T_{ijkl}, \quad (\text{VII.33})$$

kde \mathbf{e}_i je n -tice ortonormálních vektorů. Změní-li se báze podle vztahu

$$\mathbf{e}'_k = c_{ki} \mathbf{e}_i, \quad (\text{VII.34})$$

transformují se komponenty tenzoru podle vztahu

$$T'_{spqr} = c_{si} c_{pj} c_{qk} c_{rl} T_{ijkl}. \quad (\text{VII.35})$$

Zobecnění na tenzory libovolného řádu je zřejmé, stejně jako fakt, že vektory jsou tenzory 1. řádu. Za tenzory 0. řádu můžeme považovat čísla — v této souvislosti se nazývají *skaláry*.

Tenzory stejného řádu lze sčítat tak, že sečteme jejich komponenty, čímž obdržíme nový tenzor. Například součtem tenzorů 3. řádu U a V je tenzor téhož řádu Z , přičemž o komponentách platí

$$Z_{ijk} = U_{ijk} + V_{ijk}. \quad (\text{VII.36})$$

⁴⁰ Většina dále uvedených výsledků platí pro tenzory libovolné dimenze, v této části je ovšem potřebujeme pro 3-rozměrný prostor.

Tenzory libovolných řádů p a q lze násobit tak, že znásobíme jejich komponenty a dostaneme tak tenzor řádu $p+q$. Například součinem tenzoru 2. řádu M a tenzoru 3. řádu N je tenzor 5. řádu O , přičemž o komponentách platí

$$O_{ijklm} = M_{ij}N_{klm} . \quad (\text{VII.37})$$

Tenzory řádu $p \geq 2$ je možné *zúžit*, čímž dostaneme tenzor řádu $p - 2$. Úžení se provede sečtením přes vybranou dvojici indexů. Například zúžením tenzoru 4. řádu R v prvním a čtvrtém indexu dostáváme tenzor 2. řádu S , přičemž o komponentách platí

$$S_{ij} = R_{aija} . \quad (\text{VII.38})$$

Z relací ortonormality

$$c_{ik}c_{jk} = c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij} \quad (\text{VII.39})$$

a z transformačního vztahu typu (VII.35) vyplývá, že výsledek úžení nezávisí na použité bázi, takže definice úžení je korektní.

Speciálně důležitým tenzorem 2. řádu je tenzor o komponentách δ_{ij} , který hraje úlohu metrického tenzoru. Jeho komponenty jsou ve všech ortonormálních bázích stejné, jde tedy o tzv. *izotropní* tenzor. Vzhledem k ortonormálním transformacím s determinantem rovným jedné je izotropním tenzorem také Levi-Civitův tenzor ϵ_{ijk} . Je-li determinant roven minus jedné, násobí se pravá strana transformačního vztahu typu (VII.35) navíc tímto determinantem, tj. dojde ke změně znaménka. Takové veličiny se nazývají *pseudotenzorem*, popř. *pseudovektorem*, *pseudoskalárem*. Rozdíl mezi tenzory a pseudotenzory je důležitý při studiu chování fyzikálních veličin vzhledem k operaci zrcadlení.

Často se setkáváme s kombinací operace tenzorového součinu a operace úžení. Příkladem o působení tenzoru na vektory, jimiž jsme tenzor definovali. Například tenzor 2. řádu o komponentách T_{ij} definuje bilineární formu $T_{ij}A_iB_j$, ale také kvadratickou formu $T_{ij}R_iR_j$ a dvojici lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory zadanými v komponentách jako $T_{ij}R_j$ a $T_{ij}R_i$, jakož i lineární zobrazení prostoru tenzorů 2. řádu do prostoru reálných čísel $T_{ij}S_{ij}$. Fyzikálně a geometricky významné tenzory nebývají vždy zaváděny podle obecné definice pomocí multilineární formy, ale pomocí některého z takovýchto přidružených zobrazení. Například tenzor setrvačnosti vystupuje jako kvadratická forma přiřazující vektoru úhlové rychlosti kinetickou energii rotace, popř. jako lineární zobrazení přiřazující této úhlové rychlosti vektor momentu hybnosti, jak uvádíme v V.2. V mechanice kontinua se setkáváme s dalšími příklady tohoto druhu.

Je-li tenzor (vektor, skalár) dán v každém bodě euklidovského prostoru, přičemž jeho komponenty jsou spojitými funkcemi souřadnic, mluvíme o *tenzorovém poli*. Sečítání, násobení a úžení tenzorových polí provádíme tak, že sečítáme, násobíme či úžeme příslušné tenzory v každém bodě prostoru.

Stejně jako v mechanice hmotného bodu bývá i v mechanice kontinua někdy výhodné použít křivočarých souřadnic. Pak lze užít aparátu, který jsme již uvedli v I.3. Báze e_i spojená s křivočarými souřadnicemi není ortonormální, skalární součiny

$$e_i e_j = g_{ij} = g(e_i, e_j) \quad (\text{VII.40})$$

definují kovariantní komponenty metrického tenzoru, duální kontravariantní báze e^j je definována vztahy

$$e_i e^j = \delta_i^j. \quad (\text{VII.41})$$

Při transformaci vektorů kovariantní báze

$$e'_i = c_i^k e_k, \quad \text{Det}(c_i^k) \neq 0, \quad (\text{VII.42})$$

se kontravariantní báze transformuje vztahem

$$e'^i = d_k^i e^k, \quad (\text{VII.43})$$

v němž matice c a d jsou vzájemně inverzní, tj.

$$d_i^k c_k^l = \delta_i^l. \quad (\text{VII.44})$$

Vzhledem k tomu lze definovat kovariantní, kontravariantní i smíšené komponenty tenzorů. Například

$$R^{ijk}_l = R(e^i, e^j, e^k, e_l) \quad (\text{VII.45})$$

a transformačním zákonem je

$$R'^{pqr}_s = d_i^p d_j^q d_k^r c_s^l R^{ijk}_l. \quad (\text{VII.46})$$

Úžení lze provádět přes horní a dolní index

$$S^{kl} = R^{ikl}_i \quad (\text{VII.47})$$

v důsledku relací (VII.44).

Snadno lze ukázat, že kovariantní a kontravariantní komponenty tenzorů se vzájemně převádějí pomocí metrického tenzoru stejně jako komponenty vektorů v I.3. Je tedy například

$$g^{ik}T_{ij} = T_j^k, \quad g_{ik}T^{ij} = T_k^j, \quad g^{ia}g^{kb}S_{ab}^l = S^{ikl} \quad (\text{VII.48})$$

apod., přitom

$$g^{ik} = e^i e^k \quad (\text{VII.49})$$

je matice inverzní k matici g_{kl} . Mluvíme o zvedání či spouštění indexů, popř. o „tenzorové gymnastice“.

Ukažme ještě, jak souvisí transformační matice užitá v (VII.46) se záměnami křivočarých souřadnic $x'^i = x'^i(x^j)$. Podle I.3 můžeme psát pro vektory kovariantní báze e_i a e'_i ve dvou systémech souřadnic x^i a x'^i

$$e'_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = c_i^j e_j, \quad (\text{VII.50})$$

čili

$$c_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}. \quad (\text{VII.51})$$

Podobně pro vektory kontravariantní báze máme

$$e'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \mathbf{r}} = d_j^i e^j, \quad (\text{VII.52})$$

čili

$$d_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \quad (\text{VII.53})$$

Matice c_j^i , d_j^i jsou obecně funkcemi souřadnic.

VII.4 Derivování tenzorových polí

Při záměnách kartézských souřadnic je

$$x'_k = c_{ki}x_i + a_k, \quad (\text{VII.54})$$

kde případné posunutí počátku nemá vliv na hodnoty komponent tenzorů a matice

$$c_{ki} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \quad (\text{VII.55})$$

jsou konstantní. Pro operaci parciálního derivování podle souřadnic lze psát

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_i} = c_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (\text{VII.56})$$

Porovnáním s transformačním vztahem typu (VII.35), kde transformační matice jsou konstantní, zjišťujeme, že index spojený s derivováním se v kartézských souřadnicích chová jako index tenzorový. Můžeme proto v těchto souřadnicích derivovat libovolné tenzorové pole a obdržet tak pole řádu o jednotku vyšší. Mějme například vektorové pole A_i , jeho derivováním obdržíme tenzorové pole 2. řádu $T_{ij} = A_{i,j}$ a dalším derivováním tenzorové pole 3. řádu $S_{ijk} = T_{ij,k} = A_{i,j,k}$. Často se operace derivování kombinuje s operací úžení, například z tenzorového pole T_{ij} lze vytvořit vektorové pole $P_i = T_{ij,j}$ či skalární pole $f = T_{ij,ji}$.

Připomeňme ještě, že při derivování skalárních či vektorových polí užíváme často operátor⁴¹

$$\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad (\text{VII.57})$$

pomocí něhož zavádíme

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \nabla F = F_{,i} e_i , \\ \text{div } \mathbf{A} &= \nabla \mathbf{A} = A_{i,i} , \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} A_{k,j} e_i \end{aligned} \quad (\text{VII.58})$$

(poslední operace je na rozdíl od předchozích možná jen v 3-rozměrném prostoru).

Připomeňme na tomto místě *Helmholtzovu větu* dokazovanou v učebnicích vektorové analýzy: Každé spojitě a diferencovatelné vektorové pole můžeme jednoznačně (až na pole konstantní v prostoru) rozložit na součet částí, z nichž jedna má nulovou rotaci a druhá nulovou divergenci, tj. lze psát

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 , \quad \text{div } \mathbf{A}_1 = 0 , \quad \text{rot } \mathbf{A}_2 = 0 . \quad (\text{VII.59})$$

Dvojí aplikací operátoru ∇ a zúžením dostaneme Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} , \quad (\text{VII.60})$$

který lze aplikovat na libovolné tenzorové (vektorové, skalární) pole. Aplikací tohoto operátoru se řád pole nemění.

⁴¹ Operátor se nazývá „nabla“. Je to název hebrejského hudebního nástroje, který svým tvarem připomíná.

Použití křivočarých souřadnic si vyžaduje přepsání pohybových rovnic kontinua, které jsou parciálními diferenciálními rovnicemi pro vektorová a tenzorová pole. Potíž, na niž přitom narážíme, spočívá v tom, že derivace polí podle křivočarých souřadnic již tenzorové pole netvoří, protože nekonzistentnost transformačních matic narušuje tenzorové transformační vztahy.

Označme kartézské souřadnice X_i , křivočaré souřadnice x^j , kartézské komponenty polí značme hvězdičkou. Vezměme pro konkrétnost vektorové pole A_i^* . Jeho derivováním v kartézských souřadnicích získáme tenzorové pole $A_{i,j}^*$. Veličiny $A_{i,j}$ vypočtené v křivočarých souřadnicích však již tenzorové pole netvoří. Označíme proto komponenty derivovaného pole přepsané do křivočarých souřadnic jako $A_{i;j}$. Podle transformačních vztahů typu (VII.46) je

$$A_k^* = \frac{\partial x^l}{\partial X_k} A_l, \quad A^i = \frac{\partial X_k}{\partial x^i} A_k^*, \quad A_{i;j} = \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \frac{\partial X_s}{\partial x^j} A_{k,s}^*. \quad (\text{VII.61})$$

Protože je zřejmé

$$A_{i;j} = \frac{\partial}{\partial X_s} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x^i} A_k^* \right) \frac{\partial X_s}{\partial x^j} = \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \frac{\partial X_s}{\partial x^j} A_{k,s}^* + \frac{\partial^2 X_k}{\partial x^i \partial x^j} A_k^*, \quad (\text{VII.62})$$

porovnáním s předchozími vztahy vidíme, že

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma_{ij}^l A_l, \quad (\text{VII.63})$$

kde jsme označili

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{\partial^2 X_k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial X_k}. \quad (\text{VII.64})$$

Pro tenzorové pole s libovolným počtem indexů bychom obdobně dostali

$$T_{\cdot b \cdot j}^{\cdot a \cdot} = T_{\cdot b \cdot j}^{\cdot a \cdot} + \dots + T^{\cdot k \cdot} \Gamma_{kj}^a \Gamma_{\cdot k \cdot}^b - \dots. \quad (\text{VII.65})$$

Funkce souřadnic $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ nazýváme *Christoffelovými symboly* a operaci značenou středníkem *kovariantní derivací*. Její zavedení umožňuje rozšířit operaci derivování i na křivočaré souřadnice. Poznamenejme, že samotné Christoffelovy symboly netvoří tenzorové pole, což je zřejmé už z toho, že v kartézské soustavě jsou rovny nule.

Je vhodné vyjádřit Christoffelovy symboly způsobem, který by nás nevázal na původní kartézské souřadnice. Za tím účelem aplikujeme (VII.65) na komponenty metrického pole a využijeme toho, že jeho kovariantní derivace musí být rovna nule, protože metrické pole je v kartézských souřadnicích konstantní. Dostáváme tak

$$g_{ik,l} = g_{mk} \Gamma_{il}^m + g_{mi} \Gamma_{kl}^m \quad (\text{VII.66})$$

a další dvě rovnice téhož typu pro $g_{li,k}$ a $g_{kl,i}$ cyklickou záměnou indexů. Jestliže první z těchto rovnic přičteme a druhou odečteme od (VII.66), dospějeme k vyjádření Christoffelových symbolů pomocí metrického pole ve tvaru

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}) . \quad (\text{VII.67})$$

Ukažme ještě, že zúžené Christoffelovy symboly lze vyjádřit pomocí determinantu metrického tenzoru $g = \text{Det}(g_{ij})$. Z definice determinantu vyplývá, že

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g g^{ik} , \quad (\text{VII.68})$$

tudíž $g_{,k} = g g^{im} g_{im,k}$ a

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} . \quad (\text{VII.69})$$

Nyní je již snadné zapsat tenzorové diferenciální rovnice, známé v kartézských souřadnicích, takovým způsobem, aby platily v souřadnicích libovolných. K tomu stačí nahradit parciální derivace derivacemi kovariantními a dále, pokud se v těchto rovnicích vyskytuje úžení přes dvojici indexů, umístit jeden index nahoře a druhý dole.

Abychom mohli vyjádřit v křivočarách souřadnicích i vektorový součin či operaci rotace, uvažme, jak se v nich vyjadřuje Levi-Civitův tenzor. Tento tenzor může být pouze násobkem Levi-Civitova permutačního symbolu. Je-li v souřadnicích x^i roven $K \epsilon_{ijk}$ a v souřadnicích x'^i roven $K' \epsilon'_{ijk}$, je transformační vztah dán relací

$$K' \epsilon'_{ijk} = K \epsilon_{pqr} c_i^p c_j^q c_k^r . \quad (\text{VII.70})$$

Vynásobením ϵ_{ijk} dostáváme

$$K' = cK , \quad (\text{VII.71})$$

kde $c = \text{Det}(c_i^j)$. Z transformačního vztahu pro komponenty metrického tenzoru plyne pro jeho determinant

$$g' = c^2 g , \quad (\text{VII.72})$$

přitom v kartézských souřadnicích $g = 1$. Odtud je zřejmé, že je třeba položit $K = \sqrt{g}$ a pro Levi-Civitův (pseudo)tenzor v křivočarách souřadnicích platí

$$e_{ijk} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} . \quad (\text{VII.73})$$

Využitím předchozích vztahů můžeme přepsat do křivočarých souřadnic operace grad, div, rot. Je tedy

$$\begin{aligned} [\text{grad } F]_i &= F_{;i} = F_{,i} , \\ \text{div } \mathbf{A} &= A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} A^i \right)_{,i} , \\ [\text{rot } \mathbf{A}]_i &= e_{ijk} A_{k;j} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} A_{k,j} . \end{aligned} \quad (\text{VII.74})$$

Povšimněme si, že pro výpočet těchto operací není třeba znát Christoffelovy symboly. Poznamenejme ještě, že v případě ortogonálních souřadnic se složky gradientu, rotace i jiných vektorových a tenzorových polí někdy uvádějí v tzv. fyzikální bázi, jež vzniká normováním vektorů kovariantní (popř. kontravariantní) báze. O tom jsme již hovořili v závěru I.3.

VII.5 Integrovaní polí

Jak uvidíme v dalším textu, základní rovnice mechaniky kontinua jsou těsně spojeny se zákony zachování jistých úhrnných veličin, které dostáváme z veličin lokálních (hodnot polí v daném místě prostoru) integrací přes objem. Budeme se proto zabývat integrováním polí v euklidovském prostoru, kde nám usnadňuje situaci fakt, že lze definovat rovnost vektorů či tenzorů v různých bodech. Dva vektory (tenzory) v různých bodech jsou si rovny, jsou-li si rovny jejich komponenty v kartézských souřadnicích. Sčítání tenzorů definovaných v různých bodech, které v limitě přechází v integraci, lze proto provádět tak, jako by šlo o prvky jediného vektorového prostoru. Je-li například dáno vektorové pole $\mathbf{A} = A_i(x_j) \mathbf{e}_i$ v jisté oblasti euklidovského prostoru, pak jeho integrál přes tuto oblast je

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \mathbf{A} \, d\Omega = \mathbf{e}_i \int_{\Omega} A_i \, d\Omega , \quad (\text{VII.75})$$

kde píšeme $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$. Je zřejmé, že komponenty B_i se při záměně kartézských souřadnic transformují jako komponenty vektoru (transformační matici lze vytknout před integrál). Vektor \mathbf{B} nezávisí na souřadnicích a může být umístěn v kterémkoliv bodě prostoru. Je to tedy *volný vektor* na rozdíl od *vázaného vektoru* \mathbf{A} jakožto hodnoty pole v jistém bodě.

Zcela analogicky můžeme přes oblast Ω integrovat tenzorové pole libovolného řádu tak, že integrujeme jeho kartézské komponenty. Výsledkem je opět „volný“ tenzor, který může být umístěn v kterémkoliv bodě.

I v rámci euklidovského prostoru se však setkáváme s integrály přes vnořené plochy, které jsou zakřiveny a nejsou již tedy euklidovskými prostory. S ohledem na pozdější využití v čtyřrozměrném prostorově čase teorie relativity se budeme nejprve zabývat problémem integrace na vnořených plochách v plochém prostoru obecněji.

Tyto plochy jsou (lokálně) zadány parametricky jako

$$x_i = x_i(q^\alpha), \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (\text{VII.76})$$

Zde q^α mají význam souřadnic na vnořené m -rozměrné nadploše. Vzdálenost mezi blízkými body nadplochy lze vyjádřit v kartézských souřadnicích x_i i v křivočarých souřadnicích q^α , je tedy

$$ds^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q^\beta} dq^\alpha dq^\beta. \quad (\text{VII.77})$$

Odtud vidíme, že metrické pole nadplochy je

$$g_{\alpha\beta}(q^\delta) = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q^\beta}. \quad (\text{VII.78})$$

Povšimněme si, že pro případ $m = n$ by šlo prostě o přepis metrického pole do křivočarých souřadnic.

Při záměně souřadnic $q'^\alpha = q'^\alpha(q^\beta)$ splňuje odmocnina z determinantu metrického tenzoru transformační vztah

$$\sqrt{g'} = |c| \sqrt{g} \quad (\text{VII.79})$$

plynoucí z (VII.72), kde c je jakobián transformace od q^α ke q'^β . Naopak pro integrační element $d\Sigma = dq^1 \dots dq^m$ platí

$$d\Sigma' = |c|^{-1} d\Sigma, \quad (\text{VII.80})$$

takže hodnota integrálu

$$S = \int_{\Sigma} \sqrt{g} d\Sigma = \int_{\Sigma} dS, \quad dS = \sqrt{g} d\Sigma \quad (\text{VII.81})$$

přes oblast Σ nadplochy nezávisí na volbě souřadnic. Veličina S (VII.81) je přirozeným zobecněním objemu oblasti v euklidovském prostoru. Můžeme proto zavést integrál skalární funkce $F(x_i(q^\alpha))$ přes nadplochu s metrickým polem jako

$$\int_{\Sigma} F \sqrt{g} d\Sigma = \int_{\Sigma} F dS. \quad (\text{VII.82})$$

Tyto integrály nazýváme *integrály 1. druhu*. Ve fyzikálních aplikacích jsou důležité i *integrály 2. druhu*, které zavedeme zatím jen pro plochy a křivky v 3-rozměrném euklidovském prostoru.

Vezměme nejprve křivku o parametrickém vyjádření $x_i(\sigma)$. Zavedme pole jednotkového tečného vektoru \mathbf{l} ke křivce (zřejmě je možná dvojí volba odpovídající dvojí možné orientaci křivky). Pak lze definovat *křivkový integrál* vektorového pole \mathbf{A} přes oblast (interval parametru) na křivce

$$c = \int_s \mathbf{A} \mathbf{l} ds = \int_s \mathbf{A} ds, \quad ds = \mathbf{l} ds, \quad (\text{VII.83})$$

tj. $\mathbf{A} \mathbf{l}$ hraje úlohu integrované funkce ve vztahu (VII.82). Metrické pole má na křivce jedinou komponentu g a podle (VII.78) platí

$$g = \frac{dx_i}{d\sigma} \frac{dx_i}{d\sigma}. \quad (\text{VII.84})$$

Je tedy

$$ds = \sqrt{g} d\sigma, \quad l_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{dx_i}{d\sigma}, \quad ds_i = dx_i. \quad (\text{VII.85})$$

Lze tedy psát

$$c = \int_s \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_s A_i dx_i. \quad (\text{VII.86})$$

V případě, že integrační oblastí je uzavřená křivka (hranice jisté 2-rozměrné omezené oblasti), píšeme často

$$c = \oint_s \mathbf{A} d\mathbf{r} \quad (\text{VII.87})$$

a číslo c nazýváme *cirkulací* pole \mathbf{A} podél uzavřené křivky s . Znaménko cirkulace záleží na volbě orientace křivky.

Vezměme nyní plochu, kterou lze lokálně zapsat jako $x_i(u, v)$. Zavedme pole jednotkové normály k ploše \mathbf{n} (u orientovatelných ploch je dvojí volba, odpovídající tomu, že plocha má dvě strany; u neorientovatelné plochy se omezíme na její orientovatelnou oblast). Pak lze definovat *plošný integrál* vektorového pole \mathbf{A} přes oblast Σ na ploše

$$d = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \mathbf{A} d\mathbf{S}, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS. \quad (\text{VII.88})$$

Podle vztahů (VII.78) a (VII.81) platí

$$dS = \sqrt{EF - G^2} \, du \, dv, \quad (\text{VII.89})$$

kde

$$E = g_{uu} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$F = g_{vv} = \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \quad G = g_{uv} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}. \quad (\text{VII.90})$$

Vektor jednotkové normály vypočteme jako normovaný vektorový součin vektorů kovariantní báze na ploše, tj.

$$n_i = \frac{\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v}}{\sqrt{EF - G^2}}, \quad (\text{VII.91})$$

takže lze psát

$$dS_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \, du \, dv. \quad (\text{VII.92})$$

Integrál (VII.88) se nazývá *tokem* vektorového pole \mathbf{A} plochou Σ . Jeho znaménko závisí na volbě orientace plochy⁴². Často se setkáváme s případem, že Σ je uzavřená plocha (hranice jisté 3-rozměrné omezené oblasti). V tomto případě obvykle píšeme

$$d = \oint_{\Sigma} \mathbf{A} \, dS \quad (\text{VII.93})$$

a není-li řečeno jinak, počítáme integrál pomocí vnější normály.

VII.6 Gaussova a Stokesova věta

Gaussova a Stokesova věta mají zásadní význam jako most mezi diferenciálními a integrálními zákony ve fyzice. Jsou zvláštními případy zobecněné Stokesovy věty spojující jistý integrál přes oblast libovolné dimenze s integrálem přes její hranici, která se podrobně probírá v kurzu matematické analýzy. Jde o zobecnění základní věty integrálního počtu

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a), \quad (\text{VII.94})$$

⁴² Ve vzorci (VII.91) byl směr normály určen souřadnicovým systémem na ploše.

kdy integrál z derivace funkce přes interval je roven rozdílu funkčních hodnot na hranicích intervalu. Vztah (VII.94) lze snadno zobecnit na případ křivky v 3-rozměrném prostoru

$$\int_a^b \text{grad } F \, d\mathbf{r} = F(b) - F(a) . \quad (\text{VII.95})$$

Mějme nyní namísto křivky 2-rozměrnou omezenou oblast Σ či 3-rozměrnou omezenou oblast Ω .⁴³ Pak lze dokázat, že pro spojitě vektorové pole \mathbf{A} se spojitými prvními derivacemi platí

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \, d\mathbf{S} , \quad (\text{VII.96})$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \, d\mathbf{r} . \quad (\text{VII.97})$$

Vztah (VII.96) je *věta Gaussova* (někdy též Gaussova–Ostrogradského), vztah (VII.97) *věta Stokesova*. Jako $\partial\Omega$, popř. $\partial\Sigma$, jsme označili hranice příslušných oblastí, které třeba mohou sestávat i z více uzavřených křivek či ploch (například v případě mezikruží či mezikoulí). V integrálu na pravé straně (VII.96) míří normála \mathbf{n} ven z oblasti Ω , v integrálech (VII.97) jsou orientace plochy Σ a její hranice $\partial\Sigma$ sladěny tak, že tečný vektor k hranici $\mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$, kde \mathbf{m} je vektor tečný k Σ , kolmý k $\partial\Sigma$ a mířící ven ze Σ . Užíváme-li pravotočivého systému kartézských souřadnic, znamená to, že hranice obíhá normálu k ploše proti směru hodinových ručiček.

Gaussovy a Stokesovy věty lze užít k tzv. integrální definici divergence a rotace. Je

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{S}}{V} , \quad (\text{VII.98})$$

kde V je objem oblasti obklopující daný bod, a plošný integrál se počítá přes uzavřenou plochu tento objem obklopující. Podobně je

$$\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{r}}{S} , \quad (\text{VII.99})$$

kde S je velikost plochy o jednotkové normále \mathbf{n} obklopující daný bod, a křivkový integrál se počítá přes uzavřenou křivku obcházející tuto plochu.

⁴³ Požaduje se, aby Σ byla orientovatelná a po částech hladká, přičemž její hranice je tvořena po částech hladkými křivkami; hranice Ω je tvořena po částech hladkými plochami.

Integrální definice zřetelně ukazují geometrický a fyzikální význam divergence jako *zřídla* a rotace jako *víru*. Helmholtzovu větu zmíněnou v VII.4 lze tedy slovně formulovat tak, že každé vektorové pole lze rozložit na část *nezřídlovou* a *nevírovou*.

Poznamenejme ještě, že Gaussovy věty se často užívá v obecnější podobě, kterou však lze z (VII.96) snadno odvodit. Vezměme speciální vektorové pole o komponentách $\mathbf{A} = (A(x_i), 0, 0)$. Pak Gaussova věta dává

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} A \, dV = \oint_{\partial\Omega} A \, dS_x \quad (\text{VII.100})$$

a protože podobnou úvahu můžeme provést i pro pole s nenulovou komponentou y či z , vyjadřuje Gaussova věta v nejobecnější podobě možnost záměny

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\dots) \, dV = \oint_{\partial\Omega} (\dots) \, dS_i \quad (\text{VII.101})$$

pro každé i , přičemž v závorkách stojí funkce souřadnic, jejichž transformační zákon není pro platnost vztahu podstatný.

VII.7 Rovnice kontinuity

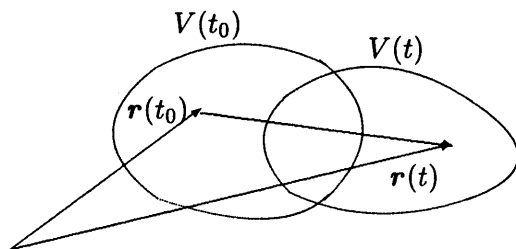
Nyní se můžeme obrátit k zákonům pohybu kontinua. Chování hmotných bodů podrobených silám záviselo na jejich hmotnosti, o níž jsme předpokládali, že se během pohybu nemění. V mechanice kontinua je rozložení hmotnosti popsáno její *hustotou*. Dojdeme k ní tak, že vystředujeme v čase Δt hmotnosti všech molekul nacházejících se v objemu ΔV (Δt i ΔV jsou fyzikálně nekonečně malé). Střední hodnota celkové hmotnosti dělená objemem

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (\text{VII.102})$$

závisí na místě a čase, v němž bylo středování prováděno, a vytváří tak časově proměnné skalární pole hustoty hmotnosti $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Zákon zachování hmotnosti vyžaduje, aby se veličina

$$M = \int_{V(t)} \rho \, dV \quad (\text{VII.103})$$



Obr. 15: Objem unášený kontinuem. Soubor částic proudícího kontinua zaujímá v čase t_0 objem $V(t_0)$ a v čase t objem $V(t)$. Oblasti $V(t_0)$ a $V(t)$ se obecně liší jak velikostí, tak i varem.

neměnila v čase pro libovolný objem, který se pohybuje spolu s kontinuem (je jim „unášen“, viz obr. 15). Jinak řečeno musí platit

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (\text{VII.104})$$

Tento integrální zákon chceme nahradit parciální diferenciální rovnicí. Nejprve je třeba přesunout derivaci za integrál. To nemůžeme přímo učinit vzhledem k časové proměnnosti objemu. Lze však psát s využitím transformace proměnných podle vztahu (VII.3)

$$\int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t_0)} \rho J dV, \quad (\text{VII.105})$$

kde

$$J = \text{Det} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right) = 1 + (t - t_0) \text{div } \mathbf{v} + \dots \quad (\text{VII.106})$$

Přitom jsme užili prvního přiblížení Taylorova rozvoje pro pohyb kontinua (VII.3), tj.

$$x_i = x_i(x_{0i}, t) = x_{0i} + v_{0i}(t - t_0) + \dots \quad (\text{VII.107})$$

Nyní již lze uvést derivaci za integrál a psát

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t_0)} \frac{d}{dt} (\rho J) dV = \int_{V(t_0)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (\text{VII.108})$$

Pomocí vztahu

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \text{ grad } \rho, \quad (\text{VII.109})$$

který se dokáže analogicky jako (VII.7), a identity

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \quad (\text{VII.110})$$

lze také psát

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t_0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (\text{VII.111})$$

Poznamenejme, že tento vztah pro derivaci integrálu přes časově proměnnou oblast platí nejen pro integrál z hustoty ρ , ale i pro integrál libovolné funkce $f(\mathbf{r}, t)$. Protože rovnice (VII.108), (VII.111) platí pro libovolný objem a pro libovolný počáteční čas t_0 , dostáváme

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (\text{VII.112})$$

což jsou dva ekvivalentní zápisy hledané rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování hmotnosti v *diferenciálním tvaru*.

Zavedeme-li hustotu toku hmotnosti $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, můžeme ji také zapsat jako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (\text{VII.113})$$

Integrujme tuto rovnici přes objem V pevně vytyčený v prostoru, kterým kontinuum protéká. Využitím Gaussovy věty (VII.96) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_{\Sigma} \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (\text{VII.114})$$

kde Σ je hranice objemu V . Užitím parciální derivace podle času vyznačujeme, že máme na mysli derivaci při nehybné oblasti integrace V .

Vztah (VII.114) vyjadřuje rovnici kontinuity v *integrálním tvaru*, časová změna hmotnosti v objemu, kterým kontinuum protéká, je daná tokem hmotnosti přes hranici tohoto objemu.

Diferenciální (VII.113) i integrální (VII.114) tvar rovnice kontinuity vyjadřuje nejen zákon zachování hmotnosti, ale i dalších spojitě rozložených fyzikálních veličin o hustotě ρ a hustotě toku \mathbf{j} . Například ρ může být hustota elektrického náboje a \mathbf{j} hustota elektrického proudu.

VII.8 Plošné a objemové síly. Tenzor napětí

Pohyb soustav hmotných bodů se podle vztahu (I.10) řídí 1. impulzovou větou, podle níž je časová změna úhrnné hybnosti soustavy rovna součtu vnějších sil na ni působících. To musí zůstat v platnosti i v rámci newtonovské mechaniky kontinua. Je tedy

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F} , \quad (\text{VII.115})$$

kde \mathbf{F} je výslednice vnějších sil působících na objem V unášený kontinuem.

Užijme vztahu typu (VII.111), kde úlohu integrované funkce hrají namísto ρ jednotlivé komponenty ρv_i . Dostáváme tak

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_i dV = \int_{V(t_0)} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right) dV . \quad (\text{VII.116})$$

Výraz za integrálem lze s přihlédnutím k rovnici kontinuity (VII.112) a výrazu pro zrychlení (VII.7) přepsat jako

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) v_i + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} \right) = \rho a_i . \quad (\text{VII.117})$$

Platí tedy⁴⁴

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t_0)} \rho \mathbf{a} dV , \quad (\text{VII.118})$$

kde \mathbf{a} je pole zrychlení v kontinuu.

Věnujme se nyní pravé straně rovnice (VII.115). Síly působící na kontinuum lze obvykle rozdělit na dva základní typy. První typ tvoří *síly dalekého dosahu*, jak je již známe z mechaniky soustav hmotných bodů. V běžných aplikacích jsou tyto síly buzeny vzdálenými hmotami mimo sledované kontinuum, jindy (například v astrofyzice a v kosmologii) však mohou být způsobeny i samotným kontinuem. Zůstává však vždy v platnosti, že podíl bezprostředního okolí dané části kontinua je na těchto silách zanedbatelný, takže její izolaci by se nezměnily, působí v celém objemu kontinua, a proto se jim říká *síly objemové*.

⁴⁴ Stručněji, i když méně korektně, lze způsob uvedení derivace za integrál odvodnit tím, že element hmotnosti $dm = \rho dV$ na čase nezávisí.

Typickým příkladem tohoto druhu je gravitace, lze sem však zařadit i makroskopické elektromagnetické pole působící na elektricky nabitě kontinuum či setrvačné síly v neinerciálních systémech. Výslednici objemových sil lze vyjádřit jako integrál její hustoty přes objem, přičemž hustota se obvykle vztahuje k jednotce hmotnosti, takže

$$\mathbf{F}_I = \int_V \rho \mathbf{f} \, dV, \quad (\text{VII.119})$$

kde \mathbf{f} je obecně časově proměnné vektorové pole. Například u gravitace $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ je to intenzita gravitačního pole.

Druhý typ sil je způsoben vzájemnou interakcí mikroskopických elementů (molekul) kontinua. Dosah těchto interakcí je řádově roven mezimolekulárním vzdálenostem, které lze v mechanice kontinua již považovat za fyzikálně nekonečně malé. Na větších vzdálenostech je působení těchto sil zanedbatelné a lze je proto považovat za *síly krátkého dosahu*. Působí proto na danou část kontinua pouze přes plochu, která tuto část obklopuje a jejich výslednici lze proto vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_{II} = \oint_{\Sigma} \boldsymbol{\varphi} \, dS, \quad (\text{VII.120})$$

kde $\boldsymbol{\varphi}$ je síla připadající na jednotku plochy a integrál se počítá přes hranici uvažovaného objemu. Mluvíme proto o *silách plošných*.

Na druhé straně musí být výslednice plošných sil vyjádřitelná i jako integrál přes objem, tj.

$$\mathbf{F}_{II} = \int_V \boldsymbol{\Phi} \, dV, \quad (\text{VII.121})$$

kde $\boldsymbol{\Phi}$ je objemová hustota plošných sil. Aby byla obě vyjádření shodná, musí být možné převést jedno na druhé podle Gaussovy věty (VII.101). To znamená, že musí platit

$$\Phi_i = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad (\text{VII.122})$$

kde τ_{ik} je tenzorové pole, které nazýváme polem *tenzoru napětí*. Zároveň vidíme, že můžeme pomocí tenzoru napětí vyjádřit sílu $\boldsymbol{\varphi}$, kterou působí kontinuum na své bezprostřední okolí přes jednotkovou plošku o normále \mathbf{n} orientované dovnitř kontinua. Je totiž

$$\varphi_i = \tau_{ik} n_k. \quad (\text{VII.123})$$

Průmět síly φ do směru normály se nazývá *napětí*, v případě, že je napětí záporné, nazýváme jeho absolutní hodnotu *tlakem*. Pro tlak p v daném směru \mathbf{n} tedy platí

$$p = -\tau_{ik}n_i n_k . \quad (\text{VII.124})$$

Nyní můžeme přepsat vztah (VII.115) využitím (VII.118) na levé straně, (VII.119) a (VII.120) na pravé straně. Dostáváme tak⁴⁵

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \rho f_i dV + \int_V \tau_{ik,k} dV \quad (\text{VII.125})$$

pro libovolný objem V , a tedy

$$\rho a_i = \rho f_i + \tau_{ik,k} \quad (\text{VII.126})$$

jsou *pohybové rovnice kontinua*. V Eulerově popisu můžeme a_i vyjádřit pomocí rychlostního pole podle (VII.8), takže neznámými veličinami jsou složky rychlosti a hustota hmotnosti. Síly f_i jsou zadány, komponenty tenzoru napětí je třeba určit podle druhu uvažovaného kontinua, čímž se budeme zabývat později. Na rozhraní dvou kontinuí podle zákona akce a reakce platí

$$\tau_{ik}^+ n_k = \tau_{ik}^- n_k , \quad (\text{VII.127})$$

kde τ_{ik}^+ a τ_{ik}^- jsou tenzory napětí v obou kontinuích. Je-li zadána plošná hustota síly \mathbf{R} na hranicích kontinua, lze obdobně získat okrajovou podmínku

$$R_i = \tau_{ik} n_k , \quad (\text{VII.128})$$

kde \mathbf{n} je vnější normála na hranici.

Rovnice (VII.126) lze užitím (VII.117) psát ještě v jiném zajímavém tvaru

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = (\tau_{ik} - \rho v_i v_k)_{,k} + f_i . \quad (\text{VII.129})$$

Označme

$$\mathcal{P}_i = \rho v_i , \quad (\text{VII.130})$$

tyto veličiny mají zřejmě význam komponent vektoru hustoty hybnosti. Veličiny

$$\sigma_{ik} = \tau_{ik} - \rho v_i v_k \quad (\text{VII.131})$$

⁴⁵ Podle rovnice (VII.118) bychom měli brát objem V v počátečním čase t_0 . Protože však tento čas může být volen libovolně, index „0“ v dalším výkladu vynecháváme.

nazveme *tenzorem absolutních napětí*. Pomocí těchto značení můžeme psát

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} = \sigma_{ik,k} + f_i \quad (\text{VII.132})$$

či v integrálním tvaru pro objem V , kterým kontinuum protéká,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{P}_i dV = \int_{\Sigma} \sigma_{ik} dS_k + \int_V f_i dV. \quad (\text{VII.133})$$

Pokud nepůsobí objemové síly, vyjadřují rovnice (VII.132) a (VII.133) jakožto rovnice kontinuity v diferenciálním a v integrálním tvaru zákon zachování hybnosti. Z tvaru tenzoru absolutních napětí vidíme, že na přenosu hybnosti v kontinuu se podílí jak unášení hybnosti tekutinou, tak i působení sil krátkého dosahu. Tenzor *relativních* napětí τ_{ik} vyjadřuje tento přenos vzhledem k pozorovateli, který se pohybuje spolu s kontinuem, tenzor *absolutních* napětí σ_{ik} jej vyjadřuje vzhledem k pozorovateli ve zvoleném pevném systému, vůči němuž je kontinuum v pohybu.

Teorie pole umožňuje připsat i poli objemových sil veličiny, s jejichž pomocí lze doplnit předchozí vztahy na úplné rovnice kontinuity pro komponenty úhrnné hybnosti látky a pole.

VII.9 Symetrie tenzoru napětí

Podle 2. impulzové věty je časová změna momentu hybnosti soustavy rovna úhrnnému momentu vnějších sil. Pro pohybující se oblast kontinua tedy platí

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t_0)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\Sigma(t_0)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi} dS, \quad (\text{VII.134})$$

když na pravé straně vystupuje moment objemových sil a plošných sil působících na hranici oblasti.

Využitím rovnice kontinuity ($dm = \rho dV = \text{konst}$) můžeme výraz na levé straně přepsat na tvar⁴⁶

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{a} dV. \quad (\text{VII.135})$$

⁴⁶ Opět užíváme toho, že počáteční čas může být zvolen libovolně, a vynecháváme proto index „0“.

Druhý výraz na pravé straně rovnice (VII.134) převedme pomocí Gaussovy věty na integrál přes objem. Užijme k tomu složkové symboliky. Je

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \epsilon_{ijk} x_j \varphi_k dS &= \oint_{\Sigma} \epsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l dS = \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \tau_{kl})_{,l} dV \\ &= \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \tau_{kl,l} + \epsilon_{ilk} \tau_{kl}) dV, \end{aligned} \quad (\text{VII.136})$$

když jsme užili vztahů (VII.122) a (VII.123). Dosadíme-li výrazy (VII.135) a (VII.136) do (VII.134) a uvážíme platnost pohybových rovnic (VII.126), zjišťujeme, že musí být $\int \epsilon_{ilk} \tau_{kl} dV = 0$ pro libovolný objem; vzhledem k antisymetričnosti Levi-Civitova symbolu to znamená, že tenzor napětí je symetrický

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}. \quad (\text{VII.137})$$

Jak víme z mechaniky soustav hmotných bodů, předpokládá 2. impulzová věta centrálnost sil. V rovnici (VII.134) jsme dále užili předpokladu, že veškerý moment hybnosti je dán makroskopickým pohybem rychlostí \mathbf{v} , a zanedbali jsme tak možný nenulový součet vlastních momentů hybnosti rotujících částic kontinua. Pouze za těchto předpokladů platí symetrie tenzoru napětí. Je možné studovat i kontinua, v nichž zmíněné požadavky nejsou splněny a tenzor napětí je tedy nesymetrický (kontinua bratří Cosseratů).

Omezíme-li se na symetrický tenzor napětí, můžeme na něj aplikovat některé obdobné závěry, jako jsme učinili o tenzoru setrvačnosti. Lze jej opět geometricky zobrazit jako kvadriku o rovnici

$$\tau_{ik} x_i x_k = \pm 1. \quad (\text{VII.138})$$

V případě, že v daném místě je ve všech směrech tlak (popř. napětí), je touto kvadrikou elipsoid, pokud je v některých směrech tlak a v jiných napětí, dostáváme z (VII.138) dva hyperboloidy. Tenzor lze převést k hlavním osám, které jsou osami příslušné kvadriky. Ve směru těchto os působí plošné síly čistým tlakem či napětím, smyková složka je nulová. Můžeme rovněž provést obdobný rozklad jako u tenzoru deformace (VII.29)

$$\tau_{ik} = \left(\tau_{ik} - \frac{1}{3} \tau_{aa} \delta_{ik} \right) + \frac{1}{3} \tau_{aa} \delta_{ik}, \quad (\text{VII.139})$$

první část (deviátor) odpovídá smykovým silám, druhá část silám kontinuum stlačujícím či roztahujícím.

VII.10 Zákon zachování energie v kontinuu

Kromě kinetické energie svého makroskopického pohybu a potenciální energie v poli objemových sil má kontinuum ještě vnitřní energii, kterou tvoří kinetická energie jeho mikroskopického pohybu a potenciální energie sil krátkého dosahu. Kinetická a vnitřní energie pohybuujícího se objemu kontinua se mění prací objemových sil uvnitř tohoto objemu, prací, kterou konají plošné síly na jeho hranici, a dále prouděním energie přes hranici, což nazýváme tepelnou výměnou. Můžeme proto psát

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \mathbf{f} dV + \oint_{\Sigma(t)} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v} dS - \oint_{\Sigma(t)} \mathbf{q} dS, \quad (\text{VII.140})$$

kde jsme označili jako e vnitřní energii připadající na jednotku hmotnosti a \mathbf{q} vektor hustoty tepelného toku⁴⁷.

Provedeme-li derivování na levé straně (jako dříve využitím rovnice kontinuity) a uijeme-li Gaussovy věty, vztahu (VII.123) a libovolnosti počátečního času, získáme

$$\int_V \left(\rho \mathbf{v} \mathbf{a} + \rho \frac{de}{dt} \right) dV = \int_V \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \text{div } \mathbf{q} \right] dV \quad (\text{VII.141})$$

čili vzhledem k libovolnosti objemu

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{a} + \rho \frac{de}{dt} = \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \text{div } \mathbf{q}. \quad (\text{VII.142})$$

Lze psát

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \mathbf{a} &= \rho v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \text{div } v^2 \mathbf{v} - v^2 \text{div } \mathbf{v} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho v^2}{\partial t} + \text{div } \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \frac{1}{2} v^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (\text{VII.143})$$

a podobně

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad } e \right) = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div } \rho e \mathbf{v} - e \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right), \quad (\text{VII.144})$$

⁴⁷ Znaménko minus u příslušného členu odpovídá tomu, že normála k hranici míří ven z daného objemu. Velikost vektoru \mathbf{q} udává množství energie, procházející za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr šíření energie.

takže užitím rovnice kontinuity dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) \mathbf{v} \right] + \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \operatorname{div} \mathbf{q} . \quad (\text{VII.145})$$

Podobně jako v případě hybnosti (VII.129), narušuje tvar rovnice kontinuity (VII.145) pouze přítomnost objemových sil \mathbf{f} . I v tomto případě je však možné v rámci teorie pole vyjádřit objemové síly takovým způsobem, aby byla splněna rovnice kontinuity pro celkovou hustotu a tok energie.

Vraťme se k rovnici (VII.142) a rozepišme druhý člen na pravé straně

$$(\tau_{ik} v_i)_{,k} = \tau_{ik,k} v_i + \tau_{ik} \eta_{ik} , \quad (\text{VII.146})$$

kde η_{ik} je tenzor rychlosti deformace zavedený vztahem (VII.17). Užitím pohybových rovnic (VII.126) pak můžeme ve vztahu (VII.142) oddělit rovnici pro změnu vnitřní energie

$$\rho \frac{de}{dt} = \tau_{ik} \eta_{ik} - \operatorname{div} \mathbf{q} , \quad (\text{VII.147})$$

kteřou lze užitím (VII.144) psát také ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) = -\operatorname{div} \rho e \mathbf{v} + \tau_{ik} \eta_{ik} - \operatorname{div} \mathbf{q} . \quad (\text{VII.148})$$

Můžeme se snadno vrátit i k příslušným integrálním zákonům pro vnitřní energii. V případě zintegrování (VII.147) dostaneme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e \, dV = \int_{V(t_0)} \tau_{ik} \eta_{ik} \, dV - \oint_{\Sigma(t_0)} \mathbf{q} \, d\mathbf{S} , \quad (\text{VII.149})$$

což po znásobení infinitesimálním časovým intervalem dt dává 1. *termodynamickou větu*

$$d\mathcal{E} = \delta A + \delta Q , \quad (\text{VII.150})$$

kde $d\mathcal{E}$ je přírůstek vnitřní energie dané části kontinua, kterého bylo dosaženo vykonáním práce δA a dodáním tepla δQ (obě veličiny mohou mít pochopitelně i záporné znaménko). Užitím symbolu δ vyznačujeme, že nejde o přírůstky nějakých veličin A , popř. Q , které existují samy o sobě. Nemá samozřejmě smysl mluvit o tom, kolik je v daném objemu obsaženo tepla či práce. Na rozdíl od vnitřní energie \mathcal{E} nejsou teplo ani práce stavovými veličinami. δA a δQ se vztahují k danému konkrétnímu procesu, jímž došlo ke změně vnitřní energie.

Využitím vztahu (VII.26) můžeme pro práci obdržet

$$\delta A = \int_V \tau_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV, \quad (\text{VII.151})$$

kde $\delta \varepsilon_{ik}$ je změna tenzoru deformace během infinitesimálního časového intervalu.

VII.11 Termodynamické vztahy a veličiny

Viděli jsme již, že při podrobném studiu mechaniky kontinua se neobejdeme bez termodynamiky. K jejím základním zákonům patří ještě 2. *termodynamická věta*, která říká, že v případě *vratného děje* (tj. děje, který by mohl probíhat i v obrácené časové posloupnosti), během něhož systém prochází stavy termodynamické rovnováhy, je

$$\frac{1}{T} \delta Q = dS, \quad (\text{VII.152})$$

kde T je *absolutní teplota* a S *entropie* systému. Podle 2. termodynamické věty tedy existuje taková veličina T , určená stavem systému, že vynásobíme-li část energie dodanou systému ve formě tepla výrazem $\frac{1}{T}$, dostáváme přírůstek stavové veličiny S . Pro *nevratné děje* říká 2. termodynamická věta, že

$$dS > \frac{\delta Q}{T}, \quad (\text{VII.153})$$

entropie izolovaného systému tedy při nevratných dějích roste a dosahuje maxima ve výsledném stavu termodynamické rovnováhy. Statistická fyzika vysvětluje růst entropie jako tendenci fyzikálních systémů přecházet do pravděpodobnějšího stavu. Pro podrobnější informaci o vlastnostech a významu entropie a teploty musíme odkázat čtenáře na učebnice termodynamiky a statistické fyziky.

Položme

$$TdS - \delta Q = \delta Q^*, \quad (\text{VII.154})$$

kde $\delta Q^* > 0$ je ta část energie, která se nevratně mění z makroskopicky pozorovatelné kinetické a potenciální energie ve vnitřní energii mikroskopických pohybů a interakcí. Tyto nevratné děje, projevující se přítomností nekonzervativních sil, nazýváme *disipativními procesy*.

Zatímco tepelná výměna probíhá přes hranici systému, disipace probíhá v celém jeho objemu. Předpokládejme, že objem je dostatečně malý. Abychom teplotu v něm mohli považovat za konstantní, podělme (VII.154) infinitesimálním časovým intervalem dt a vyjádřeme veličiny v ní vystupující jako objemové či plošné integrály. Dostáváme tak

$$T \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s \, dV = - \oint_{\Sigma(t_0)} \mathbf{q} \, d\mathbf{S} + \int_{V(t_0)} D \, dV, \quad (\text{VII.155})$$

kde s je entropie připadající na jednotku hmotnosti, \mathbf{q} je hustota tepelného toku a D je *disipativní funkce* určující energii disipovanou v objemové jednotce za jednotku času.

Z integrálního vztahu (VII.155) dospějeme k diferenciální rovnici obdobně jako v dříve diskutovaných případech, když uijeme rovnice kontinuity a Gaussovy věty. Docházíme tak k rovnici pro změnu entropie

$$\rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} + \frac{D}{T}. \quad (\text{VII.156})$$

Připomeňme ještě, že platí

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \text{ grad } s. \quad (\text{VII.157})$$

Potom využitím rovnice kontinuity lze (VII.156) také psát jako

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = - \text{div } \rho s \mathbf{v} - \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} + \frac{D}{T}. \quad (\text{VII.158})$$

Zdůrazněme, že v rovnicích (VII.158) a (VII.156) již nepovažujeme teplotu T za jedinou veličinu charakterizující rovnovážný stav celého systému, ale za funkci souřadnic vztahující se k lokálním rovnovážným stavům. I v případě, že $D = 0$ (tj. nenastávají-li disipativní procesy), jde tedy v případě prostorové proměnnosti teploty a nenulovosti tepelného toku \mathbf{q} , který je touto proměnností způsoben, o nevratný proces. Pouze v dostatečně malém elementu daného systému lze pak mluvit o posloupnosti rovnovážných stavů a vratnosti procesu.

I v dalším výkladu se budeme někdy odvolávat na základní poznatky a vztahy z termodynamiky. Pro pohodlí čtenáře uvedeme proto na závěr tohoto odstavce definice základních termodynamických veličin, které budeme nadále vztahovat k objemové jednotce.

Spojením obou termodynamických vět (VII.150) a (VII.152) a využitím vztahu (VII.151) plyne pro přírůstek energie při vratných procesech

$$d\mathcal{E} = T \, d\mathcal{S} + \tau_{ik} \, d\varepsilon_{ik}. \quad (\text{VII.159})$$

V nejčastěji diskutovaném případě ve všech směrech stejného tlaku je

$$\tau_{ik} = -p \delta_{ik} , \quad \tau_{ik} d\varepsilon_{ik} = -p d\varepsilon_{ii} . \quad (\text{VII.160})$$

Podle vztahu (VII.29) je ε_{ii} změna jednotkového objemu a pro daný případ nastává

$$d\mathcal{E} = T dS - p dV . \quad (\text{VII.161})$$

Veličina

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS ,$$

$$d\mathcal{F} = -S dT + \tau_{ik} d\varepsilon_{ik} = -S dT - p dV \quad (\text{VII.162})$$

se nazývá *volná energie*. Veličina

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \tau_{ik} \varepsilon_{ik} = \mathcal{F} + pV ,$$

$$d\mathcal{G} = -S dT - \varepsilon_{ik} d\tau_{ik} = -S dT + V dp \quad (\text{VII.163})$$

se nazývá *termodynamický potenciál*⁴⁸. Veličina

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} - \tau_{ik} \varepsilon_{ik} = \mathcal{E} + pV ,$$

$$d\mathcal{H} = T dS - \varepsilon_{ik} d\tau_{ik} = T dS + V dp \quad (\text{VII.164})$$

se nazývá *entalpie*.

Každá z uvedených termodynamických veličin $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ se tedy spojuje s dvojicí proměnných vystupujících v diferenciálech na pravé straně příslušných vztahů, například volná energie \mathcal{F} je takto spojena s teplotou T a objemem V .

Při nevratných procesech se diferenciály veličin $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ doplní podle vztahů (VII.150) a (VII.154) o $-\delta Q^* < 0$. To znamená, že například pro přírůstek volné energie při konstantním objemu a teplotě platí

$$d\mathcal{F} = -dQ^* < 0 . \quad (\text{VII.165})$$

Volná energie tedy při takovýchto disipativních procesech klesá a v rovnovážném stavu dosahuje své nejmenší hodnoty. Podobné závěry lze učinit i o dalších uvedených termodynamických veličinách. Minimalizací termodynamických veličin se vysvětlují například fázové přechody. V tomto smyslu termodynamika rozhoduje o tom, jaké mechanické vlastnosti bude zkoumaná látka při daných vnějších podmínkách mít.

⁴⁸ Pro \mathcal{F} a \mathcal{G} bývá také užíván název Helmholtzova a Gibbsova volná energie.

VII.12 Systém rovnic pro pohyb kontinua

Nyní můžeme shrnout všechny základní rovnice pro pohyb kontinua, které vlastně postupně vyjadřují bilanci hmotnosti, hybnosti, energie a entropie. Jsou to tyto rovnice:

rovnice kontinuity

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} , \quad (\text{VII.166})$$

pohybové rovnice

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} , \quad (\text{VII.167})$$

rovnice vnitřní energie

$$\rho \frac{de}{dt} = \tau_{ik} \eta_{ik} - \operatorname{div} \mathbf{q} , \quad (\text{VII.168})$$

rovnice entropie

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} (-\operatorname{div} \mathbf{q} + D) . \quad (\text{VII.169})$$

Objemové síly na jednotku hmotnosti f_i jsou v těchto rovnicích zpravidla zadány vnějším působením na systém. Pokud jsou působeny samotným systémem (jako například gravitační síly v astrofyzice), musíme k jejich určení dodat další rovnice, například Poissonovu rovnici $\Delta\varphi = 4\pi\kappa\rho$ spojující hustotu hmotnosti ρ s potenciálem gravitačního pole φ . Zrychlení a_i a tenzor rychlosti deformace η_{ik} jsou dány časovými a prostorovými derivacemi rychlostního pole podle dříve uvedených vztahů (VII.7) a (VII.17), tj.

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j , \quad \eta_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{VII.170})$$

Připomeňme ještě, že ve všech uvedených rovnicích

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (\text{VII.171})$$

Všechny tyto rovnice můžeme snadno přepsat do křivočarých souřadnic náhradou obyčejných derivací derivacemi kovariantními.

Neznámými jsou tedy: hustota hmotnosti ρ , rychlostní pole \mathbf{v} , symetrický tenzor napětí τ_{ij} , energie hmotnostní jednotky e , entropie hmotnostní jednotky s , teplota T , tepelný tok \mathbf{q} , disipativní funkce D .

Celkově tedy máme 17 neznámých, které jsou vázány pouze šesti parciálními diferenciálními rovnicemi 1. řádu. Je zřejmé, že jen v krajně idealizovaných případech se nám podaří snížit počet proměnných tak, abychom se obešli bez termodynamických veličin e, s, T, q, D a mohli rozřešit daný problém v rámci čisté mechaniky (rovnice (VII.166) a (VII.167)) s proměnnými $\rho, \mathbf{v}, \tau_{ij}$. Ve složitějších případech musíme zavádět řadu dalších předpokladů o vzájemných vztazích veličin vystupujících v rovnicích, v souvislosti s tím se ale mohou objevit další neznámé, vyžadující nové předpoklady. Dospíváme tak k velmi složitým systémům rovnic, které zpravidla již nejsou vyvozeny „z prvních principů“, ale opírají se o empirické poznatky, a stupeň jejich použitelnosti může být opět prověřen jen empiricky.

Vzhledem k tomu, že kontinua jsou prostorově omezené soustavy, je pro dosažení jednoznačné řešitelnosti rovnic třeba zadat nejen *počáteční podmínky*, ale i *okrajové podmínky* platné na hranicích kontinua. S různými konkrétními příklady počátečních a okrajových podmínek se setkáme v dalším výkladu.

Na závěr této kapitoly můžeme konstatovat, že jsme se seznámili s fyzikálními principy mechaniky kontinua asi ve stejném rozsahu, jako jsme to učinili pro mechaniku hmotných bodů. Čtenář by proto mohl očekávat, že v dalším textu přikročíme k pokročilejším formulacím zákonů mechaniky kontinua založeným na variačních principech a Lagrangeově a Hamiltonově formalismu. Takové formulace skutečně existují, jsou však mnohem složitější a často také méně propracované než obdobné formulace mechaniky s konečným počtem stupňů volnosti. Proto se jimi v tomto textu nebudeme zabývat a přikročíme nyní k detailnějšímu studiu konkrétních typů kontinuí.

VII.13 Příklady

1. Ve válcové nádobě se kapalina otáčí kolem osy tak, že úhlová rychlost otáčení ω je funkcí vzdálenosti r od osy. Určete rychlostní pole \mathbf{v} . Může při vhodné závislosti $\omega(r)$ platit $\text{rot } \mathbf{v} = 0$?

Řešení: Zvolme za osu otáčení osu z . Pak

$$\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0) \quad (\text{VII.172})$$

a tedy

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(0, 0, 2\omega + r \frac{d\omega}{dr} \right). \quad (\text{VII.173})$$

K nulovosti rotace rychlostního pole dojde při závislosti

$$\omega = \frac{C}{r^2}, \quad (\text{VII.174})$$

kde C je konstanta.

2. Nechť tenzor rychlosti deformace η_{ik} má v kartézské soustavě souřadnic nenulové pouze komponenty $\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12}$. Najděte hlavní osy a diagonální komponenty tenzoru v těchto osách η_1, η_2, η_3 .

Řešení: Jedna hlavní osa je zřejmě osa x_3 , dvě další leží v rovině (x_1, x_2) . Řešením sekulární rovnice dostáváme

$$\eta_3 = 0, \quad \eta_{1,2} = \frac{1}{2}(\eta_{11} + \eta_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\eta_{11} - \eta_{22}) + 4\eta_{12}^2}. \quad (\text{VII.175})$$

Směr hlavních os v rovině (x_1, x_2) je určen rovnicí

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\eta_{12}}{\eta_{11} - \eta_{22}}, \quad (\text{VII.176})$$

kde α je úhel mezi hlavní osou a osou x_1 .

Příklady k samostatnému řešení

1. Vypočtete gradient, divergenci, rotaci a Laplaceův operátor ve válcových a sférických souřadnicích.

2. Určete složky tenzoru deformace ve sférických souřadnicích.

VIII TEORIE PRUŽNOSTI

Tělesa tvořená pevnými látkami nejsou sice dokonale tuhá, ale běžná silová působení a běžné změny teploty zpravidla jen málo mění relativní polohy jejich elementů. Tyto elementy se vlivem sil a teplotních změn vychylují ze svých původních poloh. Tělesa se tak deformují a zároveň v nich vznikají síly krátkého dosahu bránící zvětšování deformace a po zániku vnějších vlivů obnovující původní stav. Mluvíme proto o *pružných tělesech*.

Formulujeme pohybové rovnice pro tato tělesa za předpokladu malosti deformací a zanedbání nevratných procesů. V dalším výkladu se omezujeme na lineární závislost mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace, vyjádřenou *Hookovým zákonem*. Tento zákon formulujeme pro krystalická tělesa vyznačující se jistými symetriemi, poté se však omezujeme na tělesa izotropní. Nalézáme rovnice jejich rovnováhy v deformovaném stavu a rovnice pro podélné a příčné vlnění, které v nich může probíhat. V závěru se zabýváme kmity struny jakožto příkladem chování jednorozměrného kontinua.

VIII.1 Základní rovnice

Pro řadu v praxi důležitých problémů se ukazuje jako dostatečné přiblížení, považujeme-li kontinuum za ideálně pružné. Znamená to, že tenzor napětí (v libovolném místě a libovolném čase) závisí pouze na tenzoru deformace a na teplotě (v témže místě a čase), nezávisí však na rychlosti deformace. Zanedbáváme tím vazké vlastnosti pružných těles související s nevratnými procesy (síly tření a jimi způsobenou disipaci energie) a rovněž trvalé změny vlastností tělesa vyvolané jeho deformací.

Nechť se kontinuum nejprve nachází v rovnovážném stavu s nulovým tenzorem napětí τ_{ik} při hustotě hmotnosti ρ_0 a teplotě T_0 (tyto veličiny mohou být funkcemi souřadnic). Vznik objemových sil v kontinuu či plošných sil a teplotních změn na jeho hranicích způsobuje deformaci kontinua popsanou tenzorem ε_{ik} .

Zabývejme se nyní rovnicemi pro pohyb pružného kontinua (VII.166) až (VII.169). Připomeňme nejprve, že hodnoty tenzoru deformace a všech dalších užívaných polí vztahujeme k rovnovážným polohám x_i nedeformovaného kontinua a nikoliv k okamžitým polohám jeho elementů, které mají souřadnice $x_i + u_i$. To znamená, že totální derivace podle času jsou rovny

parciálním derivacím při pevných hodnotách x_i , například

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)_{x_i} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\right)_{x_i}, \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)_{x_i}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{x_i}.\end{aligned}\tag{VIII.1}$$

V části věnované teorii pružnosti budeme mít vždy na mysli tyto parciální derivace a nebudeme již na to způsobem zápisu upozorňovat.

Budeme předpokládat, že deformace jsou malé a vedou tedy jen k malým změnám hustoty, tj. platí

$$\rho = \bar{\rho}_0 + \Delta\rho, \quad \Delta\rho \ll \rho_0.\tag{VIII.2}$$

Začneme rovnicí kontinuity (VII.166). Tu můžeme po zanedbání $\Delta\rho$ oproti ρ_0 zapsat jako

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\tag{VIII.3}$$

a s přihlédnutím k prostřední rovnici (VIII.1) upravit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0.\tag{VIII.4}$$

To znamená, že veličina v závorce se v daném místě kontinua nemění s časem, takže

$$\rho + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_0,\tag{VIII.5}$$

popřípadě

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\operatorname{div} \mathbf{u},\tag{VIII.6}$$

což umožňuje určit hustotu hmotnosti ze známého pole posunutí.

Přejdeme k rovnicím kontinua v užším smyslu slova (VII.167). Po zanedbání $\Delta\rho$ oproti ρ_0 dostáváme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho_0 f_i.\tag{VIII.7}$$

Zbývají ještě rovnice (VII.168) a (VII.169). Protože uvažujeme pouze vratné procesy bez disipace, položíme $D = 0$. Obě rovnice je pak možné spojit tím, že z nich vyloučíme tepelný tok \mathbf{q} . Po zanedbání $\Delta\rho$ oproti ρ_0

a využití vztahu (VII.26) spojujícího tenzor rychlosti deformace s tenzorem malé deformace dostáváme

$$\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \tau_{ik} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} + \rho_0 T \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (\text{VIII.8})$$

Rovnice (VIII.6), (VIII.7) a (VIII.8) tvoří systém rovnic pro určení pohybu ideálního pružného kontinua. Aby mohly být (za daných počátečních a okrajových podmínek) řešeny, je ovšem třeba je doplnit *materiálovými vztahy* vyjadřujícími souvislosti mezi tenzorem napětí a posunutím (popř. tenzorem deformace).

VIII.2 Hookův zákon

Budeme uvažovat o situaci, kdy deformace tělesa i změny jeho teploty jsou dostatečně malé a lze tedy předpokládat, že tenzor napětí závisí jak na deformacích, tak i na rozdílu teplot lineárně, takže

$$\tau_{ik} = C_{iklm} \varepsilon_{lm} - \alpha_{ik} (T - T_0), \quad (\text{VIII.9})$$

kde C_{iklm} a α_{ik} jsou tzv. *elastické koeficienty*, jejichž hodnoty se vztahují k teplotě T_0 ; v prvním případě se mluví o *modulech pružnosti*, ve druhém případě jde o *koeficienty tepelné pružnosti*. Vztah (VIII.9) je obecným tvarem *Hookova zákona*. Omezením se na (VIII.9) zanedbáváme nelineární pružné efekty.

Protože $\tau_{ik}, \varepsilon_{ik}$ jsou tenzory a teplota je skalár, tvoří koeficienty C_{iklm} tenzor 4. řádu, nazývaný *tenzorem pružnosti*. Tento tenzor charakterizuje pružné vlastnosti těles při konstantní teplotě. V homogenním tělese v kartézských souřadnicích jsou komponenty C_{iklm} konstantní, jejich hodnoty ovšem závisí na zvolené souřadnicové soustavě. Rovněž veličiny α_{ik} tvoří tenzor.

Zabývejme se nejprve tenzorem pružnosti. V obecném případě má tenzor 4. řádu $3^4 = 81$ nezávislých komponent. V případě tenzoru pružnosti je ovšem maximální počet nezávislých komponent roven 21. Ze symetrie τ_{ik} totiž přímo plyne

$$C_{iklm} = C_{kilm}. \quad (\text{VIII.10})$$

Ze symetrie ε_{ik} vyplývá, že i kdyby C_{iklm} mělo antisymetrickou část v poslední dvojici indexů, nepřispívala by tato část k tenzoru napětí a byla by proto fyzikálně bezvýznamná. Můžeme proto předpokládat, že platí i

$$C_{iklm} = C_{ikml}. \quad (\text{VIII.11})$$

Tím se snížil počet nezávislých komponent na 36. Další informaci o komponentách tenzoru pružnosti můžeme získat z termodynamiky. Protože nás zajímá závislost tenzoru napětí na deformaci a na teplotě, použijeme z termodynamických funkcí uvedených na konci VII. 11 volnou energii, jejíž diferenciál je

$$d\mathcal{F} = \tau_{ik} d\varepsilon_{ik} - S dT . \quad (\text{VIII.12})$$

Odtud plynou vztahy

$$\tau_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T , \quad (\text{VIII.13})$$

$$S = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ik}} \quad (\text{VIII.14})$$

určující napětí a entropii jako funkce deformace a teploty. Samotná volná energie objemové jednotky pružného tělesa je tedy

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} - \alpha_{ik} \varepsilon_{ik} (T - T_0) + \mathcal{F}_0(T) , \quad (\text{VIII.15})$$

neurčená funkce $\mathcal{F}_0(T)$ je volná energie objemové jednotky při nulové deformaci, α_{ik} nezávisí na ε_{ik} .

Odtud plyne, že můžeme bez újmy na obecnosti klást

$$C_{iklm} = C_{lmik} , \quad (\text{VIII.16})$$

neboť část antisymetrická vzhledem k výměně první a druhé dvojice indexů zřejmě nepřispívá k volné energii a podle (VIII.9) tedy ani k tenzoru τ_{ik} . To je dalších 15 vztahů, což zmenšuje počet nezávislých komponent pro obecné pružné těleso na 21.

Těleso, jehož koeficienty pružnosti jsou vázány podmínkami uvedenými ve výrazech (VIII.10), (VIII.11) a (VIII.16), je obecně anizotropní, tj. jeho mechanické vlastnosti jsou v různých směrech různé. Pokud má pružné těleso určitou symetrii, dojde k dalšímu snížení počtu nezávislých komponent tenzoru pružnosti. Například pro krystal kubické struktury bude roven třem.

Je-li uvažované pružné těleso zcela izotropní, znamená to, že komponenty tenzoru C_{iklm} mají stejné hodnoty ve všech kartézských soustavách souřadnic. Takovou vlastnost má Kroneckerův tenzor δ_{ij} a tenzor 4. řádu o této vlastnosti získáme proto nejjednodušeji vynásobením dvou Kroneckerových tenzorů. S ohledem na pořadí indexů dostáváme tři tenzory

$$P_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} , \quad Q_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} , \quad R_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk} . \quad (\text{VIII.17})$$

První z nich má vlastnosti symetrie (VIII.10) a (VIII.11). Druhý a třetí tyto vlastnosti nemají samy o sobě, má je však jejich součet. Tyto vlastnosti má i lineární kombinace

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (\text{VIII.18})$$

Podrobnější matematický rozbor by potvrdil, že (VIII.18) je jedinou možností, jak vyhovět podmínce izotropie i podmínkám symetrie v první i ve druhé dvojici indexů. Veličiny λ, μ , které v homogenním tělese nezávisí na souřadnicích, se nazývají *Laméovy koeficienty*. Izotropní těleso má tedy pouze dva nezávislé koeficienty pružnosti, například

$$C_{xxyy} = \lambda , \quad C_{xyxy} = \mu . \quad (\text{VIII.19})$$

Pro případ konstantní teploty $T = T_0$ můžeme tedy (VIII.13) psát ve tvaru

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{VIII.20})$$

anebo též

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} , \quad (\text{VIII.21})$$

kde

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (\text{VIII.22})$$

je izotermický koeficient všestranného stlačení, koeficientu μ se rovněž říká *modul pružnosti ve smyku*. Zúžením rovnice (VIII.21) dostáváme

$$\tau_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} . \quad (\text{VIII.23})$$

Využitím vztahu (VIII.23) snadno dostáváme inverzní vztah k (VIII.21)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \tau_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) . \quad (\text{VIII.24})$$

Veličiny K, μ jsou vždy kladné, tj.

$$K > 0 , \quad \mu > 0 , \quad (\text{VIII.25})$$

jak zjistíme dosazením (VIII.24) do výrazu pro volnou energii (VIII.15) a uvážením, že podle závěru VII.11 má volná energie ve stavu termodynamické rovnováhy minimum.

V technické praxi se u pružných těles zavádí ještě dva jiné koeficienty pružnosti: *Youngův modul* E

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (\text{VIII.26})$$

a Poissonův koeficient

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (\text{VIII.27})$$

Pomocí nich lze Hookův zákon (VIII.21) přepsat na tvar

$$\tau_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right). \quad (\text{VIII.28})$$

Inverzní vztah k (VIII.28) lze snadno získat.

Uvažme ještě možnou teplotní závislost pružných deformací izotropních těles. V izotropním tělese musí být

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (\text{VIII.29})$$

a tedy podle (VIII.13)

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - K\alpha (T - T_0) \delta_{ij}. \quad (\text{VIII.30})$$

Význam konstanty α jakožto konstanty tepelné roztažnosti odtud získáme, položíme-li $\tau_{ij} = 0$ (to odpovídá čistě tepelné pružné deformaci, kdy napětí jsou rovna nule, nepůsobí-li na těleso vnější síly) a rovnici (VIII.30) zúžíme. Dostaneme tak

$$\varepsilon_{ii} = \alpha (T - T_0) \quad (\text{VIII.31})$$

a uvážíme-li, že podle (VII.29) je stopa tenzoru deformace rovna relativnímu přírůstku objemu, je již význam α zřejmý.

VIII.3 Rovnice rovnováhy izotropních těles

V rovnováze je zrychlení kontinua nulové. Rovnice rovnováhy proto plynou ze (VIII.7) jako

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho_0 f_i = 0 \quad (\text{VIII.32})$$

a vyjádříme-li tenzor napětí užitím Hookova zákona (VIII.21) a definičního vztahu (VII.24), dostáváme podmínky rovnováhy ve tvaru

$$\frac{E}{2(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{E}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho_0 f_i = 0 \quad (\text{VIII.33})$$

neboli, ve vektorové symbolice,

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = -\frac{2(1 + \sigma)}{E} \rho_0 \mathbf{f}. \quad (\text{VIII.34})$$

Využitím vztahů (VIII.22), (VIII.26), (VIII.27) můžeme tyto rovnice vyjádřit také pomocí jiných elastických koeficientů. Omezíme-li se na případ, kdy deformace není způsobena objemovými silami (tj. $\mathbf{f} = 0$), nýbrž jen silami plošnými působícími na povrch tělesa, můžeme je přepsat také ve tvaru

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (\text{VIII.35})$$

nebo, využijeme-li identity

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}, \quad (\text{VIII.36})$$

také ve tvaru

$$2(1 - \sigma) \text{grad div } \mathbf{u} - (1 - 2\sigma) \text{rot rot } \mathbf{u} = 0, \quad (\text{VIII.37})$$

kde jsme se opět vrátili k elastickému koeficientu σ .

Ze znalosti pole \mathbf{u} můžeme zjistit změnu hustoty kontinua (VIII.6), komponenty tenzoru deformace (VII.24), a poté z Hookova zákona komponenty tenzoru napětí. Aby naopak rovnice (VII.24) byly při daných veličinách ε_{ik} řešitelné vzhledem k u_i , musí ε_{ik} splňovat rovnice kompatibility (VII.31).

Základním problémem teorie pružnosti (v oblasti statiky) je nalezení pole posunutí a pole tenzoru napětí při zadaném působení objemových sil a při daných okrajových podmínkách (například zadání posunutí či plošných sil na hranici kontinua). K dispozici jsou tři rovnice rovnováhy a šest rovnic Hookova zákona, v němž lze vyjádřit tenzor deformace pomocí posunutí (VII.24), tedy devět rovnic pro devět neznámých τ_{ij} a u_k . Nebudeme se zabývat obecnými typy okrajových úloh, ilustrujme způsob řešení na konkrétním příkladě.

Půjde o to, určit deformaci a napětí v duté kouli z izotropního materiálu s vnitřním poloměrem R_1 a vnějším poloměrem R_2 , je-li uvnitř koule tlak p_1 a vně koule tlak p_2 .

Zavedeme si sférické souřadnice r, ϑ, φ s počátkem ve středu koule. Pro vektor posunutí \mathbf{u} vzhledem k izotropii zřejmě platí, že

$$\mathbf{u} = u(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{VIII.38})$$

a tedy

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad (\text{VIII.39})$$

takže rovnice (VIII.37) se redukuje na

$$\text{grad div } \mathbf{u} = 0. \quad (\text{VIII.40})$$

To znamená, že (užitím (VII.74) a (VIII.38))

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{konst} \quad (\text{VIII.41})$$

a po integraci

$$u = ar + \frac{b}{r^2}, \quad (\text{VIII.42})$$

kde a , b jsou integrační konstanty, které je třeba určit z okrajových podmínek kladených na složky tenzoru napětí. Vypočteme proto nejprve nenulové složky tenzoru deformace ve sférických souřadnicích

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3} \quad (\text{VIII.43})$$

(jde o fyzikální složky, které lze určit pomocí aparátu vyloženého v VII.4 a I.2 anebo tak, že vypočteme kartézské složky τ_{xx}, τ_{yy} na ose x a využijeme symetrie problému). Hookův zákon (VIII.28) tak dává pro radiální komponentu tenzoru napětí

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)\varepsilon_{rr} + 2\sigma\varepsilon_{\vartheta\vartheta}] = \\ &= \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3} \end{aligned} \quad (\text{VIII.44})$$

a pro příčné komponenty

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi\varphi} = \tau_{\vartheta\vartheta} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \sigma\varepsilon_{rr}) = \\ &= \frac{E}{1-2\sigma} a + \frac{E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.45})$$

Konstanty a , b se určí z okrajových podmínek

$$\tau_{rr} = -p_1 \quad \text{pro } r = R_1; \quad \tau_{rr} = -p_2 \quad \text{pro } r = R_2 \quad (\text{VIII.46})$$

a platí tedy

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad (\text{VIII.47})$$

$$b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}. \quad (\text{VIII.48})$$

Tím je úloha vyřešena. Lze ovšem sledovat i speciální případy tohoto problému, například, že tloušťka h vrstvy je malá, tj. $h = R_2 - R_1 \ll R_1$ (tenká kulová slupka — sférická skořepina). Tím se však již zabývat nebudeme.

VIII.4 Pohybové rovnice izotropního pružného tělesa. Vlnění

Mohlo by se zdát, že pohybové rovnice pružného izotropního kontinua získáme, doplníme-li rovnice (VIII.33) členem obsahujícím zrychlení. Kdybychom však do takto získaných rovnic dosadili hodnoty elastických modulů užívané při stanovení rovnováhy, došli bychom k zřejmému rozporu s výsledky experimentů. Důvod je v tom, že tyto hodnoty jsou *izotermické*, změřené při konstantní teplotě. Při vlnivém pohybu kontinua, který je řešením pohybových rovnic, však obvykle za časový interval řádově rovný periodě kmitavého pohybu v podstatě nedochází k přenosu tepla mezi elementy kontinua, takže nemůže dojít k vyrovnání teplot. Každou část kontinua lze pak považovat za tepelně izolovanou a pohyb kontinua bude tak *adiabatický*, což podle 2. termodynamické věty znamená neměnnost entropie. Musíme proto začít termodynamickými úvahami, které nás dovedou ke vztahu mezi adiabatickými a izotermickými moduly pružnosti.

Pro entropii objemové jednotky izotropního tělesa můžeme podle rovnice (VII.162) psát

$$S = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ik}} = K \alpha \varepsilon_{ll} + S_0(T), \quad (\text{VIII.49})$$

kde S_0 je entropie při nulové deformaci. Zároveň je v prvním přiblížení Taylorova rozvoje

$$S_0(T) = S_0(T_0) + \left(\frac{dS_0}{dT} \right)_{T=T_0} (T - T_0), \quad (\text{VIII.50})$$

kde T_0 je teplota v nedeformovaném stavu.

Definujeme-li tepelnou kapacitu tělesa C_ε při konstantní deformaci jako

$$C_\varepsilon = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}}, \quad (\text{VIII.51})$$

můžeme podle (VII.159) psát

$$C_\varepsilon = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} \quad (\text{VIII.52})$$

a tedy

$$\left(\frac{dS_0}{dT} \right)_{T=T_0} = \frac{C_\varepsilon}{T_0}. \quad (\text{VIII.53})$$

Dosazením do (VIII.49) a (VIII.50) pak dostáváme

$$S(T) = K \alpha \varepsilon_{ll} + \frac{C_\varepsilon (T - T_0)}{T_0} + S_0(T_0). \quad (\text{VIII.54})$$

Při adiabatickém ději je však entropie nezměněna,

$$S(T) = S_0(T_0) \quad (\text{VIII.55})$$

a tedy

$$T - T_0 = -\frac{\alpha K T_0}{C_\varepsilon} \varepsilon_{ll}, \quad (\text{VIII.56})$$

takže pro tenzor napětí (VIII.30) plyne vzorec

$$\tau_{ik} = \left(\lambda + \frac{\alpha^2 K^2}{C_\varepsilon} T_0 \right) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (\text{VIII.57})$$

Takto získaný tenzor se liší od tenzoru (VIII.20) tím, že místo izotermického modulu pružnosti λ se zde objeví adiabatický modul pružnosti

$$\lambda_{\text{ad}} = \lambda + \frac{\alpha^2}{C_\varepsilon} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)^2 T_0, \quad (\text{VIII.58})$$

přičemž modul μ se nezmění. Adiabatickému modulu λ_{ad} odpovídají i adiabatické hodnoty modulů E_{ad} a σ_{ad} , jejichž explicitní tvar může čtenář snadno získat.

Nyní se můžeme obrátit k pohybovým rovnicím (VIII.7). Dosazením do výrazů (VIII.57) a (VII.24) (za předpokladu, že nepůsobí objemové síly) je převedeme na tvar

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda_{\text{ad}} + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{VIII.59})$$

neboli

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_2^2 \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{VIII.60})$$

kde

$$c_1^2 = \frac{\lambda_{\text{ad}} + 2\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}. \quad (\text{VIII.61})$$

Tuto rovnici přepíšme na systém dvou rovnic použitím Helmholtzovy věty (viz (VII.59)) o vyjádření vektorového pole ve tvaru součtu potenciálového (nevířivého) a solenoidálního (nezřídlového) pole. Položíme tedy

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (\text{VIII.62})$$

kde

$$\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0, \quad (\text{VIII.63})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 . \quad (\text{VIII.64})$$

Dosadíme-li (VIII.62) do (VIII.60), s ohledem na (VIII.63) a (VIII.64) a na identitu (VIII.36), obdržíme

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 . \quad (\text{VIII.65})$$

Vylučme odtud \mathbf{u}_2 . Z tohoto důvodu aplikujeme na rovnici (VIII.65) operaci div . Obdržíme tak, že

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0 . \quad (\text{VIII.66})$$

Zároveň je však podle (VIII.63)

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0 . \quad (\text{VIII.67})$$

Je-li ovšem v celé (jednoduše souvislé) oblasti divergence i rotace vektorového pole rovna nule, musí být rovno nule i samotné pole⁴⁹, vektor \mathbf{u}_1 se tedy řídí rovnicí

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 = 0 , \quad (\text{VIII.68})$$

což je vlnová rovnice odpovídající rychlosti vlnění

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ad}} + \mu}{\rho_0}} . \quad (\text{VIII.69})$$

Tyto vlny se nazývají vlnami *kompresními* (vlnami stlačení a expanze), neboť $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 \neq 0$.

Obdobným postupem (s obrácením úlohy operací rot a div) lze získat vlnovou rovnici pro vektor \mathbf{u}_2

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 = 0 . \quad (\text{VIII.70})$$

Tyto vlny se šíří rychlostí

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{VIII.71})$$

⁴⁹ Přesněji řečeno může jít i o homogenní pole obecně závislé na čase, což však odpovídá translačnímu pohybu, o kterém nemusíme uvažovat.

a nazývají se vlnami *torzními*, neboť posunutí částic v této vlně vedou k smykové deformaci ($\text{rot } \mathbf{u}_2 \neq 0$) bez změny objemu ($\text{div } \mathbf{u}_2 = 0$).

Nejprostším případem vlny je rovinná monochromatická vlna

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)} \quad (\text{VIII.72})$$

(pouze reálná část výrazu má fyzikální význam), kde \mathbf{a} značí amplitudu a \mathbf{k} je vlnový vektor. Rovinné monochromatické vlny jsou zvláště důležité proto, že obecnou vlnu můžeme vyjádřit jako jejich superpozici pomocí Fourierova rozkladu.

Dosadíme-li (VIII.72) do odpovídajících vlnových rovnic při respektování podmínek (VIII.63) a (VIII.64), pro kompresní vlnu obdržíme

$$\frac{\omega}{k} = c_1, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{a}_1 = 0 \quad (\text{VIII.73})$$

a pro torzní vlnu platí

$$\frac{\omega}{k} = c_2, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2 = 0. \quad (\text{VIII.74})$$

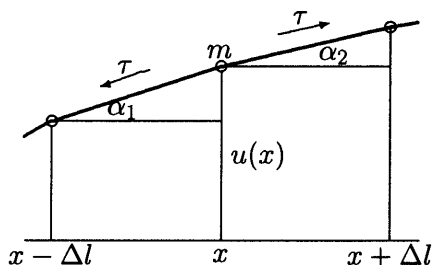
Odtud vyplývá, že kompresní vlny jsou vlnami *podélnými*, neboť $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}_1$, a vlny torzní jsou vlnami *příčnými*, neboť $\mathbf{k} \perp \mathbf{a}_2$.

Poznamenejme ještě, že v reálných, prostorově omezených prostředích mají na chování vln podstatný vliv okrajové podmínky na hranicích kontinua. Vytvářejí omezení na možné frekvence vln a způsobují, že kromě již popsaných „objemových“ vln existují i vlny *povrchové* (Rayleighovy). Všechny druhy vln mají velký význam například v geofyzice, kde umožňují zkoumat elastické vlastnosti hmot, z nichž sestává zemská kůra i nitro. S těmito problémy se může čtenář seznámit studiem obsáhlejších učebnic a speciální literatury.

VIII.5 Kmity struny

V praxi se setkáváme s dvojrozměrnými a jednorozměrnými kontinui omezených rozměrů (membrány, struny), jejichž kmitů využívají například hudební nástroje. Zde si všimněme jen nejjednoduššího případu omezeného elastického prostředí, kmitů struny konečné délky, abychom tak ilustrovali způsob formulace pohybových rovnic a vliv okrajových podmínek.

Předpokládejme, že struna o lineární hustotě hmotnosti ρ je napjata silou τ a kmitá v rovině kolmé na svou délku, takže výchylka struny z její rovnovážné polohy může být zapsána jako $u(x, t)$. Pro odvození pohybové



Obr. 16: Vychýlená struna. Vychýlený element struny nahrazujeme hmotným bodem.

rovnice struny ji rozdělme na elementy délky Δl , které nahradíme hmotnými body o hmotnosti $m = \rho \Delta l$, viz obr. 16.

Na daný element působí síla $\tau = \tau [(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)]$. Pro malý rozdíl úhlů má síla pouze příčnou složku $\tau(\alpha_2 - \alpha_1)$, takže dostáváme pohybovou rovnici

$$\tau(\alpha_2 - \alpha_1) = \rho \Delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{VIII.75})$$

což v limitě pro $\Delta l \rightarrow 0$ vede k jednorozměrné vlnové rovnici pro kmity struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{VIII.76})$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (\text{VIII.77})$$

Tuto rovnici je třeba doplnit okrajovými a počátečními podmínkami. Počátek struny nechť se nachází v bodě $x = 0$, konec v bodě $x = l$ a nechť je struna na obou koncích upevněna. Příslušné okrajové podmínky pak jsou

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \quad (\text{VIII.78})$$

Počáteční podmínky mohou například odpovídat zadání počátečních poloh a rychlostí všech bodů struny, tj. jsou tvaru

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad (\text{VIII.79})$$

kde $0 \leq x \leq l$.

Řešení rovnice (VIII.76) lze provést metodou separace proměnných. Řešení se hledá ve tvaru součinu dvou funkcí

$$u = X(x) T(t). \quad (\text{VIII.80})$$

Dosadíme-li (VIII.80) do (VIII.76), dostáváme

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (\text{VIII.81})$$

Protože každá strana rovnice závisí na jiné proměnné, lze rovnici vyhovět jen tak, že obě její strany jsou rovny téže konstantě. Vzhledem k okrajovým podmínkám (VIII.78) nemůže být tato konstanta kladná, jak uvidíme z dalšího výkladu. Označíme ji proto $-\lambda^2$. Tak dostáváme obyčejné diferenciální rovnice

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad (\text{VIII.82})$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (\text{VIII.83})$$

kde čárkami značíme derivace podle příslušné proměnné. Obecné řešení rovnic (VIII.82) a (VIII.83) je

$$T = A \cos \lambda ct + B \sin \lambda ct, \quad X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x. \quad (\text{VIII.84})$$

Aplikace okrajových podmínek (VIII.78) vede poté k závěru, že

$$C = 0, \quad D \sin \lambda l = 0. \quad (\text{VIII.85})$$

Druhá podmínka je splněna, bude-li

$$\lambda l = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{VIII.86})$$

přičemž $k = 0$ odpovídá rovnovážné poloze struny.

Konstanta λ může tedy nabývat jen určitých hodnot

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (\text{VIII.87})$$

Tyto hodnoty se nazývají vlastními hodnotami příslušného okrajového problému. K hodnotám λ_k přísluší odpovídající funkce $T_k(t)$, $X_k(x)$ a tedy i $u_k(x, t)$. Funkce $u_k(x, t)$ se nazývají *vlastními funkcemi* příslušejícími vlastní hodnotě λ_k . Frekvence

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad (\text{VIII.88})$$

se nazývají *vlastními frekvencemi* struny. Pro nejnižší vlastní frekvenci struny máme

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (\text{VIII.89})$$

a to odpovídá základnímu tónu struny.

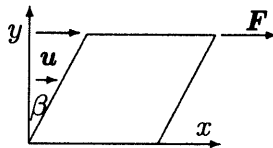
Vzhledem ke tvaru rovnice (VIII.76) může být obecné řešení zapsáno ve tvaru lineární kombinace

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(x, t) . \quad (\text{VIII.90})$$

Na toto řešení je pak nutné ještě aplikovat počáteční podmínky. Tento problém je studován v rámci Fourierovy analýzy.

VIII.6 Příklady

1. Krychle o elastických konstantách E , σ je uložena v rámu, jehož stěny lze považovat za absolutně tuhé, ale úhly mezi nimi se mohou měnit, jak je ukázáno na obr. 17. Nechť spodní podstava rámu je pevně fixovaná a na horní působí smyková síla \mathbf{F} . Stěna krychle nechť má plochu A , úhel zkosení budiž β . Dokažte, že platí $\mu = F/A\beta$.



Obr. 17: Smyková deformace kvádrů. Deformace je charakterizována úhlem zkosení β .

Řešení: Za předpokladu malé deformace je

$$\mathbf{u} = (\beta y, 0, 0) \quad (\text{VIII.91})$$

a tedy podle (VII.24)

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\beta}{2} . \quad (\text{VIII.92})$$

Podle Hookova zákona (VIII.28)

$$\tau_{xy} = \frac{E\beta}{2(1+\sigma)} . \quad (\text{VIII.93})$$

Na horní ploše krychle platí okrajová podmínka

$$\frac{E\beta}{2(1+\sigma)} = \frac{F}{A}, \quad (\text{VIII.94})$$

tedy

$$\frac{F}{\beta A} = \frac{E}{2(1+\sigma)} = \mu. \quad (\text{VIII.95})$$

Tím je stanovena i nejjednodušší metoda k měření smykového modulu.

2. Vypočtete deformaci homogenní koule vlastní gravitací a určete rozložení tlaku v závislosti na poloměru.

Řešení: Rovnici rovnováhy (VIII.34) přepíšeme do tvaru

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = -\rho \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \mathbf{f}, \quad (\text{VIII.96})$$

kde

$$\mathbf{u} = u(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{f} = -\frac{\mathbf{r}}{R} g, \quad (\text{VIII.97})$$

g je gravitační zrychlení na povrchu koule o poloměru R . Ve sférických souřadnicích obdržíme rovnici pro určení $u(r)$

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}. \quad (\text{VIII.98})$$

Dvojit integrací dospějeme k řešení ve tvaru

$$u = -\frac{\gamma}{10} r^3 + \frac{c_1}{3} r + \frac{c_2}{r^2}, \quad (\text{VIII.99})$$

kde

$$\gamma = \frac{\rho g}{R} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \quad (\text{VIII.100})$$

a c_1, c_2 jsou integrační konstanty. Konstantu c_2 určíme z podmínky, že $u(0) = 0$, odkud $c_2 = 0$. Analogicky jako v II.3 se dále napíše výrazy pro složky tenzoru deformace a z Hookova zákona potom i výraz pro komponentu τ_{rr} tenzoru napětí. Z hraniční podmínky $p(R) = 0$ se určí konstanta c_1 a výsledkem bude závěrečný hledaný výraz

$$u = -\frac{\rho g (1-2\sigma)}{10RE(1-\sigma)} r \left[R^2 (3-\sigma) - r^2 (1+\sigma) \right]. \quad (\text{VIII.101})$$

Povšimněme si, že uvnitř koule derivace u podle r mění znaménko, vnitřní vrstvy tělesa jsou tedy stlačeny a vnější roztaženy.

Příklady k samostatnému řešení

1. Jsou dány dvě tyče, z nichž jedna má dvojnásobné rozměry. Obě jsou svisle zavěšeny a zatíženy břemenem z téhož materiálu, přičemž břemeno na druhé tyči má dvojnásobné rozměry. Jak se musejí změnit elastické koeficienty E , σ , aby relativní deformace byla v obou případech stejná?

2. Řešte předchozí příklad pro situaci, kdy obě tyče jsou umístěny u povrchu planety, která má stejnou hustotu, ale dvojnásobné rozměry ve srovnání se Zemí.

3. Drát o průřezu S je natahován silou F . Určete jeho relativní prodloužení a změnu průřezu a stanovte tak bezprostřední fyzikální význam Youngova modulu a Poissonova koeficientu. Odvoďte termodynamická odvození na hodnoty E a σ a porovnejte je s empirickými poznatky pro daný případ.

4. Mezi dvěma souosými válci o poloměrech R_1, R_2 se nachází elastické kontinuum. Nechť vnitřní válec zůstane pevný a vnější se a) otočí o úhel $\Delta\varphi$, b) posune ve směru osy o Δl . Určete pro oba případy posunutí, tenzor deformace a tenzor napětí v kontinuu, jakož i sílu, kterou bude deformované kontinuum působit na své hranice.

5. Kvádr z látky o elastických konstantách E , σ je stlačován silou F , přičemž je upevněn tak, že se nemůže příčně rozšiřovat. Najděte vztah mezi relativním zkrácením a napětím (tj. efektivní hodnotu Youngova modulu).

IX IDEÁLNÍ TEKUTINY

Tekutiny jsou látky vyznačující se tím, že v klidu v nich nepůsobí žádné smykové síly a normální tlaky (eventuálně napětí) jsou si rovny. Tekutiny proto na rozdíl od pevných látek nekladou odpor změně svého tvaru — nelze mluvit o jejich ohnutí či zkroucení. Mezi tekutiny patří jak kapaliny, tak i plyny. Rozdíl mezi kapalinami a plyny je z mikroskopického hlediska pouze kvantitativní. V kapalinách hrají podstatně větší roli síly vzájemného působení mezi molekulami. Ani mechanika kontinua nestanoví mezi kapalinami a plyny přesně definovanou hranici.

Zůstávají-li uvedené vlastnosti tekutin zachovány i při jejich pohybu, mluvíme o *ideálních tekutinách*. Jak naznačuje již název, jde o idealizovaný předpoklad, který přestává platit při dostatečně velkých hodnotách komponent tenzoru rychlosti deformace. Přesto je dobře použitelný v řadě reálných fyzikálních situací a umožňuje porozumět důležitým jevům nastávajícím v tekutinách⁵⁰.

Stanovíme tenzor napětí v ideální tekutině a jeho užitím specifikujeme obecný tvar pohybových rovnic. Dále se zabýváme podmínkami rovnováhy v ideální tekutině a různými typy jejího proudění. Zkoumáme vliv proudění na tělesa nacházející se v tekutině. Nakonec studujeme šíření zvukových a rázových vln.

IX.1 Pohybové rovnice

Ideální tekutinou budeme rozumět takové kontinuum, v němž v klidu ani za libovolného pohybu nepůsobí smykové síly. To podle VII. 8 znamená, že kvadrika příslušná tenzoru napětí musí být koulí. Tenzor napětí je proto úměrný Kroneckerovu tenzoru. Konstanta úměrnosti je podle (VII.124) záporně vzatý tlak, platí tedy

$$\tau_{ik} = -p\delta_{ik} . \quad (\text{IX.1})$$

Druhá základní vlastnost ideální tekutiny, *Pascalův zákon* stanoví rovnost normálních tlaků, již odtud vyplývá. Naopak Pascalův zákon vede k tenzoru napětí (IX.1) a tedy k nulovosti smykových sil.

⁵⁰ Poznamenejme, že rovnice ideální tekutiny se uplatňují i při popisu jevu supratekutosti, který nastává u kapalného helia při teplotě blízké absolutní nule a který je vysvětlen kvantovou mechanikou.

Model ideální tekutiny se zřejmě s úspěchem bude užívat k popisu pohybu reálných tekutin s velmi malým vnitřním třením (vazkostí).

V plynu je tlak působen srážkami molekul a předáváním hybnosti s tím spojenou, zatímco vliv vzájemného silového působení mezi molekulami je mimo samotný okamžik srážky oproti tomu zanedbatelný. Platí proto $p > 0$ (látka ohraničená plochou vždy působí na kapalinu silou ve směru vnější normály). V případě kapaliny s zanedbatelným příspěvkem trvalého vzájemného silového působení může nastat i případ $p < 0$. Záporný tlak, tj. napětí, v látce má ovšem za následek, že dutiny v ní vzniklé, popř. mezery mezi ní a jejími stěnami se spontánně zvětšují. To znamená, že buď nemůže vůbec dojít k rovnováze, anebo je tato rovnováha pouze metastabilní a bývá obvykle snadno narušena malými náhodnými vlivy.

Obraťme pozornost k soustavě pohybových rovnic kontinua (VII.166) až (VII.169) za předpokladu (IX.1). Vzhledem k nepřítomnosti vnitřního tření v ideální tekutině je přirozené předpokládat nulovost disipace

$$D = 0 . \quad (\text{IX.2})$$

Tepelný tok působící vyrovnávání teplotních rozdílů je funkcí komponent gradientu teploty. Obvykle se lze spokojit s prvním přiblížením Taylorova rozvoje, kdy je vzhledem k izotropii tekutiny

$$\mathbf{q} = -k \text{grad } T , \quad (\text{IX.3})$$

k udává koeficient tepelné vodivosti, obecně závislý na stavu tekutiny, například na jejím tlaku a teplotě. Z druhé věty termodynamické vyplývá jeho kladnost, tj.

$$k(p, T) > 0 . \quad (\text{IX.4})$$

V dalším výkladu však budeme tepelný tok zanedbávat, tj. budeme klást

$$\mathbf{q} = 0 . \quad (\text{IX.5})$$

Za předpokladů (IX.1), (IX.5) a (IX.2) mají pohybové rovnice (VII.166) až (VII.169) pro ideální tekutinu tvar

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div } \mathbf{v} , \quad (\text{IX.6})$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{f} , \quad (\text{IX.7})$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \text{div } \mathbf{v} , \quad (\text{IX.8})$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 . \quad (\text{IX.9})$$

Tento systém rovnic musí být doplněn *stavovými rovnicemi*. Budeme studovat lokálně rovnovážné stavy, kdy všechny parametry kontinua jsou funkcemi tlaku a teploty, a tedy

$$e = e(p, T) , \quad \rho = \rho(p, T) . \quad (\text{IX.10})$$

První z těchto rovnic se nazývá kalorimetrickou stavovou rovnicí, druhá pak stavovou rovnicí termickou. Příslušné závislosti se určují z experimentálních údajů.

Rovnice (IX.6) a (IX.9) spolu se stavovými rovnicemi (IX.10) tvoří uzavřenou soustavu osmi parciálních diferenciálních rovnic pro osm neznámých $\rho, p, \mathbf{v}, e, s, T$, kterou musíme doplnit vhodnými počátečními a okrajovými podmínkami.

Vratnost zákonů pohybu ideální tekutiny je patrna z toho, že tyto rovnice zůstanou v platnosti při záměně $t \rightarrow -t$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$.

Jak uvidíme v dalším textu, je při důležitých typech termodynamických dějů hustota hmotnosti kontinua funkcí tlaku⁵¹

$$\rho = \rho(p) . \quad (\text{IX.11})$$

V tomto případě mluvíme o *barotropních* tekutinách. Pro určení jejich rychlostního pole a rozložení tlaku a hustoty se lze omezit na rovnice (IX.6), (IX.7) a druhou rovnicí (IX.10), které představují soustavu pěti rovnic pro pět neznámých ρ, p, \mathbf{v} .

IX.2 Hydrostatika

Položíme-li v pohybových rovnicích tekutiny (IX.7) zrychlení $\mathbf{a} = 0$, dostáváme pro ni rovnice mechanické rovnováhy

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{f} . \quad (\text{IX.12})$$

Jestliže objemové síly nepůsobí, mají podmínky rovnováhy tvar

$$\text{grad } p = 0 , \quad \text{tj. } p = \text{konst} . \quad (\text{IX.13})$$

⁵¹ Jak uvidíme, může k tomu dojít i tehdy, když termická stavová rovnice (IX.10) teplotu obsahuje.

Tlak v kapalině je tedy stejný ve všech bodech tekutiny. Rovnice (IX.12) se snadno integruje v jednoduchých případech, například u ideálního plynu nacházejícího se v homogenním gravitačním poli (zde máme $\mathbf{g}(0, 0, -g)$) ve stavu tepelné rovnováhy v každém bodě ($T = \text{konst.}$). Stavová rovnice zde má jak známo tvar

$$p = \rho \frac{kT}{m}, \quad (\text{IX.14})$$

kde k značí Boltzmannovu konstantu a m hmotnost molekuly plynu. Dosazením do (IX.12) dostáváme

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{kT}{m} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g. \quad (\text{IX.15})$$

Integrace vede k výslednému vztahu (barometrické formulí)

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{mg}{kT} (z - z_0) \right] \quad (\text{IX.16})$$

pro rozložení hustoty plynu v závislosti na výšce. Konstanta ρ_0 značí hodnotu hustoty hmotnosti v zadané výšce z_0 .

Napišme ještě rovnice rovnováhy ideální tekutiny o velké hmotnosti, jejíž části se udržují pohromadě přitažlivými silami gravitační interakce (hvězda). Nechť φ značí newtonovský gravitační potenciál, který budí uvažovaná tekutina. Tento potenciál je spojen s hustotou síly \mathbf{f} vztahem

$$\mathbf{f} = -\text{grad } \varphi, \quad (\text{IX.17})$$

takže rovnice rovnováhy má tvar

$$\text{grad } p = -\rho \text{ grad } \varphi. \quad (\text{IX.18})$$

Z této rovnice vyloučíme potenciál φ . Newtonův gravitační zákon pro bodovou částici o hmotnosti M lze zapsat v integrálním tvaru jako

$$\oint_S \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = -4\pi GM, \quad (\text{IX.19})$$

kde S je plocha obklopující danou částici, G značí Newtonovu gravitační konstantu. Vzhledem k principu superpozice pro gravitační působení lze obecný integrální vztah zapsat jako

$$\oint_S \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = -4\pi G \int_V \rho \, dV, \quad (\text{IX.20})$$

pro libovolné rozložení hustoty $\rho(\mathbf{r})$. Užitím Gaussovy věty a libovolnosti objemu V o hranici S obdržíme

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = -4\pi G\rho \quad (\text{IX.21})$$

a užitím (IX.17) dostaneme Poissonovu rovnici pro potenciál

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \quad (\text{IX.22})$$

Vydělíme-li rovnici rovnováhy (IX.18) hustotou ρ , aplikujeme-li na obě její strany operaci div a užijeme-li rovnice (IX.22), obdržíme

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = -4\pi G\rho. \quad (\text{IX.23})$$

Pro centrálně symetrickou hvězdu bude mít předcházející rovnice mechanické rovnováhy (IX.23) ve sférických souřadnicích tvar

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr} \right) = -4\pi G\rho(r). \quad (\text{IX.24})$$

Tuto rovnici je možné rozřešit v případě, že je dána závislost $\rho = \rho(p)$ neobsahující další neznámé. Tak je tomu zejména ve stavu termodynamické rovnováhy, kdy $T = \text{konst}$ a kdy lze tedy užít přímo termické stavové rovnice. Dalším případem je konstantnost hustoty entropie s v uvažované látce. Tomuto případu se budeme věnovat v dalším textu. V jiných případech je nutné kombinovat rovnici rovnováhy se stavovými rovnicemi.

Mechanická rovnováha bez rovnováhy termodynamické nemusí být ovšem stabilní, jak se lze přesvědčit například postavením hrnce s vodou na horkou plotnu. Podmínkou stability rovnováhy se zabývají podrobnější učebnice mechaniky kontinua.

Zmíňme se ještě o nejstarším poznatku hydrostatiky, který se týká plovoucích těles. Výslednice plošných sil působících na těleso ponořené do tekutiny je podle (VII.120) a (VII.123)

$$F_i = \oint_S \tau_{ik} n_k dS, \quad (\text{IX.25})$$

kde \mathbf{n} je vnější normála, S povrch tělesa (u těles plovoucích na hladině ovlivňuje hodnotu integrálu jen ponořená část). V ideální tekutině je tedy

$$\mathbf{F} = - \oint_S p \mathbf{n} dS. \quad (\text{IX.26})$$

Výsledný moment plošných sil je podle (VII.136)

$$D_i = \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l dS \quad (\text{IX.27})$$

a v ideální tekutině

$$\mathbf{D} = - \oint_S p \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS . \quad (\text{IX.28})$$

Budeme předpokládat, že tekutina se nachází v homogenním gravitačním poli, čili $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Síla a její moment jsou zřejmě stejné, jako kdyby na místě tělesa byla tekutina, kterou těleso „vytlačilo“. Užijeme-li pro tuto situaci Gaussovu větu (VII.101) a rovnici rovnováhy (IX.12), dostáváme

$$\mathbf{F} = - \int_V \text{grad } p dV = - \int_V \rho \mathbf{g} dV = -M \mathbf{g} \quad (\text{IX.29})$$

pro výslednici sil (M je hmotnost vytlačené tekutiny) a

$$D_i = - \int_V (\epsilon_{ijk} p x_j)_{,k} dV \quad (\text{IX.30})$$

čili

$$\mathbf{D} = - \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV = -M \mathbf{R} \times \mathbf{g} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} , \quad (\text{IX.31})$$

kde \mathbf{R} je polohový vektor středu hmotnosti vytlačené tekutiny.

Vztah (IX.29) představuje *Archimédův zákon*. Poloha tělesa v tekutině je rovnovážná v případě, že síla \mathbf{F} (hydrostatický vztlak) a její moment \mathbf{D} se ruší silou a momentem síly gravitačního působení na těleso. Tato rovnováha nemusí být nutně stabilní.

IX.3 Izoentropický pohyb

Při zanedbání tepelné výměny, tj. za předpokladu *adiabatičnosti* probíhajících procesů, platí v ideální tekutině podle (IX.9)

$$s = s_0 \quad (\text{IX.32})$$

podél pohybu každého jejího elementu. Přepíšeme-li rovnici (VII.161) do tvaru vztahového k jednotce hmotnosti jako

$$T ds = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) , \quad (\text{IX.33})$$

můžeme odtud při znalosti stavových rovnic určit entropii jako funkci hustoty hmotnosti a tlaku

$$s = s(\rho, p) . \quad (\text{IX.34})$$

Z konstantnosti s , viz (IX.32), pak plyne, že podél pohybu elementu kontinua platí určitá závislost mezi ρ a p .

Pokud je na počátku hustota entropie v celé tekutině stejná, je tento vztah stejný všude v tekutině, tj.

$$\rho = \rho(p) . \quad (\text{IX.35})$$

Pohyb probíhající při konstantním s v prostoru i v čase se nazývá *izoentropický*. Izoentropickým pohybem je například vlnění v látce, která byla na počátku v homogenním stavu, čímž byla zaručena nezávislost s na souřadnicích. S dobrým přiblížením lze považovat za izoentropické děje v atmosféře, kde dochází k neustálé adiabatické výměně vzdušných mas, takže stav atmosféry můžeme přibližně popsat jako stav izoentropické rovnováhy.

Ilustrujme předchozí závěry příkladem ideálního plynu, jehož stavové rovnice mají tvar

$$e = C_V T , \quad p = \rho \frac{kT}{m} , \quad (\text{IX.36})$$

kde $C_V = \text{konst}$ je izochorická tepelná kapacita plynu (derivace vnitřní energie jednotky hmotnosti podle teploty počítaná při konstantním objemu).

Rovnice (IX.33) pro tento případ dává

$$ds = C_V \frac{dT}{T} + \frac{k}{m} \rho d \left(\frac{1}{\rho} \right) , \quad (\text{IX.37})$$

odtud po integraci

$$s = C_V \ln \left(\frac{T}{\rho^{k/mC_V}} \right) . \quad (\text{IX.38})$$

Vyloučíme-li odtud T pomocí termické stavové rovnice (IX.36), dospějeme k výrazu pro entropii jakožto funkci p a ρ

$$s = C_V \ln \left(\frac{m}{k} \frac{p}{\rho^\gamma} \right) , \quad (\text{IX.39})$$

kde

$$\gamma = 1 + \frac{k}{mC_V} \quad (\text{IX.40})$$

je Poissonova konstanta. Užijeme-li ještě Mayerova vztahu (C_p je tepelná kapacita jednotky hmotnosti při konstantním tlaku)

$$C_p - C_V = \frac{k}{m} , \quad (\text{IX.41})$$

obdržíme pro γ výraz

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} . \quad (\text{IX.42})$$

Vzhledem ke konstantnosti s podél pohybu elementu plyne z (IX.39) vztah mezi tlakem a hustotou hmotnosti

$$p = A\rho^\gamma , \quad (\text{IX.43})$$

kde A je konstanta. Pokud jde o izoentropický proces, je hodnota konstanty A stejná pro všechny elementy dané tekutiny, takže předchozí vztah může sloužit jako stavová rovnice. Procesy řídicí se rovnicí (IX.43) (s libovolným γ) se nazývají polytropními. Příkladem polytropního děje je i děj izotermický, kdy $\gamma = 1$.

IX.4 Eulerovy rovnice. Rovnice Bernoulliho

Pohybové rovnice v užším slova smyslu (IX.7) se v případě ideální tekutiny nazývají *Eulerovy rovnice*. Pokud mají objemové síly potenciál U (jako je tomu v případě působení gravitace), lze tyto rovnice psát jako

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p - \rho \text{ grad } U , \quad (\text{IX.44})$$

popřípadě využitím (VII.8)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{ grad } p - \text{grad } U . \quad (\text{IX.45})$$

Pro izoentropický pohyb můžeme také napsat

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } (h + U) , \quad (\text{IX.46})$$

kde

$$h = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (\text{IX.47})$$

je entalpie jednotky hmotnosti. Tato interpretace veličiny h plyne z rovnic (VII.164), které mají pro jednotku hmotnosti tvar

$$h = e + \frac{p}{\rho} , \quad dh = T ds + \frac{dp}{\rho} . \quad (\text{IX.48})$$

Další zápis Eulerových rovnic obdržíme užitím vzorce z vektorové analýzy

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} . \quad (\text{IX.49})$$

Rovnice (IX.46) má pak tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad } (h + U) . \quad (\text{IX.50})$$

Aplikujeme-li na obě strany této rovnice operaci rotace, obdržíme formuli

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) \quad (\text{IX.51})$$

obsahující pouze rychlost tekutiny.

Připomeňme si pojem *proudnice*. Proudnicí se rozumí taková myšlená křivka, jejíž tečné vektory jsou zároveň rychlostmi částic na této křivce se nacházejících. Platí tedy, že

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} . \quad (\text{IX.52})$$

Nadále se budeme zabývat stacionárním (ustáleným, časově neproměnným) pohybem tekutiny, kdy platí

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (\text{IX.53})$$

a proudnice splývají s trajektoriemi částic tekutiny.

Parametrizujme proudnici její délkou l a vynásobme rovnici (IX.50) skalárně jednotkovým vektorem \mathbf{l} tečným k proudnici. Pro projekce příslušných členů v této rovnici vystupujících zřejmě platí

$$\mathbf{l} \text{ grad } (h + U) = \frac{d(h + U)}{dl} , \quad (\text{IX.54})$$

$$\mathbf{l} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0 , \quad (\text{IX.55})$$

takže z rovnice (IX.50) pro stacionární proudění dostáváme, že podél proudnice platí

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2} + h + U \right) = 0 \quad (\text{IX.56})$$

a tedy

$$\frac{v^2}{2} + h + U = \text{konst} . \quad (\text{IX.57})$$

Hodnota konstanty se, obecně řečeno, může měnit při přechodu k jiné proudnici. Rovnice (IX.57) se nazývá *rovnicí Bernoulliho*.

Vzhledem k obtížné stlačitelnosti tekutin je často možné pokládat zkoumanou tekutinu za zcela nestlačitelnou a klást

$$\rho = \text{konst} \quad (\text{IX.58})$$

v prostoru i v čase. Pak rovnice kontinuity přechází na tvar

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{IX.59})$$

Eulerovy rovnice dávají

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + U \right) \quad (\text{IX.60})$$

a Bernoulliho rovnice je

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{konst}. \quad (\text{IX.61})$$

Pro určení mechanického pohybu nestlačitelné tekutiny (proměnné \mathbf{v}, p) stačí tedy rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice; tj. tento pohyb může být určen na základě zákonů mechaniky bez přihlížení k termodynamickým zákonům a stavovým rovnicím.

Povšimněme si, že i v této nejjednodušší formě jsou rovnice hydrodynamiky nelineární, což je způsobeno členem $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$. Součet dvou řešení Eulerových rovnic již proto není jejich řešením (srovnej například zkřížené svazky vody tryskající z hadic a zkřížené světelné svazky, které se na rozdíl od nich řídí lineárními rovnicemi). Nelineárnost Eulerových rovnic značně komplikuje nalézání jejich řešení.

Poznamenejme ještě, že na základě (IX.47) bychom mohli člen p/ρ považovat za hustotu entalpie. V případě stavové rovnice ideální tekutiny (IX.58) však užití (IX.47) neumožňuje zachytit závislost entalpie na entropii a musíme proto užít prvního vztahu (IX.48).

Veličiny h a p/ρ se tedy liší o hustotu vnitřní energie e , která je však za předpokladu zanedbání tepelné výměny během pohybu daného elementu kontinua konstantní

$$\frac{de}{dt} = 0, \quad (\text{IX.62})$$

jak to vyplývá z (IX.8) a (IX.1).

IX.5 Tok hybnosti a energie

Připomeňme si tvar pohybových rovnic (VII.129)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i . \quad (\text{IX.63})$$

Zde σ_{ik} představuje tenzor absolutních napětí, který má pro ideální tekutinu tvar

$$\sigma_{ik} = -\rho v_i v_k - p \delta_{ik} . \quad (\text{IX.64})$$

Za předpokladu, že objemové síly jsou nulové, je rovnice (IX.63) rovnicí kontinuity pro komponenty hybnosti ρv_i (vztažené na jednotku hmotnosti tekutiny). Integrací přes objem V pevný v prostoru a užitím Gaussovy věty lze odtud odbržet integrální vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \oint_S \sigma_{ik} dS_k , \quad (\text{IX.65})$$

kde S značí plochu uzavírající objem V . Z rovnice (IX.65) je patrné, že $-\sigma_{ik} dS_k$ je i -tá komponenta hybnosti proudící za časovou jednotku elementem dS plochy S , $-\sigma_{ik}$ značí tedy i -tou komponentu hybnosti kontinua, která prošla za časovou jednotku jednotkovou plochou kolmou k ose x_k . Tenzor absolutních napětí vzatý se záporným znaménkem můžeme proto považovat za tenzor hustoty toku hybnosti v kontinuu. Kromě hybnosti unášené tekutinou přispívají k toku hybnosti i plošné síly. V případě izolovaného a prostorově ohraničeného kontinua můžeme objem V , přes který počítáme integrál, rozšířit tak, že celé kontinuum leží uvnitř. Pak je integrál přes hranici objemu roven nule a celková hybnost

$$P_i = \int_V \rho v_i dV \quad (\text{IX.66})$$

se zachovává.

Obdobou rovnic (VII.129) pro hybnost je rovnice (VII.145), kterou můžeme v případě zanedbání tepelného toku zapsat jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \text{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \rho v f , \quad (\text{IX.67})$$

což je v případě nulovosti objemových sil opět rovnice kontinuity.

Z této rovnice je patrné, že výraz

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + h \right) \quad (\text{IX.68})$$

(h je entalpie jednotky hmotnosti) udává hustotu toku energie. Velikost tohoto vektoru značí množství energie protékající za jednotku času jednotkovou ploškou kolmou na směr rychlosti.

Z výrazu na pravé straně (IX.68) je vidět, že na toku energie (podobně jako na toku hybnosti) se kromě kinetické a vnitřní energie unášené kontinuem podílejí i plošné síly. Jejich příspěvek p/ρ lze objasnit pomocí vztahu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) d\mathbf{S} - \oint_S p \mathbf{v} d\mathbf{S} \quad (\text{IX.69})$$

získaného integrací rovnice (IX.67) a užitím Gaussovy věty za předpokladu nulovosti objemových sil. První člen na pravé straně je energie, která prošla za jednotku času uzavřenou nehybnou plochou S . Druhý člen je práce vykonaná tlakovými silami působícími na hranici daného objemu.

Pro izolované a prostorově ohraničené kontinuum dostáváme stejným způsobem jako v případě hybnosti zákon zachování energie

$$E = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV. \quad (\text{IX.70})$$

Přítomnost objemových sil \mathbf{f} v rovnicích (IX.63) a (IX.67) na první pohled narušuje platnost rovnic kontinuity a tím i zákonů zachování energie a hybnosti. Teorie pole však umožňuje vyjádřit tyto síly takovým způsobem, že jejich poli rovněž přísluší hustota a tok hybnosti, popř. energie, a členy s objemovými silami lze tak zahrnout do celkových rovnic kontinuity pro soustavu látka + pole.

IX.6 Cirkulace rychlosti. Potenciálový pohyb

Mějme v kontinuu uzavřenou křivku tvořenou částicemi, které se účastní jeho pohybu. *Cirkulací* rychlosti podél této křivky s se nazývá integrál

$$\Gamma = \oint_s \mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (\text{IX.71})$$

Při pohybu částic tekutiny dochází i k pohybu celé křivky. Zkoumejme, jak se mění cirkulace s časem, tj. vypočtěme derivaci

$$\frac{d}{dt} \oint_{s(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} . \quad (\text{IX.72})$$

Výpočet můžeme provést i pro obecnější situaci, kdy je podél libovolné (třeba i neuzavřené) časově proměnné křivky zadáno vektorové pole $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Jde o obdobnou úlohu, jakou jsme se zabývali v VII. 7 pro pohyblivý objem. Chceme tedy vypočíst

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)} \mathbf{P} d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int_{s(0)} \mathbf{P} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} d\sigma , \quad (\text{IX.73})$$

kde σ je parametr, který je „unášen“ spolu s křivkou, takže má pro každý bod unášené křivky konstantní hodnotu. Vzhledem k tomu lze derivaci uvést za integrál a psát

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{s(t)} \mathbf{P} d\mathbf{r} &= \int_{s(0)} \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} + \mathbf{P} \frac{d}{d\sigma} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) d\sigma = \\ &= \int_{s(0)} \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} + \mathbf{P} \frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} \right) d\sigma . \end{aligned} \quad (\text{IX.74})$$

Užitím pravidla pro derivování součinu ve druhém členu a rozepsáním totální derivace v prvním členu dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{s(t)} \mathbf{P} d\mathbf{r} &= \int_{s(0)} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{P} + \text{grad}(\mathbf{P}\mathbf{v}) \right) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{s(0)} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{P} \right) d\mathbf{r} + [\mathbf{P}\mathbf{v}]_A^B , \end{aligned} \quad (\text{IX.75})$$

kde A, B jsou krajní body křivky.

Pro uzavřenou křivku druhý člen vymizí a klademe-li navíc $\mathbf{P} = \mathbf{v}$, máme pro časovou změnu cirkulace

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \oint_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} \right) d\mathbf{r} \quad (\text{IX.76})$$

(užili jsme toho, že počáteční okamžik mohl být zvolen libovolně). Protože však (spojením (VII.8) a (IX.49))

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad (\text{IX.77})$$

můžeme také psát

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r}. \quad (\text{IX.78})$$

Pro izoentropický pohyb v potenciálovém poli však platí (IX.48), tj.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } (h + U) \quad (\text{IX.79})$$

a tedy integrál na pravé straně (IX.78) je nulový. Proto

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (\text{IX.80})$$

V ideální tekutině za daných předpokladů je tedy cirkulace rychlosti podél uzavřené „tekoucí“ křivky konstantní veličinou (Thomsonova věta). V barotropní, popř. nestlačitelné, tekutině stačí pro její odvození předpokládat potenciálnost sil.

V řadě případů je pohyb ideální tekutiny pohybem *potenciálovým* (nevířivým), kdy v celé tekutině platí

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0. \quad (\text{IX.81})$$

Je-li oblast zaplněná tekutinou jednoduše souvislá (tj. pokud lze každou křivkou proložit plochu ležící zcela v této oblasti), dostáváme užitím Stokesovy věty pro libovolnou uzavřenou křivku

$$\Gamma = \oint_s \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{IX.82})$$

V jednoduše souvislé oblasti tedy nemohou při nevířivém proudění existovat uzavřené proudnice.

Z rovnice (IX.81) plyne, že rychlost \mathbf{v} tekutiny lze vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole, tedy

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (\text{IX.83})$$

Potenciál φ se nazývá potenciál rychlosti (rychlostní potenciál). K tomuto potenciálu lze připočíst libovolnou funkci času. Dosazením vztahu (IX.83) do Eulerových rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad } (h + U) \quad (\text{IX.84})$$

obdržíme

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + U \right) = 0 . \quad (\text{IX.85})$$

Odtud plyne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + U = f(t) , \quad (\text{IX.86})$$

kde $f(t)$ je libovolná funkce času. Potenciál φ je určen až na libovolnou funkci času, takže funkci f lze do něho zahrnout.

Pro stacionární pohyb tekutiny, kdy

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 , \quad (\text{IX.87})$$

lze vybrat funkce φ a f tak, že

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 , \quad f(t) = \text{konst} , \quad (\text{IX.88})$$

takže formule (IX.86) přechází na tvar Bernoulliho rovnice

$$\frac{v^2}{2} + h + U = \text{konst} , \quad (\text{IX.89})$$

popř.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{konst} \quad (\text{IX.90})$$

pro případ nestlačitelné tekutiny.

Je zde ovšem, ve srovnání s rovnicí (IX.57), rozdíl v tom, že v případě stacionárního potenciálového proudění je veličina na levé straně konstantní v celém objemu kapaliny, nikoliv jen podél jednotlivých proudnic. Užití Bernoulliho rovnice pro integraci rovnic stacionárního potenciálového proudění je proto obzvláště efektivní.

IX.7 Obtékání tuhých těles. Odpor a vztlak

Zkoumání vlivu tekutiny na pohyb tuhých těles v ní umístěných má zřejmě velký praktický význam (lodní a letecká doprava). Předpoklad ideálnosti tekutiny, z něhož vyplývá neexistence tření mezi tekutinou a tělesem, někdy nebrání uspokojivému přiblížení k realitě. Obecně jde o matematicky velmi složité problémy, a proto se v tomto odstavci omezíme jen na základní informace o způsobu jejich řešení.

Formulujeme především hraniční podmínky platné na povrchu obtékacích těles. Předpokládejme nejprve, že uvažované těleso je nehybné. Vzhledem k ideálnosti tekutiny neomezuje přítomnost tělesa rychlost tekutiny ve směru tečném k jeho povrchu a zabraňuje pouze proudění ve směru normálovém. Hraniční podmínkou je proto

$$v_n = \mathbf{v}\mathbf{n} = 0, \quad (\text{IX.91})$$

kde \mathbf{n} je jednotková normála k povrchu tělesa.

V případě pohybujícího se tělesa přejdeme užitím Galileiho transformace pro rychlosti k systému, v němž je dané místo povrchu v daném čase nehybné, čímž převedeme daný problém na předchozí případ. Dospějeme tak k závěru, že v původním vztažném systému musí platit hraniční podmínka

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)\mathbf{n} = 0, \quad (\text{IX.92})$$

kde \mathbf{v}_p je rychlost povrchu tělesa v daném místě a čase.

Obecně vzato, je tedy třeba řešit soustavu hydrodynamických rovnic spolu s hraničními podmínkami (IX.92) a pohybovými rovnicemi pro dané těleso, na něž působí síla a moment síly, jež jsou výslednicemi působení plošných sil na jeho povrch.

Často je možné zjednodušit úlohu předpokladem o nestlačitelnosti tekutiny

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IX.93})$$

a o potenciálové povaze proudění (podle Thomsonovy věty nemůže při působení potenciálových sil vznikat v nestlačitelné tekutině cirkulace a tedy ani víry, pokud nebyly přítomny na počátku). Je tedy

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (\text{IX.94})$$

a namísto rychlostního pole můžeme hledat jeho potenciál φ . Spojením vztahů (IX.93) a (IX.94) pro něj dostáváme Laplaceovu rovnici

$$\Delta\varphi = 0. \quad (\text{IX.95})$$

Matematicky nejprostším případem je obtékání nehybného tělesa neohraničenou tekutinou, která se v dostatečné vzdálenosti od něho pohybuje rychlostí \mathbf{V} konstantní v prostoru i v čase (v realitě to může odpovídat pilíři v řece či sloupu ve větru). Podle principu relativity je tato úloha ekvivalentní úloze o rovnoměrném a přímočarém pohybu tělesa v tekutině, která je v dostatečné vzdálenosti od něho v klidu (v realitě například let letadla, jehož pohyb je udržován motory).

Řešíme-li úlohu v systému spojeném s kapalinou, hledáme potenciál φ pro určitý čas t , který splňuje Laplaceovu rovnici (IX.95), dále pak hraniční podmínku (IX.92) a je v nekonečnu roven nule. Analyticky lze pochopitelně tuto úlohu vyřešit jen v nejprostších případech, když se obtékané těleso vyznačuje vysokou symetrií.

Po nalezení φ můžeme určit rychlostní pole podle (IX.94). Přejdeme k systému, v němž je těleso v klidu a proudění je stacionární. Užitím Bernoulliho rovnice můžeme v tomto systému získat rozložení tlaku p .

Pro výpočet síly a momentu síly, kterými působí tekutina na těleso, uijeme vzorců (IX.26) a (IX.28), kterých jsme již použili v hydrostatice. Síla působící na těleso je

$$F_i = - \oint_S p n_i dS, \quad (\text{IX.96})$$

kde \mathbf{n} je vnější normála k povrchu S . Složka síly \mathbf{F} , která je rovnoběžná s rychlostí \mathbf{V} , se nazývá *silou odporu*, složka síly \mathbf{F} kolmá k rychlosti \mathbf{V} je *síla vztlaková* (síla Žukovského).

Moment síly působící na těleso je

$$D_i = - \oint_S \epsilon_{ijk} x_j p n_k dS. \quad (\text{IX.97})$$

Na závěr si ukažme překvapivý důsledek vyložené teorie. Nechť je obtékané těleso zrcadlově symetrické vzhledem k rovině kolmé na směr proudění (tuto podmínku splňuje koule nebo válec s osou ve směru proudění či s osou na směr proudění kolmou). Z vratnosti proudění ideální tekutiny vyplývá, že tuto symetrii bude mít též rychlostní pole a na základě Bernoulliho rovnice i rozložení tlaků (předpokládáme, že v tekutině nepůsobí objemové síly). Vzhledem k popsané symetrii je integrál (IX.96) roven nule, na těleso obtékané kapalinou tedy nepůsobí žádná výsledná síla, popř. kapalina neklade rovnoměrnému a přímočarému pohybu tělesa žádný odpor. Tomuto závěru, který je v zřejmém rozporu se zkušeností, se říká *d'Alembertův paradox*. Uvedený rozpor svědčí o nesplnitelnosti uvedených předpokladů. V každé reálné tekutině existuje v důsledku její vazkosti v blízkém okolí obtékaného tělesa hraniční oblast, v níž již nelze považovat pohyb tekutiny za potenciálový (nevírový) a samotnou tekutinu nelze pokládat za ideální.

IX.8 Zvukové vlny

Ideální tekutina nechť se nejprve nachází v rovnovážném stavu s konstantními hodnotami hustoty a tlaku ρ_0, p_0 . Objemové síly nechť na kontinuum nepůsobí. Z nějakého důvodu nechť v kontinuu dojde k malým odklonům (malým poruchám) od hodnot ρ_0, p_0 , takže pro „porušené“ hodnoty hustoty ρ a tlaku p platí

$$\rho = \rho_0 + \rho' (x_i, t) , \quad (\text{IX.98})$$

$$p = p_0 + p' (x_i, t) , \quad (\text{IX.99})$$

přičemž

$$|\rho'| \ll \rho_0 , \quad |p'| \ll p_0 . \quad (\text{IX.100})$$

Zabývejme se chováním kontinua poté, co pominou příčiny poruchy a v důsledku odchylek od rovnováhy v něm vznikne rychlostní pole \mathbf{v} . Dosaďme vztahy (IX.98) až (IX.100) do rovnice kontinuity a do Eulerových rovnic a zanedbejme zde malé členy vyššího řádu než prvního, přičemž za malé členy prvního řádu považujeme veličiny p', ρ' a rychlost \mathbf{v} . Obdržíme

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 , \quad (\text{IX.101})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 . \quad (\text{IX.102})$$

Nechť jde o izoentropický pohyb, kde

$$p = p(\rho) , \quad (\text{IX.103})$$

takže v našem přiblížení platí

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) . \quad (\text{IX.104})$$

Lze tedy psát

$$p' = c_0^2 \rho' , \quad (\text{IX.105})$$

kde

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 , \quad (\text{IX.106})$$

přičemž index „0“ znamená, že derivace se určuje v rovnovážném stavu.

Ze vztahu (IX.105) je zřejmé, že

$$\operatorname{grad} p' = c_0^2 \operatorname{grad} \rho' . \quad (\text{IX.107})$$

Dosazením do (IX.102) dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \operatorname{grad} \rho' = 0 . \quad (\text{IX.108})$$

Na rovnici (IX.101) aplikujeme operaci $\partial/\partial t$ a na rovnici (IX.108) operaci div . Vyloučíme-li z obdržených rovnic výraz $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}$, obdržíme vlnovou rovnici

$$\Delta \rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{IX.109})$$

pro odchylku hustoty hmotnosti od rovnovážné hodnoty. Stejnou rovnicí se řídí i odchylka tlaku p' a odchylka teploty T' , která je v prvním přiblížení Taylorova rozvoje úměrná p' ,

$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_0 p' . \quad (\text{IX.110})$$

Všimněme si nyní nestacionárního pole rychlostí. Dle vícekrát již zmíněné Helmholtzovy věty lze psát

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 , \quad (\text{IX.111})$$

kde

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0 \quad (\text{IX.112})$$

a

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 . \quad (\text{IX.113})$$

Dosadíme-li vztah (IX.111) do (IX.101), zjistíme, že

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 , \quad (\text{IX.114})$$

přičemž pro \mathbf{v}_1 platí (IX.112). Aplikujeme-li operaci rot na rovnici (IX.108) a užijeme-li (IX.112), dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0 . \quad (\text{IX.115})$$

Vidíme tedy, že $\operatorname{rot} \mathbf{v}_2$ nezávisí na čase. Samotné pole \mathbf{v}_2 může proto být jen součtem homogenního pole popisujícího translační pohyb a nezřídlového pole nezávislého na čase, které popisuje stacionární otáčení kontinua. Oba tyto pohyby nás nyní nezajímají, protože chceme sledovat nestacionární

procesy šíření malých poruch. Můžeme tedy položit $v_2 = 0$. Nevířivé pole vyjádříme pomocí potenciálu

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} = \text{grad } \varphi . \quad (\text{IX.116})$$

Dosadíme-li rovnici (IX.116) do (IX.101) a (IX.108), dostáváme rovnice

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0 , \quad \rho_0 \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0^2 \text{grad } \rho' = 0 . \quad (\text{IX.117})$$

Z druhé z těchto rovnic plyne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho' = f(t) . \quad (\text{IX.118})$$

Využijeme toho, že k potenciálu φ můžeme přičíst libovolnou funkci času, a dáme tak funkci na pravé straně (IX.118) nulovou hodnotu. Dosazením do první rovnice (IX.117) tak dostaneme vlnovou rovnici pro potenciál

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 . \quad (\text{IX.119})$$

Aplikace operátoru grad na tuto vlnovou rovnici vede k vlnové rovnici pro rychlost \mathbf{v} .

Všechny malé poruchy od rovnovážného stavu uvažovaného kontinua se tedy šíří ve tvaru vln se stejnou rychlostí c_0 ve všech směrech. Jsou to vlny s malou amplitudou a jsou spojeny se změnou objemu částic kontinua ($\text{div } \mathbf{v} \neq 0$). Takové vlny se nazývají *vlnami zvukovými*, protože v jistém intervalu frekvencí je vnímáme jako zvuk. Rychlost c_0 je tedy rychlostí šíření zvuku. Tuto rychlost lze vypočítat, známe-li stavovou rovnici spojující ρ a p . Tak například pro izoentropický proces v ideálním plynu pomocí (IX.43) a (IX.36) obdržíme

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 = \gamma A \rho_0^{\gamma-1} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{kT_0}{m} . \quad (\text{IX.120})$$

Kromě zvukových vln, které se šíří v celém objemu kapaliny, existují v kapalinách také povrchové vlny, vyvolané zpravidla odchýlením hladiny od ekvipotenciální plochy v gravitačním poli. Zvláště důležité jsou vlny na vodní hladině (tj. vlny v původním smyslu slova, jejichž název se postupně přenesl na mnohem širší třídu jevů). Teorie těchto vln je oproti případu vln objemových dosti složitá a odkazujeme proto čtenáře na podrobnější učebnice. Poznamenejme ještě, že kromě povrchových vln periodické povahy

mohou na hladinách vznikat i pohybující se individuální útvary, jejichž existence je důsledkem nelinearity hydrodynamických rovnic a které se mohou dlouhodobě uchovávat a vzájemně prostupovat bez většího narušení. Tyto útvary, zvané *solitony*, začaly být systematicky zkoumány v posledních desetiletích.

IX.9 Nadzvukové rychlosti. Rázové vlny

Stane-li se rychlost pohybů v kontinuu srovnatelnou či větší než rychlost zvuku, zvýší se podstatně role stlačitelnosti a jevů s ní spojených⁵². K této situaci dochází vlastně jen u plynů.

Všimněme si nejprve šíření poruchy v plynu, jehož proudění budeme pro jednoduchost považovat za stacionární a homogenní. Zavedme klidovou soustavu Σ_0 , vůči níž se plyn pohybuje rychlostí \mathbf{v} , a soustavu Σ pohybující se spolu s plynem. Malá porucha vzniklá v bodě O se šíří vzhledem k Σ rychlostí zvuku c na všechny strany. Z hlediska Σ_0 je rychlost jejího šíření

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + c\mathbf{n} , \quad (\text{IX.121})$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor, v jehož směru se šíří porucha z hlediska Σ .

Všechny hodnoty \mathbf{u} obdržíme jednoduše. Míří-li \mathbf{v} z bodu O do bodu S , vytvoří koncové body \mathbf{u} kouli se středem v S a s poloměrem c , viz obr. 18.

Předpokládejme, že jde o nadzvukové rychlosti ($v > c$). Z obrázku je pak patrné, že příslušné vektory $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ mohou ležet pouze uvnitř kužele o vrcholu v bodě O , jehož plášť je tvořen tečnami ke kouli. Pro vrcholový úhel 2α zřejmě platí

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{M} , \quad (\text{IX.122})$$

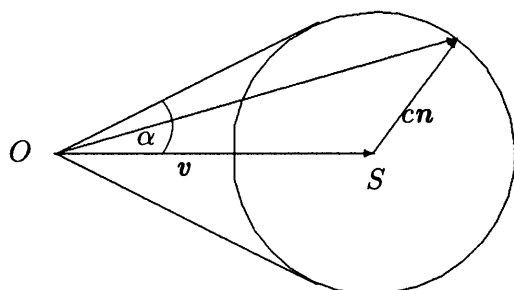
kde výrazu

$$M = \frac{v}{c} \quad (\text{IX.123})$$

se říká *Machovo číslo*.

Porucha vzniklá v bodě O nemůže zřejmě nikdy zasáhnout oblast vně tohoto kužele. Plochy ohraničující oblasti, které mohou být ovlivněny poruchou vzniklou v daném bodě, se nazývají *charakteristikami*. Není obtížné

⁵² Mohlo by se zdát, že zvláštní povaha nadzvukového proudění je v rozporu s principem relativity, který vždy dovoluje zavést místní klidový systém beze změny tvaru fyzikálních zákonů. Ve skutečnosti, jak si čtenář sám rozmyslí, jde dále vždy o relativní rychlosti (rychlost zdroje poruch či rázové vlny vůči tekutině).



Obr. 18: Šíření poruch při nadzvukové rychlosti. Je-li rychlost plynu $v > c$, mohou poruchy vzniklé v bodě O zasáhnout pouze vnitřek charakteristického kužele o vrcholovém úhlu α .

vidět, že v případě obecného stacionárního proudění již nejsou charakteristické plochy kužely.

Nakreslí-li si čtenář obr. 18 pro případ $v < c$, okamžitě se přesvědčí, že v případě podzvukového proudění může porucha zasáhnout celý prostor, takže zde žádné charakteristické plochy neexistují.

Jinou závažnou specifickou vlastností nadzvukového proudění je možnost vzniku *rázových vln*.

Předpokládejme, že se v kontinuu z nějakých důvodů vytvořila plocha, na níž se některé fyzikální veličiny mění skokem. Uvažujme o elementu této plochy nespojitosti, zvolme vztahný systém, v němž se tento element v daném okamžiku nepohybuje v normálovém směru, a zavedme osu x ve směru normály. Kontinuum může plochou nespojitosti protékat, přičemž změny veličin při průchodu přes ni jsou vázány univerzálně platnými fyzikálními zákony — zákonem zachování hmotnosti, energie a hybnosti.

Především je třeba, aby množství plynu vtékajícího do plochy nespojitosti bylo rovno množství plynu vytékajícího z této plochy. Vztáhneme-li naše úvahy na jednotku plochy a času, musí platit

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} \quad (\text{IX.124})$$

neboli

$$[\rho v_x] = 0, \quad (\text{IX.125})$$

kde jsme zavedli označení

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x} \quad (\text{IX.126})$$

(indexy 1, 2 odlišujeme veličiny na obou stranách plochy nespojitosti). Dále

musí být spojitý i tok energie (IX.68), tedy

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + h \right) \right] = 0 . \quad (\text{IX.127})$$

Konečně se žádá, aby byl spojitý i tok hybnosti. Tok hybnosti jednotkovou plochou je dán výrazem (IX.64), tj. $p n_i + \rho v_i v_k n_k$. Pro komponentu x toku hybnosti tedy musí platit

$$\left[p + \rho v_x^2 \right] = 0 \quad (\text{IX.128})$$

a pro komponenty y a z obdržíme

$$[\rho v_x v_y] = 0 , \quad [\rho v_x v_z] = 0 . \quad (\text{IX.129})$$

Rovnice (IX.125), (IX.127), (IX.128) a (IX.129) tvoří úplný systém hraničních podmínek na ploše nespojitosti. Z těchto podmínek lze vyvodit, že existují dva typy ploch nespojitosti. Prvním typem nespojitosti, tangenciálními nespojitostmi, při nichž vrstvy tekutiny po sobě „sklouzávají“, se vůbec nebudeme zabývat⁵³.

Druhý případ je charakterizován tím, že plochou nespojitosti plyn protéká a rychlosti v_{1x} a v_{2x} jsou od nuly různé. Z podmínek (IX.125) a (IX.129) plyne, že

$$[v_y] = 0 , \quad [v_z] = 0 , \quad (\text{IX.130})$$

tangenciální rychlost je spojitá na ploše nespojitosti. Hustota hmotnosti, tlak (a tedy i další termodynamické veličiny), normálová rychlost se mění skokem, tyto skoky jsou určeny uvedenými vztahy. Rovnici (IX.127) lze vykrátit výrazem ρv_x a místo v^2 psát v_x^2 (vzhledem ke spojitostem v_y a v_z). V uvažovaném případě mají tedy na ploše nespojitosti hraniční podmínky tvar

$$[\rho v_x] = 0 , \quad \left[\frac{v_x^2}{2} + h \right] = 0 , \quad \left[p + \rho v_x^2 \right] = 0 . \quad (\text{IX.131})$$

Nespojitosti tohoto druhu se nazývají *rázovými vlnami*. Rázové vlny vznikají v důsledku náhlého a intenzivního silového působení, například elektrického výboje, exploze či pohybu tělesa nadzvukovou rychlostí (blesku, špičky biče, tryskového letadlo). Toto působení může vyvolat rázovou vlnu okamžitě anebo uvést kontinuum do takového pohybu, že se v něm rázová vlna po krátké době utvoří. Rázové vlny se dnes mnohostranně využívají v praxi, například v lékařství.

⁵³ Tyto nespojitosti jsou dosud teoreticky i experimentálně málo prozkoumány.

Vzhledem ke spojitosti tečné složky rychlosti na rázové vlně můžeme vybrat takovou vztažnou soustavu, ve které je tato složka rovna nule. Dále budeme předpokládat, že plyn protéká z oblasti 1 ($x < 0$) do oblasti 2 ($x > 0$). Místo normálové komponenty v_x lze pak prostě psát v a podmínky (IX.131) mají tvar

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j ,$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 ,$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} , \quad (\text{IX.132})$$

kde j značí hustotu toku plynu plochou nespojitosti. Zavedeme-li specifické objemy

$$V_1 = \frac{1}{\rho_1} , \quad V_2 = \frac{1}{\rho_2} , \quad (\text{IX.133})$$

z druhé rovnice (IX.132) obdržíme

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} . \quad (\text{IX.134})$$

Tento vzorec spolu s prvními rovnicemi (IX.132) přeepsanými jako

$$v_1 = jV_1 , \quad v_2 = jV_2 \quad (\text{IX.135})$$

váže rychlosti pohybujícího se plynu s tlakem a hustotou plynu vždy na obou stranách plochy nespojitosti. V další části si budeme všítat pouze reálně možné situace, kdy

$$p_2 > p_1 , \quad (\text{IX.136})$$

$$V_1 > V_2 , \quad (\text{IX.137})$$

tj. plyn prošlý plochou nespojitosti se stává hustším a je v něm větší tlak. Zapišme nyní třetí rovnici (IX.132) ve tvaru

$$h_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = h_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2} . \quad (\text{IX.138})$$

Dosadíme-li sem za j^2 z (IX.134), obdržíme

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) . \quad (\text{IX.139})$$

Tento vztah nazývaný Hugeniťovou–Rankinovou adiabatou (řázovou adiabatou) určuje vztah mezi p_2 , ρ_2 při zadaných p_1 , ρ_1 .

Spolu s jinými termodynamickými veličinami je v řázové vlně nespojitá i hustota entropie s . Vzhledem k zákonu růstu entropie může entropie plynu při uvažovaném pohybu pouze vzrůstat. Entropie plynu s_2 , který prošel řázovou vlnou, musí být větší než entropie s_1 tohoto plynu před průchodem

$$s_2 > s_1 . \quad (\text{IX.140})$$

S uvážením empirického poznatku, že adiabatická stlačitelnost látek vždy klesá s rostoucím tlakem, tj.

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s > 0 , \quad (\text{IX.141})$$

lze podrobnějším rozbořem odvodit, že musí, vedle (IX.136) a (IX.137), platit nerovnosti

$$v_1 > c_1 , \quad v_2 < c_2 , \quad (\text{IX.142})$$

$$v_1 > v_2 , \quad (\text{IX.143})$$

kde c_1 , c_2 jsou rychlosti zvuku na obou stranách plochy nespojitosti. Vidíme, že vůči plynu v oblasti 1, který dosud neprošel řázovou vlnou, se plocha nespojitosti pohybuje nadzvukovou rychlostí.

K růstu entropie v řázových vlnách dochází disipací energie v tenkých vrstvách plynu, v nichž se odehrávají rychlé změny hodnot fyzikálních veličin a které fakticky tvoří řázovou vlnu.

Nyní si stručně všimneme řázových vln v ideálních plynech. Poměr teplot na obou stranách plochy nespojitosti získáme ze stavové rovnice ideálního plynu jako

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} . \quad (\text{IX.144})$$

Dále poměr specifických objemů lze získat z Hugeniťovy–Rankinovy adiabaty (IX.139), vypočteme-li entalpii h ideálního plynu z její definice a ze stavové rovnice jako

$$h = e + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1} . \quad (\text{IX.145})$$

Dostaneme tak

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2} \quad (\text{IX.146})$$

a tedy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2} \right]. \quad (\text{IX.147})$$

Poměr rychlostí v_1 a v_2 je podle (IX.135) stejný jako poměr specifických objemů.

Pro rázové vlny velké intenzity platí

$$p_2 \gg \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1. \quad (\text{IX.148})$$

Bude pak

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (\text{IX.149})$$

a

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_2}{p_1}. \quad (\text{IX.150})$$

Poměr T_2/T_1 tedy neomezeně roste spolu s poměrem p_2/p_1 , zatímco poměr hustot hmotnosti se blíží ke konstantě. Například pro jednoatomový ideální plyn $\gamma = 5/3$, bude

$$\rho_2 = 4\rho_1, \quad v_2 = \frac{v_1}{4} \quad (\text{IX.151})$$

a pro dvouatomový plyn, kdy $\gamma = 7/5$, platí

$$\rho_2 = 6\rho_1, \quad v_2 = \frac{v_1}{6}. \quad (\text{IX.152})$$

IX.10 Příklady

1. Určete tvar povrchu nestlačitelné kapaliny nacházející se v gravitačním poli ve válcové nádobě. Nádoba nechť rotuje kolem své osy konstantní úhlovou rychlostí Ω .

Řešení: Osu válce označme z , pak platí $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$ a Eulerovy rovnice jsou

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (\text{IX.153})$$

Obecný integrál těchto rovnic můžeme psát ve tvaru

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{konst}. \quad (\text{IX.154})$$

Na povrchu vody zřejmě platí $p = \text{konst}$, takže hledaná plocha je paraboloidem

$$z = \frac{\Omega}{2g} (x^2 + y^2) . \quad (\text{IX.155})$$

Počátek souřadnic jsme zvolili v nejnižším bodě povrchu kapaliny.

2. Ideální nestlačitelná tekutina nechť stacionárně proudí horizontální trubkou proměnného příčného průřezu σ . Odvoďte vztah

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right] . \quad (\text{IX.156})$$

Řešení: Rovnice kontinuity pro stacionární proudění dává

$$-\rho v_1 \sigma_1 + \rho v_2 \sigma_2 = 0 ,$$

odtud

$$v_2 = v_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) . \quad (\text{IX.157})$$

Z Bernoulliho rovnice (IX.61) získáme

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} , \quad (\text{IX.158})$$

odkud již plyne hledaný vztah.

Příklady k samostatnému řešení

1. Odvoďte barometrickou formuli pro izotermickou rovnováhu ideálního plynu v homogenním gravitačním poli

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0}{p_0} g z \right) .$$

2. Odvoďte vztah mezi absolutní teplotou T a výškou z v homogenním gravitačním poli, řídí-li se plyn v rovnováze polytropní stavovou rovnicí

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g z \right) .$$

3. Určete tvar rotační nádoby tak, aby se při výtoku vody z nádoby v jejím nejnižším průřezu σ hladina vody snižovala konstantní rychlostí v_1 .

X VAZKÉ TEKUTINY

Reálné tekutiny za pohybu s nenulovým tenzorem rychlosti deformace vždy projevují jisté vnitřní tření (vazkost). Tím se jejich vlastnosti často podstatně mění ve srovnání s tím, co předvídá teorie ideální tekutiny.

Z předpokladu izotropie tekutiny odvozujeme přídatný člen odpovídající vazkosti tekutiny ve výrazu pro tenzor napětí. S jeho pomocí odvodíme *Navierovy–Stokesovy rovnice* pro pohyb *vazké tekutiny*. Zabýváme se termodynamikou vazkých tekutin. Poté řešíme úlohu protékání vazké nestlačitelné tekutiny válcovou trubicí a upozorňujeme na jev *turbulence*, který podstatně komplikuje řešení hydrodynamických rovnic. Uvádíme elementy *teorie podobnosti*, která umožňuje modelování hydrodynamických situací ve změněném prostorovém a časovém měřítku. Nakonec se zabýváme vlivem vazkosti na obtékání těles.

X.1 Nedostatky teorie ideální tekutiny

Porovnáme-li výsledky teorie ideální tekutiny s realitou, zjišťujeme již u velmi jednoduchých a běžných jevů zásadní rozpory. Dříve jsme se například seznámili s d'Alembertovým paradoxem a s větou o zachování cirkulace. Je však zřejmé, že skutečná tekutina klade pohybu tělesa jistý odpor a že víry, které jsou v ní vyvolány, se po čase rozptýlí a zaniknou.

Z Bernoulliho rovnice vyplývá, že tlak ve vodorovné trubici konstantního průřezu, kterou protéká ideální tekutina, je konstantní. Jednoduchými pokusy se prokáže, že podél proudu tlak ve skutečné tekutině lineárně klesá.

Tyto a jiné příklady ukazují, že ideální tekutina může sloužit jen jako velmi hrubá idealizace tekutiny skutečné a že tato teorie nemůže být základem pro řešení většiny praktických problémů.

Nedostatkem Eulerových rovnic z hlediska jejich korespondence s realitou je jejich invariance vůči záměně směru času, zmíněná již v IX.1. Řeka tvořená ideální tekutinou by mohla setrvačností vytéci do stejně vysokého kopce, s jakého stekla. Vratnost proudění ideální tekutiny je způsobena tím, že volbou tenzoru napětí ve tvaru (IX.1) jsme zanedbali síly tření (tj. smyková napětí). Aby se teorie podstatně přiblížila skutečným vlastnostem tekutin, je třeba doplnit těmito silami pravou stranu rovnic (IX.6) – (IX.9).

X.2 Tenzor napětí vazké tekutiny

Budeme proto nyní předpokládat tenzor napětí ve tvaru

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}^+, \quad (\text{X.1})$$

kde τ_{ij}^+ je část tenzoru napětí, popisující síly tření ve vazké tekutině. Veličiny τ_{ij}^+ jsou zřejmě rovny nule, pokud je tekutina v klidu anebo se pohybuje translačním a rotačním pohybem jako tuhé těleso, takže nedochází k vzájemnému posunu mezi jejími částmi.

Jak již víme, deformační část rychlostního pole popisuje tenzor rychlosti deformace. Lze tedy očekávat, že τ_{ij}^+ bude záviset na komponentách tenzoru rychlosti deformace, tj. že bude

$$\tau_{ij}^+ = \tau_{ij}^+(\eta_{kl}) . \quad (\text{X.2})$$

Přitom pro nulovou hodnotu η_{kl} je $\tau_{ij}^+ = 0$. Můžeme proto rozvinout závislost (X.2) do Taylorovy řady, která začíná lineárním členem. Předpokládejme, že se lze omezit na tento člen. To znamená, že platí

$$\tau_{ij}^+ = C_{ijkl} \eta_{kl} , \quad (\text{X.3})$$

kde C_{ijkl} představují komponenty tenzoru 4. řádu (protože τ_{ij}^+ i η_{kl} představují komponenty tenzoru). Vzhledem k symetrii τ_{ij}^+ platí

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\text{X.4})$$

a vzhledem k symetrii η_{kl} lze předpokládat i

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (\text{X.5})$$

(vzhledem k symetrii η_{kl} antisymetrická část C_{ijkl} v indexech k, l neovlivňuje tenzor napětí).

Vzhledem k izotropii (ekvivalenci směrů) v tekutině musí být vztah mezi tenzory τ_{ij}^+ a η_{kl} stejný ve všech kartézských systémech souřadnic. Stojíme tedy před formálně zcela analogickým problémem, jakým jsme se již zabývali v VIII. 2. Proto můžeme převzít i řešení a tenzor C_{ijkl} bude mít tvar

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) . \quad (\text{X.6})$$

Úlohu vyjádření vazkých sil v tekutinách se tak podařilo zredukovat na určení dvou neznámých veličin λ, μ , které nazýváme koeficienty vazkosti. Velikosti těchto koeficientů by bylo možné v principu určit z mikroskopického

složení tekutiny. V rámci fenomenologické hydrodynamiky se musíme spokojit s jejich určením empirickým. Vazké koeficienty obecně závisejí na hustotě a teplotě tekutiny vztahy

$$\lambda = \lambda(p, T) , \quad \mu = \mu(p, T) , \quad (\text{X.7})$$

jejichž konkrétní podobu určujeme rovněž z experimentu. Vzhledem k tomu jsou λ a μ obecně funkcemi prostorových souřadnic a času. Často se však setkáváme s případy, kdy se hustota a teplota tekutin mění jen v takovém rozmezí, že můžeme koeficienty λ a μ považovat za konstanty.

Po dosazení konkrétního tvaru η_{kl} do (X.3) můžeme psát

$$\tau_{ij}^+ = \lambda \eta_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \eta_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{X.8})$$

Někdy je výhodné použít rozkladu na část čistě dilatační a část čistě smykovou (první člen je diagonální, stopa druhého je rovna nule)

$$\tau_{ij}^+ = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \right) . \quad (\text{X.9})$$

V nestlačitelné tekutině je první člen obou rozkladů (X.8) i (X.9) roven nule. Vystačíme zde proto s jediným koeficientem vazkosti μ .

Aby nedošlo k nedorozumění, poznamenejme, že tlak P počítaný podle obecného vzorce $P = -\tau_{ik} n_i n_k$ uvedeného v VII.8 se pro vazkou tekutinu obecně nerovná veličině p vystupující v (X.1). Veličina p má proto význam nikoliv skutečného tlaku v tekutině, ale tlaku určeného stavovou rovnicí

$$p = p(\rho, e) , \quad (\text{X.10})$$

jaký by byl v tekutině o téže hustotě hmotnosti i vnitřní energie při nulovém tenzoru rychlosti deformace, tj. v lokálně rovnovážném stavu bez nevratných procesů.

Rovněž u termodynamických veličin a empirických koeficientů může vzniknout otázka, nakolik lze převzít vztahy a závislosti zjištěné v rámci rovnovážné termodynamiky do oblasti disipativních procesů. Tento problém je velmi složitý a nebudeme se jím zde zabývat.

X.3 Navierovy–Stokesovy rovnice

Nyní můžeme běžným postupem vypočítat hustotu síly způsobenou vazkostí tekutiny. Dosazením (X.8) do (VII.122) dostaneme pro komponenty této síly

$$\Phi_i = \frac{1}{\rho} [(\lambda + \mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj} + \lambda_{,i} v_{j,j} + \mu_{,j} (v_{i,j} + v_{j,i})] . \quad (\text{X.11})$$

Za předpokladu, že vazké koeficienty lze považovat za konstantní, zjednoduší se hustota síly na tvar

$$\Phi = \frac{1}{\rho} (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} . \quad (\text{X.12})$$

V pro praxi důležitém případě nestlačitelné tekutiny, kdy $\text{div } \mathbf{v} = 0$, první člen na pravé straně vypadne a pohybové rovnice pro případ vazké nestlačitelné tekutiny (VII.167) můžeme proto zapsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (\text{X.13})$$

Tyto rovnice se nazývají *rovnice Navierovy–Stokesovy*. Povšimněme si, že oproti Eulerovým rovnicím přidaný vazký člen ruší invarianci rovnic vzhledem k záměně směru času (na rozdíl od ostatních členů mění znaménko při záměně $t \rightarrow -t, \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$).

Podobně jako Eulerovy rovnice mohou být i rovnice Navierovy–Stokesovy za jistých předpokladů přepsány na tvar obsahující pouze rychlost a určující tedy kinematiku proudění. Mají-li objemové síly působící na tekutinu potenciál, tj. je-li

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U , \quad (\text{X.14})$$

využijeme toho, že rotace gradientu je rovna nule, a aplikujeme na obě strany (X.13) operaci rot . Tak dostaneme čistě kinematické rovnice

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \text{rot } (\mathbf{v} \times \Omega) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \Omega , \quad \text{kde } \Omega = \text{rot } \mathbf{v} . \quad (\text{X.15})$$

I když jde o šest rovnic pro šest neznámých, nestačí k úplnému určení pohybu, protože zadání počátečních hodnot \mathbf{v}, Ω určuje pouze časovou změnu rotace rychlostního pole a neříká nic o chování jeho divergence. Proto je třeba využít i rovnice kontinuity vyplývající z nestlačitelnosti tekutiny

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{X.16})$$

Povšimněme si ještě okrajových podmínek k Navierovým–Stokesovým rovnicím. Nejčastěji se zabýváme tekutinou proudící mezi pevnými stěnami. U vazké tekutiny dochází v důsledku tření k zastavení tekutiny u stěny a okrajová podmínka (IX.91) platná v ideální tekutině je tedy nahrazena silnější podmínkou

$$\mathbf{v} = 0 \quad (\text{X.17})$$

platnou v místě dotyku tekutiny s nehybnou stěnou. V případě, že se stěna pohybuje, je rychlost vazké tekutiny na stěně rovna rychlosti stěny ve styčném bodě.

X.4 Termodynamika vazkých tekutin

U vazké nestlačitelné tekutiny stačí Navierovy–Stokesovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity k určení rychlostního pole a tlaku v tekutině. I v tomto případě však může být důležité znát rozložení termodynamických veličin v tekutině. V obecnějším případě pak termodynamické procesy ovlivňují i kinematiku proudění a rozložení tlaku v tekutině. Najdeme proto konkrétní podobu rovnice pro vnitřní energii (VII.168) a rovnice pro entropii (VII.169). Pro tepelný tok budeme předpokládat

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T, \quad (\text{X.18})$$

kde $k \geq 0$, tj. teplo „teče“ proti směru gradientu teploty. Pro koeficient tepelné vodivosti k se předpokládá závislost

$$k = k(p, T), \quad (\text{X.19})$$

konkrétní tvar závislosti se najde z experimentu.

Vyjdeme z rovnice (VII.147) pro změnu vnitřní energie, do níž dosadíme (X.1), (X.8) a (X.18). Dostaneme tak

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T). \quad (\text{X.20})$$

Užijeme-li termodynamického vztahu⁵⁴ (IX.33)

$$de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (\text{X.21})$$

⁵⁴ Mohlo by se namítnout, že tento vztah platí jen v rámci rovnovážné termodynamiky, pozor však na text spojený se vzorcem (X.10).

a rovnice kontinuity (VII.166)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} , \quad (\text{X.22})$$

dostaneme dosazením těchto vztahů do (X.20)

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) , \quad (\text{X.23})$$

což je rovnice (VII.169) pro entropii, v níž je disipativní funkce určena jako

$$D = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{X.24})$$

a v nestlačitelné tekutině se v důsledku (X.16) redukuje na druhý člen. Disipativní funkci je možné vyjádřit také pomocí tenzoru rychlosti deformace

$$D = \lambda (\eta_{ii})^2 + 2\mu \eta_{ik} \eta_{ik} . \quad (\text{X.25})$$

Protože podle druhé věty termodynamické nemůže být disipativní funkce záporná, musí pro koeficienty vazkosti platit

$$\lambda \geq 0 , \quad \mu \geq 0 . \quad (\text{X.26})$$

Všimněme si, že pro nestlačitelnou tekutinu v klidu dostáváme z (X.20) rovnici vedení tepla v této tekutině. Za předpokladu, že koeficient tepelné vodivosti k a tepelnou kapacitu C_V lze v uvažovaném rozmezí teplot a tlaků považovat za konstantní, je tato rovnice ve tvaru

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T . \quad (\text{X.27})$$

X.5 Proudění trubicí. Hagenův–Poiseuilleův zákon

Zmínili jsme se již o tom, že řešení Eulerových rovnic je komplikováno jejich nelinearitou. U vazkých tekutin přináší další komplikaci člen odpovídající vazkosti, který obsahuje druhé derivace rychlostního pole podle souřadnic a zvyšuje tak řád rovnic. Není proto divu, že jejich analytické řešení se podaří nalézt jen v nejjednodušších případech.

Velmi prostým, ale prakticky důležitým případem proudění vazké nestlačitelné tekutiny je její protékání válcovou trubicí. Nechť délka trubice

je l , poloměr R a tlakový rozdíl na počátku a na konci trubice (tj. přetlak, jimž je tekutina do trubice vháněna) činí δp .

Položme osu kartézského systému z do osy trubice a zaveďme válcové souřadnice r , φ , z . Předpokládejme, že rychlostní pole má osovou symetrii a je rovnoběžné s osou trubice. Uvážíme-li ještě rovnici kontinuity a stacionárnost proudění, znamená to, že rychlostní pole má kartézské složky

$$\mathbf{v} = (0, 0, v(r)) , \quad (\text{X.28})$$

takže se úloha redukuje na určení jediné neznámé funkce $v(r)$. Užijeme „kinematického“ tvaru Navierových–Stokesových rovnic (X.15), které se vzhledem k nulovému zrychlení tekutiny redukují na

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{X.29})$$

Pole $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ má kartézské složky

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{dv}{dr} \cos \varphi , -\frac{dv}{dr} \sin \varphi , 0 \right) \quad (\text{X.30})$$

a přepisem například první složky (X.29) do válcových souřadnic dostáváme

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{d^3 v}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dv}{dr} \right) \cos \varphi = 0 . \quad (\text{X.31})$$

Platí tedy rovnice

$$\left(v'' + \frac{1}{r} v' \right)' = 0 , \quad (\text{X.32})$$

kde jsme čárkou označili derivaci podle r . Trojí integrací dostáváme

$$v = Ar^2 + B \ln r + C . \quad (\text{X.33})$$

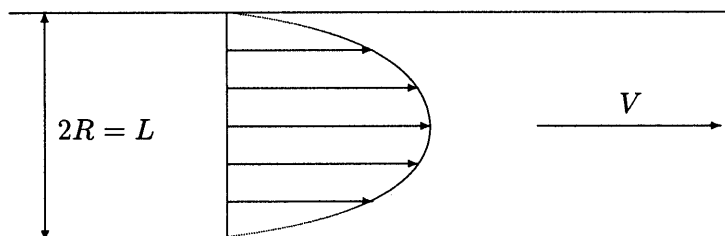
Pro určení integračních konstant užijeme okrajových podmínek

$$v(r) = 0 , \quad v(0) = V \quad (\text{X.34})$$

(druhá podmínka vyjadřuje, že rychlost na ose trubice má jistou konečnou hodnotu). Z těchto podmínek vyplývá

$$v = \frac{V}{R^2} (R^2 - r^2) . \quad (\text{X.35})$$

Vzhledem ke kvadratické závislosti rychlosti na vzdálenosti od středu trubice mluvíme o parabolickém zákonu, viz obr. 19.



Obr. 19: Parabolický profil rychlostí. Na obrázku je osový řez trubicí protékanou vazkou tekutinou a rychlostní pole v tomto řezu.

Zajímáme-li se i o rozložení tlaků, je nutné užít Navierových–Stokesových rovnic ve tvaru (X.13). Objemové síly \mathbf{f} budeme pokládat za nulové (v dostatečně tenké vodorovné trubicí je vliv gravitace zanedbatelný). Pak máme

$$\text{grad } p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{X.36})$$

a vypočteme-li pravou stranu této rovnice užitím (X.35), zjistíme, že

$$p = p_0 - \delta p \frac{z}{l}, \quad (\text{X.37})$$

přičemž

$$\frac{\delta p}{l} = \frac{4\mu V}{R^2}. \quad (\text{X.38})$$

Využitím vztahů (X.35) a (X.38) můžeme nyní vypočítat průtok trubicí za jednotku času

$$Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\delta p}{l} R^4. \quad (\text{X.39})$$

Tento vztah se nazývá *zákon Hagenův–Poiseuilleův*. Vypočteme ještě střední rychlost tekutiny v trubicí. Je

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{V}{2}, \quad (\text{X.40})$$

tj. střední rychlost tekutiny je rovna polovině rychlosti na ose.

Platnost vztahů (X.35) až (X.38) se však experimentálně potvrzuje pouze v jistém oboru parametrů. Předpokládejme například, že prostřednictvím změny přetlaku δp měníme maximální rychlost proudění V . Pak při malých hodnotách této rychlosti odpovídá rozložení rychlostního pole parabolickému zákonu (X.35). Mluvíme o *laminárním* (tj. vrstevnatém) proudění,

poněvadž jednotlivé vrstvy tekutiny o daných vzdálenostech od osy se spolu nemísí, trajektorie částic jsou rovnoběžné s osou trubice.

Po překročení jisté kritické hodnoty rychlosti se však charakter proudění náhle změní. Trajektorie částic se začnou chaoticky proplétat, takže tekutina se rychle mísí. Dříve odvozené vztahy pro laminární proudění ztrácejí platnost. Nový typ proudění se nazývá proudění *turbulentní*. Experiment ukazuje, že stejného efektu dosáhneme také zvětšováním rozměrů trubice či hustoty tekutiny anebo snižováním její vazkosti.

X.6 Turbulentní proudění

Vznik turbulentního proudění neznamená, že by Navierovy–Stokesovy rovnice přestaly platit. Svědčí pouze o tom, že jejich jednoduché řešení, vyjádřené parabolickým zákonem, přestalo být stabilní vzhledem k poruchám, které se v tekutině vyskytují v důsledku malých odchylek počátečních i okrajových podmínek od ideální symetrie.

Nestabilita řešení znamená, že při malé změně v počátečních a okrajových podmínkách se řešení změní podstatně. Setkáváme se jak s nestabilitou vůči poruchám přesahujícím jistou minimální mez — v tom případě je uvažované řešení metastabilní, tak i s absolutní nestabilitou vůči libovolně malým poruchám. Je zřejmé, že absolutně nestabilní řešení má čistě matematický charakter a nemůže odpovídat realitě. Metastabilní řešení se může realizovat jen tehdy, je-li zaručeno, že poruchy budou dostatečně malé.

Vidíme tedy, že pro teoretické posouzení reality řešení nestačí znát toto řešení samo, ale je třeba zkoumat jeho postavení v celé množině řešení. To je ovšem úloha mnohem obtížnější než nalezení jistého konkrétního řešení a není divu, že nemůže být (alespoň za současné úrovně matematiky) zpravidla rozřešena v celé obecnosti. Tak je tomu i v případě proudění vazkých tekutin.

Vylíčený vznik turbulence ve válcových trubicích je jen speciálním případem jevu mnohem obecnějšího. Také při proudění mezi stěnami nejrůznějšího typu anebo při obtékání těles dochází při růstu délkových rozměrů, rychlostí a hustot a při klesání vazkosti ke vzniku turbulence, tj. k přeměně uspořádaného a v případě vnější symetrie této symetrii odpovídajícího laminárního proudění v chaotické proudění turbulentní. S turbulencí se setkáváme v širokém rejstříku jevů jak v přírodě, tak i v lidské praxi. Je důležitá v technických zařízeních (mosty, turbíny, letadla), v biologických systémech (krevní oběh), v atmosférických dějích (předvídaní počasí) i v situacích astrofyzikálních a kosmologických (vývoj hvězd, raná stadia vesmíru).

U problémů tohoto typu nejde zřejmě o nalezení konkrétního chaotického řešení, které má v mnohém náhodný charakter, ale o zjištění statistických vlastností množiny řešení, které jediné mohou být experimentálně ověřeny.

Nemůžeme se zde těmito otázkami zabývat podrobněji. Některé knihy o jevu chaosu uvádíme v seznamu literatury. My se omezíme na výklad základní myšlenky, které se používá pro studium turbulence ve vazké nestlačitelné tekutině. Předpokládáme, že v turbulentním proudu tlak i rychlost kolísají okolo jistých středních hodnot, takže lze psát

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^* , \quad p = \bar{p} + p^* , \quad (\text{X.41})$$

přičemž střední hodnoty pulzačních složek \mathbf{v}^* , p^* jsou nulové. Provedeme středování Navierových–Stokesových rovnic, které využitím rovnice kontinuity přepíšeme do tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_i v_j)_{,j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_i . \quad (\text{X.42})$$

V lineárních členech stačí při středování nahradit okamžité hodnoty hodnotami středními. Pro kvadratický výraz $v_i v_j$ platí (využitím (X.41))

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(\bar{v}_i + v_i^*)(\bar{v}_j + v_j^*)} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i^* v_j^*} . \quad (\text{X.43})$$

Vystředované Navierovy–Stokesovy rovnice jsou tedy

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v}_i - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(v_i^* v_k^*)} . \quad (\text{X.44})$$

Tyto rovnice se nazývají *rovnice Reynoldsovy*.

Porovnáním s obecnými rovnicemi pro pohyb kontinua tedy vidíme, že vliv turbulence na střední hodnoty hydrodynamických veličin je ekvivalentní zavedení nového efektivního tenzoru napětí

$$\tau_{ij}^* = -\rho \overline{v_i^* v_j^*} . \quad (\text{X.45})$$

Z matematického hlediska to znamená, že v Reynoldsových rovnicích je oproti rovnicím Navierovým–Stokesovým zvýšen počet neznámých o 6 složek symetrického tenzorového pole (X.45). Aby bylo možné rovnice rozřešit, je tedy třeba dodatečné hypotézy o souvislosti τ_{ij}^* se středními hodnotami hydrodynamických veličin. Často se postupuje tak, že se v analogii s tvarem tenzoru vazkých napětí τ_{ij}^+ postuluje

$$\tau_{ij}^* = \mu_{\text{turb}} (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) , \quad (\text{X.46})$$

takže již zbývá jediná neurčená veličina, koeficient turbulentní vazkosti μ_{turb} . O závislosti tohoto koeficientu na poli středních rychlostí jsou opět činěny různé hypotézy. Pro ilustraci uveďme hypotézu Prandtlůvu — podle ní je

$$\mu_{\text{turb}} = \rho l^2 \sqrt{\bar{\eta}_{ik} \bar{\eta}_{ik}}, \quad (\text{X.47})$$

kde $\bar{\eta}_{ik}$ je tenzor rychlosti deformace určený ze středních rychlostí a l udává tzv. směřovací délku, o níž se předpokládá, že je úměrná vzdálenosti d daného bodu tekutiny od stěn, tj.

$$l = \kappa d, \quad (\text{X.48})$$

přičemž bezrozměrná konstanta κ se určí empiricky. I když pro tuto hypotézu lze uvést jisté důvody, je zřejmé, že výsledky o ni se opírající mají daleko k vyvození „z prvních principů“, které je ideálem teoretické fyziky. Existuje také řada dalších hypotéz umožňujících řešit Reynoldsovy rovnice. Lze říci, že užitím různých hypotéz dospíváme při jejich praktické aplikaci často k podobným výsledkům, které skutečnost dosti dobře potvrzuje.

X.7 Teorie podobnosti

Obtížnost či nemožnost matematického řešení úloh dynamiky vazkých tekutin vede k tomu, že jsme často odkázáni na zmenšené modely, na nichž studujeme průběh proudění experimentálně a získané výsledky přenášíme na situaci, jež nás původně zajímala. To ovšem neznamená, že by se teorie stávala zbytečnou, protože jediné teorie nám umožní závěry získané na modelu přenést správně. Přírodní zákony nejsou totiž invariantní vůči záměně měřítka a nelze se proto omezit na triviální násobení získaných dat.

Modelováním hydrodynamických a aerodynamických jevů se zabývá teorie podobnosti. Stejně jako dříve, se při jejím výkladu omezíme na některé základní výsledky a myšlenky. Zajímejme se o kinematickou stránku proudění vazké nestlačitelné tekutiny, tj. o rovnici

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{rot} (\Omega \times \mathbf{v}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \Omega. \quad (\text{X.49})$$

Mějme jistou hydrodynamickou situaci, kterou chceme modelovat. Nechť je charakterizována délkovým rozměrem L a rychlostí V (charakteristická délka a rychlost). U problému proudění válcovou trubicí můžeme volit za tuto délku průměr trubice a rychlost proudění na ose, v případě obtékání tělesa některý z jeho rozměrů a rychlost proudu v dostatečné vzdálenosti

od tělesa. Zaved'me nyní nové jednotky vzdálenosti a času tak, aby v nich byla charakteristická délka i rychlost rovny jedné. Toho zřejmě dosáhneme zavedením nových proměnných r' , v' tak, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'L, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'V. \quad (\text{X.50})$$

Mějme nyní model zkoumané situace, tj. geometricky podobné uspořádání obtékaných stěn a těles. Tento model je opět charakterizován jistými hodnotami L a V . Provedením transformací (X.50) dáme i těmto veličinám jednotkovou velikost.

V proměnných r' , v' je tedy ve všech modelech stejná (jednotková) délka L i rychlost V . Náznorně lze říci, že natočíme-li děj probíhající v různých modelech na film a změníme měřítko obrazu a tempo promítání podle (X.50), máme naději, že uvidíme ve všech případech totéž. Není však zaručeno, že bude stejně vypadat i celé rychlostní pole v tekutině. K tomu je nutné, aby po přepisu Navierových–Stokesových rovnic do čárkovaných proměnných byly tyto rovnice ve všech modelech identické. Proved'me tento přepis. Je zřejmě

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{V}{L} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \text{rot} = \frac{1}{L} \text{rot}', \quad \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta',$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{v} = \frac{V}{L} \text{rot}' \mathbf{v}' = \frac{V}{L} \boldsymbol{\Omega}' \quad (\text{X.51})$$

a dosazením do rovnic (X.49) je tak převedeme na tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t'} + \text{rot}' (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{v}') = \frac{\mu}{\rho LV} \Delta' \boldsymbol{\Omega}'. \quad (\text{X.52})$$

Kinematické Navierovy–Stokesovy rovnice mají tedy stejný tvar, je-li stejná hodnota bezrozměrné veličiny

$$\mathcal{R} = \frac{\rho LV}{\mu}. \quad (\text{X.53})$$

Tato veličina se nazývá *Reynoldsovo číslo* a je nejdůležitější ze všech parametrů podobnosti. Při její rovnosti v různých modelech si budou proudění geometricky i kinematicky podobná; například k přeměně laminárního proudění v turbulentní bude docházet při jisté kritické hodnotě Reynoldsova čísla. U proudění válcovou trubicí, kde volíme $L = 2r$, $V = v_{\max}$, bylo experimentálně zjištěno, že kritická hodnota činí asi 2200. Tato hodnota však není prahem absolutní nestability laminárního proudění. Odstraněním

zdrojů malých poruch v počátečních a okrajových podmínkách je možné udržet existenci laminárního proudění i při mnohem vyšších hodnotách Reynoldsova čísla.

Pokud nás zajímá nejen kinematická stránka proudění, ale i tlakové poměry v homogenním gravitačním poli o intenzitě g , stává se dalším podobnostním parametrem *Froudeho číslo* V/Lg . V případě proudění v situaci, která se vyznačuje vnější periodicitou s charakteristickým časem T (například otočení vrtule), je podobnostním parametrem *Strouhalovo číslo* VT/L . Existují ještě další podobnostní parametry. V celé své šíři je teorie podobnosti velmi komplikovaná a musíme zde opět čtenáře odkázat na speciální literaturu.

X.8 Obtékání těles vazkou tekutinou

Zabývali jsme se již obtékáním těles ideální tekutinou a konstatovali jsme, že může odpovídat realitě jen přibližně. Ukážeme si nyní alespoň v hrubých rysech, co nového přináší pro tento problém použití Navierových–Stokesových rovnic. Je zřejmé, že problém obtékání různých těles kapalinami nebo plyny je velmi důležitý v technické praxi. Vzhledem ke komplikovanosti hydrodynamických rovnic je ovšem řešení těchto problémů velmi obtížné. Složitost Navierových–Stokesových rovnic je způsobena členy dvojího druhu — jednak nelineárními výrazy

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad v_j v_{i,j}, \quad (\text{X.54})$$

jednak vazkými členy

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{X.55})$$

které obsahují druhé derivace rychlostního pole. Jsou-li V a L charakteristická rychlost a délka, pak členy (X.54) jsou řádově V^2/L , zatímco členy (X.55) $\mu V/\rho L^2$. Podíl činí $\mu/\rho V L$, tj. je právě roven převrácené hodnotě Reynoldsova čísla. Lze tedy očekávat, že při malých hodnotách Reynoldsova čísla lze zjednodušit Navierovy–Stokesovy rovnice zanedbáním nelineárních členů (X.54). Pro stacionární proudění v poli potenciálních sil (popř. mimo vnější silové pole) pak dospějeme k rovnici

$$\Delta \Omega = 0, \quad \Omega = \text{rot } \mathbf{v}, \quad (\text{X.56})$$

kteřá je pro speciální případ proudění trubicí vyřešena v X.5. Tuto rovnici lze přesně vyřešit⁵⁵ rovněž v případě obtékání koule o daném poloměru a proudem tekutiny, který má v dostatečné vzdálenosti od obtékaného tělesa konstantní rychlost V_∞ . Vzhledem k zdlouhavosti řešení se omezíme na formulaci problému a uvedení výsledku.

Úloha se řeší ve sférických souřadnicích r, φ, ϑ s počátkem ve středu koule a osou ve směru rychlosti V_∞ . Lze předpokládat, že nenulové jsou pouze fyzikální složky rychlosti v_r, v_ϑ . Okrajové podmínky pak jsou

$$v_r = 0, \quad v_\vartheta = 0 \quad \text{pro } r = a, \quad (\text{X.57})$$

$$v_r = V_\infty \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = -V_\infty \sin \vartheta \quad \text{při } r \rightarrow \infty. \quad (\text{X.58})$$

Řešení této úlohy je

$$v_r = V_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta, \quad (\text{X.59})$$

$$v_\vartheta = -V_\infty \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta. \quad (\text{X.60})$$

Tlak p v tekutině vychází jako

$$p = \frac{3}{2} \mu a V_\infty \frac{\cos \vartheta}{r^2} + p_\infty \quad (\text{X.61})$$

a tečná složka napětí působeného silami tření (fyzikální komponenta příslušné části tenzoru napětí) na povrchu obtékané koule

$$\tau_{r\vartheta}^+ = -\frac{3}{2} \mu V_\infty \frac{\sin \vartheta}{a}. \quad (\text{X.62})$$

Pro výslednici sil působících na obtékanou kouli uijeme obecného vzorce (IX.25), což po dosazení (X.62) a (X.61) dává (\mathbf{n} značíme jednotkový vektor orientovaný proti směru proudu)

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \int_0^\pi (-\tau_{r\vartheta}^+ \sin \vartheta - p \cos \vartheta) 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta = -6\pi \mu a V_\infty. \quad (\text{X.63})$$

Tento *Stokesův vzorec* odstraňuje d'Alembertův paradox, s nímž jsme se setkali při obtékání tělesa ideální tekutinou. Povšimněme si, že síla F má původ jak ve vazkém tření, tak i v poklesu tlaku podél proudu.

⁵⁵ Rozdíl je ovšem v tom, že v případě proudění trubicí byly nelineární členy přesně rovny nule, zatímco zde je zanedbáváme, tj. předpokládáme, že dané proudění je pomalé.

Naopak při vysokých hodnotách Reynoldsova čísla se stávají zanedbatelnými vazké členy. Zdálo by se proto, že můžeme přejít k teorii ideální tekutiny. Tak tomu však není, protože hraniční podmínky (X.17) se zásadně liší od hraničních podmínek ideální tekutiny (IX.92). Vznik turbulence je v podstatě právě důsledkem narůstajícího rozporu mezi ideálním prouděním volné tekutiny a velkými silami tření u stěn.

Při vysokých hodnotách Reynoldsova čísla jsou tedy Eulerovy rovnice nepoužitelné v blízkosti obtékaných stěn. S rostoucí hodnotou \mathcal{R} se ovšem vrstva, v níž vazkost nelze zanedbat, stává velmi tenkou. Mluvíme o *hraniční* (popř. *mezní*) *vrstvě*. Při obtékání těles se tedy často setkáváme se situací, kdy proudění je v podstatě potenciálním prouděním ideální tekutiny, pouze v tenké hraniční vrstvě u stěn obtékaného tělesa má charakter laminárního proudění vazké tekutiny, při němž dochází k zvržení tekutiny (tj. $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$). Toto zvržení je unášeno za těleso, kde se vytvoří tzv. vírová stopa. Tato stopa se podél proudu rozšiřuje a slábne následkem tření.

Uveďme si alespoň základní výsledek teorie laminární vrstvy. Předpokládejme, že jde o dvojrozměrné proudění, při němž dostatečně malý element povrchu obtékaného tělesa může být považován za rovinu, jejíž normála leží v rovině proudění. Zaveďme kartézský systém tak, aby osa y měla směr této normály a osa x ležela v rovině proudění. Rychlostní pole pak nebude záviset na z . Předpokládáme-li navíc, že proudění je stacionární, dostáváme z Navierových–Stokesových rovnic (pro stručnost užíváme zkráceného označení pro derivace)

$$\begin{aligned} v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} &= -\frac{1}{\rho} p_{,x} + \frac{\mu}{\rho} (v_{x,xx} + v_{x,yy}) , \\ v_x v_{y,x} + v_y v_{y,y} &= -\frac{1}{\rho} p_{,y} + \frac{\mu}{\rho} (v_{y,xx} + v_{y,yy}) . \end{aligned} \quad (\text{X.64})$$

Lze předpokládat, že tekutina teče rovnoběžně se stěnou, tj. $v_x \gg v_y$, a že proudové pole i jeho derivace se mění mnohem rychleji ve směru osy y (od stěny do proudu) než ve směru osy x (podél stěny). Na základě tohoto předpokladu můžeme rozdělit komponenty a derivace rychlostního pole vystupující v (X.64) do čtyř skupin, z nichž každá obsahuje veličiny řádově větší než skupina následující

$$v_x , \quad v_{x,y} , \quad (\text{X.65})$$

$$v_{x,x} , \quad v_{x,yy} , \quad v_y , \quad v_{y,y} , \quad (\text{X.66})$$

$$v_{x,xx} , \quad v_{y,x} , \quad v_{y,yy} , \quad (X.67)$$

$$v_{y,xx} . \quad (X.68)$$

Porovnáním obou rovnic (X.64) pak zjišťujeme, že derivace tlaku podle y je řádově menší než derivace tlaku podle x . Můžeme tedy přibližně položit

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \quad \text{tj.} \quad p = p(x) . \quad (X.69)$$

To znamená, že tlak se nemění podél kolmice na stěnu. Tím se vysvětluje z literatury známý fakt, že výpočty obtékání prováděné na základě Eulerových rovnic vedly při vysokých hodnotách Reynoldsova čísla k dobrým výsledkům, co se týče rozložení tlaků. V první rovnici (X.64) ponecháme jen členy nejvyššího řádu a dostaneme tak

$$v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} v_{x,yy} , \quad (X.70)$$

kde jsme na základě (X.69) nahradili parciální derivaci derivací totální. Rovnice (X.69) a (X.70) doplňuje rovnice kontinuity

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0 . \quad (X.71)$$

Při dalším růstu Reynoldsova čísla se v hraniční vrstvě i ve vírové stopě objevují turbulentní oblasti. Chování turbulentního proudění v závislosti na Reynoldsově čísle je i u jednoduchých těles velmi mnohotvárné (může dojít i k periodickým dějům ve vírové stopě) a při jeho zkoumání jsme většinou odkázáni na experimentální data. Zajímavé a důležité je sledování výslednice síly, kterou proud na těleso působí. Namísto této síly W je vhodné studovat bezrozměrný parametr — tzv. koeficient odporu

$$C = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} , \quad (X.72)$$

kde S je plocha průřezu tělesa. Vzhledem k tomu, že proudění je plně určeno svým Reynoldsovým číslem, je tato veličina funkcí pouze \mathcal{R} . Pro kouli v oblasti platnosti Stokesova vzorce (X.63) je

$$C = \frac{24}{\mathcal{R}} \quad (X.73)$$

(za charakteristickou délku se bere průměr koule $L = 2a$, charakteristická rychlost $V = V_\infty$). Experimentálně bylo zjištěno, že C klesá až do $\mathcal{R} \approx 5 \cdot 10^3$, načež opět poněkud vzroste. V intervalu $\mathcal{R} \in (2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5)$ je konstantní, tj. síla je zde úměrná druhé mocnině rychlosti. Nato dochází k prudkému poklesu koeficientu C , který poklesne a to až 5krát. Mluvíme o *krizi obtékání*. Tento jev je způsoben změnou charakteru turbulence (zúžením turbulentní stopy). Později hodnota C opět zvolna vzrůstá.

Poznamenejme, že podle principu relativity platí všechny výsledky uvedené v tomto odstavci také pro případ, kdy se rychlostí V_∞ pohybuje nikoliv tekutina, ale těleso (s tím, že od rychlostního pole je třeba odečíst konstantní vektor rychlosti \mathbf{V}_∞).

X.9 Příklady

1. Určete stacionární laminární proudění nestlačitelné vazké tekutiny mezi dvěma nekonečnými sousými válci o poloměrech R_1, R_2 , které se otáčejí danými úhlovými rychlostmi ω_1, ω_2 .

Řešení: Zaved'me kartézskou soustavu s osou z jako osou válců a válcovou soustavu s touž osou. Kartézské komponenty rychlostního pole budou vzhledem k symetrii problému

$$\mathbf{v} = (-v(r) \sin \varphi, v(r) \cos \varphi, 0) . \quad (\text{X.74})$$

Pro určení závislosti rychlosti na poloměru užijeme Navierových–Stokesových rovnic (X.13). K tomu budeme potřebovat vyjádření Laplaceova operátoru pomocí válcových souřadnic

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (\text{X.75})$$

Vzhledem k symetrii postačí k určení rychlosti se zabývat její složkou x , což znamená, že po provedení všech operací derivování položíme

$$\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

Snadno zjistíme, že na ose y je x -ová složka levé strany Navierových–Stokesových rovnic rovna nule, gradient tlaku má vzhledem k symetrii problému směr kolmý na osu x , a je tedy

$$\Delta v_x = 0 , \quad (\text{X.76})$$

což vede k obyčejné diferenciální rovnici pro $v(r)$. Pro tuto rovnici aplikací (X.75) na (X.74) obdržíme (čárka značí derivaci podle r)

$$\left(\frac{1}{r}(rv)'\right)' = 0 \quad (\text{X.77})$$

a její dvojí integrací dostaneme

$$v = \frac{Cr}{2} + \frac{K}{r}. \quad (\text{X.78})$$

Zde C , K jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek

$$v(R_1) = \omega_1 R_1, \quad v(R_2) = \omega_2 R_2. \quad (\text{X.79})$$

Dostaneme tak

$$v = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[(\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2) r + \frac{1}{r} (\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2 \right]. \quad (\text{X.80})$$

2. Řešte stacionární proudění vazké tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými rovinami. Jedna rovina se vzhledem ke druhé rovině pohybuje konstantní rychlostí u .

Řešení: Za jednu z těchto dvou rovin zvolme rovinu xz , osa x necht' má směr rychlosti u . Všechny veličiny tudíž závisí jen na souřadnici y a rychlost tekutiny míří ve směru osy x .

Pro stacionární pohyb z Navierových–Stokesových rovnic máme

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0 \quad (\text{X.81})$$

z čehož plyne

$$p = \text{konst}, \quad v = ay + b. \quad (\text{X.82})$$

Okrajové a počáteční podmínky jsou dané vztahy

$$[v]_{y=0} = 0,$$

$$[v]_{y=h} = u,$$

kde h je vzdálenost mezi rovinami. Proto je $b = 0$, $u = ah$,

$$v = \frac{u}{h} y. \quad (\text{X.83})$$

Příklady k samostatnému řešení

1. Určete laminární proudění nestlačitelné vazké tekutiny mezi nekonečnými rovnoběžnými stěnami.

2. Určete disipativní funkci pro proudění odpovídající Hagenovu–Poiseuilleovu zákonu. Napište rovnici vedení tepla pro tento případ.

3. Určete střední turbulentní proudění ve válcové trubici podle Prandtlovy hypotézy.

Část C

RELATIVISTICKÁ MECHANIKA

XI ZÁKLADNÍ POJMY A ZDROJE SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Snaha vybudovat fyziku splňující princip relativity byla sice vždy v souladu s experimentálními poznatky, narážela však na zásadní teoretické potíže. Ty se podařilo překonat až radikální přestavbou našich poznatků o prostoru a čase, kterou přinesla *speciální teorie relativity*.

Sledujeme nejprve historický vývoj teorie i experimentu, který přivedl k formulaci dvou základních principů, na nichž je teorie relativity založena. Z těchto principů vyvodíme *Lorentzovu transformaci* spojující inerciální vztažné systémy. Probíráme základní kinematické důsledky teorie relativity: *kontrakci délek, dilataci času, relativistický Dopplerův jev, Thomasovu precesi*. Poté se zabýváme relativistickou dynamikou a ukazujeme modifikace, které přináší teorie relativity v definici hmotnosti, hybnosti a energie. Nakonec se zabýváme zákonem *ekvivalence hmotnosti a energie*.

XI.1 Princip relativity v předrelativistické fyzice

Když 1. Newtonův zákon hovoří o *klidu nebo rovnoměrně přímočarém pohybu*, naznačuje tím možnost, že existuje privilegovaný systém, vzhledem k němuž mají slova *klid* a *pohyb* absolutní smysl. Takové bylo stanovisko Newtonovo. Předeslal formulaci svých zákonů předpoklad o existenci absolutního prostoru, který *zůstává svou povahou bez vztahu k jakémukoli vnějššímu předmětu vždy stejný a nepohyblivý*.

Podle názoru opírajícího se o aristotelovskou fyziku se privilegovanost systému spjatého se Zemí projevuje tím, že tělesa uvedená do pohybu vzhledem k Zemi se postupně zastavují. 1. Newtonův zákon tuto základní vlastnost privilegovaného systému ruší. Zastavování těles se vysvětluje silami tření, zatímco pro volný pohyb platí *princip setrvačnosti* — těleso nepodrobené silám zůstává v klidu nebo v rovnoměrném a přímočarém pohybu (rozumí se vůči Newtonovu absolutnímu prostoru). Pozorováním pohybů těles nepodrobených silám, popř. provedením oprav na tyto síly, jsou-li jejich zákony známy, je tedy možné dospět k vztažnému systému, vzhledem k němuž platí tvrzení 1. Newtonova zákona. (Připomeňme, že vztažným

systemem myslíme soustavu skutečných nebo myšlených bodů, které dostatečně hustě vyplňují prostor. V kapitolách o mechanice speciální teorie relativity se budeme omezovat na tuhé systémy, tj. na takové, v nichž se vzdálenosti vztažných bodů s časem nemění.) Vztažný systém o této vlastnosti nazveme *inerciálním*.

Ihned ovšem vidíme, že na rozdíl od situace, jaká byla v antické fyzice, Newtonův princip setrvačnosti necharakterizuje vlastnosti privilegovaného systému natolik, aby tento systém mohl být jednoznačně určen. Tento princip platí také ve všech systémech, které se vůči původně zvolenému systému pohybují rovnoměrně a přímočaře. Neexistuje tedy pouze jediný inerciální systém, který by bylo možné identifikovat s absolutním prostorem, ale celá třída takovýchto systémů, která má nekonečný počet prvků. Z hlediska principu setrvačnosti jsou všechny inerciální systémy rovnoprávné.

Vycházejme z jistého inerciálního systému a předpokládejme, že v něm máme zadánu kartézskou soustavu souřadnic K , která je určena počátkem O a vzájemně kolmými osami X, Y, Z . (Předpokládáme, že jednotka délky je dána.) Mějme druhý inerciální systém, jehož vztažné body se vůči K pohybují rychlostí V konstantní v prostoru i v čase. Bez újmy na obecnosti úvah lze předpokládat, že K byla zvolena tak, aby vektor V měl směr osy X , tj. aby bylo $V = (V, 0, 0)$. Zavedme v pohyblivém systému kartézskou soustavu tak, aby v čase $T = 0$ splývala se soustavou K . Tuto soustavu označme K' .

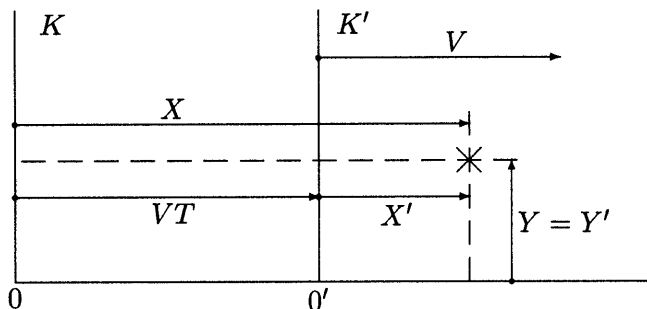
Připomeňme si nyní, že kromě absolutního prostoru předpokládal Newton také existenci absolutního času, který plyne *sám o sobě a svou povahou bez vztahu k jakémukoli vnějšímu předmětu stejnoměrně*. Představa o absolutním čase je ještě hlouběji zakořeněna než představa o absolutním prostoru a pochybnosti vznášené ohledně existence absolutního prostoru se jí zprvu nijak nedotýkaly. Vzhledem k povaze absolutního času je současnost v K a v K' totožná (tvorí ji táž množina událostí) a neměníme-li počátek odečítání času ani jeho jednotku, dostáváme zdánlivě samozřejmou rovnost

$$T = T' \tag{XI.1}$$

platnou mezi časy, v nichž nastala jistá událost z hlediska systému K a z hlediska systému K' . Pod K (popř. K') budeme nadále rozumět inerciální vztažný systém, v němž jsou zadány prostorové souřadnice X, Y, Z , (popř. X', Y', Z') a časová souřadnice T (popř. T'). Za předpokladů, které jsme o K a K' zavedli, můžeme snadno dospět ke vztahům mezi prostorovými souřadnicemi libovolné události v obou soustavách, viz obr. 20,

$$X' = X - VT, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \tag{XI.2}$$

Vztahy (XI.2) spolu s explicitně často neuváděným vztahem (XI.1) se nazývají (speciální) *Galileiho transformací*. Bylo by možné odvodit i obecnou Galileiho transformaci pro případ, že pohyb K' probíhá v jiném směru, než má osa X . Pokud se však nechceme zabývat skládáním Galileiho transformací, nepředstavuje omezení na tvar (XI.2) žádnou újmu na obecnosti.



Obr. 20: Galileiho transformace. Souřadnice bodu (označeného křížkem) v systémech K a K' .

Zabývejme se nyní z hlediska Galileiho transformace matematickým vyjádřením 1. Newtonova zákona pro volný (tj. působení sil nepodléhající) hmotný bod. Platí pro něj

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = \frac{d^2 Y}{dT^2} = \frac{d^2 Z}{dT^2} = 0. \quad (\text{XI.3})$$

Přepišme tyto rovnice do čárkovaných souřadnic pomocí Galileiho transformace. Bude zřejmě

$$\frac{d^2 X'}{dT^2} = \frac{d^2 Y'}{dT^2} = \frac{d^2 Z'}{dT^2} = 0. \quad (\text{XI.4})$$

Vidíme, že v systému K' platí formálně stejné rovnice jako v systému K . Říkáme, že zákon setrvačnosti (XI.3) je *invariantní* vůči Galileiho transformaci. Poznamenejme, že vůči jiným transformacím vyjadřujícím například přechod k rovnoměrně zrychlenému či otáčivému systému zákon setrvačnosti invariantní není.

Nyní si klademe otázku: Mají tuto vlastnost invariance vůči Galileiho transformaci všechny fyzikální zákony? Kladná odpověď by byla v souladu s platností *Galileiho principu relativity*. Tento princip tvrdí, že všechny inerciální systémy jsou zcela rovnoprávné z hlediska fyzikálních zákonů a žádným pokusem nelze prokázat rovnoměrný a přímočarý pohyb systému jako

celku. Některá pozorování ve prospěch tohoto principu v oblasti mechaniky provedl již Galilei. Tento princip souhlasí s Newtonovou mechanikou za předpokladu, že síly vzájemného působení mezi částicemi závisí pouze na jejich relativních polohových vektorech a relativních rychlostech.

Byla však jiná oblast fyziky, kterou se nedařilo uspokojivě umístit do rámce Newtonovy mechaniky, takže se vyvíjela svou vlastní cestou. Tato oblast — optika, jež hlavně zásluhou Maxwellovou přerostla v teorii elektromagnetického pole — jako by byla myšlenka privilegovaného systému nakloněna mnohem příznivěji. Z Maxwellovy teorie plyne to, co bylo z mnoha důvodů považováno za pravděpodobné již dříve, že totiž světlo (a obecně elektromagnetické vlnění) se šíří ve vakuu jistou rychlostí o velikosti c , která je nezávislá jak na místě a na směru, tak i na frekvenci, intenzitě a polarizaci světla. Na první pohled se zdá být zřejmé, že toto tvrzení předpokládá existenci privilegovaného systému, v němž jedině platí. Šířilo se světlo v systému K rychlostí c v kladném i záporném směru osy X , má v systému K' v jednom směru rychlost $c - V$ a v druhém směru $c + V$.

Rozeberme otázku chování rychlosti vzhledem ke Galileiho transformaci poněkud podrobněji. Uvažujme o pohybu bodu, který je zadán jako $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ v soustavě K a $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t')$ v soustavě K' , přičemž souřadnice X, Y, Z a X', Y', Z' jsou spojeny vztahy (XI.2). Zderivujeme-li tyto vztahy podle času, obdržíme Galileiho transformaci pro rychlost $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dX}{dT}, \frac{dY}{dT}, \frac{dZ}{dT} \right)$ a obdobně zavedenou \mathbf{v}'

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z, \quad (\text{XI.5})$$

což lze zapsat v podobě

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (\text{XI.6})$$

vyjadřující klasický zákon skládání rychlostí.

Vzorce (XI.5), popř. (XI.6), byly odvozeny pro rychlost částice a může proto vzniknout pochybnost o oprávněnosti jejich aplikace na rychlost světla jakožto vlnění. Šířilo se rovinná světelná vlna rychlostí c ve směru osy X , můžeme si představit částici pohybující se společně s hřebenem této vlny v téže směru a uzavřít, že pro rychlost hřebene vlny platí stejné vztahy jako pro tuto částici. Složitější situace však nastane, šířilo se vlna pod jistým úhlem k ose X . Pak vzhledem k absolutnosti současnosti hřebeny vlny v K a v K' splývají a fázová rychlost světla (rychlost postupu hřebene vlny) má v K i K' stejný směr, což znamená, že vztahy (XI.5), popř. (XI.6), pro ni neplatí. Částice, která se v K pohybovala spolu s hřebenem vlny ve směru jeho postupu, bude se v K' pohybovat pod jistým úhlem k tomuto směru.

Mluvíme-li však o rychlosti světla mezi body A a B , neklademe si otázku: Jaký časový interval uplyne mezi průchodem světelné vlny body A a B , ale: Za jak dlouho dospěje světelný signál z bodu A do bodu B ? Nezajímá nás tedy fázová rychlost světla, nýbrž jeho paprsková rychlost, která je rychlostí šíření energie a informace a může se obecně od fázové rychlosti lišit. Paprsková rychlost se chová analogicky jako rychlost částice a užití vzorců (XI.5) a (XI.6) je pro ni oprávněné. V dalším výkladu budeme rychlostí světla vždy rozumět jeho paprskovou rychlost a budeme proto někdy hovořit i o světelném paprsku jako o signálu, který se pohybuje ze zdroje záření do místa jeho absorpce rychlostí světla.

Pozorování interferenčních, difrakčních a polarizačních jevů způsobilo, že v minulém století byla všeobecně přijata vlnová teorie světla. V analogii s jinými vlněními se pak zdálo přirozené chápat i světlo — a později elektromagnetické pole — jako stav napětí jisté substance, která byla nazvána *éterem*. Soudilo se, že privilegovaný systém splývá s klidovým systémem éteru. Pohybem systému vůči éteru by měl v tomto systému vzniknout „éterový vítr“.

Řada fyziků zastávala názor, že éter je absolutně nepohyblivý bez ohledu na to, jak se vůči němu pohybují hmotné útvary. Uvažovalo se však také o tom, že je strháván pohybem hmot. Tato koncepce měla více variant, které se lišily předpoklady o charakteru strhávání. Podle některých se éter uvnitř těles pohyboval spolu s nimi, podle jiných bylo strhávání pouze částečné, takže výsledný efekt byl takový, jako by rychlost éteru uvnitř tělesa byla menší než absolutní rychlost tělesa, avšak nenulová.

Zdálo by se, že nejprostším způsobem, jak detekovat éterový vítr, je změření rychlosti světla ve dvou opačných směrech. Nechť vzdálenost bodů A, B je L a nechť vztažený systém, vzhledem k němuž jsou oba body v klidu, se pohybuje vůči éteru rychlostí V od A k B . Pak rychlost světla ve směru z A do B je $c - V$ a ve směru z B do A je $c + V$, takže doby, za něž projde světlo z A do B a z B do A , jsou

$$T_1 = \frac{L}{c - V}, \quad T_2 = \frac{L}{c + V} \quad (\text{XI.7})$$

a jejich rozdíl je

$$T_1 - T_2 = \frac{L}{c - V} - \frac{L}{c + V} \doteq \frac{2LV}{c^2}, \quad (\text{XI.8})$$

kde jsme se nakonec omezili na Taylorův rozvoj podle V/c do členu prvního řádu. Připomeňme, že Země obíhá kolem Slunce rychlostí 30 km/s, takže i kdyby v daném okamžiku byla vůči éteru v klidu, musel by se éterový

vítr projevit v průběhu roku. Popsaný pokus však není snadné uskutečnit, poněvadž si vyžaduje synchronizaci hodin ve vzdálených místech A, B , což nemohlo být v minulém století provedeno s dostatečnou přesností. Klasické úspěšné metody měření rychlosti světla (Fizeau 1849, Foucault 1862) proto užívaly doby, kterou světlo potřebuje, aby urazilo dráhu AB tam a zpět. V tom případě je

$$\Delta T = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = 2\frac{L}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right), \quad (\text{XI.9})$$

kde jsme se tentokrát omezili na Taylorův rozvoj do členu druhého řádu, protože člen prvního řádu se vyrušil. Je vidět, že ve srovnání s (XI.8) je nyní třeba (za předpokladu, že $V \ll c$) změřit časový interval s daleko větší přesností, aby mohl sloužit k určení V . Dospíváme tak k historicky důležitým pojmům *jevů* (pokusů) 1. řádu a 2. řádu vzhledem k podílu V/c . Uvedené příklady naznačují to, co se potvrdilo jako obecné pravidlo: jevy 1. řádu jsou buď velmi obtížně pozorovatelné, anebo zanikají vzájemnou kompenzací.

Taková situace je i u Dopplerova jevu. Nechť nyní A a B jsou pozorovatelé disponující zdroji světla o frekvenci ν , A nechť je v klidu v éteru, zatímco B se od A vzdaluje rychlostí V . Je snadné odvodit, že podle klasických představ frekvence ν_{AB} přijímaná v bodě A od B bude

$$\nu_{AB} = \nu \frac{1}{1 + \frac{V}{c}}. \quad (\text{XI.10})$$

Vzhledem k pozorovateli B se A vzdaluje rovněž rychlostí V , avšak rychlost, kterou se pohybuje jím vyslané světlo, je $c - V$. Přístroj pozorovatele B by tedy měl zaznamenat frekvenci

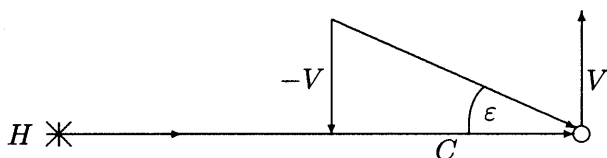
$$\nu_{BA} = \nu \frac{1}{1 + \frac{V}{c - V}} = \nu \left(1 - \frac{V}{c} \right). \quad (\text{XI.11})$$

V prvním přiblížení (XI.10) a (XI.11) splývají, takže rozdíl frekvencí by měl být jevem druhého řádu.

Zájem fyziků se nejprve soustředil na jevy 1. řádu. Nejstarším známým jevem, který má vztah k našemu tématu, je aberace světla stálic, objevená Bradleyem roku 1727. Bradley zjistil, že polohy hvězd na nebeské sféře opisují v průběhu roku elipsy, jejichž velká poloosa má pro všechny hvězdy stejnou velikost odpovídající úhlu $\varepsilon = 20,5''$. Platí přibližně

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{V}{c}, \quad (\text{XI.12})$$

kde V je rychlost Země kolem Slunce. Bradley vysvětlil tento jev jako důsledek ročního pohybu Země, který působí změnu úhlu, pod nímž se vůči ní pohybují paprsky hvězd. Jde o aplikaci zákona skládání rychlostí (XI.6), jejíž výsledek je analogický změně směru deště vzhledem k jedoucímu vozidlu. Výsledná aberace závisí na rychlosti hvězdy i Slunce vzhledem k éteru a na rychlosti Země vzhledem k Slunci. V prvním (lineárním) přiblížení Taylorova rozvoje jsou vlivy těchto faktorů nezávislé a pozorování může zjistit pouze časově proměnnou složku aberace působenou roční změnou rychlosti Země. Tato složka je největší v době, kdy rychlost Země vzhledem k Slunci je kolmá na směr paprsků hvězdy, k čemuž nutně dochází dvakrát do roka. Vzorec (XI.12) je pak důsledkem skládání rychlostí, viz obr. 21. V přiblížení prvního řádu jev aberace neumožňuje zjistit absolutní rychlost Země. Větší přesnosti astronomická pozorování nedosahují.



Obr. 21: Aberace světla. Pohyb Země kolem Slunce způsobuje, že paprsky hvězdy H dopadají v průběhu roku pod různými úhly.

Roku 1879 upozornil Maxwell na možnost určit absolutní pohyb Slunečního systému zpřesněním klasické Römerovy metody pro měření rychlosti světla. Tato metoda se zakládá na pozorování zatmění Jupiterových měsíců v průběhu delšího časového období, kdy se mění vzdálenost mezi Zemí a Jupiterem. Výsledkem měření by měla vlastně být rychlost světla vůči Slunečnímu systému ve směru Jupiter–Země. Pohybuje-li se Sluneční systém vůči éteru, měla by se tato rychlost v průběhu Jupiterova roku měnit. Přesnost astronomického pozorování vedla ovšem pouze k jisté horní hranici pro hledanou rychlost.

Roku 1868 provedl Hoek pokus týkající se šíření světla v látkovém prostředí. Nebudeme se zabývat technickými detaily a uvedeme pouze hlavní myšlenku. Vraťme se proto k popsanému pokusu s šířením světla „tam a zpět“. Rozdělme paprsek ze zdroje A tak, aby jedna složka procházela z A do B vzduchem a zpět vodou, zatímco druhá z A do B vodou a zpět vzduchem. Po návratu paprsků dojde k interferenci, která bude záviset na

časovém rozdílu. Předpověď tohoto rozdílu závisí na teorii, jakou přijmeme o šíření světla v látkovém prostředí. Proto je Hoekův experiment závažným testem takovýchto teorií.

V rámci představ o éteru je přirozené předpokládat, že světlo má v látkovém prostředí jistou rychlost c^* vůči éteru, která nezávisí na rychlosti prostředí vůči éteru. Prostředí může ovšem éter strhávat. Předpokládejme, že vzduch se v tomto směru neliší od vakua a éter nestrhává. Pak, jak již bylo řečeno, jsou rychlosti světla ve směrech AB a BA rovny $c - V$ a $c + V$. Analogické rychlosti ve vodě označíme zatím jako c_1 a c_2 . Časový rozdíl obou paprsků bude

$$\Delta T = \frac{L}{c - V} - \frac{L}{c + V} + \frac{L}{c_2} - \frac{L}{c_1}. \quad (\text{XI.13})$$

Porovnejme nyní různé hypotézy o rychlostech c_1 a c_2 . Podle hypotézy o zcela strhávaném éteru, kterou vyslovil Stokes, je $c_1 = c_2 = c^*$. Podle hypotézy o klidném éteru platí $c_1 = c^* - V$, $c_2 = c^* + V$. Konečně je možné přijmout Fresnelovu–Fizeauovu hypotézu o částečném strhávání éteru, podle níž lze předpokládat, že éter se v tělese pohybuje vůči éteru ve vakuu rychlostí αV , $0 < \alpha < 1$, kde α je tzv. strhávací koeficient, jehož velikost závisí na prostředí. Pak $c_1 = c^* - (1 - \alpha)V$, $c_2 = c^* + (1 - \alpha)V$.

Hoekův pokus je možné provádět s přístrojem natočeným v různých směrech a během různých ročních období. Výsledek je však takový, že k žádnému posunu interferenčních proužků nedochází. Jak se čtenář sám přesvědčí výpočtem veličiny ΔT podle (XI.13) s přesností do prvního řádu, odpovídá to hodnotě strhávacího koeficientu

$$\alpha = 1 - \left(\frac{c^*}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (\text{XI.14})$$

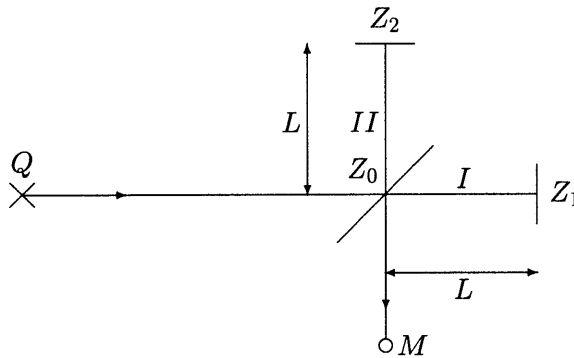
kde n je index lomu látkového prostředí. Vzorec (XI.14) souhlasí s již dříve známým výsledkem Fizeauova pokusu (1851), kdy se dvě složky světelného paprsku pohybovaly tam a zpět rychle proudící vodou, přičemž trubice byla upravena tak, že jeden paprsek vykonal celou cestu po proudu a druhý proti proudu. Proudění způsobilo posun proužků odpovídající strhávacímu koeficientu (XI.14).

Avšak ani tato fakta nezaručila teorii částečně strhávaného éteru trvalejší přijetí. Jedním z důvodů bylo, že teorie trpěla vnitřním rozporem — index lomu závisí obecně na frekvenci světla a bylo by tedy třeba zavést nekonečné množství různě strhávaných éterů pro různé frekvence.

Na konci minulého století dosáhla největších úspěchů již zmíněná Lorenzova elektronová teorie, opírající se o nejnovější poznatky o struktuře látky.

Tato teorie předpokládá nehybný éter, určující privilegovanou vztažnou soustavu, v níž platí Maxwellovy rovnice pro intenzity elektromagnetického pole. Tyto intenzity jsou jedinými fyzikálními charakteristikami stavu éteru, v Lorentzově teorii je tedy funkce éteru omezena na to, že je nositelem elektromagnetického pole.

Lorentzova teorie splnila základní požadavek, který je třeba na novou fyzikální teorii klást — objasnila z jednotného hlediska veškerý experimentální materiál vysvětlovaný staršími teoriemi. Tak výsledek Hookeova a Fizeauova pokusu se v ní vysvětluje nikoliv strháváním éteru, ale změnou elektrických vlastností látek, k níž dochází pohybem soustavy nábojů v éteru. Navíc Lorentzova teorie vysvětlila neúspěch dosud provedených pokusů 1. řádu a předpověděla, že žádný interferometrický pokus 1. řádu neumožní ani v budoucnu detekovat éterový vítr.



Obr. 22: Michelsonův pokus. Obrázek znázorňuje základní schéma pokusu. Podrobnější vysvětlení je v textu.

Avšak současně dospěla i experimentální fyzika do stadia, kdy mohla úspěšně uskutečnit pokus 2. řádu a vystavit tak teorii tvrdé zkoušce. Roku 1881 provedl Michelson poprvé pokus, který pak ve spolupráci s Morleyem opakoval s průkaznějším výsledkem roku 1887. Jde nesporně o jeden z nejvýznamnějších pokusů v dějinách fyziky. Popíšeme jej proto poněkud podrobněji, i když pomineme řadu technických detailů.

Světlo ze zdroje Q , viz obr. 22, se rozdělí polopropustným zrcadlem Z_0 na dva svazky, které pak urazí stejné dráhy L v navzájem kolmých směrech k zrcadlům Z_1 a Z_2 , od nichž se odrazí zpět a vytvoří posléze interferenční obrazec v interferometru M .

Předpokládejme, že celá experimentální souprava se pohybuje rychlostí V vzhledem k éteru ve směru ramene I od Z_0 k Z_1 . Pak rychlost paprsku I byla před odrazem $c - V$ a po odraze $c + V$. Doba t_1 , kterou paprsek spotřeboval na proběhnutí dráhy $Z_0Z_1Z_0$, je

$$t_1 = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2Lc}{c^2 - V^2}. \quad (\text{XI.15})$$

Ve směru ramene II se paprsek pohybuje jistou rychlostí c^+ . Z Galileiho transformace pro rychlosti (XI.5) zjistíme, že vzhledem k éteru má tato rychlost komponentu $-V$ ve směru ramena I a c^+ ve směru kolmém. Její velikost v éteru musí být c , a tedy

$$c^+ = \sqrt{c^2 - V^2}. \quad (\text{XI.16})$$

Doba t_2 , kterou spotřeboval paprsek II na dráhu $Z_0Z_2Z_0$, je tedy

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \quad (\text{XI.17})$$

Rozdíl činí

$$\delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right] \doteq \frac{L}{c} \left(\frac{V}{c} \right)^2, \quad (\text{XI.18})$$

kde jsme nakonec vyjádřili přiblížení druhého řádu.

Tím vzniká dráhový rozdíl

$$\Delta = c \delta t = L \left(\frac{V}{c} \right)^2 \quad (\text{XI.19})$$

a je-li vlnová délka použitého světla λ , posune se interferenční obrazec o

$$m = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \quad (\text{XI.20})$$

proužků oproti stavu, v němž nevané éterový vítr. Otočíme-li nyní do směru pohybu vůči éteru druhé rameno, posune se obrazec o stejný počet proužků na opačnou stranu, takže výsledkem srovnání by mělo být posunutí o

$$2m = \frac{2L}{\lambda} = \left(\frac{V}{c} \right)^2. \quad (\text{XI.21})$$

Pokus byl opakován v různých ročních obdobích, takže během jeho trvání musela rychlost V dosáhnout hodnoty nejméně 30 km/s, tzn. $(V/c)^2 \approx 10^{-8}$.

Při vlnové délce $\lambda = 500$ nm a dráze $L = 10$ m by mělo být

$$2m \doteq 0,4, \quad (\text{XI.22})$$

což je pro registraci Michelsonovým interferometrem více než postačující. Výsledek pokusu byl však negativní. V mezích pozorovacích chyb nebyl žádný posun zjištěn.

To postavilo tehdejší fyziku do velmi delikátní situace. Nejprostším výkladem neexistence éterového větru by bylo strhávání éteru Zemí do velké vzdálenosti od jejího povrchu. Ovšem ani opakování pokusu v různých nadmořských výškách a vysoko nad zemským povrchem nevedlo k měřitelnému posunu. Kromě toho bylo z Lodgeova pokusu (1892) známo, že rychlost světla v okolí rychle se pohybujících těles není jejich pohybem ovlivněna, a to ani v případě, že tělesa budí ve svém okolí silná elektrická a magnetická pole.

Jednou z cest k vysvětlení uvedených rozporů byla změna dosavadních představ o šíření světla. Nejzajímavějším pokusem v tomto směru byla Ritzova a Tolmanova balistická hypotéza, která opustila princip, že ve vakuu *světlo nemůže předehnat světlo*, a předpokládala, že rychlost světla je závislá na rychlosti jeho zdroje asi jako rychlost střely vypálené z jedoucího vozidla. Na základě této hypotézy byla zformulována teorie invariantní vůči Galileiho transformaci. Tato teorie byla vypracována až po vzniku speciální teorie relativity a po nějakou dobu se rozvíjela jako její alternativa.

Bezprostřední reakcí na výsledek Michelsonova pokusu byly zejména snahy o modifikaci Lorentzovy teorie. Lehko se ověří, že tento výsledek by se dal vysvětlit zkrácením ramena interferometru ve směru jeho pohybu v éteru na délku

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (\text{XI.23})$$

kde L_0 byla délka vzhledem k éteru. Tuto kontrakční hypotézu poprvé vyslovil Fitzgerald roku 1891. Na první pohled se zdá být velmi podivné, že by se délky všech předmětů na Zemi včetně Země samotné měly zkracovat a prodlužovat podle toho, jak se Země pohybuje vzhledem k éteru. Uvažujme však, že díky své univerzálnosti je kontrakce pro pozemského pozorovatele nezjistitelná, i kdyby byla sebevětší, protože se ve stejném poměru (XI.23) zkracují i všechna používaná měřítka. Michelson nemohl zjistit různost délek ramen svého přístroje žádným interferometrickým měřením, protože, podle nyní diskutované hypotézy, se vliv kontrakce ruší vlivem éterového větru.

Lorentz ovšem nepřijal kontrakci jako pouhou ad hoc hypotézu, ale ukázal, že jsou-li atomy a molekuly látky udržovány elektromagnetickými silami, je kontrakce důsledkem povahy těchto sil. Avšak ani takto zdokonalená Lorentzova teorie by nevyloučila úspěch jiných pokusů 2. řádu při určení absolutního pohybu. Stačilo by například, aby ramena Michelsonova přístroje nebyla stejně dlouhá. Podle kontrakční hypotézy by se sice neprojevila různá orientace ramen přístroje vůči éterovému větru, ale bylo by možné indikovat změny jeho velikosti během roku. K těmto změnám by nedošlo pouze za (nepravděpodobného) předpokladu, že Sluneční systém se vůči éteru nepohybuje. Tento pokus byl proveden Kennedym a Thorndikem až v roce 1932 s negativním výsledkem. Lorentz si však již roku 1899 položil otázku, jaké předpoklady by zaručily, že žádný takový pokus 2. řádu neprokáže pohyb vzhledem k éteru. Dospěl k závěru, že kromě kontrakce délek je třeba předpokládat i dilataci času podle vztahu

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{XI.24})$$

v systémech pohybujících se v éteru, kde T_0 je doba, po níž by daný proces trval v klidném éteru. Dále je třeba uvážit, že synchronizují-li se hodiny v soustavě pohybující se vůči éteru například tak, že se stejnou rychlostí roznášejí ve všech směrech, pak z hlediska éteru tato rychlost stejná není a závislost chodu hodin na rychlosti (XI.24) způsobí, že vzhledem k éteru hodiny synchronizovány nebudou. Složením všech těchto vlivů dochází k tomu, že žádný popsaný pokus 2. řádu ani řada pokusů dalších, o nichž jsme se zde nezmínili, neumožní detekovat absolutní pohyb.

Vznikla zvláštní situace, protože na jedné straně má pohyb vůči éteru řadu významných a neobvyklých následků, na druhé straně jsou však tyto následky takové, že ve svém souhrnu pohyb vůči éteru perfektně zamaskují, takže navzdory existenci éteru všechna pozorování a pokusy souhlasí s principem relativity.

Lze říci, že zvláště ve své práci z roku 1904 Lorentz dospěl až na práh teorie relativity. Éter byl vlastně již jen pomocným lešením, které stačilo odstranit. K tomuto kroku se však již Lorentz neodhodlal. Ještě dále dospěl ve svých pracích z roku 1905 Poincaré, který zdokonalil Lorentzovu teorii a vyslovil názor, že princip relativity — tj. princip naprosté rovnoprávnosti všech inerciálních systémů — může být základním přírodním zákonem. Přesto i u Poincarého vystupuje princip relativity jako jistý důsledek konkrétního tvaru Maxwellových–Lorentzových rovnic. Sám Poincaré vyslovuje nespokojenost s tím, že *formule spolu souhlasí jen díky šťastné náhodě*, a vyjadřuje

víru, že se původ jejich souhlasu podaří pochopit hlouběji. Podle názoru naprosté většiny fyziků se dílo podařilo téhož roku Albertu Einsteinovi, který je proto právem považován za hlavního tvůrce a dovršitele *speciální teorie relativity*.

XI.2 Principy speciální teorie relativity

Einstein založil speciální teorii relativity na dvou výchozích tvrzeních, na dvou principech. Podle prvního *nejen v mechanice, ale i v elektrodynamice žádné vlastnosti jevů neodpovídají pojmu absolutního klidu ... pro všechny souřadnicové soustavy, pro něž platí rovnice mechaniky, platí tytéž elektrodynamické a optické zákony*.

Druhý princip zní u Einsteina takto: *Světlo se ve vakuu vždy šíří určitou rychlostí c , která nezávisí na pohybovém stavu vyzářujícího tělesa*.

V původní formulaci 1. principu se odráží konflikt mezi mechanikou a elektrodynamikou, jehož odstranění bylo bezprostředním cílem nové teorie. Je ve shodě s názory samotného Einsteina i s dalším vývojem fyziky dát prvnímu principu tuto obecnější formulaci:

Všechny fyzikální děje probíhají z hlediska kteréhokoliv inerciální soustavy podle týchž zákonů.

V této podobě se princip zdánlivě ničím neliší od principu relativity Galileiho. Odlišným se však stává díky svému spojení s 2. principem, který je s ním zdánlivě v rozporu.

Mějme dva body A, B (pro názornost mluvíme o počátku a konci nástupiště), nehybné v inerciálním systému K , a bod C , který leží uprostřed mezi nimi. Střed nástupiště C nechť se v okamžiku $T = 0$ stává zdrojem světla. Podle 2. principu světlo dorazí současně do bodů A a B v jistém čase T . Mějme dále vagon, který se pohybuje rovnoměrně a přímočaře ve směru BA tak, že jeho počátek a konec v čase T právě koincidují s body A, B . Podle 1. principu musí v systému K' spojeném s vagonem platit rovněž 2. princip. Odtud plyne, že zdroj světla v okamžiku jeho vyslání koincidoval se středem vagonu. To je však absurdní, protože v okamžiku $T = 0$, kdy bylo světlo vysláno, střed vagonu do bodu C ještě nedorazil.

Lze najít cestu, jak rozpor překonat. V 1. ani v 2. principu není nic, co by nás nutilo předpokládat, že okamžiky příchodu světla do bodů A, B současně z hlediska systému K jsou současně i z hlediska systému K' . Naopak, protože předpoklad jejich současnosti v K' vedl ke sporu, vyplývá z našich principů, že současné nejsou a že tedy současnost je relativní. Tím ovšem opouštíme vztah (XI.1), z něhož téměř samozřejmě vplynuly vztahy

(XI.2). To znamená, že lze opustit i tyto vztahy, tj. Galileiho transformaci i zákon skládání rychlostí (XI.6). Neinvariance 2. principu vzhledem ke Galileiho transformaci není tedy ve sporu s principem relativity, ale znamená, že tento princip požaduje invarianci fyzikálních zákonů vůči jiné transformaci, než je transformace Galileiho.

I dnes si může čtenář při prvním zamyšlení nad těmito závěry položit otázku, zda opravdu máme dostatečné důvody rozejít se tak radikálně s názory, které zdánlivě souhlasí s naší intuicí. Uváží-li však, oč svou představu absolutní současnosti opírá, uvědomí si pravděpodobně, na jak nepevných základech je založena. Představa absolutní současnosti splývá v běžném životě s představou „toho, co právě vidíme“. Její praktická vžitost a užitečnost se zakládá na tom, že v běžném životě můžeme rychlost světla považovat za nekonečně velkou ve srovnání s rychlostmi pohybů, které nás zajímají. Tato představa současnosti není tedy použitelná ani v rámci předrelativistické fyziky, která prokázala měřením, že rychlost světla je konečnou veličinou. Newtonovská fyzika sice předpokládá existenci nekonečné rychlosti (přímé působení na dálku například podle gravitačního zákona), ale představa nekonečné rychlosti se v ní vyvinula v závislosti na představě absolutní současnosti a nejsou pro ni žádné experimentální důkazy. Vidíme tedy, že kromě své „vžitosti“ neměla fakticky představa absolutní současnosti ve fyzice žádnou oporu.

Rozhodující slovo pro přijetí nové fyzikální teorie musí ovšem povědět experiment. V XI.1 jsme sledovali, jak všechny experimenty usilující o zjištění absolutního pohybu potvrzovaly platnost 1. principu. V době vzniku teorie relativity však nebylo přímých potvrzení platnosti 2. principu, speciálně nezávislosti rychlosti světla na rychlosti zdroje. Proto mohla Einsteinově teorii po nějakou dobu konkurovat balistická teorie, která řešila rozpor mezi optikou a principem relativity přestavbou optiky (vztáhla 1. princip ke Galileiho transformaci za cenu opuštění 2. principu). Avšak roku 1913 de Sitter rozborem pozorování zákrytových dvojhvězd ukázal, že průběh změn jejich jasnosti balistické teorii odporuje. Později následovala řada dalších astronomických pozorování. Například Brecherův rozbor z roku 1977 ukazuje, že záření rentgenového zdroje Hercules X-1 nezávisí na rychlosti zdroje s relativní chybou řádu 10^{-9} .

Rychlosti astronomických objektů vůči pozemskému pozorovateli jsou většinou velmi malé ve srovnání s rychlostí světla. Byly však konány také experimenty se zdroji o velkých rychlostech, jako bylo například měření Alwägera a jeho spolupracovníků v roce 1964. Při něm byla určována rychlost paprsků γ vysílaných pohybujícími se piony. Také tyto experimenty

potvrdily nezávislost rychlosti světla na rychlosti zdroje s relativní chybou 10^{-4} . Pro úplnost dodejme, že se několikrát vyskytly i experimentální pochybnosti o správnosti relativistických principů (Millerova pozorování 1925, Kantorův experiment 1962). Zdánlivé rozpory byly však postupně vysvětleny. Lze proto říci, že dnes nelze mít o platnosti Einsteinem formulovaných postulátů žádné rozumně zdůvodněné pochybnosti.

XI.3 Lorentzova transformace. Skládání rychlostí

Jak jsme viděli, vyžadují si Einsteinovy postuláty nahrazení Galileiho transformace jinou transformací, která bude spojovat prostorové souřadnice a čas v inerciálních systémech K a K' takovým způsobem, aby vůči ní byly fyzikální zákony invariantní. Einstein odvodil tuto transformaci ze dvou uvedených principů a vyjádřil tak její univerzální charakter. Dospěl k transformačním vztahům, které byly známy vlastně již před ním. Přiblížil se jim Voight roku 1887 a v úplné podobě je získali Larmor roku 1900 a Lorentz v roce 1904. Poincaré pro ně roku 1905 zavedl název Lorentzova transformace. Larmor a Lorentz dospěli k této transformaci v rámci úvah o vlastnostech Maxwellových rovnic. Pro Einsteina byl klíčem k jejímu získání rozbor pojmu současnosti.

Klasická (tj. předrelativistická) fyzika předpokládala existenci absolutní současnosti, neměla však v praxi uskutečnitelnou metodu, kterou by absolutní současnost dvou událostí stanovila.

Einstein našel jednoduchou metodu *synchronizace* založenou na přímém použití 2. principu. Mějme hodiny v bodech A a B . Vyšleme v čase T_0 světelný signál z A do B , odrazíme jej zpět a zaznamenáváme čas návratu signálu T_k . Pak v okamžiku přijetí signálu je třeba v B nastavit čas

$$T = \frac{T_0 + T_k}{2} . \quad (\text{XI.25})$$

Synchronizace se vztahuje k systému, v němž je bod A v klidu. Bude-li bod B v klidu v témže systému, budou hodiny v A a v B nadále ukazovat synchronizovaný čas T , který může být uvedenou procedurou nastaven na všech hodinách daného vztázného systému.

Uvedený experiment umožňuje zároveň určit vzdálenost B od A (v klidovém systému bodu A v čase T). Tato vzdálenost je zřejmě

$$L = \frac{c}{2} (T_k - T_0) \quad (\text{XI.26})$$

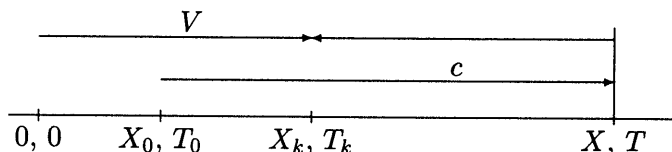
a nazývá se *radiolokační vzdáleností*, protože její měření se v praxi uskutečňuje nikoliv pomocí viditelného světla, ale rádiovými signály (například při měření vzdáleností těles Sluneční soustavy).

Proti Einsteinově metodě synchronizace bylo namítáno, že se při ní užívá argumentu kruhem. Aby mohla být určena rychlost světla, je třeba mít synchronizované hodiny. Avšak pravidlo synchronizace se stanoví za předpokladu, že rychlost světla je ve dvou protichůdných směrech stejná. Na hodinách synchronizovaných podle Einsteina pak ovšem nemůžeme ověřit, zda tomu tak skutečně je. I když to zdánlivě vyjde jako výsledek měření, půjde jen o důsledek přijaté definice (XI.25).

Přijetí metody měření vzdálenosti podle (XI.26) tuto námitku ještě zvýrazní. Tato metoda předpokládá, že rychlost světla je známa a rovna c ve všech směrech. Současná definice jednotek délky a času také s konstantností c předem počítá — dnes uváděná veličina c již není měřena, ale definována, takže není zatížena žádnou chybou. Jak ale potom můžeme platnost principu konstantní rychlosti světla ověřit?

Na tyto námitky lze odpovědět, že pro experimentální potvrzení teorie není nutné přímé ověření všech jejích postulátů. Stačí, když budou potvrzeny všechny jejich experimentálně dostupné důsledky. Dále je třeba uvést, že teorie relativity nevyklučuje ani jiné metody synchronizace, jako je například zmíněná metoda pomalého roznášení hodin v daném vztažném systému a jiné metody měření vzdálenosti, například přikládáním tuhých měřicích tyčí. Tyto metody dají podle teorie relativity stejné výsledky jako metoda Einsteinova, takže i nezávislé ověření 2. postulátu je možné.

Zabýváme se nyní důsledky formulí (XI.25) a (XI.26) pro vztah souřad-



Obr. 23: Lorentzova transformace v podélném směru. Pohybující se pozorovatel určuje souřadnice události X, T pomocí hodin a světelného signálu.

nic a času v různých inerciálních systémech. Mějme soustavu K s počátkem O a s osami X, Y, Z a synchronizovaným časem T . Dále uvažujme systém K' , který se pohybuje ve směru osy X konstantní rychlostí V . Osy systému K' zvolíme tak, aby jejich směr splýval se směrem os systému K . Počátek

O' nechť je totožný s počátkem O v čase $T = 0$ a nechť v tomto okamžiku ukazují čas $T' = 0$ také hodiny pohybující se s bodem O' . Jde o situaci analogickou té, kterou jsme měli při vyvození Galileiho transformace (XI.2).

Uvažujme nyní jistou událost E na ose X v čase T (X a T mohou být voleny libovolně). Nechť tato událost odpovídá odrazení světelného signálu, který vyslal pozorovatel spojený s bodem O' v bodě X_0 a v čase T_0 a po odrazení jej přijal v bodě X_k a v čase T_k , viz obr. 23, který zachycuje situaci z hlediska systému K . Pozorovatel v O' má stejné právo užívat pravidla einsteinovské synchronizace a radiolokační metody určování vzdáleností jako pozorovatelé v systému K . Přiřadí proto události E čas

$$T' = \frac{T'_0 + T'_k}{2} \quad (\text{XI.27})$$

a vzdálenost od počátku (v němž se sám nachází)

$$X' = \frac{c}{2} (T'_k - T'_0) . \quad (\text{XI.28})$$

V předrelativistické fyzice bychom přirozeně položili $T' = T_0$, $T'_k = T_k$. Ukázalo by se však, že takový předpoklad je neslučitelný s Einsteinovými principy, což bude patrné z dalšího postupu. Budeme předpokládat, že

$$T'_0 = \kappa T_0 , \quad T'_k = \kappa T_k , \quad (\text{XI.29})$$

kde $\kappa = \kappa(V)$, tj. budeme předpokládat, že chod hodin může záviset na velikosti jejich rychlosti.

Naším cílem je vyjádřit T' a X' pomocí T a X . K tomu stačí využít kinematických vztahů pro rovnoměrný a přímočarý pohyb. Platí

$$X_0 = V T_0 , \quad X - X_0 = c(T - T_0) \quad (\text{XI.30})$$

a tedy

$$T_0 = \frac{cT - X}{c - V} . \quad (\text{XI.31})$$

Dále je

$$X_k = V T_k , \quad X - X_k = c(T_k - T) \quad (\text{XI.32})$$

a tedy

$$T_k = \frac{cT + X}{c + V} . \quad (\text{XI.33})$$

Dosazením (XI.31) a (XI.33) do (XI.27) a (XI.28) při využití (XI.29) dostaneme

$$T' = \kappa \frac{T - \frac{VX}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{XI.34})$$

To jsou hledané transformační vztahy, které však dosud obsahují neurčenou veličinu κ . Pro její určení uijeme 1. principu. Zatímco mezi údajem T' na hodinách O' a synchronizovaným časem T systému K v témže místě je podle (XI.29) vztah

$$T' = \kappa T, \quad (\text{XI.35})$$

mezi údajem T na hodinách v bodě ($X = 0$) a synchronizovaným časem T' systému K' v témže místě je podle (XI.34) vztah

$$T = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\kappa} T'. \quad (\text{XI.36})$$

Vztah (XI.35), popř. (XI.36), udává, jak se změní z hlediska klidového systému K , popř. K' , tempo chodu hodin pohybujících se rychlostí o velikosti V . Podle 1. principu musí být tato změna tempa v obou případech stejná a musí tedy platit

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{XI.37})$$

Popsaná metoda synchronizace je možná pouze za předpokladu, že

$$V \leq c. \quad (\text{XI.38})$$

To znamená, že κ je reálné číslo.

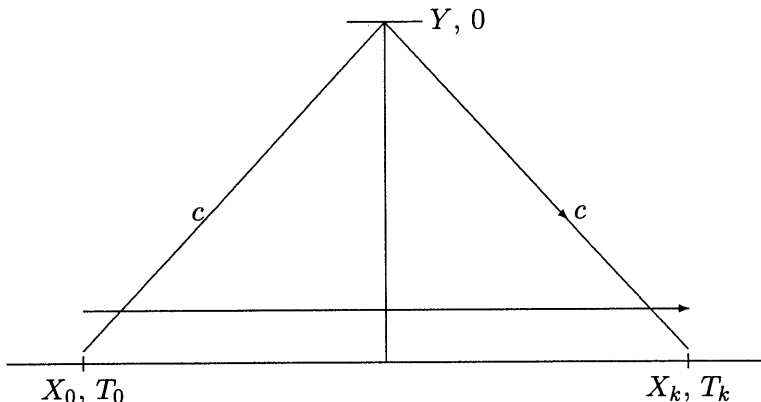
Dále uvažujme o události F na ose Y v čase $T = 0$. Nechť tato událost odpovídá odrazení světelného signálu, který pozorovatel O' vyslal v čase T_0 a přijal v čase T_k , viz obr. 24.

Pozorovatel O' podle (XI.26) a (XI.37) přiřadí události F vzdálenost od počátku

$$Y' = \frac{c}{2} (T_k - T_0) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{XI.39})$$

Podle Pythagorovy věty však platí

$$V^2 \left(\frac{T_k - T_0}{2} \right)^2 + Y^2 = c^2 \left(\frac{T_k - T_0}{2} \right)^2 \quad (\text{XI.40})$$



Obr. 24: Lorentzova transformace v příčném směru. Pohybující se pozorovatel určuje souřadnice události $Y, 0$ pomocí hodin a světelného signálu.

a tedy $Y' = Y$. Pro osu Z je úvaha zcela analogická, takže můžeme zapsat úplnou soustavu transformačních vztahů mezi synchronizovanými časy a prostorovými souřadnicemi v systémech K a K' jako

$$T' = \frac{T - \frac{VX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad X' = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \quad (\text{XI.41})$$

Tyto vztahy nazýváme *speciální Lorentzovou transformací*. Bylo by možné odvodit Lorentzovu transformaci také pro rychlost V systému K' vůči K libovolného směru. Pokud se však nezabýváme otázkou skládání Lorentzových transformací, nepředstavuje omezení na tvar (XI.41) žádné omezení obecnosti. Proto budeme slovo „speciální“ většinou vynechávat, jako jsme činili i u Galileiho transformace.

Povšimněme si, že v limitě pro $c \rightarrow \infty$ přechází Lorentzova transformace v transformaci Galileiho. V rámci speciální teorie relativity, kdy rychlost světla je danou konečnou veličinou, je možné otázku korespondence mezi Lorentzovou a Galileiho transformací zkoumat tak, že rozvedeme pravé strany (XI.41) do Taylorovy řady podle V/c a omezíme se na členy do prvního řádu. Pak transformační vztahy pro prostorové souřadnice přecházejí v Galileiho transformaci (XI.2), avšak první vztah (XI.41) dává $T' = T - VX/c^2$ a neodpovídá tedy v daném přiblížení vztahu (XI.1) vyjadřujícímu existenci absolutní současnosti v newtonovské fyzice. Je však třeba si uvědomit, že zpravidla se zabýváme fyzikálními ději v takových prostorových a časových oblastech, že je $X \ll cT$. Za tohoto předpokladu je pro $V \ll c$ oprávněno

užívání Galileiho transformace včetně vztahu (XI.2). Někdy je vhodné užít inverzní Lorentzovy transformace

$$T = \frac{T' + \frac{VX'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad X = \frac{X' + VT'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad Y = Y', \quad Z = Z'. \quad (\text{XI.42})$$

Vidíme, že inverzní vztahy k (XI.41) lze obdržet výměnou čárkovaných a nečárkovaných souřadnic a času a záměnou V za $-V$, což bylo třeba očekávat.

Dále nás budou zajímat transformační vztahy pro rychlost hmotného bodu, jimiž bychom nahradili vztahy (XI.5), (XI.6) získané z transformace Galileiho. Nechť je pohyb hmotného bodu zadán jako

$$\mathbf{r}(T) = (X(T), Y(T), Z(T)). \quad (\text{XI.43})$$

Pak bude jeho rychlost

$$\mathbf{v}(T) = \left(\frac{dX}{dT}, \frac{dY}{dT}, \frac{dZ}{dT} \right). \quad (\text{XI.44})$$

V systému K' bude témuž pohybu odpovídat polohový vektor $\mathbf{r}'(T')$ a rychlost

$$\mathbf{v}'(T') = \left(\frac{dX'}{dT'}, \frac{dY'}{dT'}, \frac{dZ'}{dT'} \right). \quad (\text{XI.45})$$

Zderivujeme-li druhou rovnici (XI.41) podle T' a zavedeme-li v zájmu stručnosti zápisu *Lorentzův faktor*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (\text{XI.46})$$

dostáváme zderivováním druhé rovnice (XI.41)

$$v'_x = \gamma (v_x - V) \frac{dT}{dT'}. \quad (\text{XI.47})$$

Derivováním první rovnice (XI.42) podle T' získáme

$$\frac{dT}{dT'} = \gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) \quad (\text{XI.48})$$

a po dosazení do (XI.47) a rozřešení této rovnice vzhledem k v'_x máme

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (\text{XI.49})$$

Analogickými operacemi z třetí a čtvrté rovnice (XI.41) dostaneme, že

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (\text{XI.50})$$

Vypíšme i inverzní vztahy, které lze opět dostat výměnou čárkovaných a nečárkovaných komponent rychlosti částice a záměnou V za $-V$,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (\text{XI.51})$$

Vidíme, že zákon skládání rychlosti \mathbf{v}' a \mathbf{V} je složitější než klasický zákon (XI.6), ve který přechází pro malá $\frac{V}{c}$, $\frac{v'}{c}$.

Aplikujme rovnice (XI.49) a (XI.50) na světlo, které se šíří v systému K rychlostí $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, přičemž

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2. \quad (\text{XI.52})$$

Umocníme-li uvedené rovnice na druhou a porovnáme součet levých a pravých stran, s využitím (XI.52), po snadných úpravách obdržíme

$$c'^2 = c^2. \quad (\text{XI.53})$$

To znamená, že velikost rychlosti světla je vůči Lorentzově transformaci invariantní. Tím jsme se přesvědčili, že ve všech systémech spojených Lorentzovou transformací platí 2. Einsteinův princip. Vybudováním teorií konkrétních fyzikálních jevů, které jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci, se budeme zabývat v dalším výkladu.

Poznamenejme na závěr, že rychlost částice o velikosti v , pro niž v jistém systému K platí

$$v \leq c, \quad (\text{XI.54})$$

musí z důvodů spojitosti splňovat tuto podmínku také po provedení Lorentzovy transformace. Podle vztahu (XI.53) se totiž nemůže v žádném inerciálním systému rovnat c a nemůže tedy hodnotu c překročit. Můžeme proto mluvit o *podsvětelné rychlosti* jako o pojmu, který nezávisí na volbě vztažného systému.

XI.4 Časový interval. Prostorová vzdálenost

Uvažujme o dvou událostech, které nastaly v témže místě systému K' . Platí tedy pro ně

$$X'_1 = X'_2 . \quad (\text{XI.55})$$

Časový interval mezi těmito událostmi, měřenými hodinami v daném bodě systému K' , bude

$$\Delta\tau = T'_2 - T'_1 . \quad (\text{XI.56})$$

Jaký časový interval uplyne mezi oběma událostmi v synchronizovaném čase T v systému K ? Užijme Lorentzovy transformace, a to první rovnice (XI.42). Vzhledem k (XI.55) platí

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{T'_2 - T'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \Delta\tau . \quad (\text{XI.57})$$

Vidíme, že čas ΔT je vždy delší než *vlastní čas* $\Delta\tau$ měřený v systému, v němž jsou obě události souměstné. Z hlediska K lze říci, že $\Delta\tau$ je časový interval, který ukazují hodiny pohybující se rychlostí V . Tyto hodiny se tedy vzhledem k hodinám synchronizovaným v K zpožďují. Mluvíme proto o *dilataci času* způsobené pohybem.

Vzorec (XI.57) a další závěry na něm založené vyvolávaly velké množství diskusí a námitek. Nešlo jen o neobvyklost závěru o závislosti chodu hodin na rychlosti, ale zejména o zdánlivou rozpornost tohoto závěru v rámci samotné teorie relativity. Hodiny A a B ukazují v okamžiku svého míjení stejný čas, pozorovatel A zjišťuje, že se zpožďují hodiny B , pozorovatel B zjišťuje, že se zpožďují hodiny A — jak může obojí platit zároveň? Zpoždování hodin se přece musí zjišťovat na základě objektivního a jednoznačného porovnáním časových údajů.

Nedostatek uvedené úvahy je v tom, že zdánlivě neslučitelné výroky jsou příliš kusé. Podrobněji lze říci, že zpoždění hodin B je registrováno na hodinách synchronizovaných s hodinami A , jak s nimi hodiny B postupně koincidují během pohybu. Zaměníme-li v tomto výroku B za A , dostaneme druhý, rovněž pravdivý výrok, který popisuje výsledek odlišného pozorování a není tedy s prvním výrokiem v rozporu. Pozorovatel B souhlasí s tím, že jeho hodiny ukazují menší čas než hodiny, jež postupně potkává, vysvětluje si to však tím, že tyto hodiny nejsou (vzhledem k jeho systému) synchronizovány. Pokud A a B zůstávají v rovnoměrném a přímočarém pohybu, nedojde k jejich opětovnému setkání a nebude tedy možné obě hlediska přímo srovnat, ke sporu nedojde.

Nyní předpokládejme, že hodiny se znovu setkají. To znamená, že aspoň jedny z nich se musely po nějakou dobu pohybovat neinerciálně. Nechť například pohyb hodin B byl v jistém okamžiku zabrzděn a urychlen v opačném směru. Doba nerovnoměrnosti pohybu může být ovšem volena tak, že ji lze zanedbat oproti době, po níž se hodiny pohybovaly rovnoměrně. Nechť T_A, T_B jsou časy, které uplynou na hodinách A a B od jejich rozchodu do setkání, a nechť rychlost, kterou se hodiny B hodinám A vzdalovaly a blížily, má stejnou velikost V . Pak pozorovatel spojený s hodinami B může tvrdit, že se mu touto rychlostí vzdalovaly a blížily hodiny A a použitím dilatačního vzorce (XI.57) dojde ke dvěma neslučitelným výsledkům

$$T_A = \frac{T_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad T_B = \frac{T_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.58})$$

Chybou předešlé úvahy je to, že neoprávněně aplikujeme dilatační vztah, odvozený pouze pro časové intervaly v inerciálních systémech, na systém spojený s hodinami B , který po celou uvažovanou dobu inerciální není. Pouze první ze vzorců (XI.58) je tedy oprávněný. Vztah (XI.57) můžeme použít v systému spojeném s hodinami B jak v době jejich vzdalování, tak v době jejich přibližování, nesmíme si však počínat tak, jako by šlo o jeden a týž systém.

Abychom demonstrovali, že tím nedojde k žádnému rozporu, pozměňme situaci tak, aby soustava spojená s hodinami B byla po celou dobu inerciální. Budeme předpokládat, že se hodiny B nevracejí, ale potkávají po určité době třetí hodiny C , které se pohybují rovnoměrně a přímočaře rychlostí o velikosti V k hodinám A . V okamžiku setkání B a C nechť je na nich stejný časový údaj $T_B/2$. Jak dopadne porovnání údajů T_A a T_C při jejich setkání?

Z hlediska systému A ihned vidíme, že platí

$$T_A = \frac{T_C}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.59})$$

Z hlediska systému spojeného s hodinami B vypadá situace takto: Hodiny A se vzdalují od B rychlostí V a po čase $T_B/2$ je „stíhají“ hodiny C rychlostí, která by podle klasického zákona skládání rychlostí (XI.6) měla velikost $U = 2V$. Podle relativistického zákona (XI.51) však pro ni platí

$$U = \frac{2V}{1 + \beta^2}, \quad (\text{XI.60})$$

kde jsme zavedli označení

$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (\text{XI.61})$$

Hodiny A a C se tedy setkají v čase t (měřeném od rozchodu A a B), pro který platí

$$Vt = U \left(t - \frac{T_B}{2} \right), \quad (\text{XI.62})$$

tj.

$$t = \left(t - \frac{T_B}{1 - \beta^2} \right). \quad (\text{XI.63})$$

Na hodinách A vzhledem k dilataci času uběhne do setkání A a C doba

$$T_A = t\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{T_B}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{XI.64})$$

zatímco na hodinách C bude

$$T_C = \frac{T_B}{2} + \left(t - \frac{T_B}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} = T_B, \quad (\text{XI.65})$$

jak si snadno ověříme dosazením (XI.60) a (XI.63). To znamená, že dospíváme opět ke vztahu (XI.59). Tento výsledek bylo možné s jistotou předvídat.

Speciální teorie relativity se nemusí vyhýbat problému ani v jeho původní formulaci. Omezení na inerciální soustavy neznamená, že bychom v jejich rámci nemohli studovat zrychlený pohyb hodin. Je přirozené přijmout hypotézu, že vzorec (XI.57) platí i v diferenciálním tvaru a že tedy hodiny pohybující se proměnnou rychlostí $v(T)$ ukáží interval vlastního času

$$\Delta\tau = \int d\tau = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT < T_2 - T_1. \quad (\text{XI.66})$$

Hypotetické hodiny, pro něž vztah (XI.66) platí přesně, nazýváme *ideálními hodinami*. Chod ideálních hodin tedy nezávisí na jejich zrychlení. Skutečné hodiny ovšem v závislosti na své konstrukci jeví odchylky od ideálnosti (od malých korekcí až po úplnou destrukci). Je znám teoretický model ideálních hodin založený na trvalé výměně světelných signálů mezi dvěma pozorovateli, jejichž vzdálenosti se nemění. V praxi však můžeme předpokládat, že velmi dokonalou realizací ideálních hodin jsou atomy vysílající záření o přesně definovaných frekvencích. V pevných látkách za běžných teplot mají kmitající atomy zrychlení až $10^4 g$ (g je gravitační zrychlení na povrchu Země), aniž to má jakýkoliv vliv na frekvence vysílané jejich jádry,

jak to potvrzuje pozorování Mössbauerova jevu. Totéž pozorování potvrzuje závislost frekvence na teplotě, která přesně odpovídá dilataci času působené růstem střední rychlosti atomů s teplotou. Pro atomové hodiny můžeme proto vztah (XI.66) užívat v zásadě bez omezení. To znamená, že u hodin, které jsou na počátku a na konci děje v témže místě neinerciálního systému, můžeme vypočítat jejich zpoždění i v případě křivočarých a zrychlených pohybů. Pokud jsou však neinerciální fáze pohybů zanedbatelně krátké oproti inerciálním, můžeme oprávněně zanedbat i jejich vliv v integrálu (XI.66).

Poněvadž popis z hlediska kterékoliv inerciální soustavy podává úplnou informaci o daném ději, není užití neinerciální soustavy spojené s hodinami B nezbytné. Ovšem i takovýto popis je možný a lze jej podat v rámci teorie neinerciálních systémů. Zpravidla se tak děje v rámci výkladu obecné teorie relativity. Poznamenejme, že v literatuře se často mluví o *paradoxu dvojčat* v souvislosti s představou kosmického letu s návratem, po němž se cestující dvojče bude věkem lišit od dvojčete, jež zůstalo „doma“, tj. v klidu vůči soustavě, která je inerciální. Zde bývá vznášena otázka, zda i biologický čas životních pochodů se nutně řídí vzorcem (XI.57). Je nepochybné, že biologické jevy probíhají v souladu s principy speciální teorie relativity a časová data s nimi spojená musejí podléhat dilataci času. Při posuzování vlivu kosmického letu na lidský organismus by však bylo třeba uvážit i faktory, jimiž se situace kosmonauta nutně liší od situace pozemské (stavy beztlíže či přetížení, úroveň záření apod.) a které mohou mít vliv na biologické pochody.

Jev dilatace času byl vícekrát přímo i nepřímou potvrzen experimenty. O změně frekvence záření atomů s teplotou (tzv. teplotní rudý posuv) jsme se již zmínili. Důležité přímé ověření podali roku 1941 Rossi a Hall pozorováním doby života mionů. Tyto částice (s kladným či záporným nábojem velikosti náboje elektronového a s asi 200krát větší hmotností, než má elektron) vznikají reakcí primárního kosmického záření s horními vrstvami atmosféry ve výši asi 30 km. Později se rozpadají na pozitron a dvě neutrina, přičemž jejich klidová doba života činí průměrně $\Delta\tau = 2,1 \cdot 10^{-6}$ s. Již odtud je zřejmé, že bez dilatace času by se naprostá většina mionů nemohla dostat k zemskému povrchu, ani kdyby se pohybovaly rychlostí světla. Proto už jejich registrace zde je argumentem ve prospěch teorie relativity. Rossi a Hall měřením dob života mionů o různých rychlostech potvrdili vzorec (XI.57) i kvantitativně. Roku 1952 byly provedeny pokusy zjišťující dobu života π mezonů se stejným výsledkem. Vzorec (XI.66) pro neinerciální pohyb byl patrně poprvé prověřen náročným pokusem v oblasti fyziky elementárních částic roku 1966. V roce 1971 byl proveden experiment se dvěma

letadly, která byla vybavena atomovými hodinami a oblétna Zemi v opačných směrech. Po přistání byly údaje obou hodin porovnány s hodinami, které zůstaly v klidu na Zemi. Vzhledem k rotaci Země zde šlo o trojí druh neinerciálního pohybu⁵⁶. Výsledkem experimentu bylo, že rozdíly v údajích hodin (řádově stovky nanosekund) odpovídají předpovědím speciální teorie relativity s přesností asi 15 %. Malou přesnost experimentu lze vysvětlit řadou vedlejších vlivů, které se při něm uplatňují. Obdobný pokus byl proveden ještě roku 1976, kdy byl registrován i vliv, který má na plynutí času výška hodin nad Zemí a který předvídá obecná teorie relativity.

Přejděme nyní k problému srovnávání prostorových vzdáleností v různých inerciálních systémech. Nechť v systému K' leží v klidu ve směru osy X' tyč délky L_0 . Je tedy

$$L_0 = X'_2 - X'_1, \quad (\text{XI.67})$$

kde X'_1, X'_2 jsou souřadnice začátku a konce tyče v K' . Chceme-li určit délku tyče L v systému K , vůči němuž se tyč pohybuje rychlostí V , musíme zaznamenat polohu jejího počátku a konce v témže čase, tj. klást

$$T_1 = T_2. \quad (\text{XI.68})$$

Užijme druhé rovnice Lorentzovy transformace (XI.41). Vzhledem k (XI.68) platí

$$L_0 = X'_2 - X'_1 = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma L. \quad (\text{XI.69})$$

Vlastní délka tyče L_0 v systému, v němž je tyč v klidu, je tedy největší. Mluvíme proto o *kontrakci délky* pohybující se tyče.

Kontrakce délek může vyvolat podobné námitky jako dilatace času. Nechť jsou spuštěny závory, vzdálenost mezi nimi se právě rovná klidové délce vagonu, který pod nimi projíždí ve směru kolmém k závorám. Nechť zadní závora dopadla právě na konec vagonu. Dopadla přední závora před vagon anebo narazila na jeho střechu? Na první pohled se zdá, že užitím vzorce (XI.69) v systému závor Z a v systému vagonu W dospějeme ke dvěma protichůdným výsledkům. V systému Z je vagon kratší než vzdálenost mezi závorami a přední závora dopadne před něj. V systému W je vzdálenost závor menší než délka vagonu a přední závora dopadne na střechu vagonu.

Chybou, která se často vyskytuje i v jiných paradoxech, je zde opomenutí relativní povahy současnosti. Předpokládá-li se, že závory dopadly současně

⁵⁶ V experimentu hraje roli nejen pohyb letadel vůči Zemi, ale i rotace Země, která způsobuje, že systém s ní spojený není inerciální

v systému Z , nemohly dopadnout současně v systému W . Přední zápora dopadla v tomto systému dříve než zadní a mohla tedy dopadnout před vagon bez rozporu s tím, že vagon je delší než vzdálenost mezi záporami.

Kontrakce délek je prokázána řadou nepřímých dokladů, mezi něž patří například zmíněný Michelsonův pokus. Také popsané pozorování dopadu mionů na povrch Země lze v systému spojeném s mionem vysvětlit tak, že doba života mionu zůstala stejná, ale v důsledku kontrakce je menší vzdálenost mezi místem vzniku mionů a Zemí. Přímé ověření vzorce (XI.69) pro rychle se pohybující tělesa nebylo dosud podáno pro technické obtíže, s nimiž by byl takový experiment spojen. Upozorníme v této souvislosti, že například při fotografování rychle se pohybujících těles by vystoupil problém rozdílu mezi jejich skutečným a viditelným tvarem, způsobený tím, že vzhledem ke konečné rychlosti světla nevidíme všechny body obrysu tělesa ve stejném čase. Při posuzování otázky, jak by se pozorovateli jevilo rychle se pohybující těleso, je tedy třeba uvážit nejen relativistickou kontrakci, ale i zmíněný efekt. Na tuto skutečnost upozornil Terrell až roku 1959, ve starší literatuře je opomíjena.

XI.5 Některé kinematické důsledky teorie relativity

Kinematickými nazýváme v teorii relativity ty jevy, které lze odvodit přímo z Lorentzovy transformace, aniž se odvoláváme na změny, kterým teorie relativity podrobila dynamické pojmy hmotnosti, hybnosti, energie, síly aj. Je ovšem třeba mít na paměti, že v důsledku těsné souvislosti mezi prostorem a časem a fyzikálními jevy je v teorii relativity rozdělení na kinematiku a dynamiku mnohem méně striktní než v klasické mechanice. Mezi kinematické jevy se řadí již probraná kontrakce délek a dilatace času. Nyní se seznámíme s dalšími kinematickými jevy.

a) Změna úhlů a objemu pohybujících se těles

Tento jev je přímým důsledkem kontrakce délek. Nechť je těleso v klidu v soustavě K' a přímka v něm vytyčená nechť zde svírá úhel φ_0 se směrem pohybu K' vůči K . Pak z hlediska soustavy K jsou délky v podélném směru zkráceny v souladu s (XI.69), zatímco v příčném směru se nezmění. Příslušný úhel z hlediska soustavy K je tedy určen vztahem

$$\operatorname{tg} \varphi = \gamma \operatorname{tg} \varphi_0 . \quad (\text{XI.70})$$

O směru daném úhlem φ_0 můžeme mluvit jako o klidovém směru.

Analogickou úvahou dostaneme vztah mezi objemem \mathcal{V}_0 v klidové soustavě K' a objemem \mathcal{V} v soustavě K

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_0}{\gamma}. \quad (\text{XI.71})$$

b) Fázová a paprsková rychlost rovinné vlny. Aberace světla

Nechť hřeben rovinné vlny postupuje rychlostí u pod úhlem α k ose X . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že rychlost u leží v rovině XY a že hřeben procházel počátkem v čase $T = 0$. Pak pro postup hřebene, viz obr. 25, platí rovnice

$$Y = -\frac{X}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{uT}{\sin \alpha}. \quad (\text{XI.72})$$

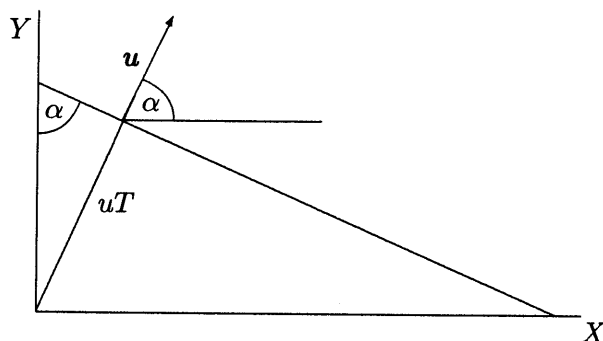
Pohyb hřebene vlny v systému K' najdeme dosazením ze vztahu (XI.42). Dostáváme

$$Y' = -\frac{\gamma}{\sin \alpha} \left[\left(\cos \alpha - \frac{uV}{c^2} \right) X' + (V \cos \alpha - u) T' \right]. \quad (\text{XI.73})$$

Porovnáním (XI.73) a (XI.72) vidíme především, že je

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma \left(\cos \alpha - \frac{uV}{c^2} \right)}. \quad (\text{XI.74})$$

Dále bychom mohli obdržet vztah mezi u a u' .



Obr. 25: Pohyb hřebene rovinné vlny. Hřeben pohybující se rychlostí u je znázorněn z hlediska systému K v čase T .

Nechť se v systému K spolu s hřebenem vlny pohybuje částice ve směru normály k hřebeni, tj. platí $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, kde \mathbf{v} je rychlost částice. Jaký úhel s osou X' bude svírat rychlost částice \mathbf{v}' v systému K' ? Platí

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin \alpha}{\gamma \left(\cos \alpha - \frac{V}{v} \right)}, \quad (\text{XI.75})$$

kde jsme užili vztahů (XI.49) a (XI.50) a toho, že $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, v \sin \alpha)$. Pravé strany (XI.74) a (XI.75) se při $v = u$ obecně liší. To znamená, že shoduje-li se fázová rychlost \mathbf{u} a paprsková rychlost \mathbf{v} v systému K , budou v systému K' rychlosti rozdílné. Avšak v případě, že jde o světelné vlnění, kde $v = u = c$, vztahy (XI.74) a (XI.75) splývají ve vztah

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma \left(\cos \alpha - \frac{V}{c} \right)}, \quad (\text{XI.76})$$

jež popisuje jev *aberrace* světla v rámci speciální teorie relativity. Situaci, kterou jsme se zabývali v souvislosti se vztahem (XI.12), odpovídá $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, takže je

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\gamma V}{c}, \quad \sin \varepsilon = \frac{V}{c}, \quad (\text{XI.77})$$

což v prvním přiblížení splývá s (XI.12).

c) Dopplerův jev

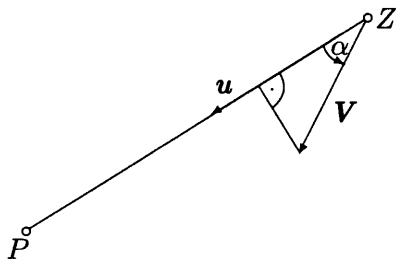
Nechť zdroj periodického signálu o frekvenci ν_z a šířícího se rychlostí u se pohybuje rychlostí V , která svírá úhel α se směrem od zdroje k pozorovateli P , viz obr. 26.

Všechny uvedené veličiny se vztahují ke klidovému systému tohoto pozorovatele (systému K). Za periodu δT urazil první signál dráhu $u \delta T$ směrem k pozorovateli P . Vzdálenost zdroje od pozorovatele se však za tuto dobu zmenšila (popř. zvětšila v případě, že $\alpha > \pi/2$) o $V \delta T \cos \alpha$ (změnu vzdálenosti danou příčným pohybem lze v reálných situacích zanedbat). Pozorovatel P tedy registruje periodu

$$\delta T_p = \frac{u \delta T - V \delta T \cos \alpha}{u} = \delta T \left(1 - \frac{V}{u} \cos \alpha \right) \quad (\text{XI.78})$$

a pro pozorovanou frekvenci ν_p tedy platí

$$\nu_p = \frac{\nu_z}{1 - \frac{V}{u} \cos \alpha}. \quad (\text{XI.79})$$



Obr. 26: Dopplerův jev. Zdroj vlnění Z se pohybuje rychlostí V vzhledem k nehybnému pozorovateli. Rychlost vlnění je u .

Předešlá úvaha platí jak v klasické fyzice, tak i v teorii relativity. Zde je však potřeba dodat, že vzhledem k dilataci času (XI.57) frekvence ν_z souvisí s klidovou frekvencí ν_0 , jak je měřena v systému K' pohybujícím se spolu se zdrojem, vztahem

$$\nu_z = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (\text{XI.80})$$

takže výsledný vzorec pro *Dopplerův jev* je

$$\nu_p = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cos \alpha}{u}}. \quad (\text{XI.81})$$

Nejčastěji se setkáváme se vzorcem (XI.81) v případě světla ve vakuu, kde $u = c$. Pro tento případ si všimněme situace, kdy $\alpha = \pi$, tj. zdroj se vzdaluje od pozorovatele pro kladné V . Pak máme

$$\nu_p = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}, \quad (\text{XI.82})$$

což se liší od klasického vzorce (XI.10).

V případě, že $\alpha = \pi/2$, je podle (XI.79) $\nu_p = \nu_z$. Pozorovaná frekvence se však přesto liší od klidové frekvence zdroje na základě (XI.80). To je *příčný Dopplerův jev*, který není ničím jiným než projevem relativistické dilatace času. Jeho zjištění (poprvé Ives a Stilwell v roce 1941, později další potvrzení s přesností asi 5 % je proto důležitou součástí experimentálního ověření kinematických vztahů speciální teorie relativity.

Nechť je v bodě P registrována monochromatická rovinná vlna o frekvenci ν a nechť se bod Z pohybuje rychlostí V pod úhlem α ke směru postupu vlny. Jaká frekvence ν' v něm bude zjištěna? Každý průchod maxima vlny bodem Z lze ztotožnit s vysláním signálu v předchozí úvaze (nezáleží zřejmě na tom, že Z není původcem signálu). Proto lze užít vzorec (XI.81) a klást v něm $\nu_p = \nu$, $\nu_0 = \nu'$, čímž dostáváme

$$\nu' = \frac{\nu \left(1 - \frac{V}{u} \cos \alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.83})$$

Nejčastěji se tento vzorec užívá pro světlo, kde $u = c$.

Je důležité si uvědomit, že v případě světla (viz (XI.82)) může frekvence v závislosti na volbě vztažného systému (rychlost V) nabývat libovolné hodnoty mezi 0 a ∞ . Mluvíme-li například o červeném světle či Röntgenově záření, mají tato slova jen relativní význam v rámci našeho vztažného systému. Existují systémy, pro než je naše viditelné světlo Röntgenovým zářením či naopak.

d) Rychlost světla v pohybujícím se prostředí

Nechť se látkové prostředí pohybuje vůči systému K rychlostí V , rychlost světla vzhledem k němu nechť je c^* . Pak podle vzorce pro relativistické skládání rychlostí (XI.51) se světlo ve směru pohybu prostředí šíří vůči K rychlostí

$$u = \frac{c^* + V}{1 + \frac{c^*V}{c^2}}. \quad (\text{XI.84})$$

Předpokládejme, že $V \ll c$. Pak v prvním přiblížení dostaneme

$$u = c^* + V \left[1 - \left(\frac{c^*}{c}\right)^2\right]. \quad (\text{XI.85})$$

Nerelativistický fyzik by vyložil vzorec (XI.85) jako klasické složení rychlostí c^* a αV , kde αV by byla efektivní rychlost éteru strhávaného prostředím, tj.

$$\alpha = 1 - \left(\frac{c^*}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (\text{XI.86})$$

by byl strhávací koeficient. Klasický Fizeauův pokus lze chápat jako nejstarší potvrzení relativistického zákona skládání rychlostí.

Poznamenejme, že v rámci speciální teorie relativity lze popsat i šíření světla v pohybujících se disperzních prostředích, kde rychlost c^* závisí na frekvenci. Také zde jsou výsledky teorie relativity v souladu se skutečností, jak experimentálně potvrdil již Zeeman roku 1916.

e) Thomasova precese

V klasické nerelativistické mechanice platí, že roztočíme-li setrvačnick kolem jeho osy, pak tato osa zachovává svůj směr v prostoru i v případě, že těžiště setrvačnicku vykonává působením vnějších sil (s nulovým momentem vzhledem k těžišti) libovolný zrychlený pohyb. Dostáváme tak „setrvačnickový kompas“, jehož chování je matematicky popsáno vztahem

$$\frac{d\mathbf{s}}{dT} = 0, \quad (\text{XI.87})$$

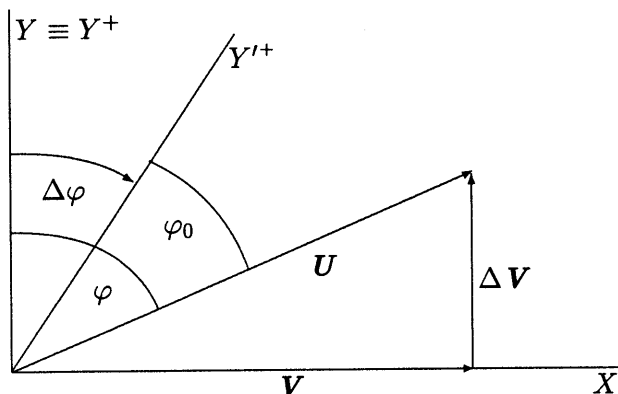
kde za \mathbf{s} bereme vlastní moment hybnosti setrvačnicku.

Zajímáme-li se o chování setrvačnicku podle speciální teorie relativity, musíme upřesnit, co zde rozumíme „stejným směrem“. Podle vztahu (XI.70) se totiž z hlediska systému K směry v tělese uvedeném do pohybu mění i tehdy, když pozorovatel spojený s těžištěm tělesa žádné otočení nezjišťuje. Z hlediska tohoto pozorovatele jsou pro porovnání směrů podstatné klidové směry, které v systému K zjistíme ze vzorce (XI.70). Říkáme-li, že směr nějakého vektoru se při pohybu nezměnil, máme na mysli klidový směr.

Je přirozené přijmout hypotézu, že vztah (XI.87) se přenáší do teorie relativity s tím upřesněním, že platí pro klidový směr v inerciálním systému, v němž je v daném okamžiku v klidu těžiště tělesa (v okamžitě klidovém inerciálním systému). Tato hypotéza se potvrzuje jak hlubším teoretickým rozbohem, tak i experimentem. Protože však okamžitě klidový inerciální systém je při neinerciálním pohybu v různých časech různý, nelze již z (XI.87) vyvodit, že klidový směr \mathbf{s} se zachovává vzhledem k nějakému „pevnému inerciálnímu systému“.

Předpokládejme nyní (bez újmy na obecnosti), že zkoumané těleso má v systému K okamžitou rychlost V ve směru osy X . Okamžitě klidový inerciální systém K' je spojen se systémem K Lorentzovou transformací (XI.41). Uvažme nejprve případ, kdy rychlost V se mění jen co do velikosti. Pak lze s tělesem postupně spojit okamžitě klidové inerciální systémy, jejichž směry os splývají se směry os systému K . Zachovávali-li si vektor \mathbf{s} svůj klidový směr v každém z těchto systémů, zachovávali si jej i v systému K' . Podélné zrychlení tedy nevede ke změně klidového směru osy setrvačnicku.

Uvažme nyní změnu rychlosti v příčném směru. Předpokládejme, že



Obr. 27: Thomasova precese. Rychlost setrvačníku v systému K se změnila z V na U .

rychlost se změnila nespojitě z V na

$$U = V + \Delta V, \quad (\text{XI.88})$$

kde vektor ΔV je kolmý na V . Můžeme předpokládat, že ΔV má směr osy Y . Velikost nové rychlosti tělesa (z hlediska K) je zřejmě

$$U = \sqrt{V^2 + (\Delta V)^2} \quad (\text{XI.89})$$

a její úhel s osou Y splňuje vztah, viz obr. 27,

$$\text{tg } \varphi = \frac{V}{\Delta V}. \quad (\text{XI.90})$$

Přejdeme k okamžitě klidovému inerciálnímu systému tělesa po změně rychlosti, který označíme K'^+ , jeho osy zvolíme tak, aby jejich klidové směry splývaly se směry os K' . Osa Y'^+ je v systému K' kolmá na osu X' a kryje se s osou Y' (pohybuje se v jejím směru). Protože osa Y' je kolmá na X v systému K , musí to platit i pro Y'^+ . Protože se však Y'^+ pohybuje v K rychlostí U , je klidový úhel sklonu dán vztahem (XI.70), tj. s přihlédnutím k (XI.90) platí

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{V}{\Delta V} \sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} = \frac{V}{\Delta V} \sqrt{1 - \frac{V^2 + (\Delta V)^2}{c^2}}. \quad (\text{XI.91})$$

Uvažujme ještě o systému K^+ , který se rovněž pohybuje rychlostí U , ale jehož klidové směry os splývají se směry os systému K . Osa Y^+ má tedy

zřejmě klidový směr kolmý na osu X . Osy Y^+ , Y'^+ svírají klidový úhel $\Delta\varphi$, který vypočteme podle vzorce

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0} \quad (\text{XI.92})$$

dosazením (XI.90) a (XI.91). Naším cílem je přejít k diferenciálnímu vztahu, a proto se omezíme na první přiblížení Taylorova rozvoje pro $\Delta\varphi$ a ΔV . Dostaneme tak

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta V}{V} (\gamma - 1), \quad (\text{XI.93})$$

kde γ je dáno výrazem (XI.46).

Úhel $\Delta\varphi$ udává úhel, o který se vůči K^+ otočil (v rovině XY) systém K'^+ . Podle předchozího výkladu si však vektor \mathbf{s} setrvačnicku zachovává svůj klidový směr v K' . Bude tedy mít stejné komponenty v K'^+ jako měl v K' (protože oba systémy mají stejné klidové směry os). To však znamená, že vůči K^+ a tedy i vůči K se klidový směr vektoru stočil o úhel $\Delta\varphi$.

Uvážíme-li, že $\Delta\varphi$ můžeme znázornit vektorem, který je kolmý na rovinu úhlu a orientovaný ve shodě s orientací úhlu zakreslenou na obr. 27, lze (XI.93) vyjádřit vektorově jako

$$\Delta\varphi = \frac{\mathbf{V} \times \Delta \mathbf{V}}{V^2} (1 - \gamma). \quad (\text{XI.94})$$

Dělíme-li tuto rovnici časovým intervalem ΔT a přejdeme-li v limitě k derivaci, dostáváme, že dochází k stáčení klidového směru vektoru \mathbf{s} úhlovou rychlostí

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\varphi}{dT} = \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{A}}{V^2} (1 - \gamma), \quad (\text{XI.95})$$

kde $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dT}$ je zrychlení setrvačnicku. Zpravidla je rychlost $V \ll c$. Pak lze (XI.95) zjednodušit užitím prvního přiblížení Taylorova rozvoje podle V

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{A}. \quad (\text{XI.96})$$

Jev popsáný vzorcem (XI.95), popř. (XI.96), se nazývá *Thomasova precese*. Jak vidíme, jeho výklad i pochopení je obtížnější než u ostatních kinematických jevů zde diskutovaných, nicméně je to výsledek stejně zásadní povahy. U makroskopických těles je přirozeně efekt popsáný vzorcem (XI.96) zanedbatelný. Uplatňuje se však v atomové fyzice, kde úlohu vektoru \mathbf{s} hraje spin elektronu v atomu. Zde Thomasova precese sehrála významnou roli, poněvadž umožnila mimořádně přesné experimentální ověření dalšího konkrétního závěru speciální teorie relativity.

XI.6 Pohybové rovnice. Energie částice

Nyní přikročíme k budování relativistické dynamiky. Její pojmy a zákony musí splňovat požadavek invariance vůči Lorentzově transformaci, zároveň se však zachovává co nejvíce ze stavby klasické fyziky, pokud je to s relativistickým pojetím slučitelné. Ponechává se pojem částice, která je matematicky popsána jako hmotný bod. V klasické mechanice jsme definovali inerciální systém jako systém, v němž je pro volné částice splněn *princip setrvačnosti*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (\text{XI.97})$$

Ze vztahů (XI.49) a (XI.50) je patrné, že je-li rychlost \mathbf{v} konstantní v jistém inerciálním systému K , je taková i v systému K' spojeném s K Lorentzovou transformací. Vztah (XI.97) vyjadřující 1. Newtonův zákon je tedy vůči Lorentzově transformaci invariantní a hraje v teorii relativity obdobnou roli, jakou měl v Newtonově mechanice — slouží k praktickému určení inerciálního systému.

Dále uvažujme o srážkách částic, tj. o interakcích, které jsou omezeny na tak malou prostorovou a časovou oblast, že lze pominout jejich detaily a omezit se na srovnávání dat pro volné částice před srážkou a po srážce. V klasické mechanice je univerzálním zákonem platným pro srážky zákon zachování hybnosti, který říká, že zůstane zachován vektorový součet hybností částic

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (\text{XI.98})$$

Přitom se pokládá za samozřejmé, že zůstane zachován i součet hmotností

$$M = \sum_i m_i, \quad (\text{XI.99})$$

přičemž hmotnost je takovou charakteristikou částice, která nezávisí na jejím pohybovém stavu. Zákony (XI.98) a (XI.99) stačí v klasické mechanice k vyřešení případu dokonale nepružné srážky dvou částic, tj. srážky, v jejímž důsledku dochází ke spojení částic. Uvažujme zvlášť jednoduchý případ takové srážky, kdy částice mají v jistém inerciálním systému K' před srážkou opačné rychlosti a stejné hmotnosti, takže spojená částice bude po srážce v klidu. Pro rychlosti v'_1, v'_2 před srážkou a v' po srážce lze tedy psát

$$v'_1 = -u, \quad v'_2 = u, \quad v' = 0. \quad (\text{XI.100})$$

Popišme tento děj z hlediska systému K , který je s K' spojen vztahy (XI.42).

Podle (XI.51) budou příslušné rychlosti v K

$$v_1 = \frac{-u + V}{1 - \frac{uV}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{u + V}{1 - \frac{uV}{c^2}}, \quad v = V. \quad (\text{XI.101})$$

Odtud je již jasné, že zákony zachování hybnosti a hmotnosti nemohou být převzaty do teorie relativity bez modifikací. Položíme-li totiž

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (\text{XI.102})$$

dostaneme ve spojení s $m_1 = m_2$, že $v = \frac{(v_1 + v_2)}{2}$, což je ve sporu s (XI.101).

Nejprostší možná korekce je taková, že podržíme definici hybnosti částice

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (\text{XI.103})$$

i zákony zachování hybnosti a hmotnosti, nebudeme však již považovat hmotnost m za veličinu konstantní během pohybu, nýbrž připustíme její závislost na rychlosti $m = m(v)$. Pak ovšem již nelze v systému K klást $m_1 = m_2$. Z rovnice (XI.102) vypočteme užitím (XI.101) poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V - v_2}{v_1 - V} = \frac{1 - \frac{uV}{c^2}}{1 + \frac{uV}{c^2}}. \quad (\text{XI.104})$$

Nyní uijeme transformační vztah pro Lorentzův faktor

$$\gamma_v = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}, \quad (\text{XI.105})$$

platí vztah

$$\gamma_v = \gamma'_v \gamma \left(1 + \frac{v_x V}{c^2} \right), \quad (\text{XI.106})$$

jak lze prověřit přímým výpočtem. Máme $\gamma'_{v_1} = \gamma'_{v_2}$, $v'_{1x} = -u$, $v'_{2x} = u$ a tedy

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.107})$$

Pro $v_1 = 0$ musí být m_1 rovno své klidové hodnotě, kterou nyní označíme m_0 . Pro hmotnost druhé částice tedy platí

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{XI.108})$$

kde jsme vynechali index částice, protože tento vztah musí být za našich předpokladů univerzálně platným vztahem pro závislost hmotnosti na rychlosti. Hmotnost tedy v teorii relativity s rychlostí roste, přičemž pro $v \rightarrow c$ je $m \rightarrow \infty$. Hybnost částice můžeme nyní napsat jako

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.109})$$

Opět platí, že pro $v \rightarrow c$ velikost hybnosti roste nade všechny meze.

Porovnejme ještě klidovou hmotnost M_0 částice vzniklé srážkou se součtem klidových hmotností před srážkou. Podle předchozího výkladu

$$M_0 = m_1 + m_2 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{XI.110})$$

tedy pro klidové hmotnosti zákon zachování neplatí. Tento výsledek je z hlediska klasické fyziky zcela nový a neočekávaný.

Dalším krokem k budování relativistické dynamiky je formulování pohybových rovnic. V klasické mechanice vyjadřuje tyto rovnice 2. Newtonův zákon

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \quad (\text{XI.111})$$

Působení pole na částici budeme i v teorii relativity popisovat pomocí síly. Připomeňme si však, že kromě (XI.111) existuje v klasické mechanice ještě zápis pohybových rovnic

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dT} \quad (\text{XI.112})$$

odpovídající Newtonově formulaci, že síla je rovna časové změně hybnosti. V klasické mechanice jsou oba zápisy ekvivalentní, v teorii relativity se však v důsledku vztahů (XI.103) a (XI.108) budou lišit. Je proto třeba se rozhodnout pro jeden z nich, tj. vlastně zavést pojem síly v rámci teorie relativity. Přednost je třeba dát vyjádření, které vede k jednodušší formulaci zákonů dynamiky. Z dalšího výkladu vyplyne, že je to vyjádření (XI.112).

Uvažujme nyní o zavedení pojmu energie do teorie relativity. V klasické mechanice platí pro přírůstek kinetické energie částice pod vlivem síly vztah

$$\frac{dE_k}{dT} = \mathbf{F}\mathbf{v} . \quad (\text{XI.113})$$

Budeme předpokládat, že tímto vztahem je určen přírůstek kinetické energie i v teorii relativity. Pak užitím (XI.112) a (XI.109) získáme

$$dE_k = \mathbf{v}d\mathbf{p} = m_0 \frac{\mathbf{v}d\mathbf{v}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3} \quad (\text{XI.114})$$

a po integraci

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + b . \quad (\text{XI.115})$$

Integrační konstantu b zvolíme tak, aby pro $v = 0$ platilo $E_k = 0$. Tím dostáváme

$$E_k = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots . \quad (\text{XI.116})$$

Jak je vidět, v prvním přiblížení pro malé v/c splývá relativistický výraz pro kinetickou energii s výrazem klasickým, avšak pro $v \rightarrow c$ roste kinetická energie nade všechny meze.

Vraťme se nyní ke vzorci (XI.110). Pro rozdíl klidových hmotností M_0 a $2m_0$ lze psát

$$M_0 - 2m_0 = 2m_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = \frac{E_k}{c^2} , \quad (\text{XI.117})$$

kde E_k byla kinetická energie částic před srážkou. Po srážce se tato kinetická energie zřejmě „proměnila“ ve vnitřní energii spojené částice. Ze vzorce (XI.117) vidíme, že to bylo spojeno se vzrůstem klidové hmotnosti

částice, který je úměrný této energii. Můžeme předpokládat, že je to projevem univerzálního zákona a že klidová hmotnost a vnitřní klidová energie jsou spojeny vztahem

$$E_0 = m_0 c^2 . \quad (\text{XI.118})$$

Celková energie částice je tedy

$$E = E_0 + E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 . \quad (\text{XI.119})$$

Tento vztah vyjadřuje, v běžné terminologii, *zákon ekvivalence hmotnosti a energie*.

Užitím (XI.109) a (XI.119) se snadno ověří, že energie a hybnost částice jsou v teorii relativity spojeny vztahem

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} . \quad (\text{XI.120})$$

Kromě toho existuje ještě velmi hluboká souvislost mezi energií a hybností, která se odhalí zkoumáním jejich transformačních zákonů. Pro stručnost budeme opět užívat Lorentzových faktorů γ a γ_v , tj. (XI.46) a (XI.105). Bude tedy

$$p'_x = \gamma'_v m_0 v'_x = \gamma \left(p_x - \frac{V E}{c^2} \right) . \quad (\text{XI.121})$$

Obdobně dostaneme

$$p'_y = p_y , \quad p'_z = p_z , \quad E' = \gamma (E - V p_x) . \quad (\text{XI.122})$$

Porovnáním s (XI.41) vidíme, že veličiny E/c^2 , p_x , p_y , p_z se při Lorentzově transformaci chovají obdobně jako soubor prostoročasových souřadnic T, X, Y, Z . Význam této formální symetrie rozebereme podrobněji později. Poznamenejme, že z transformačních vztahů (XI.121) a (XI.122) je patrné, že zachovávali se hybnost a energie částice v inerciálním systému K , zachovávala se také v systému K' spojeném s ním Lorentzovou transformací. Pro úhrnnou hybnost a energii souboru volných částic platí opět transformační vztahy (XI.121) a (XI.122), jak se přesvědčíme sečtením vztahů pro jednotlivé částice souboru. Proto také zákony zachování pro úhrnnou hybnost a energii systému budou invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Vraťme se nakonec k pohybovým rovnicím (XI.112) a odvodme transformační zákon pro sílu. Lze psát

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dT} \frac{dT}{dT'} . \quad (\text{XI.123})$$

Dále uijeme (XI.121), (XI.48) a vztahu

$$\frac{dE}{dT} = \mathbf{F}\mathbf{v} , \quad (\text{XI.124})$$

který plyne z (XI.113) vzhledem k tomu, že E_0 je konstanta. Po krátkém výpočtu obdržíme

$$F'_x = F_x - \frac{V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \frac{v_y F_y + v_z F_z}{c^2} ,$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} , \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} . \quad (\text{XI.125})$$

Na základě (XI.103) lze pohybovým rovnicím dát tvar

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dT} = \mathbf{F} - \frac{dm}{dT} \mathbf{v} \quad (\text{XI.126})$$

a protože podle (XI.119) a (XI.124)

$$\frac{dm}{dT} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dT} = \frac{1}{c^2} \mathbf{F}\mathbf{v} , \quad (\text{XI.127})$$

dostáváme

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (\text{XI.128})$$

pro zápis pohybových rovnic vyjadřující explicitně vztah mezi silou, rychlostí a zrychlením. Porovnáním s (XI.111) vidíme, že pohybové rovnice se staly oproti případu klasické mechaniky složitějšími. Zrychlení nyní již nemá obecně směr působící síly. V okamžitě klidové soustavě dané částice, kde $\mathbf{v} = 0$, však platí

$$m_0 \mathbf{a}_0 = \mathbf{F}_0 , \quad (\text{XI.129})$$

tj. vztah (XI.111) klasické mechaniky zde zůstává v platnosti. Dovedeme-li určit sílu v klidové soustavě, můžeme najít její obecné vyjádření podle transformačních vztahů (XI.125).

Jak je z našeho přehledu základních vztahů relativistické dynamiky zřejmé, uplatňuje se všude tam, kde částice či tělesa nabývají relativních rychlostí srovnatelných s rychlostí světla. Rychlosti makroskopických těles

vyrobených člověkem za současného stavu techniky tento předpoklad nesplňují, a proto při studiu jejich pohybů vystačíme s newtonovskou mechanikou. Avšak v mikrofyzičce a v jejích technických aplikacích jsou rychlosti srovnatelné s rychlostí světla zcela běžné. Pozorování pohybů a srážek částic mikrosvětla nezanechává žádné pochybnosti o tom, že relativistická dynamika je zde nesrovnatelně lepším přiblížením k realitě nežli dynamika newtonovská. Používání relativistických vztahů pro hmotnost, hybnost a energii částic je samozřejmým předpokladem pro technické aplikace i další výzkumy v oblasti mikrosvětla.

XI.7 Aplikace pohybových rovnic

a) Rovnoměrně zrychlený pohyb

Nejprostším příkladem pohybu působením síly je případ, kdy síla má směr pohybu částice, přičemž v okamžitě klidovém systému částice je velikost této síly v kterémkoliv čase stejná. Podle (XI.129) zůstává pak konstantní i zrychlení vzhledem k okamžitě klidové soustavě, které je pro pozorovatele spojeného s částicí mírou neinerciálnosti jeho pohybu. Daný pohyb můžeme proto nazvat rovnoměrně zrychleným pohybem ve speciální teorii relativity (třebaže zrychlení vzhledem k pevnému inerciálnímu systému při něm konstantní není).

Volme počáteční podmínky tak, že v čase $T = 0$ je částice v bodě $X = 0$ s nulovou rychlostí a síla má směr osy X , tj. $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$. Transformační vztah (XI.125) dává, že tato síla je i během pohybu rovna síle v okamžitě klidovém systému. Zůstává proto během pohybu konstantní a na základě (XI.112) nebo (XI.128) můžeme psát

$$\frac{d}{dT} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = g, \quad (\text{XI.130})$$

kde $g = F/m_0$ je klidové zrychlení. První integrací (XI.130) dostaneme

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = gT \quad (\text{XI.131})$$

neboli

$$v = \frac{dX}{dT} = \frac{gT}{\sqrt{1 + \frac{g^2 T^2}{c^2}}}. \quad (\text{XI.132})$$

Další integrace při zadaných počátečních podmínkách dává

$$X = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{gT}{c}\right)^2} - 1 \right]. \quad (\text{XI.133})$$

Je-li $(gT)^2 \ll c^2$, získáme odtud v první aproximaci známý vzorec

$$X = \frac{1}{2}gT^2. \quad (\text{XI.134})$$

Avšak pro $T \rightarrow \infty$ z (XI.132) plyne, že $v \rightarrow c$. Na rozdíl od klasické mechaniky, kde by rychlost částice rostla nade všechny meze, se její rychlost v teorii relativity asymptoticky blíží rychlosti světla. Tato skutečnost je projevem obecné zákonitosti. Podle (XI.112) a (XI.124) může síla konečné velikosti dodat částici za konečnou dobu pouze konečnou energii a hybnost. To ovšem podle předchozího výkladu znamená, že částice nemůže dosáhnout rychlosti světla.

Řešení (XI.133) můžeme zapsat ve tvaru

$$\left(X + \frac{c^2}{g}\right)^2 - c^2T^2 = \frac{c^4}{g^2}, \quad (\text{XI.135})$$

z čehož vidíme, že grafem studovaného pohybu v rovině X, T je hyperbola na rozdíl od klasické paraboly (XI.134). Mluví se také proto o hyperbolickém pohybu. Tento pohyb bývá často diskutován v souvislosti s posuzováním možností kosmických letů mimo hranice Sluneční soustavy.

b) Pohyb v homogenním magnetickém poli

Z teorie elektromagnetického pole je známé, že v magnetickém poli o indukci \mathbf{B} působí na částici s elektrickým nábojem e síla

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{XI.136})$$

Později ukážeme, že tento vztah zůstává v platnosti i v teorii relativity, zatím to budeme předpokládat. Budeme se zabývat případem, kdy magnetické pole je homogenní, časově neproměnné, a má směr osy Z . Omezíme se na pohyb v rovině X, Y . Pro tento pohyb podle (XI.112) dostaneme

$$\frac{dp_x}{dT} = ev_y B, \quad \frac{dp_y}{dT} = -ev_x B. \quad (\text{XI.137})$$

Rovnice (XI.137) platí i v nerelativistické fyzice, kde ovšem $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$. V tomto případě lze soustavu snadno vyřešit a dospějeme k závěru, že částice se pohybuje po kružnici úhlovou rychlostí

$$\omega_0 = \frac{eB}{m_0}. \quad (\text{XI.138})$$

V teorii relativity, kde $\mathbf{p} = m_0 \gamma \mathbf{v}$, postupujeme takto: Vynásobíme první rovnici soustavy (XI.137) v_x , druhou rovnici v_y a sečteme. Dostaneme tak

$$\frac{dp_x}{dT} v_x + \frac{dp_y}{dT} v_y = \frac{d}{dT} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad (\text{XI.139})$$

neboli

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 = \text{konst.} \quad (\text{XI.140})$$

To je vlastně zákon zachování energie, který jsme mohli obdržet také přímo z (XI.124) vzhledem k tomu, že platí $\mathbf{Fv} = 0$, tj. síla (XI.136) nekoná práci. Na základě (XI.140) je ve vztahu $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ hmotnost konstantní a (XI.137) se formálně neliší od nerelativistického případu, nahradíme-li klidovou hmotnost m_0 relativistickou hmotností $m = \gamma m_0$. Pohyb se tedy opět děje po kružnici, úhlová rychlost však je

$$\omega = \frac{eB}{m} = \frac{eB \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0}, \quad (\text{XI.141})$$

tj. zmenšuje se s rostoucí rychlostí částice na kruhové dráze. Postupná rychlost má pro poloměr kružnice R hodnotu $v = \omega R$, odtud vypočteme

$$v = \frac{\omega_0 R}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 R}{c}\right)^2}}, \quad (\text{XI.142})$$

kde ω_0 je klasická frekvence daná (XI.138). Pro $R \rightarrow \infty$ platí, že $v \rightarrow c$, tj. rychlost částice opět nemůže dosáhnout rychlosti světla. Lze také psát po rozřešení (XI.142) vzhledem k R a užití (XI.138)

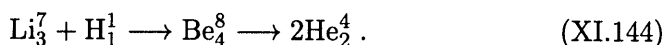
$$R = \frac{p_0}{eB}, \quad (\text{XI.143})$$

kde p_0 je konstantní hodnota hybnosti částice daná počátečními podmínkami. Vztah (XI.143) umožňuje určit p_0 na základě změřených B a R . Zjišťováním energetických ztrát při brzdění částice je pak možno určit i její klidovou hmotnost. Pohyb nabitých částic v magnetickém poli má i řadu dalších vědeckých a technických aplikací.

XI.8 Zákon ekvivalence hmotnosti a energie

Zákon (XI.119) o vzájemné souvislosti hmotnosti a energie patří nepochybně k nejzávažnějším objevům teorie relativity a má řadu pozoruhodných aspektů od mimořádného významu pro moderní energetiku až po souvislost se základními otázkami filozofickými. Budeme se mu proto věnovat podrobněji. Uveďme nejprve několik konkrétních případů aplikace tohoto zákona.

a) První experimentální ověření podali Cockcroft a Walton roku 1932. Jestli dopadne na jádro lithia proton o dostatečně vysoké energii, vznikne nestabilní jádro berylia, které se rozpadá na dvě částice α , tj. dochází k procesu



Velikost klidových hmotností jednotlivých složek reakce je možno určit metodou zmíněnou v závěru předešlého odstavce. Ukazuje se, že rozdíl klidových hmotností před procesem a po procesu, tzv. hmotnostní defekt, je

$$\Delta m_0 = 0,309 \cdot 10^{-28} \text{ kg}. \quad (\text{XI.145})$$

Tomu odpovídá energie

$$\Delta E = 27,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (\text{XI.146})$$

Tato energie musí být rovna rozdílu kinetické energie částic α po reakci a protonu před reakcí. I tyto veličiny lze změřit a výsledek přesně souhlasí s předpovědí teorie relativity.

b) Je-li jádro uranu U_{92}^{235} zasáženo neutronem o dostatečné energii, dojde k jeho rozštěpení na dvě jádra patřící prvkům ze střední části periodické soustavy. Přitom se v průměru uvolní 2–3 neutrony, které mohou rozbít další uranová jádra, takže dojde k řetězové reakci. Tato reakce může vést ke katastrofální explozi (atomová bomba), nebo může být regulována a stát se zdrojem užitečné energie v jaderných reaktorech. Vazebná energie (tj.

energie, kterou je třeba dodat pro rozložení jádra na jednotlivé komponenty) činí pro prvky ze střední části periodické soustavy asi 8,5 MeV na jednu částici jádra, kdežto pro uran je analogická veličina 7,5 MeV. Při popsané jaderné přeměně se tedy uvolní energie

$$\Delta E = (8,5 - 7,5) \cdot 235 \text{ MeV} = 3,8 \cdot 10^{-11} \text{ J} . \quad (\text{XI.147})$$

V jaderných reaktorech se naprostá většina této veličiny získá ve formě tepla. Pro 1 kg uranu to činí

$$\Delta Q = 9,6 \cdot 10^7 \text{ J} , \quad (\text{XI.148})$$

což představuje energii získanou spálením asi $3 \cdot 10^6$ kg uhlí.

c) Za jistých podmínek — především za vysoké teploty — se lehká jádra slučují v jádra těžších prvků. Tyto reakce mají velký význam v kosmologii a v astrofyzice. Vděčíme jim i za energii, kterou nám trvale poskytuje Slunce. Lidstvo dovede zatím energii tohoto původu získávat, bohužel, pouze ve vodíkových bombách, avšak ovládnutí řízené termonukleární reakce je jednou z největších nadějí pro energetiku budoucnosti. Jako reprezentativní příklad uveďme slučování jader deuteria a tritia na helium podle vzorce



V tomto případě je hmotnostní defekt roven $3,0 \cdot 10^{-29}$ kg čili uvolněná energie činí $2,7 \cdot 10^{-12}$ J. Pro 1 kg směsi deuteria a tritia činí získaná energie

$$Q = 3,1 \cdot 10^8 \text{ J} , \quad (\text{XI.150})$$

tj. je asi 3krát větší než v předchozím případě.

Uvedené příklady ukazují, že je možné čerpat z malého množství látky obrovská množství energie (ve srovnání s tím, co se zdálo možné v před-relativistické fyzice). Již 1 gram látky je ekvivalentní energii $9 \cdot 10^{13}$ J. Je ovšem třeba si uvědomit (což se při populárních výkladech často přehlídí), že tato energie má pro nás praktický význam jen natolik, nakolik je možné ji uvolnit, tj. převést ve využitelnou formu kinetické energie. To však z teorie relativity bezprostředně neplyne. Víme z ní pouze, že je-li energie uvolněna, je toto uvolnění provázeno odpovídajícím poklesem součtu klidových hmotností — a naopak je-li možný přechod mezi stavy s různými součty klidových hmotností, uvolní se přitom odpovídající množství energie.

Jaké přeměny mohou skutečně nastat, je nutné studovat v rámci kvantové teorie stavby mikrosvěta. Platí zde speciální zákony zachování, které

musí být splněny při reakcích a které vylučují řadu procesů, jež by byly energeticky výhodné. Existuje ovšem proces, který umožňuje přeměnit veškerou hmotnost částice a antičástice v energii elektromagnetického pole (tj. fotonů, jejichž klidová hmotnost je nulová)⁵⁷. Vzhledem k nesymetrii výskytu částic a antičástic v nám známé části vesmíru může však dnes tento proces anihilace podstoupit jen nepatrná část látky.

Při fyzikálních a chemických dějích, které ponechávají nedotčenu stavbu atomových jader, jsou uvolněné energie natolik malé, že jim odpovídající změny klidových hmotností lze zcela zanedbat. Tak například zahřátí 1 kg vody z 0°C na 100°C zvýší její hmotnost jen o 5.10^{-12} kg. Sloučením 1 kg směsi kyslíku a vodíku na vodu poklesne hmotnost látky o 10^{-32} kg. Nelze se proto divit, že v rámci newtonovské fyziky mohly být formulovány a v rámci dostupné přesnosti i ověřeny dva nezávislé zákony zachování — zákon zachování energie a zákon zachování hmotnosti. Teprve teorie relativity spojila tyto dva zákony v jediný univerzální zákon — *zákon zachování hmotnosti–energie*, platný pro všechny formy hmoty a pro všechny přírodní procesy.

XI.9 Příklady

1. Odvod'te relativistický zákon skládání rychlostí pro obecný případ libovolné vzájemné orientace skládaných rychlostí.

Řešení: Nejprve napíšme Lorentzovu transformaci pro případ obecné orientace os inerciálních systémů K a K' , a v čase $T = T' = 0$ jejich počátky spolu splývají. Relativní rychlost K' vůči K budiž $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Průvodič \mathbf{r} rozložíme na část rovnoběžnou s rychlostí \mathbf{V}

$$\left(\mathbf{r} \frac{\mathbf{V}}{V}\right) \frac{V}{V} \quad (\text{XI.151})$$

a na část k rychlosti \mathbf{V} kolmou

$$\mathbf{r} - \left(\mathbf{r} \frac{\mathbf{V}}{V}\right) \frac{V}{V}. \quad (\text{XI.152})$$

⁵⁷ Zánik nebo úbytek klidové hmotnosti při fyzikálních procesech budil v minulosti pozornost filozofů hlásících se k materialismu. Bylo proto zdůrazňováno, že celková hmotnost ekvivalentní energii se nemění. Ve skutečnosti ovšem jde o fyzikální veličiny, jejichž chování nemá žádné bezprostřední filozofické důsledky. Někteří fyzikové míní slovem „hmotnost“ pouze hmotnost klidovou a v rámci této terminologie mohou mluvit například o přeměně hmotnosti částic v energii pole.

Veličina (XI.151) se transformuje jako souřadnice X při speciální Lorentzově transformaci, veličina (XI.152) se transformuje jako Y či Z , tedy

$$\mathbf{r} \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{\mathbf{r}' \frac{\mathbf{V}}{V} + VT'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (\text{XI.153})$$

$$\mathbf{r} - \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} = \mathbf{r}' - \left(\frac{\mathbf{r}'\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V}, \quad (\text{XI.154})$$

$$T = \frac{T' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{r}'\mathbf{V})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (\text{XI.155})$$

Z rovnic (XI.153) a (XI.154) obdržíme řešení první části úkolu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \left(\frac{\mathbf{r}'\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} + \frac{\left(\frac{\mathbf{r}'\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V} + VT'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (\text{XI.156})$$

Diferencováním formulí (XI.156) a (XI.155) dostaneme

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}' - \frac{\mathbf{V}}{V^2} (\mathbf{V}d\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{V}}{V^2} (\mathbf{V}d\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{V}dT'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (\text{XI.157})$$

$$dT = \frac{dT' + \frac{\mathbf{V}d\mathbf{r}'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (\text{XI.158})$$

Odtud konečně obdržíme, že

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{V} + \mathbf{u}'\sqrt{1-\beta^2} + \frac{(\mathbf{V}\mathbf{u}')}{V^2} \mathbf{V} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right] \left(1 + \frac{\mathbf{V}\mathbf{u}'}{c^2} \right)^{-1},$$

kde $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ a $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$ jsou rychlosti částice v K a K' . Povýšíme-li obě strany předchozího transformačního vztahu na kvadrát, získáme pro absolutní hodnotu rychlosti výraz

$$u = \frac{\sqrt{(\mathbf{u}' + \mathbf{V})^2 - \frac{(\mathbf{u}' \times \mathbf{V})^2}{c^2}}}{1 + \frac{\mathbf{u}'\mathbf{V}}{c^2}}. \quad (\text{XI.159})$$

2. Určete trajektorii pohybu nabitě relativistické částice v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} kolmém na počáteční rychlost částice, kde kromě Lorentzovy síly působí na částici vazká síla $\mathbf{F} = -\eta\mathbf{u}$.

Řešení: Osu Z orientujeme ve směru magnetického pole \mathbf{B} . Pohyb částice se děje v rovině $Z = \text{konst.}$ Pohybové rovnice mají tvar

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{m_0 \dot{X}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = eB\dot{Y} - \eta\dot{X}, \quad (\text{XI.160})$$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{m_0 \dot{Y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = eB\dot{X} - \eta\dot{Y}. \quad (\text{XI.161})$$

Odtud obdržíme

$$\frac{m_0 \dot{X}}{\sqrt{1-\beta^2}} = eBY - \eta X, \quad (\text{XI.162})$$

$$\frac{m_0 \dot{Y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = eBX - \eta Y, \quad (\text{XI.163})$$

takže

$$eB(X\dot{X} + Y\dot{Y}) = \eta(X\dot{Y} - Y\dot{X}). \quad (\text{XI.164})$$

Přepíšeme vztah (XI.164) do polárních souřadnic (r, φ) . Je

$$X\dot{X} + Y\dot{Y} = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = r\dot{r}, \quad (\text{XI.165})$$

$$X\dot{Y} - Y\dot{X} = |\mathbf{r} \times \mathbf{u}| = r^2 \dot{\varphi}, \quad (\text{XI.166})$$

takže

$$eB\dot{r} = \eta r \varphi. \quad (\text{XI.167})$$

Integrací odtud dostáváme hledanou rovnici trajektorie.

Příklady k samostatnému řešení

1. Částice s klidovou hmotností m_0 se pohybuje rychlostí $4/5c$ a dojde k nepružné srážce s klidovou částicí o stejné hmotnosti.

a) Čemu je rovna rychlost vzniklé částice?

b) Čemu je rovna její klidová hmotnost?

$$\left[u = \frac{c}{2}; M_0 = \frac{4m_0}{\sqrt{3}} \right].$$

2. Částice o klidové hmotnosti m_0 se pohybuje podél osy X tak, že platí $X = \sqrt{b^2 + c^2 T} - b$, kde b je konstanta. Čemu je rovna síla, která takovýto pohyb vyvolala?

$$\left[F = \frac{m_0 c^2}{b}, \text{ síla je konstantní} \right].$$

3. Částice o hmotnosti M se rozpadla na dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 . Najděte energii rozpadnuvších se částic v těžišťové soustavě.

$$\left[E_1 = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, E_2 = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \right].$$

4. Vypočtete rychlost u a kinetickou energii E_k elektronu, který vletěl kolmo do homogenního magnetického pole $B = 0,084 \text{ V} \cdot \text{s/m}^2$ a opsal kružnici o poloměru $r = 0,03 \text{ m}$ ($e/m_0 = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$).

$$\left[u = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{eBr}\right)^2 + 1}}, E_k = 4 \text{ MeV} \right].$$

5. Klidný π -mezon, $m_{0(\pi)} = 273m_{0(e)}$, se rozpadá na neutrino, $m_{0(\nu)} = 0$, a mion, $m_{0(\mu)} = 207m_{0(e)}$. Vypočtete v MeV kinetickou energii i hybnost mionu a neutrina.

$$\left[p_{(\mu)} = 29,8 \text{ MeV}, E_{k(\mu)} = 4,1 \text{ MeV}, |p_{(\nu)}| = |p_{(\mu)}|, E_{k(\nu)} = c|p_{(\nu)}| \right].$$

XII SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY V MINKOWSKIHO PROSTOROČASE

Vyšším poschodím speciální teorie relativity je její *čtyřrozměrná formulace*, dovršená Minkowskim roku 1910. Klíčovým pojmem pro toto vyjádření je pojem *intervalu* mezi *událostmi* v *prostoročase*.

Zabýváme se Minkowskiho čtyřrozměrnou geometrií a jejími grupami symetrie — *Lorentzovou grupou* a *Poincarého grupou*. Získaných poznatků využíváme k čtyřrozměrné formulaci *relativistické mechaniky částic*.

Poté studujeme vektorová a tenzorová pole v relativistickém prostoročase z hlediska diferenciálního a integrálního počtu. Otvíráme si tak cestu k vyjádření základních pojmů a zákonů *relativistické mechaniky kontinua*. Jejím ústředním pojmem je *tenzor energie a hybnosti*. Vysvětlujeme význam jeho komponent a souvislost se zákony zachování, jejichž čtyřrozměrný tvar uvádíme. Nakonec probíráme relativistický *variální princip* pro pohyb nabitých částic ve vnějším elektromagnetickém poli.

XII.1 Interval

Utvořme výraz

$$s^2 = c^2 T^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2) \quad (\text{XII.1})$$

a napíšeme jej podle (XI.42) pomocí veličin X' , Y' , Z' , T' . Dostáváme postupně

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2 \gamma^2 \left(T' + \frac{V}{c^2} X' \right)^2 - \gamma^2 (X' + VT')^2 - (Y'^2 + Z'^2) = \\ &= \gamma^2 \left[\left(cT' + \frac{V}{c} X' \right)^2 - (X' + VT')^2 \right] - (Y'^2 + Z'^2) = \\ &= \gamma^2 \left[T'^2 (c^2 - V^2) - X'^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] - (Y'^2 + Z'^2) = \\ &= c^2 T'^2 - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2), \end{aligned} \quad (\text{XII.2})$$

tj. veličina s^2 se vyjádří stejným způsobem pomocí prostoročasových souřadnic systému K i K' , jinými slovy je invariantní vůči Lorentzově transformaci. Dá se proto očekávat, že tato veličina bude mít hlubší význam. Abychom tento význam určili, povšimněme si, že (XII.1) lze nyní zapsat jako

$$s^2 = c^2 T^2 - L^2, \quad (\text{XII.3})$$

kde L je vzdálenost od počátku vyjádřená v kartézských souřadnicích 3-rozměrného euklidovského prostoru. Tato vzdálenost je invariantní vůči otočení kartézského souřadnicového systému vzhledem k počátku. Ve vzorci (XII.3) je kvadrát prostorové vzdálenosti L spojen s kvadrátem časové vzdálenosti T od počátku. Ani veličina L ani veličina T není sama o sobě neměnná při Lorentzově transformaci, avšak veličina s^2 z nich složená ano. To napovídá, že bychom mohli s považovat za zobecnění vzdálenosti od počátku pro případ 4-rozměrného prostoročasu a Lorentzovu transformaci za 4-rozměrnou obdobu otočení kartézského systému souřadnic.

Vůči otočení kartézského systému v 3-rozměrném prostoru je invariantní nejen vzdálenost od počátku, ale i vzdálenost mezi libovolnými dvěma body

$$\Delta L^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2, \quad (\text{XII.4})$$

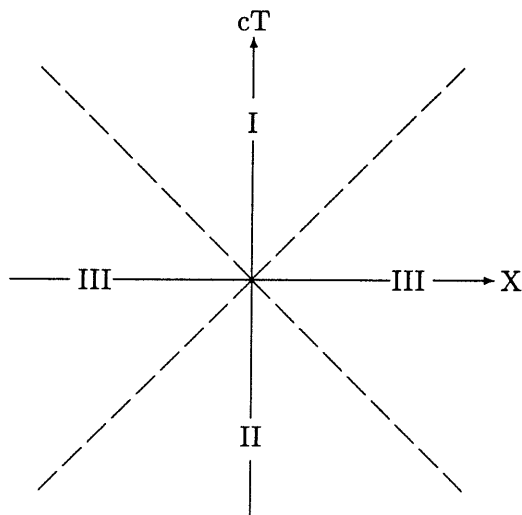
kde $\Delta X = X_2 - X_1$ a podobně pro ΔY , ΔZ . Snadno se přesvědčíme, že obdobnou vlastnost vůči Lorentzově transformaci má „vzdálenost“ mezi událostmi, definovaná nyní vztahem

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta T^2 - (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2) = c^2 \Delta T^2 - \Delta L^2. \quad (\text{XII.5})$$

Veličinu Δs budeme v dalším výkladu nazývat *intervalem* mezi událostmi o prostoročasových souřadnicích X_1, Y_1, Z_1, T_1 a X_2, Y_2, Z_2, T_2 ve čtyřrozměrném prostoročase.

Kromě toho, že je definován na prostoru odlišné dimenze, se interval Δs liší od euklidovské vzdálenosti L (XII.4) ještě jinak. Zatímco vzdálenost mezi dvěma různými body a tedy i její kvadrát ΔL^2 je vždy kladné číslo, veličina Δs^2 může zřejmě v závislosti na volbě událostí nabývat kladné, nulové i záporné hodnoty. To znamená, že geometrie prostoročasu s intervalem vyjádřeným vztahem (XII.5) není geometrií euklidovskou. Nazýváme ji *pseudoeuklidovskou geometrií Minkowského* a o prostoročase s intervalem (XII.5) mluvíme jako o *prostoru Minkowského*.

Pro pochopení základních vlastností této geometrie se stačí omezit na události probíhající v libovolném čase T na ose X , tj. na dvojrozměrný



Obr. 28: Minkowskioho diagram. Obrázek zachycuje světelný kužel (přerušované čáry) oddělující budoucnost (I), minulost (II) a kvazisisoučasnost (III) vzhledem k počáteční události.

prostor ve 4-rozměrném prostoru. Tento prostor můžeme zobrazit do euklidovské roviny s kartézskými osami, na nichž vynášíme souřadnice X a cT , viz obr. 28. Tomuto znázornění se říká *Minkowskioho diagram*.

V Minkowskioho diagramu mají důležitou úlohu dvě přímky $X = cT$ a $X = -cT$, které půlí jeho kvadranty. Z fyzikálního hlediska odpovídají tyto přímky paprskům světla šířícím se v kladném a záporném směru osy X tak, že v čase $T = 0$ procházejí počátkem zvoleného systému. Tyto přímky rozdělují Minkowskioho rovinu na tři oblasti

$$\begin{aligned}
 \text{I. } & s^2 = c^2T^2 - X^2 \geq 0, \quad T > 0, \\
 \text{II. } & s^2 = c^2T^2 - X^2 \geq 0, \quad T < 0, \\
 \text{III. } & s^2 = c^2T^2 - X^2 < 0.
 \end{aligned}
 \tag{XII.6}$$

Počátek můžeme považovat za společný bod oblastí I a II. Hranice oblastí se vyznačují tím, že je na nich

$$s = 0. \tag{XII.7}$$

Tato podmínka je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci a odtud je patrné, že rozdělení do oblastí (XII.6) zůstává v platnosti i při volbě jiných souřadnic X', T' spojených s X, T Lorentzovou transformací.

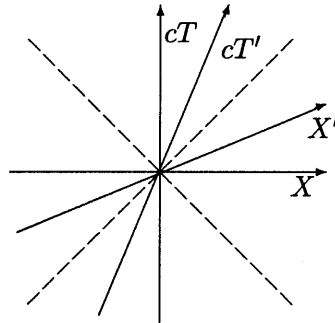
Zakresleme do Minkowského diagramu osy X' , cT' systému K' , který se pohybuje vůči systému K rychlostí V ve směru osy X . Osa X' je zadána rovnicí $cT' = 0$, tj. podle (XI.41)

$$cT = \frac{V}{c} X, \quad (\text{XII.8})$$

a osa cT' má rovnici $X' = 0$, tj.

$$cT = \frac{c}{V} X. \quad (\text{XII.9})$$

Součin směrnic obou přímk je roven jedné a tudíž osy cT' a X' svírají stejné úhly s přímkami $X = \pm cT$ půlícími kvadranty. Protože podle předpokladu $V < c$, leží osa X' vždy v oblasti III, zatímco osa cT' prochází oblastí II a oblastí I, viz obr. 29. Vhodnou volbou rychlosti V lze dosáhnout toho, aby osa X' procházela kteroukoliv událostí oblasti III, anebo osa cT' kteroukoliv událostí uvnitř oblasti I nebo II.



Obr. 29: Lorentzova transformace v Minkowského diagramu. Silně vytažené osy odpovídají systému K' . Z hlediska Minkowského geometrie jsou tyto osy na sebe kolmé stejně jako osy původní.

Lorentzovou transformací lze tedy vždy dosáhnout, aby událost uvnitř oblasti II, popř. I, ležela na časové ose. To znamená, že v systému K' k ní dojde v témže místě $X' = 0$ jako k události zvolené za počátek. Interval mezi touto událostí a počátkem je tedy

$$s = c |T'|, \quad (\text{XII.10})$$

tzn. interval může být měřen hodinami, které jsou (z hlediska K') v klidu. Pro událost v oblasti III lze Lorentzovou transformací vždy dosáhnout toho,

že bude ležet na prostorové ose, tj. že k ní v systému K' dojde ve stejném čase $T' = 0$ jako k události zvolené za počátek. V tomto případě je interval vzhledem k počátku veličinou ryze imaginární a jeho velikost je rovna prostorové vzdálenosti v systému K'

$$|s| = L' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} . \quad (\text{XII.11})$$

Intervaly typu (XII.10) nazýváme *časupodobnými* a intervaly typu (XII.11) *prostorupodobnými*. Mezním případem jsou *světelné* intervaly splňující podmínku (XII.7).

Fyzikální význam mají pouze velikosti intervalů (XII.10) a (XII.11). Znaménko jejich kvadrátu umožňuje pouze rozlišení mezi intervaly časového a prostorového charakteru, ale žádný další fyzikální význam nemá. Bylo by možné definovat s^2 také s opačným znaménkem než (XII.1), což se v literatuře rovněž vyskytuje.

U událostí oddělených od počátku časupodobným nebo světelným intervalem nelze Lorentzovou transformací dosáhnout toho, aby k nim docházelo v témže čase jako k události zvolené za počátek. Události v oblasti I mají ve všech systémech spojených Lorentzovou transformací kladnou časovou souřadnici, tj. dochází k nim později než k události zvolené za počátek. Proto se této oblasti říká *absolutní budoucnost* (vzhledem k počáteční události). Z analogických důvodů se oblast II nazývá *absolutní minulostí*.

Událost v oblasti III může v závislosti na volbě inerciálního vztažného systému nastat dříve či později nežli událost počáteční, není však možné, aby nastala v témže místě. Mluvíme proto o III jako o oblasti událostí *absolutně odlehlých* anebo jako o oblasti událostí *kvazisoučasných* s událostí počáteční.

Libovolný pohyb bodu podél osy X můžeme v Minkowského diagramu znázornit křivkou. Pokud je rychlost pohybu nenulová, lze tuto křivku zapsat jako

$$cT = f(X) . \quad (\text{XII.12})$$

Přímka na diagramu odpovídá pohybu, který se děje konstantní rychlostí, tj. pohybu rovnoměrnému. Uvažované křivce se říká *světočára* daného bodu. Má-li se pohyb dít rychlostí $v \leq c$, musí pro směrnici světočáry platit

$$c \left(\frac{dT}{dX} \right) \geq 1 , \quad (\text{XII.13})$$

tj. světočára procházející danou událostí míří z její minulosti do její budoucnosti. Kdyby světočára nesplňovala podmínku (XII.13), nebylo by možné

události na ní jednoznačně uspořádat v čase — která ze dvou událostí je dřívější a která pozdější, by záviselo na volbě vztažného systému K .

Je přirozené předpokládat, že časové pořadí příčiny a následku, a tedy i libovolných příčinně spojených událostí, je určeno jednoznačně, a že proto jakákoliv interakce spojená s přenosem hmotnosti, energie a informace se nemůže šířit rychlostí přesahující rychlost světla. Platí tedy *princip maximální rychlosti šíření interakcí*

$$v \leq c. \quad (\text{XII.14})$$

Z Minkowskiho diagramu na obr. 28 je pak zřejmé, že budoucnost vzhledem k dané události tvoří ty události, které jí mohou být v principu ovlivněny (lze je s ní spojit světočarou splňující (XII.13), přičemž $T > 0$), zatímco její minulost tvoří události, které jí mohly v principu ovlivnit (lze je s ní spojit světočarou splňující (XII.13), přičemž $T < 0$).

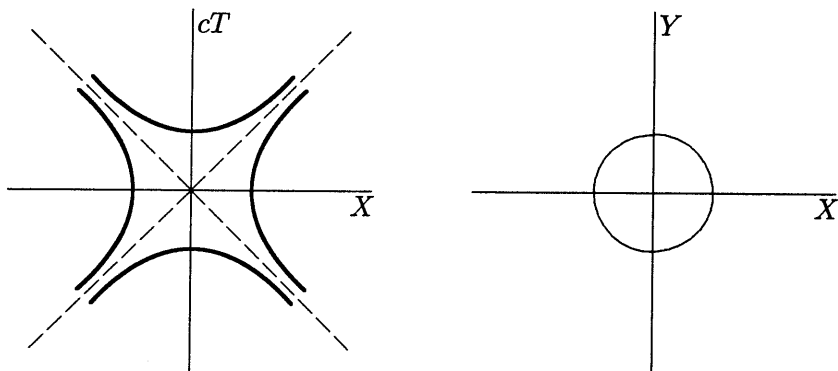
Poznamenejme, že princip maximální rychlosti šíření interakcí vylučuje existenci tuhých těles ve smyslu klasické mechaniky, kde vzdálenost libovolných dvou bodů tuhého tělesa zůstávala během pohybu konstantní. Uvedla-li například síla do translačního pohybu zadní konec tuhé tyče, musel se okamžitě začít pohybovat i konec přední. Odtud je patrné, že klasický pojem tuhého tělesa předpokládal nekonečnou rychlost šíření interakcí a tím vlastně existenci absolutní současnosti. Proto jej nelze do teorie relativity přenášet. Při zkoumání silových účinků na tělesa musíme předpokládat, že při změně svého pohybového stavu se tělesa deformují a deformace se v nich šíří rychlostí, která je v souladu s (XII.14). Opomenutí této skutečnosti se může stát zdrojem zdánlivých „paradoxů“.

Teorie relativity ovšem nevylučuje nadsvětelné rychlosti čistě geometrické povahy. Otáčeli-li se například světlomet danou úhlovou rychlostí, bude rychlost pohybu světelné stopy na stínítku úměrná vzdálenosti stínítka od světlometu a může rychlost světla překročit. Avšak polohy stopy v různých časových okamžicích nejsou vzájemně příčinně spojeny a nejde tedy o rozpor s principem maximální rychlosti šíření interakcí.

Vysvětleme nyní pomocí Minkowskiho diagramu paradox hodin. Povšimněme si nejdříve, jak vypadají v Minkowskiho diagramu množiny bodů o konstantní hodnotě intervalu vzhledem k počátku. Jsou zřejmě popsány rovnicí

$$X^2 - c^2T^2 = \text{konst} \quad (\text{XII.15})$$

a tvoří tedy dvě soustavy rovnoosých hyperbol, jejichž asymptotami jsou přímky $X = cT$, $X = -cT$, viz obr. 30, jeho levá část. Srovnání levé části



Obr. 30: Minkowskiovi geometrie a euklidovská geometrie. Množinami bodů stejně vzdálených od počátku jsou v euklidovské rovině kružnice, v Minkowskiovi rovině rovnoseo hyperboly.

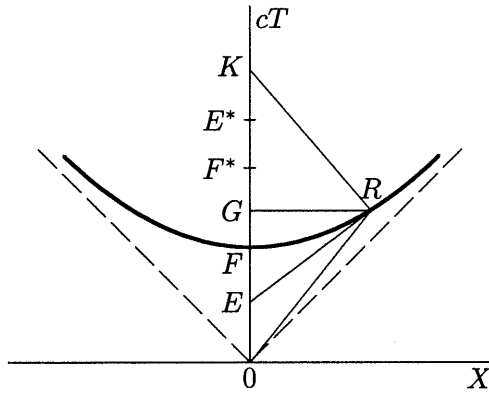
obr. 30 s jeho pravou částí ukazující analogické množiny v euklidovské geometrii ilustruje zásadní rozdíl mezi euklidovskou geometrií a geometrií Minkowskiovi. Nyní již znázorníme v Minkowskiovi diagramu situaci „paradoxu hodin“ za předpokladu, že zrychlené fáze letu lze pro jejich krátkost zanedbat, viz obr. 31.

Přímka OK je světočarou hodin, které zůstaly v klidu vzhledem k inerciálnímu systému daného diagramu. Lomená čára ORK je světočarou hodin, které se pohybovaly rovnoměrně a přímočaře „tam a zpět“ rychlostí o velikosti V . Z hlediska klidového pozorovatele je událost R současná s událostí G , avšak z hlediska systému vzdalujících se hodin je současná s událostí E a z hlediska systému vracejících se hodin s událostí E^* . Přímka ER má podle (XII.8) směrnici V/c a je tedy tečnou k hyperbole (XII.15) v bodě R . Diferencováním (XII.15) totiž obdržíme

$$\frac{d(cT)}{dX} = \frac{X}{cT} = \frac{V}{c}. \quad (\text{XII.16})$$

Z hlediska prostorčasového se rovnají intervaly OR a OF (hodiny v bodech R a F ukazují stejný čas). Zakreslíme-li (vzhledem k symetrii obou fází letu) bod F^* tak, aby platilo $FG = GF^*$, odpovídá interval FF^* času, který (při závěrečném srovnání hodin v bodě K) uplynul na „necestujících“ hodinách navíc. V rozporu se situací, jakou známe z euklidovské geometrie, je tedy přepona trojúhelníka OK v geometrii Minkowskiovi delší než součet jeho odvěsen OR a RK .

Délku libovolné světočáry můžeme určit tak, že ji aproximujeme přímkovými úseky a v limitě pro nekonečně husté dělení přejdeme k integrálu.



Obr. 31: Paradox hodin v Minkowskiho diagramu. V Minkowskiho geometrii jsou úsečky OF a KF^* stejně dlouhé jako úsečka OR . Základna trojúhelníku OK je proto delší než součet ramen OR a KR .

Pro světočáry odpovídající pohybům s podsvětelnou rychlostí můžeme psát s využitím infinitesimálního zápisu pro interval

$$ds^2 = c^2 dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2) , \quad (\text{XII.17})$$

takže

$$ds = \frac{\sqrt{c^2 dT^2 - dL^2}}{dT} dT = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT = c d\tau . \quad (\text{XII.18})$$

Délka světočáry je tedy

$$s = \int ds = c \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT = c\tau , \quad (\text{XII.19})$$

kde τ je vlastní čas měřený ideálními hodinami pohybujícími se podél světočáry. Čas, který ukazují ideální hodiny, je tedy úměrný délce jejich světočáry — lze říci, že ideální hodiny měří tuto délku.

XII.2 Geometrie Minkowskiho prostoru. Tenzory

Spojení prostoru a času v intervalu otevírá cestu k novému a hlubšímu pohledu na fyzikální zákony formulované v rámci teorie relativity. Nežli

přikročíme k jeho výkladu, musíme se detailněji seznámit s geometrií Minkowského prostoru. Pro jednoduchost a symetrii zápisu zavedeme prostoročasové souřadnice X^0, X^1, X^2, X^3 ,

$$X^0 = cT, \quad X^1 = X, \quad X^2 = Y, \quad X^3 = Z, \quad (\text{XII.20})$$

udávající vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi čtveřicemi reálných čísel a událostmi v prostoročase. Nadále budeme užívat výhradně těchto souřadnic.

Mějme dvě libovolné události P, Q o prostoročasových souřadnicích P^i, Q^i . Uspořádané dvojici událostí lze přiřadit čtyřrozměrný vektor \mathbf{V}_{PQ} o komponentách $Q^i - P^i$, tj. lze psát

$$\mathbf{V}_{PQ} = \sum_{i=0}^3 (Q^i - P^i) \mathbf{e}_i, \quad (\text{XII.21})$$

kde \mathbf{e}_i jsou čtyřrozměrné vektory báze,

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1), \quad (\text{XII.22})$$

odpovídající jednotkovým úsekům na osách X^0, X^1, X^2, X^3 .

Přiřazení (XII.21) má tyto význačné vlastnosti:

1. Nechť bod P je zvolen za počátek souřadnicového systému (XII.20), tj. klademe $P^i = 0$, a bod Q nechť probíhá celý prostor, tj. klademe $Q^i = X^i$. Pak každé události X o souřadnicích X^i je přiřazen její „polohový vektor“ \mathbf{X} vzhledem k počátku

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^3 X^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{XII.23})$$

Tato korespondence mezi vektory a událostmi je zřejmě vzájemně jednoznačná.

2. Pro libovolné události P, Q, R a příslušné vektory je splněna „trojúhelníková rovnice“

$$\mathbf{V}_{PQ} + \mathbf{V}_{QR} = \mathbf{V}_{PR}. \quad (\text{XII.24})$$

Položíme-li v (XII.24) nejprve $Q = P$ a potom $R = P$, dostáváme další charakteristické vlastnosti popsané korespondence

$$\mathbf{V}_{PP} = 0, \quad \mathbf{V}_{PQ} = -\mathbf{V}_{QP}. \quad (\text{XII.25})$$

Množina bodů spojená s vektorovým prostorem tak, že je splněn 1. a 2. bod, se nazývá *afinním prostorem*. Volbou počátku se podle (XII.23) afinní prostor ztotožní s prostorem vektorovým.

Zabývejme se nyní tímto vektorovým prostorem. Kvadrát intervalu události X vzhledem k počátku můžeme považovat — v analogii se situací v euklidovském prostoru — za skalární součin vektoru \mathbf{X} se sebou samým. Libovolné dvojici vektorů \mathbf{A} , \mathbf{B} tedy přiřadíme „skalární součin“

$$\mathbf{AB} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \quad (\text{XII.26})$$

který pro $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{X}$ přechází v kvadrát intervalu. Pro vektory báze (XII.22) platí zřejmě

$$\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = -1, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (\text{XII.27})$$

Tyto podmínky ortonormality jsou poněkud komplikovanější než v případě euklidovské geometrie. Formální shody s euklidovskou geometrií by bylo možné dosáhnout, kdybychom namísto $X^0 = cT$ ve vztahu (XII.20) položili $X^0 = icT$, kde i je imaginární jednotka, a definovali kvadrát intervalu s opačným znaménkem než (XII.1). Pak by se kvadrát intervalu stal součtem kvadrátů souřadnic a skalární součin (XII.26) by se formálně shodoval se skalárním součinem v čtyřrozměrném euklidovském prostoru. Právě popsané úmluvy se často užívá zejména ve starší literatuře. Cenou za formální zjednodušení je to, že časové komponenty vektorů v (XII.21) se stávají imaginárními a imaginární jednotka vstupuje do řady fyzikálně významných veličin a vztahů. V obecné teorii relativity by užívání imaginární souřadnice přineslo další nevýhody. Protože očekáváme, že pro řadu našich čtenářů může být tento text vstupní branou ke studiu obecné teorie relativity, budeme pracovat se skalárním součinem (XII.26). Vektorový prostor s tímto skalárním součinem nazýváme *vektorovým prostorem Minkowského*.

Vyjádření (XII.26) přepíšeme do tvaru více připomínajícího euklidovskou geometrii, zavedeme-li ještě bázi o vektorech \mathbf{e}^i jako

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}^1 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_3. \quad (\text{XII.28})$$

Bázi \mathbf{e}^i nazveme kontravariantní, \mathbf{e}_i kovariantní. Obě báze jsou spojeny vztahy duality

$$\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \quad (\text{XII.29})$$

kde δ_j^i je Kroneckerův symbol ($\delta_j^i = 1$ pro $i = j$ a $\delta_j^i = 0$ pro $i \neq j$). Podle vztahů duality (XII.29) je zobecněním běžných vztahů ortonormality z euklidovské geometrie, kde ortonormální báze splývá s bází duální. Libovolný vektor \mathbf{A} lze vyjádřit buď pomocí kontravariantních komponent

A^i v kovariantní bázi, anebo kovariantních komponent A_i v kontravariantní bázi jako

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^3 A^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=0}^3 A_i \mathbf{e}^i . \quad (\text{XII.30})$$

Pro zjednodušení zápisů budeme nadále používat Einsteinova sumačního pravidla. Nebudeme tedy vypisovat sumy přes všechny hodnoty indexů a budeme automaticky předpokládat, že přes index opakovaný dole a nahoře se sčítá od 0 do 3. Sčítací index může být zřejmě během výpočtů libovolně přejmenován, tj. lze psát například

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A^j \mathbf{e}_j . \quad (\text{XII.31})$$

Proto se někdy sčítací index nazývá indexem němým. Vzhledem k (XII.29) můžeme pro skalární součin psát

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = A^i \mathbf{e}_i B_j \mathbf{e}^j = A^i B_j \delta_i^j = A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 . \quad (\text{XII.32})$$

Po zavedení Minkowského vektorového prostoru lze na něm definovat tenzory libovolného řádu. Tenzor 2. řádu T je bilineární forma na vektorovém prostoru, tj. zobrazení, které přiřazuje každé uspořádané dvojici vektorů \mathbf{A} , \mathbf{B} číslo $T(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, přičemž platí

$$T(p\mathbf{C} + q\mathbf{D}, \mathbf{B}) = pT(\mathbf{C}, \mathbf{B}) + qT(\mathbf{D}, \mathbf{B}) , \quad (\text{XII.33})$$

podobný vztah platí i pro druhý argument. Vzhledem k linearitě zobrazení lze vyjádřit tenzor pomocí jeho hodnot na vektorech báze, například

$$T(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = T(A^i \mathbf{e}_i, B^j \mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) A^i B^j = T_{ij} A^i B^j , \quad (\text{XII.34})$$

kde jsme označili

$$T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (\text{XII.35})$$

kovariantní komponenty tenzoru T_{ij} . Obdobně lze zavést kontravariantní komponenty

$$T^{ij} = T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \quad (\text{XII.36})$$

a smíšené komponenty

$$T_j^i = T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) , \quad \text{popř.} \quad T_i^j = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) . \quad (\text{XII.37})$$

Podobně jako vektory, zapisujeme často tenzory pomocí jejich komponent, tj. mluvíme například o tenzoru T_{ij} .

Velmi důležitý tenzor je spojen se skalárním součinem (XII.26). Tento součin je zřejmě bilineární formou

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{B} = g_{ij}A^iB^j, \quad (\text{XII.38})$$

kde g_{ij} představuje podle předchozího výkladu kovariantní komponenty tenzoru g , určené maticí

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.39})$$

Pro tento tenzor platí

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = g(\mathbf{B}, \mathbf{A}), \quad \text{tj. } g_{ij} = g_{ji}. \quad (\text{XII.40})$$

Tenzor o vlastnosti (XII.40) se nazývá symetrický.

Smíšené komponenty tenzoru g jsou podle (XII.37) a (XII.29)

$$g_i^j = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad (\text{XII.41})$$

a kontravariantní komponenty jsou

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.42})$$

Tenzor g umožňuje přiřadit každému vektoru \mathbf{A} jeho velikost

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{|g(\mathbf{A}, \mathbf{A})|} = \sqrt{|g_{ij}A^iA^j|}. \quad (\text{XII.43})$$

Na rozdíl od situace v euklidovském prostoru není kvadratická forma $g(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ pozitivně definitní, tj. kladná pro všechny nenulové vektory. Bereme-li za \mathbf{A} polohový vektor \mathbf{X} , platí

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = s^2, \quad (\text{XII.44})$$

kde s je interval mezi událostí X a počátkem. Tento interval je nulový pro vektory splňující vztah

$$c^2T^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2, \quad (\text{XII.45})$$

kteře zřejmě odpovĳdajĳ udĳlostem (minulým i budoucím) spojeným s počĳtkem svĳetelným papřskem. Takovĳto vektory nazveme *svĳetelnými*. Rovnice (XII.45) představuje rovníci kuřele ve ĳtyřrozměrněm prostoru. Mluvíme proto o *svĳetelněm kuřeli*. ĳĳary pųlicí kvadranty na obr. 28 představují řez svĳetelněho kuřele dvojrozměrnou rovinou os X^0 , X^1 .

Vektory, pro něž je

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0, \quad \text{tj.} \quad |X^0| > L, \quad (\text{XII.46})$$

mĳřĳ dovnĳtř svĳetelněho kuřele, a to do budoucnosti pro X^0 kladně a do minulosti pro X^0 zĳporně. Tyto vektory nazýváme *ĳasupodobnými*. Koneĳně vektory, pro něž je

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0, \quad \text{tj.} \quad |X^0| < L, \quad (\text{XII.47})$$

mĳřĳ vně svĳetelněho kuřele a nazývají se *prostorupodobnými*. Vektory \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} na obr. 32 představují svĳetelný, ĳasupodobný a prostorupodobný vektor v rovině X^0X^1 , přitom vektory \mathbf{P} i \mathbf{Q} jsou orientovány do budoucnosti. Rozdělení vektorų na svĳetelně, prostorupodobně a ĳasupodobně se vztahuje i na vektory, kteře nemají vyznam polohových vektorų udĳlostĳ.

Tenzor g_{ij} nazýváme vzhledem k jeho geometrickěmu vyznamu *metrickým tenzorem* Minkowskiho prostoru.

Pomocĳ metrickěho tenzoru lze vyjĳdřit převodní vztahy mezi kovariantní a kontravariantní bĳzĳ a mezi rųznými typy komponent tenzorų. Větřina těchto vztahų byla již uvedena dřĳve. Pro pohodlí ĳtenĳře je vřak zopakujeme a doplnĳme do systematickě podoby. Pro vyvození těchto vztahų se nebudeme odvolĳvat na konkrětnĳ vyjĳdřěnĳ g_{ij} v bĳzĳ (XII.22) splňujĳící relace ortonormality (XII.27). Použĳjeme pouze vztahų duality bĳzĳ (XII.29) a definiĳnĳho vztahu pro metrický tenzor (XII.38). Naře vřsledky budou proto platit i pro libovolně sdruženě bĳze v libovolněm vektorověm prostoru se skalĳrnĳm souĳinem (jĳmž rozumĳme bilineĳrnĳ formu (XII.38) za předpokladu, že determinant matice g_{ij} je nenulový).

Vektory kovariantní bĳze jsou jĳstými lineĳrnĳmi kombinacemi vektorų kontravariantní bĳze

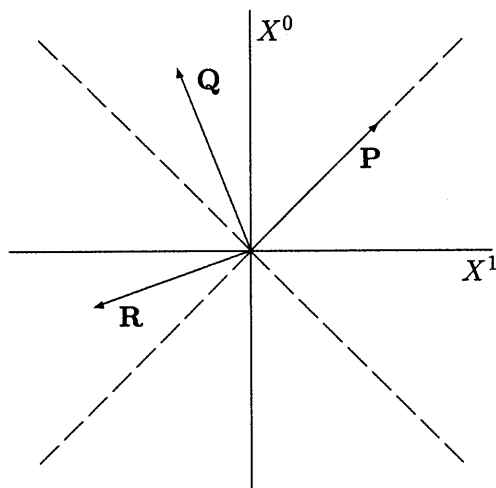
$$\mathbf{e}_i = a_{ik} \mathbf{e}^k. \quad (\text{XII.48})$$

Vynĳsobme tuto rovnici vektorem \mathbf{e}_j . Užitĳm (XII.29) máme, že $a_{ij} = g_{ij}$, a tedy

$$\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k. \quad (\text{XII.49})$$

Obdobně odvodĳme

$$\mathbf{e}^i = g^{ik} \mathbf{e}_k \quad (\text{XII.50})$$



Obr. 32: Tři druhy vektorů v Minkowskioho prostoru. Časupodobný vektor \mathbf{Q} , světelný vektor \mathbf{P} a prostorupodobný vektor \mathbf{R} .

a rovnost součinu pravých i levých stran rovnic (XII.49) a (XII.50) dává

$$\delta_i^j = g_{ik}g^{kj}, \quad (\text{XII.51})$$

tj. matice g^{ij} a g_{ij} jsou navzájem inverzní. Z (XII.30) a (XII.35) až (XII.37) užitím linearit (XII.33) dostáváme hledané převodní vztahy

$$A^i = g^{ij}A_j, \quad A_i = g_{ij}A^j, \quad (\text{XII.52})$$

$$T^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl} = g^{jl}T^i{}_l, \quad T_{ij} = g_{ik}g_{jl}T^{kl} = g_{ik}T^k{}_j, \quad (\text{XII.53})$$

tj. indexy se „zvedají“ a „spouštějí“ pomocí metrického tenzoru⁵⁸. Pokud má metrický tenzor speciální tvar (XII.39), platí

$$A^0 = A_0, \quad A^\alpha = -A_\alpha, \quad (\text{XII.54})$$

$$T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \quad T^{\alpha 0} = -T_{\alpha 0}, \quad T^{00} = T_{00}, \quad (\text{XII.55})$$

kde řeckými písmeny značíme „prostorové“ indexy 1, 2, 3. Zvednutím či spuštěním každého řeckého indexu se tedy změni znaménko komponenty tenzoru.

⁵⁸ Není-li tenzor T^{ik} symetrický, je nutno smíšené komponenty $T_a{}^b$ a $T^b{}_a$ odlišovat.

Nyní si všimněme chování komponent vektorů a tenzorů při záměnách bází. Zaveďme novou kovariantní bázi \mathbf{e}'_i vztahem

$$\mathbf{e}'_i = c_i^k \mathbf{e}_k, \quad (\text{XII.56})$$

kde c_i^k je matice s nenulovým determinanem. Protože vektor \mathbf{A} lze vyjádřit jako

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A'^i \mathbf{e}'_i, \quad (\text{XII.57})$$

dosazením (XII.56), porovnáním koeficientů a vynásobením inverzní maticí dostaneme

$$A'^k = d_i^k A^i, \quad (\text{XII.58})$$

kde

$$c_i^k d_k^l = \delta_i^l. \quad (\text{XII.59})$$

Vztah (XII.58) platí pro komponenty vektorů, tj. — neposouváme-li počátek — i pro prostoročasové souřadnice X^i

$$X'^k = d_i^k X^i. \quad (\text{XII.60})$$

Z (XII.29) je zřejmé, že kontravariantní báze se zamění za novou bázi vztahem

$$\mathbf{e}'^i = d_k^i \mathbf{e}^k \quad (\text{XII.61})$$

a kovariantní komponenty vektorů se transformují jako

$$B'_k = c_k^i B_i. \quad (\text{XII.62})$$

Vztahy (XII.56), (XII.58), (XII.61) a (XII.62) jsou důvodem pro názvy „kovariantní“ a „kontravariantní“. Těchto vztahů můžeme užít k odvození transformačních zákonů pro komponenty tenzorů 2. řádu. Je

$$T'^{ij} = T(\mathbf{e}'^i, \mathbf{e}'^j) = d_p^i d_q^j T^{pq} \quad (\text{XII.63})$$

a podobně

$$T'_{ij} = c_i^p c_j^q T_{pq}, \quad T'_i{}^j = c_i^p d_q^j T_p{}^q. \quad (\text{XII.64})$$

Pojem tenzoru můžeme snadno zobecnit na libovolný řád. Tenzorem n -tého řádu nazveme multilineární zobrazení, tj. zobrazení lineární v každém argumentu podle (XII.33), přiřazující uspořádané n -tici vektorů reálné číslo. Komponenty tenzoru jsou opět jeho hodnoty na vektorech báze. Například tenzoru 4. řádu R můžeme přiřadit komponenty

$$R(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = R^i{}_{jkl}, \quad (\text{XII.65})$$

z nichž lze jiné typy komponent obdržet zvedáním a spouštěním indexů. Transformační zákon pro komponenty tenzoru R dostaneme jako

$$R^i{}_{jkl} = d_s{}^i c_j{}^p c_k{}^q c_l{}^r R^s{}_{pqr} . \quad (\text{XII.66})$$

Obecně je s každým dolním indexem tenzoru spojena transformační matice $c_i{}^j$ a s horním indexem k ní inverzní matice $d_i{}^j$. Porovnáním se vztahy (XII.58) a (XII.62) vidíme, že i vektor můžeme považovat za speciální případ tenzoru — tenzor 1. řádu. Tenzorem řádu 0 je číslo, které na volbě báze nezávisí. Toto číslo se nazývá skalár.

Nad tenzory lze provádět řadu algebraických operací, které se nejnadhěji zavádějí pomocí jejich komponent. Tenzor můžeme násobit reálným číslem tak, že vynásobíme jeho komponenty, například

$$A_{ij} = c B_{ij} . \quad (\text{XII.67})$$

Sečítání tenzorů stejného řádu se provádí tak, že se sečtou odpovídající komponenty (téhož typu), například

$$D^i{}_{jk} = E^i{}_{jk} + F^i{}_{jk} . \quad (\text{XII.68})$$

Násobení libovolných tenzorů se provádí tak, že se vynásobí jejich komponenty. Tím vzniká tenzor, jehož řád je součtem řádů činitelů, například

$$Q^i{}_{klmn} = R^i{}_{jkl} P^j{}_{mn} . \quad (\text{XII.69})$$

Konečně operace úžení snižuje řád tenzoru o 2. Provádí se tak, že se sečte přes horní a dolní index, například

$$S_{kl} = R^i{}_{kil} . \quad (\text{XII.70})$$

Přímým použitím transformačních vztahů typu (XII.66) se lze přesvědčit, že veličiny na levých stranách (XII.67) až (XII.70) se vskutku transformují jako komponenty tenzorů.

V praxi se často setkáváme s kombinací operace násobení a úžení, například $J^i = T^{ij} \omega_j$, $D^i = R^i{}_{jkl} A^j B^k C^l$, $S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}$ apod. Nové tenzory jsou často zaváděny pomocí takovýchto vztahů. Platí-li například první vztah pro všechny vektory J^i a ω_i , je T^{ij} tenzor 2. řádu, tento tenzor představuje lineární zobrazení vektorového prostoru, přiřazující každému vektoru ω vektor J . Jindy lze tenzorový charakter nějakého souboru veličin zjistit prověřením platnosti transformačních vztahů typu (XII.66).

Počínaje vztahem (XII.56) jsme nikdy neužili předpokladu, že báze e_i je ortonormální. Omezení na ortonormální báze má za následek omezení

se na složky matic c_i^j , které je analogické relacím ortonormality známým z euklidovské geometrie. Příslušné relace dostaneme aplikací prvního vztahu (XII.64) na komponenty metrického tenzoru. Nemají-li se veličiny g_{ij} transformací měnit, musí být

$$g_{ij} = c_i^p c_j^q g_{pq}, \quad (\text{XII.71})$$

přičemž g_{ij} jsou dány vzorcem (XII.39). Vynásobíme-li (XII.71) výrazem $d_k^i g^{kl}$, dostáváme na základě (XII.59) a (XII.51)

$$d_k^i g_{ij} g^{kl} = d^l_j = c_j^l, \quad (\text{XII.72})$$

tj. inverzní matici získáme transpozicí a výměnou polohy indexů provedenou pomocí metrického tenzoru. Poznamenejme, že v euklidovské geometrii byla matice inverzní prostě rovna matici transponované.

Vztah (XII.60) pro záměnu souřadnic, s nímž budeme nadále nejčastěji pracovat, se zapíše jako

$$X'^k = c^k_i X^i, \quad (\text{XII.73})$$

kde matice c^k_i splňuje vztah

$$g^{ij} = c^i_p c^j_q g^{pq}, \quad (\text{XII.74})$$

vzniklý z (XII.71) výměnou poloh indexů; g^{ij} je dáno vzorcem (XII.42).

Kromě výměny bází je ještě možné posunout počátek souřadnicové soustavy v afinním prostoru. Posunutí počátku nemění směry os a tedy ani bází (XII.22). Proto nemá vliv na hodnoty komponent vektorů a tenzorů. Nejobecnější transformací prostoročasových souřadnic, která ponechává komponenty metrického tenzoru nezměněny a rovny (XII.39), je tedy

$$X'^i = c^i_k X^k + b^i, \quad (\text{XII.75})$$

kde c^i_k splňuje vztah (XII.74) a b^i jsou libovolné. Prostoročasovým systémem souřadnic tohoto typu se říká *pseudokartézské*.

Důležitou podmnožinu transformací (XII.75) tvoří transformace

$$X'^\alpha = c^\alpha_\beta X^\beta + b^\alpha, \quad X'^0 = X^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (\text{XII.76})$$

představující záměny kartézských souřadnicových systémů v 3-rozměrném prostoru (v rámci daného vztažného systému). Protože konstantní hodnotě časové souřadnice odpovídá třírozměrný podprostor prostoru Minkowského, můžeme mluvit o třírozměrných vektorech a tenzorech vzhledem k bází e_1, e_2, e_3 . Prostoročasové tenzory se „štěpí“ na soubor tenzorů prostorových. Tak čtyřvektor A^i dává prostorový vektor A^α a prostorový skalár

A^0 , čtyřtenzor 2. řádu T^{ik} dává prostorový tenzor $T^{\alpha\beta}$, vektory $T^{0\alpha}$ a $T^{\alpha 0}$ a skalár T^{00} . To si lze snadno ověřit, specifikujeme-li obecné transformační vztahy pro komponenty tenzorů na transformaci (XII.76), kdy $c^0_0 = 1$, $c^0_\alpha = c^\alpha_0 = 0$. Je například

$$T'^{0\alpha} = c^0_m c^\alpha_n T^{mn} = c^0_0 c^\alpha_\nu T^{0\nu} = c^\alpha_\nu T^{0\nu}, \quad (\text{XII.77})$$

což představuje transformační zákon pro komponenty 3-vektoru $P^\alpha = T^{0\alpha}$. Speciálně z metrického tenzoru dostáváme 3-rozměrný tenzor $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Záporné znaménko je způsobeno naší volbou intervalu ve tvaru (XII.5), která má za následek, že prostorupodobné vektory mají záporný kvadrát a tudíž vektory kontravariantní báze e^α se liší znaménkem od vektorů báze kovariantní (srov. (XII.27) a (XII.28)). Při práci s 3-rozměrnými „prostorovými“ tenzory je vhodné vyhnout se této komplikaci tím, že definujeme prostorový metrický tenzor jako

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{XII.78})$$

a vztahujeme komponenty 3-rozměrných tenzorů k bázi e_α , která je vzhledem k metrickému tenzoru $\gamma_{\alpha\beta}$ ortonormální ve smyslu euklidovské geometrie. To znamená, že kovariantní a kontravariantní báze splynou a není nutné rozlišovat mezi horní a dolní polohou indexů. Proto, jak je obvyklé, budeme psát indexy prostorových tenzorů (včetně indexů sčítacích) dole.

XII.3 Lorentzova a Poincarého grupa

Zabývejme se nejprve transformacemi (XII.75) bez posunutí počátku, tj. položíme $b^i = 0$. Složme dvě transformace tohoto typu

$$X'^i = p^i_k X^k, \quad X''^l = q^l_i X'^i. \quad (\text{XII.79})$$

Dostáváme

$$X''^l = r^l_k X^k, \quad r^l_k = q^l_i p^i_k, \quad (\text{XII.80})$$

tj. matice výsledné transformace je součinem matic dílčích transformací. Lze prověřit přímým výpočtem, že splňují-li matice p^i_k , q^i_k podmínku (XII.74), splňuje ji i matice r^i_k . Je to však zřejmé i z toho, že nemění-li žádná z transformací (XII.79) komponenty metrického tenzoru, nemůže je změnit ani transformace vzniklá jejich složením. Komponenty metrického tenzoru přirozeně nemění ani identická transformace, které odpovídá matice δ^i_k . Dále, pokud jistá transformace s maticí c^i_k nezměnila tyto komponenty,

nezmění je ani inverzní transformace o matici $d^i_k = c_k^i$ (která znamená návrat k původním hodnotám).

Vidíme tedy, že na množině 4×4 matic splňujících podmínku (XII.74) je definována binární operace, násobení matic, která je asociativní. Tato množina obsahuje (vzhledem k dané operaci) jednotkový prvek, jednotkovou matici, a prvek inverzní k libovolnému prvku, inverzní matici. To znamená, že uvažovaná množina matic tvoří vzhledem k dané operaci grupu a grupu tedy tvoří i jí odpovídající množina transformací v Minkowského prostoru. Tuto grupu nazýváme *Lorentzovou grupou*.

Uveďme nejprve příklady transformací Lorentzovy grupy. Jak lze snadno ověřit dosazením do (XII.74), určuje takovou transformaci matice

$$c^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.81})$$

Tato matice odpovídá otočení kartézského systému prostorových souřadnic okolo osy X^3 o úhel φ . Druhým příkladem je matice

$$c^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.82})$$

kde γ , β jsou dány vztahy (XI.46) a (XI.61). To je nám již dobře známá speciální Lorentzova transformace. Matice (XII.82) nabude podobného tvaru jako (XII.81), položíme-li

$$\cosh \psi = \gamma, \quad \sinh \psi = \beta\gamma. \quad (\text{XII.83})$$

Pak můžeme matici (XII.82) přepsat jako

$$c^i_k = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XII.84})$$

Veličinu ψ je možné nazvat „hyperbolickým úhlem“, o němž se otočí souřadnicový systém v Minkowského rovině X^0, X^1 .

Přejděme nyní k obecným úvahám o Lorentzově grupě. Vypočteme-li determinant obou stran rovnice (XII.74), pak vzhledem k tomu, že determinant součinu matic je roven součinu determinantů, dostáváme

$$[\text{Det}(c^i_k)]^2 = c^2 = 1. \quad (\text{XII.85})$$

Množina Lorentzových matic se tedy dělí na dvě podmnožiny podle toho, je-li $c = +1$ nebo $c = -1$.

Z (XII.56) vyplývá, že se ortonormální báze v Minkowskioho prostoru dělí na dvě třídy. Jednu třídu tvoří báze, pro něž je $c = +1$ a které nazveme shodně orientovanými s výchozí bází. Druhou tvoří báze s opačnou orientací, pro něž je $c = -1$. Jde o analogii pravotočivých a levotočivých systémů v 3-rozměrném prostoru. Transformaci s $c = -1$ můžeme vždy získat tak, že k transformaci s $c = 1$ přidáme inverzi některé z os, například $X'^1 = -X^1$.

K dalšímu rozšíření množiny Lorentzových matic (a transformací) dojdeme, položíme-li v (XII.74) $i = j = 0$ a rozepíšeme součet na pravé straně. Dostaneme tak

$$1 = (c^0_0)^2 - \left[(c^0_1)^2 + (c^0_2)^2 + (c^0_3)^2 \right], \quad (\text{XII.86})$$

tj.

$$(c^0_0)^2 \geq 1. \quad (\text{XII.87})$$

Získáme tedy opět dvě podmnožiny podle toho, je-li $c^0_0 \geq 1$ anebo $c^0_0 \leq -1$. Význam tohoto rozdělení zjistíme, vynásobíme-li (XII.56) e^j , užijeme (XII.29) a položíme $i = j = 0$. Uvážíme-li, že zvednutím a spuštěním indexu 0 se v ortonormální bázi výrazy nemění, máme

$$\mathbf{e}_0 \mathbf{e}'_0 = c^0_0. \quad (\text{XII.88})$$

Protože $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$, znamená kladnost součinu na levé straně, že vektor \mathbf{e}'_0 míří dovnitř téže poloviny světelného kužele jako vektor \mathbf{e}_0 , tj. transformace nemění směr času. Transformaci, pro niž je $c^0_0 \leq -1$, lze vždy obdržet složením transformace s $c^0_0 \geq 1$ a časové inverze $X'^0 = -X^0$.

Transformace, pro něž je současně

$$c = 1, \quad c^0_0 \geq 1 \quad (\text{XII.89})$$

a které tedy nemění ani orientace báze ani směr času, tvoří zřejmě podgrupu Lorentzových transformací. Tato grupa se nazývá *vlastní Lorentzovou grupou*. Lze ukázat, že každou transformaci vlastní Lorentzovy grupy lze získat složením otočení prostorových os (jehož speciálním případem je (XII.81)) a Lorentzovy transformace jakožto přechodu k rovnoměrně a přímočaře se pohybujícímu systému (speciálním případem je (XII.84)). Transformace vlastní Lorentzovy grupy lze tedy dosáhnout spojitou změnou původního směru os, zatímco k transformacím, pro něž je splněna aspoň jedna z podmínek

$$c = -1, \quad c^0_0 \leq -1, \quad (\text{XII.90})$$

spojitě přejít nelze. V praxi zpravidla za výchozí volíme systém s pravotočivou orientací prostorových os a časem počítaným kladně pro budoucí události. Dodržení podmínek (XII.89) pak znamená, že se omezujeme na transformace, které tuto prostorovou a časovou orientaci zachovávají.

Otočení prostorových os je vždy otočením okolo jisté osy. Můžeme je proto popsat třírozměrným vektorem ve směru této osy, jehož velikost je rovna úhlu otočení. Lorentzova transformace je popsána třírozměrným vektorem rychlosti, jíž se pohybuje nový inerciální vztažný systém. Celkově je tedy každá transformace vlastní Lorentzovy grupy popsána šesti parametry. Říkáme proto, že Lorentzova grupa je *šestiparametrická*.

Princip relativity můžeme matematicky vyjádřit jako tvrzení, že *všechny fyzikální zákony jsou invariantní vůči transformacím vlastní Lorentzovy grupy*. Kromě principu relativity jakožto principu rovnoprávnosti všech inerciálních systémů je v tom obsažen ještě požadavek izotropie prostoru jakožto rovnoprávnosti všech prostorových směrů.

Poznamenejme zde, že moderní fyzika prokázala, že fyzikální zákony na úrovni mikrosvěta nejsou invariantní vůči transformacím úplné Lorentzovy grupy, která zahrnuje i prostorové a časové inverze.

Obraťme se nyní k transformacím (XII.75) zahrnujícím i translaci počátku. Tyto transformace tvoří zřejmě opět grupu, která se nazývá *grupou Poincarého*. Podrobíme-li matici c^i_k podmínkám (XII.89), kdežto b^i ponecháme libovolné, dostáváme její podgrupu, která se nazývá *vlastní grupou Poincarého a fyzikální zákony jsou invariantní vzhledem k vlastní grupě Poincarého*. Kromě principu relativity a izotropie prostoru je v tom navíc zahrnut požadavek homogenity prostoru a homogenity času, tj. nezávislosti fyzikálních zákonů na místě a čase, v nichž se fyzikální děje odehrávají. Prostorovočasové posunutí b^i je popsáno čtyřmi veličinami, takže vlastní Poincarého grupa je *desetiparametrická*.

XII.4 Čtyřrozměrná mechanika

Pro moderní fyziku mají velký význam grupy transformací a invariance fyzikálních zákonů a veličin vůči transformacím těchto grup. Požadavky invariance slouží často jako vodítko při budování nových fyzikálních teorií. Tak je tomu i u teorií fyzikálních jevů v rámci Minkowského prostoročasu, kdy je základním požadavkem požadavek invariance vůči transformacím vlastní grupy Poincarého. Protože translace této grupy se podstatně neliší od translací v newtonovském prostoročase, soustřeďuje se náš zájem na otázky invariance vzhledem k Lorentzově grupě.

V minulé kapitole jsme formulovali zákony relativistické mechaniky pomocí veličin vztahujících se k 3-rozměrnému prostoru daného vztažného systému. Invariance těchto zákonů není často na první pohled patrná, poněvadž transformační vlastnosti třírozměrných veličin vzhledem k Lorentzově transformaci jsou složité a různorodé (srovnej například vzorce (XI.49) a (XI.50) pro rychlost a (XI.125) pro sílu, které jsou odlišné, ačkoliv v obou případech jde o 3-rozměrné vektory).

Povšimněme si nyní transformačních vztahů pro 4-rozměrné vektory a tenzory (XII.58), (XII.62) až (XII.64) a (XII.66). Vidíme, že každému prvku Lorentzovy grupy (matici $c^i_k = d_k^i$) je přiřazena lineární transformace komponent tenzorů libovolného řádu a typu. Tyto transformace tvoří opět grupu, která je homomorfním obrazem Lorentzovy grupy, tj. jednotkovému prvku a součinu prvků Lorentzovy grupy je přiřazen jednotkový prvek a součin prvků grupy transformující komponenty tenzorů. Říkáme proto ve shodě s matematickou terminologií, že jde o *reprezentaci* Lorentzovy grupy v prostoru tenzorů, který je reprezentačním prostorem Lorentzovy grupy. Rovnice vyjadřující rovnost prvků reprezentačního prostoru jsou automaticky invariantní vůči transformacím Lorentzovy grupy a je tedy velmi výhodné zobrazit fyzikální veličiny pomocí těchto prvků. Fyzikální zákony pak budou vyjádřeny ve formálně prostém a zjevně invariantním čtyřrozměrném tvaru, od něhož je možné přejít ke tvaru třírozměrnému, pokud je to potřebné například pro srovnání s nerelativistickou teorií.

Tenzorové reprezentace nejsou jedinými reprezentacemi Lorentzovy grupy. Existují rovněž reprezentace spinorové, které jsou nezbytné pro vybudování relativistické kvantové mechaniky (Diracova teorie). Klasické partie fyziky je však možné přebudovat do relativisticky invariantního tvaru pouze pomocí reprezentací tenzorových, tj. fyzikální veličiny jsou v nich vyjádřeny pomocí čtyřrozměrných tenzorů (popř. vektorů, skalárů). V dalším výkladu se omezíme na tento případ.

Studujme nejprve libovolný pohyb částice s podsvětelnou rychlostí. Ve 4-rozměrné formulaci lze tento pohyb zapsat jako

$$X^i = X^i(s) , \quad (\text{XII.91})$$

kde jako parametru užíváme intervalu s rostoucího směrem do budoucnosti. Definujeme

$$u^i = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta X^i}{\Delta s} = \frac{dX^i}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dX^i}{d\tau} . \quad (\text{XII.92})$$

Protože ΔX^i jsou komponenty čtyřrozměrného vektoru a Δs je skalár, jsou veličiny u^i komponentami čtyřrozměrného vektoru, který je zadán v každém

bodě světočáry dané částice (lze říci, že tvoří pole podél křivky v prostoročase). Tento vektor nazveme *čtyřrychlostí* částice. Uvážíme-li, že podle (XII.18) $dT = \gamma d\tau$, $X^0 = cT$, máme (Lorentzův faktor se zde vztahuje k rychlosti částice, tj. vynecháváme index u γ_v)

$$\mathbf{u} = u^i = \frac{\gamma}{c} (c, v_1, v_2, v_3) = \frac{\gamma}{c} (c, \mathbf{v}), \quad (\text{XII.93})$$

kde \mathbf{v} je vektor třírozměrné rychlosti. Velikost vektoru u^i určíme podle (XII.51) jako

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ik}u^i u^k} = 1. \quad (\text{XII.94})$$

Vektor čtyřrychlosti má tedy konstantní velikost a z jeho čtyř komponent jsou proto pouze tři nezávislé. Jeho zadání je ekvivalentní zadání komponent třírozměrné rychlosti.

Z (XII.92) je zřejmé, že čtyřrychlost je vektorem tečným ke světočáře. Vynásobíme-li ji veličinou $m_0 c$, kde m_0 je klidová hmotnost částice (skalár), dostáváme čtyřvektor o komponentách

$$\mathbf{P} = P^i = m_0 c \frac{dX^i}{ds} = m_0 \gamma (c, \mathbf{v}). \quad (\text{XII.95})$$

Srovnáme-li tento vzorec s (XI.109) a (XI.119), vidíme, že je

$$P^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (\text{XII.96})$$

kde \mathbf{p} je relativistická hybnost a E relativistická energie částice. Čtyřvektor P^i — *čtyřhybnost* či *čtyřimpulz* částice — tedy v sobě spojuje energii a hybnost podobným způsobem, jakým polohový vektor X^i spojuje časovou souřadnici a souřadnice prostorové. Tím se geometricky vysvětluje shoda mezi transformačními vlastnostmi energie a hybnosti a transformačními vlastnostmi prostoročasových souřadnic, s níž jsme se již setkali v (XI.120) až (XI.122). Velikost vektoru P^i je zřejmě

$$|\mathbf{P}| = m_0 c |\mathbf{u}| = m_0 c, \quad (\text{XII.97})$$

tj. je úměrná klidové hmotnosti částice. Vyjádříme-li tuto velikost pomocí komponent (XII.96) jako $\sqrt{g_{ik}P^i P^k}$, dostaneme umocněním důležitý vztah mezi klidovou hmotností, energií a hybností částice

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2. \quad (\text{XII.98})$$

Má-li částice nenulovou klidovou hmotnost, platí pro ni

$$p^2 < \frac{E^2}{c^2} . \quad (\text{XII.99})$$

Předpokládejme nyní, že veličiny E , \mathbf{p} , m_0 lze zavést i pro „částice“, tečný vektor k jejich světočáře je vektorem světelným, a že přitom zůstává v platnosti vztah (XII.98). Protože velikost světelného vektoru je nulová, musí být

$$m_0 = 0 , \quad (\text{XII.100})$$

tj. částice pohybující se rychlostí světla musejí mít nulovou klidovou hmotnost. Dále pro ně platí

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} . \quad (\text{XII.101})$$

Příkladem takovýchto částic jsou světelná kvanta — *fotony*. Protože podle kvantové teorie, která dovoluje pojem fotonu důsledně zavést, platí pro energii fotonu vztah

$$E = h\nu , \quad (\text{XII.102})$$

kde h je Planckova konstanta a ν frekvence fotonu, je hybnost fotonu rovna

$$p = \frac{h\nu}{c} . \quad (\text{XII.103})$$

Teoreticky lze připustit i existenci „částic“, pro které platí

$$p^2 > \frac{E^2}{c^2} . \quad (\text{XII.104})$$

Tyto hypotetické částice se nazývají *tachyony*. Tečný vektor ke světočáře tachyonu míří vně světelného kužele. Světočáry tachyonů spojují absolutně odlehle (kvazisoučasné) události, což má za následek, že časové pořadí událostí na světočáře tachyonu může být obráceno vhodnou volbou vztažného systému (pomocí Lorentzovy transformace). Tato skutečnost činí existenci tachyonů nepravděpodobnou, i když se vyskytly snahy interpretovat ji tak, aby nedošlo k paradoxům. Experimentálně se existenci tachyonů prokázat nepodařilo, a proto se jimi dále zabývat nebudeme.

Přikročme nakonec ke čtyřrozměrné formulaci pohybových rovnic částice. Zderivováním vektoru P^i podle intervalu obdržíme (je-li $m_0 = \text{konst}$) vektor

$$\frac{dP^i}{ds} = m_0 c \frac{du^i}{ds} = m_0 c w^i , \quad (\text{XII.105})$$

kde $w^i = \frac{du^i}{ds}$ je vektor čtyřzrychlení. Čtyřzrychlení souvisí s obyčejným zrychlením $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dT}$ vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = w^i &= \frac{d\gamma}{cds} (c, \mathbf{v}) + \frac{\gamma}{c^2} (0, \gamma\mathbf{a}) = \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2} \left[\frac{\gamma^2 \mathbf{v}\mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{a}) \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (\text{XII.106})$$

Vhodnou volbou vztažného systému můžeme dosáhnout toho, aby časová složka čtyřzrychlení byla rovna nule. Odtud je patrné, že čtyřzrychlení je prostorupodobný vektor.

Pohybové rovnice částice můžeme nyní napsat jako

$$\frac{dP^i}{d\tau} = m_0 c^2 w^i = F_M^i, \quad (\text{XII.107})$$

kde F_M^i je čtyřvektor Minkowskiho síly, který souvisí s třírozměrnou silou vztahem (viz (XII.96), (XI.112) a (XI.124))

$$\mathbf{F}_M = F_M^i = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dT}, \frac{d\mathbf{p}}{dT} \right) = \gamma \left(\frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c}, \mathbf{F} \right). \quad (\text{XII.108})$$

Kromě třírozměrné pohybové rovnice (XI.112) je tedy v (XII.108) zahrnut ještě vztah (XI.124) pro časovou změnu energie. Poznamenejme ovšem znovu, že tento vztah, a tedy i poslední výraz v (XII.108), platí jen za předpokladu, že klidová hmotnost uvažované částice se s časem nemění, tj. je-li $dm_0/d\tau = 0$. Procesům tohoto druhu se říká *procesy mechanické*. Příkladem odlišného, nemechanického procesu, je například ohřívání částice (uvažované jako „částice“ z makroskopického hlediska), kdy dochází ke změně klidové energie, a tedy i klidové hmotnosti. V případě mechanických procesů platí, že v Minkowskiho geometrii je čtyřsíla kolmá na čtyřrychlost

$$\mathbf{F}_M \mathbf{u} = g_{ik} F_M^i u^k = 0. \quad (\text{XII.109})$$

To znamená, že pouze tři komponenty čtyřrychlosti jsou nezávislé.

XII.5 Srážky částic

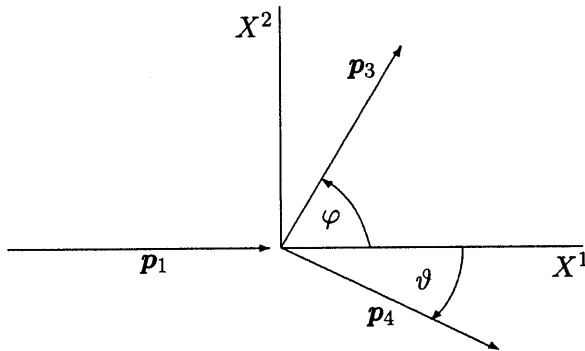
Pro klasickou i moderní fyziku má velký význam studium srážek, tj. interakcí, které jsou omezeny na tak malou prostoročasovou oblast, že je můžeme

považovat za jedinou událost v 4-rozměrném prostoročase. V Minkowskiho prostoru je tedy srážka znázorněna bodem, v němž se setkávají světočáry neinteragujících částic a z něhož opět světočáry neinteragujících částic vystupují — interakcí však dojde ke změně jejich čtyřhybností a případně i ke změně počtu částic. Do srážky zpravidla vstupují dvě částice, ale jejím výsledkem může být i rozpad na velké množství částic. Také rozpad jediné částice lze považovat za speciální případ srážky.

Základním zákonem, který musí být při srážce splněn, je zákon zachování úhrnné čtyřhybnosti

$$\sum_A P_A^i = \sum_B P_B^i, \quad (\text{XII.110})$$

kde na levé straně se sčítá přes částice před srážkou a na pravé straně přes částice po srážce.



Obr. 33: Srážka částic. Částice 1 naráží na částici 2, která byla do srážky v klidu. Výsledkem jsou částice 3 a 4.

V dalším výkladu se omezíme na nejběžnější případ, kdy počet částic do srážky vstupujících i počet částic, které ze srážky vystoupí, bude roven dvěma. Částice před srážkou označíme indexy 1, 2 a po srážce indexy 3, 4. Ujijeme možnosti zvolit vztahný systém a souřadnice tak, abychom pokud možno omezili počet proměnných. Budeme proto předpokládat, že částice 2 je před srážkou v klidu a částice 1 se pohybuje ve směru osy X^1 . Podle zákona zachování hybnosti budou \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_3 a \mathbf{p}_4 ležet v jedné rovině, za niž zvolíme rovinu $X^1 X^2$, viz obr. 33.

Srážka je tedy charakterizována úhly φ , ϑ , které svírají dráhy částic 3 a 4 s osou X^1 . Při této volbě dostáváme ze zákonů zachování (XII.110) tři

rovnice

$$p_1 = p_3 \cos \varphi + p_4 \cos \vartheta , \quad (\text{XII.111})$$

$$0 = p_3 \sin \varphi - p_4 \sin \vartheta , \quad (\text{XII.112})$$

$$m_1 + m_{02} = m_3 + m_4 . \quad (\text{XII.113})$$

V nerelativistické mechanice dělíme srážky na pružné a nepružné. Při pružných srážkách se kromě hybnosti a hmotnosti zachovává i úhrnná kinetická energie. Uvedené rozdělení srážek můžeme zachovat i v teorii relativity. Zde však můžeme vyjádřit jeho kritérium ještě jiným způsobem. Kinetickou energii souboru částic lze na základě (XI.119) a (XII.96) zapsat jako

$$E_k = c \sum_A (P_A^0 - m_{0Ac}) , \quad (\text{XII.114})$$

kde P_A^0 značí „časovou“ komponentu čtyřhybnosti A -té částice. Ze zákonů zachování (XII.110) plyne, že při pružných srážkách se zachovává i součet klidových hmotností

$$M_0 = \sum_A m_{0A} , \quad (\text{XII.115})$$

který je podle předchozího textu roven součtu vnitřních energií částic a z geometrického hlediska představuje (až na konstantní násobek) součet velikostí čtyřimpulsů částic před srážkou a po srážce.

Nyní si všimněme několika případů konkrétního použití rovnic (XII.111) až (XII.113).

a) **Pružná srážka částic o stejných klidových hmotnostech.**

V tomto případě můžeme klást

$$m_{01} = m_{02} = m_{03} = m_{04} = m_0 . \quad (\text{XII.116})$$

Zajímáme se o úhel $\psi = \varphi + \vartheta$, který svírají dráhy částic po srážce. Umocníme rovnice (XII.111) a (XII.112) na druhou a sečteme je, dostaneme tak

$$p_1^2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3p_4 \cos \psi . \quad (\text{XII.117})$$

Dále využijeme vztahu (XII.86), tj.

$$\frac{p^2}{c^2} = m^2 - m_0^2 , \quad (\text{XII.118})$$

pro částice 1, 3, 4 a zákona zachování (XII.113), jehož pomocí vyloučíme veličinu m_1 . Poté z tohoto vztahu určíme $\cos \psi$ jako

$$\cos \psi = \sqrt{\frac{(m_3 - m_0)(m_4 - m_0)}{(m_3 + m_0)(m_4 + m_0)}}. \quad (\text{XII.119})$$

Pokud se obě částice po srážce pohybují (tj. je-li úhel ψ definován), je zřejmě

$$1 > \cos \psi > 0 \quad (\text{XII.120})$$

neboli

$$0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{XII.121})$$

To znamená, že v relativistické dynamice budou trajektorie částic po srážce svírat ostrý úhel. (Ve zvláštním případě, kdy p_3 nebo p_4 je rovné nule, dojde k výměně hybnosti částic stejně jako v klasické mechanice.) V přiblížení klasické mechaniky je $m_3 = m_4 = m_0$, a tudíž

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{XII.122})$$

Experimentální potvrzení zákonů srážek rychlých částic bylo podáno F.C. Championem roku 1932 v plném souladu s předpovědí speciální teorie relativity. Tyto pokusy byly vícekrát úspěšně opakovány. Fotografie stop srážejících se částic v mlžných komorách vykazují zřetelně ostré úhly a mluví tak jednoznačně ve prospěch relativistické mechaniky.

b) **Comptonův jev — pružná srážka elektronu a fotonu.** Nechť je elektron před srážkou v klidu, tj. hraje roli částice 2. Částice 3 po srážce je foton a částice 4 po srážce je elektron. Platí

$$m_{01} = m_{03} = 0, \quad m_{02} = m_{04} = m_e, \quad (\text{XII.123})$$

kde m_e je klidová hmotnost elektronu. Zajímá nás vztah mezi změnou frekvence fotonu a jeho odchylkou φ od původního směru. V rovnicích (XII.111) a (XII.112) převedeme členy s p_3 na levou stranu, načež rovnice umocníme na druhou a sečteme. Máme

$$p_1^2 - 2p_1p_3 \cos \varphi + p_3^2 = p_4^2. \quad (\text{XII.124})$$

Užijeme rovnic (XII.118) a vyloučíme m_4 pomocí (XII.113), tak dostaneme

$$(m_1 - m_3) m_e = m_1 m_3 (1 - \cos \varphi). \quad (\text{XII.125})$$

Pro hmotnost fotonu podle předchozího výkladu platí

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (\text{XII.126})$$

Označme ν_0 frekvenci fotonu před srážkou a ν frekvenci po srážce. Dosažením (XII.126) do (XII.125) dostáváme po prosté úpravě

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \varphi) = \frac{\lambda - \lambda_0}{c}. \quad (\text{XII.127})$$

Při srážce fotonu s volným elektronem dochází tedy ke změně frekvence (popř. vlnové délky) fotonu podle (XII.127). Tato změna nezávisí na vlnové délce dopadajícího světla. Popsaný jev byl ověřen H.A. Comptonem v roce 1923. Poznamenejme, že bez užití kvantových představ bychom došli k závěru, že rozptýlené záření má stejnou frekvenci jako záření dopadající. Kvantová teorie dává vzorec (XII.127), který souhlasí s výsledky experimentu.

c) **Rozpad částice na dvě části.** Částici před rozpadem můžeme považovat za částici 2, zatímco částice 1 chybí, což formálně vystihneme tak, že položíme p_1 a m_1 rovno nule. Dále položíme

$$m_{02} = M_0, \quad m = m_3, \quad \mu = m_4 \quad (\text{XII.128})$$

pro hmotnost částice v klidu před rozpadem a hmotnosti částic, které jsou produktem rozpadu. Rovnice (XII.124) dává po využití (XII.118)

$$m^2 - m_0^2 = \mu^2 - \mu_0^2 \quad (\text{XII.129})$$

a užitím zákona zachování (XII.113) ve tvaru $M_0 = m + \mu$ dostaneme

$$\mu = \frac{M_0^2 + \mu_0^2 - m_0^2}{2M_0}, \quad m = \frac{M_0^2 + m_0^2 - \mu_0^2}{2M_0} \quad (\text{XII.130})$$

pro hmotnosti produktů rozpadu. Protože musí být $\mu > \mu_0$, $m > m_0$, plyne ze zákona zachování hmotnosti

$$M_0 > \mu_0 + m_0. \quad (\text{XII.131})$$

Veličina

$$(\mu_0 + m_0) - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (\text{XII.132})$$

se nazývá hmotnostní defekt. Zde $-\Delta E$ je energie, která se uvolní ve formě kinetické energie. Aby mohlo dojít k samovolnému rozpadu, musí být hmotnostní defekt záporný.

XII.6 Tenzorová pole

Nadále se budeme zabývat relativistickou mechanikou spojitých prostředí. Vzhledem k tomu je potřebné poněkud rozšířit matematický aparát vybudovaný v XII.2. Spojité prostředí se vyznačuje tím, že jeho charakteristiky se mění v prostoru a v čase. Využíváme proto faktu popsaného na začátku XII.2 (srov. (XII.23)), že s každým bodem afinního prostoru lze spojit vektorový prostor. Tento prostor budeme nazývat tečným prostorem k afinnímu prostoru v daném bodě. Zadáním pseudokartézského systému souřadnic v prostoročase je podle (XII.22) určena zadána kovariantní báze ve všech tečných prostorech, která se při transformaci Poincarého grupy (XII.75) mění podle (XII.56). Je-li v jisté prostoročasové oblasti zadán v každém jejím bodě — tj. v tečném prostoru každého bodu — tenzor (ev. vektor, skalár), mluvíme o *tenzorovém (vektorovém, skalárním) poli* v dané oblasti. Pole předepisujeme pomocí jeho komponent, které jsou funkcemi prostoročasových souřadnic ve zvoleném systému. Například pole tenzoru 4. řádu (XII.65) bude mít komponenty

$$R^i{}_{jkl}(X^a) . \quad (\text{XII.133})$$

Po přechodu k souřadnicím X'^s získá pole nové komponenty (srov. (XII.66))

$$R'^i{}_{jkl}(X'^a) = d_p{}^i c_j{}^q c_k{}^r c_l{}^s R^p{}_{qrs}(X^b(X'^a)) . \quad (\text{XII.134})$$

Zderivováním (XII.75) podle X^j zjistíme, že je

$$d^i{}_j = \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} , \quad c^i{}_j = \frac{\partial X'^i}{\partial X^j} , \quad (\text{XII.135})$$

kde $d^j{}_k$ je inverzní matice k matici $c^i{}_j$. Odtud podle (XII.72) plyne pro matice vystupující v transformačních vztazích typu (XII.134)

$$c_i{}^j = \frac{\partial X^j}{\partial X'^i} , \quad d_i{}^j = \frac{\partial X'^j}{\partial X^i} . \quad (\text{XII.136})$$

Obdobně se transformují také jiná tenzorová a vektorová pole. Pro skalární pole f je prostě

$$f'(X'^s) = f(X^k(X'^s)) , \quad (\text{XII.137})$$

tj. hodnota pole se nemění. Stručněji píšeme $f' = f$.

Zpravidla se předpokládá, že komponenty polí jsou spojitě funkce s jistým stupněm hladkosti, který může být specifikován s ohledem na konkrétní situaci.

Uvedme příklady polí. Je-li oblast v prostoročase vyplněna kontinuem, jehož elementy mají čtyřrychlosti u^i , dostáváme vektorové pole čtyřrychlosti $u^i(X^j)$. Podobně i čtyřzrychlení tvoří vektorové pole $w^i(X^j)$. Metrický tenzor má (v pseudokartézských souřadnicích) v každém bodě prostoročasu složky (XII.39). Jeho pole — nazývané *metrickým polem* — má tedy konstantní komponenty, jejichž hodnoty se nemění transformacemi Poincarého grupy.

Poznamenejme, že v literatuře se často užívá slova tenzor i tam, kde se přesně vzato jedná o tenzorové pole. Zkracují se tím formulace v případě tvrzení, která platí jak pro tenzorová pole, tak i pro jejich hodnoty v daném bodě, tj. pro tenzory. Proto i my budeme někdy užívat tohoto způsobu vyjadřování.

Zavedme další geometricky i fyzikálně důležité pole v prostoročase. Mějme uspořádanou čtveřici čtyřvektorů $K_{(a)}^i$, kde index v závorce udává pořadí vektoru ($a = 0, 1, 2, 3$). Za (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu tvořeného těmito vektory označíme — v analogii se situací v 3-rozměrném prostoru — determinant matice sestavené z komponent vektorů $K_{(a)}^i$, tj.

$$\mathcal{V} = \text{Det} \left(K_{(a)}^i \right) . \quad (\text{XII.138})$$

Při přechodu k jiné ortonormální bázi platí podle (XII.58) a (XII.72)

$$K'^i_{(a)} = c^i_j K^j_{(a)} \quad (\text{XII.139})$$

a tedy

$$\mathcal{V}' = \text{Det} \left(c^i_j \right) \mathcal{V} = \pm \mathcal{V} , \quad (\text{XII.140})$$

tj. jak bylo třeba očekávat, orientovaný objem nezávisí na volbě báze, jednalo-li se o báze se stejnou orientací, a mění znaménko při změně orientace báze. S odvoláním na definici tenzoru můžeme proto říci, že pomocí (XII.138) je definován tenzor 4. řádu, jehož znaménko se mění při změně orientace. Takto modifikovaný tenzor nazýváme *pseudotenzorem*. Jeho komponenty najdeme, uvážíme-li, že lze psát

$$\mathcal{V} = \epsilon_{ijkl} K_{(0)}^i K_{(1)}^j K_{(2)}^k K_{(3)}^l , \quad (\text{XII.141})$$

kde složky Levi-Civitova symbolu ϵ_{ijkl} jsou ve čtyřrozměrném prostoru definovány takto: $\epsilon_{ijkl} = 1$ pro sudou permutaci indexů 0, 1, 2, 3, $\epsilon_{ijkl} = -1$ pro lichou permutaci těchto indexů a $\epsilon_{ijkl} = 0$ ve zbývajících případech (tj. jsou-li aspoň dva indexy stejné).

Podle předchozího textu se ϵ_{ijkl} chovají jako komponenty tenzoru při transformacích Lorentzovy grupy s determinantem rovným jedné, speciálně při transformacích vlastní Lorentzovy grupy. Omezíme-li se, jak často činíme, na tyto transformace (popř. doplněné translacemi Poincarého grupy, které komponenty tenzorů nemění), můžeme je považovat za složky tenzoru. Tento tenzor nazýváme *Levi-Civitovým tenzorem*. Zadáním Levi-Civitova tenzoru v každém bodě afinního prostoru vzniká tenzorové pole, jehož komponenty mají (podobně jako komponenty g_{ij}) konstantní hodnoty ϵ_{ijkl} nezávislé na volbě souřadnicového systému. Toto pole se nazývá *elementem objemu*.

Povšimněme si některých vlastností Levi-Civitova tenzoru. Tento tenzor je úplně antisymetrický — jeho znaménko se mění s každou záměnou dvojice indexů (popř. s každou záměnou dvojice vektorů v (XII.138)). Zvednutí indexů Levi-Civitova tenzoru pomocí metrického tenzoru (XII.39) by vedlo ke změně znaménka komponent. Obvykle se však pod ϵ^{ijkl} rozumí opět Levi-Civitův symbol, tj. klademe

$$\epsilon^{ijkl} = \epsilon_{ijkl} = -g^{ip}g^{jq}g^{kr}g^{ls}\epsilon_{pqrs}. \quad (\text{XII.142})$$

Součin Levi-Civitových symbolů lze vyjádřit pomocí determinantu z Kroneckerových symbolů jako

$$\epsilon_{ijkl}\epsilon^{pqrs} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_i^q & \delta_i^r & \delta_i^s \\ \delta_j^p & \delta_j^q & \delta_j^r & \delta_j^s \\ \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r & \delta_k^s \\ \delta_l^p & \delta_l^q & \delta_l^r & \delta_l^s \end{vmatrix}. \quad (\text{XII.143})$$

Platnost tohoto vztahu je patrna z toho, že jsou-li dva horní či dolní indexy stejné, jsou obě strany (XII.143) rovny nule, při záměně indexů mění obě strany znaménko a $\epsilon_{0123}\epsilon^{0123} = 1$. Zúžením (XII.143) přes jednu nebo více dvojic indexů dostáváme další vztahy, které jsou často užitečné při výpočtech.

Připomeňme, že rovněž v 3-rozměrném euklidovském prostoru se užívá Levi-Civitova symbolu $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, který je definován zcela analogicky jako symbol čtyřrozměrný. Umožňuje například zápis vektorového součinu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ jako

$$C_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma. \quad (\text{XII.144})$$

V čtyřrozměrném prostoru je přirozeným zobecněním vektorového součinu ortogonální doplněk trojice vektorů

$$D_i = \epsilon_{ijkl}A^j B^k C^l, \quad (\text{XII.145})$$

jehož skalární součin s vektory A^j, B^k, C^l je v důsledku antisymetrie ϵ_{ijkl} roven nule. Pro úplnost uveďme, jak vypadá Levi-Civitův tenzor v případě, že se neomezujeme na transformace s jednotkovým determinanem. Z transformačního vztahu (XII.64) pro tenzor g_{ij} zjišťujeme, že pro jeho determinant g platí

$$g' = \text{Det}^2 (c_i^j) g = \text{Det}^{-2} (c^j_i) g. \quad (\text{XII.146})$$

Odtud je patrné, že objem rovnoběžnostěnu v neortonormální bázi musí být definován jako

$$\mathcal{V} = \sqrt{|g|} \text{Det} (K_{(a)}^i), \quad (\text{XII.147})$$

neboť tento výraz se nemění při záměně báze, která zachovává orientaci, a přechází v (XII.138) při $|g| = 1$. Levi-Civitův tenzor proto zavedeme jako $E_{ijkl} = \sqrt{|g|} \epsilon_{ijkl}$ a obdobný tenzor s kontravariantními komponentami jako $E^{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijkl}$ (aby pro jejich součin zůstal v platnosti vztah (XII.143)).

Nyní se vraťme k obecným úvahám o tenzorových polích. Je zřejmé, že nad nimi můžeme provádět všechny algebraické operace (XII.67) až (XII.70) tak, že tyto operace provedeme s hodnotami polí ve všech bodech uvažované oblasti. Navíc však můžeme s tenzorovými poli provádět analytické operace derivování a integrování. V tomto odstavci budeme se zabývat pouze derivováním. Sledujme například, jak se mění pole čtyřrychlosti podél světočar jednotlivých elementů kontinua v závislosti na intervalu (který má, jak víme, význam délky světočáry). Dostáváme tak pole čtyřzrychlení

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial X^k} \frac{dX^k}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial X^k} u^k. \quad (\text{XII.148})$$

Zkoumejme transformační vlastnosti veličin $\frac{\partial u^i}{\partial X^k}$. Je

$$\frac{\partial u'^i}{\partial X'^k} = \frac{\partial (d_j^i u^j)}{\partial X^s} \frac{\partial X^s}{\partial X'^k} \quad (\text{XII.149})$$

a vzhledem ke konstantnosti transformačních matic a (XII.136) je dále

$$\frac{\partial u'^i}{\partial X'^k} = d_j^i c_k^s \frac{\partial u^j}{\partial X^s}. \quad (\text{XII.150})$$

Veličiny $\frac{\partial u^i}{\partial X^k}$ jsou tedy smíšenými komponentami tenzorového pole 2. řádu. Zcela obdobně se ukáže, že zderivováním komponent každého tenzorového

pole podle prostoročasových souřadnic dostáváme pole, jehož řád je o 1 vyšší než řád pole původního. Operaci derivování můžeme provádět vícekrát a spojovat ji s algebraickými operacemi. Například

$$P^i = \frac{\partial^2 S^{ikl}}{\partial X^k \partial X^l} \quad (\text{XII.151})$$

je vektorové pole, je-li S^{ikl} tenzorové pole 3. řádu. Často se užívá stručnějšiho označení

$$,^k = \frac{\partial}{\partial X^k} . \quad (\text{XII.152})$$

Pak můžeme (XII.151) zapsat jako

$$P^i = S^{ikl} ,_{kl} . \quad (\text{XII.153})$$

Podobně jako v klasické mechanice kontinua jsou i ve speciální relativitě fyzikální zákony mechaniky kontinua vyjádřeny pomocí parciálních diferenciálních rovnic obsahujících jisté funkce polohy a času i derivace těchto funkcí podle prostoročasových souřadnic. Základním požadavkem, který speciální teorie relativity na tyto rovnice klade, je jejich invariance vůči transformacím vlastní Poincarého grupy — tj. rovnice musejí mít ve všech systémech spojených transformacemi (XII.75) stejný tvar (stejnou formu). Vidíme nyní, že ke splnění tohoto požadavku stačí, aby fyzikální veličiny byly komponentami tenzorových polí a aby fyzikální zákony měly formu parciálních diferenciálních rovnic platných pro tyto komponenty.

V řadě fyzikálně důležitých rovnic vystupuje diferenciální operátor

$$\square = -g^{ik} \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^k} = \frac{\partial^2}{\partial (X^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (X^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (X^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (X^0)^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} , \quad (\text{XII.154})$$

kde Δ je Laplaceův operátor. Operátor \square se nazývá *d'Alembertův operátor*. Jeho aplikací na komponenty libovolného tenzorového pole dostáváme pole téhož řádu a typu.

Úvahy o „rozštěpení“ prostoročasových tenzorů (viz (XII.77) a příslušný text) platí přirozeně i pro tenzorová pole. Tak čtyřvektorové pole $A^i (X^j)$ dává prostorové vektorové pole $A^\alpha (X^\beta, T)$ a skalární pole $A^0 (X^\beta, T)$ apod. Tato pole závisejí na čase $T = X^0/c$ jako parametru. A^α, A^0 se ovšem chovají jako vektorové a skalární pole pouze vůči prostorové transformaci

$$X'^\alpha = c^\alpha_\beta X^\beta + b^\beta . \quad (\text{XII.155})$$

Při obecných transformacích (XII.75) se transformují jako složky prostoročasového vektorového pole. Proto například obecný transformační zákon pro $T^{0\alpha}$ je jiný než pro A^α .

Pole metrického tenzoru v 3-rozměrném prostoru zavádíme podle vztahu (XII.78) a v souladu s tam uvedeným výkladem píšeme všechny indexy prostorových polí dole. V tomto případě budeme za X_α považovat složky prostorového polohového vektoru (tj. X, Y, Z) a nikoliv kovariantní složky čtyřvektoru X^i , které by podle (XII.54) měly opačné znaménko. Připomeňme, že v 3-rozměrném prostoru mají speciální důležitost diferenciální operace

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = A_{\alpha,\alpha}, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_\alpha = \varphi_{,\alpha}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta}. \quad (\text{XII.156})$$

První dvě operace se dají přímo zobecnit na čtyřrozměrný prostoročas, kde vektorovému poli A^i přiřadíme divergenci $A^i_{,i}$ a skalárnímu poli φ gradient $\varphi_{,i}$. Zobecnění rotace je méně přímé. Podle vztahu (XII.156) je vektorové pole $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ ekvivalentní poli antisymetrického tenzoru $A_{\gamma,\beta} - A_{\beta,\gamma}$. Za zobecněnou rotaci vektorového pole A_i můžeme proto považovat antisymetrické tenzorové pole $A_{j,i} - A_{i,j}$. Ve čtyřrozměrné vektorové analýze se dále často setkáváme s divergencí tenzorového pole 2. řádu T^{ik} , která je definována jako $T^{ik}_{,k}$.

Stejně jako v VII.4 bychom mohli rozšířit tuto teorii i na případ použití křivočarých souřadnic, derivace polí by se pak nahradily derivacemi kovariantními. Fyzikální význam křivočarých souřadnic v prostoročase tkví zejména v tom, že umožňují formulovat (relativistické) fyzikální zákony v neinerciálních vztažných systémech. Zavedeme-li křivočaré souřadnice vztahy $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, odpovídají křivky $x'^0 = \text{konst}$ světočarám vztažných bodů neinerciálního systému.

Fyzika v neinerciálních systémech bývá obvykle studována až v rámci *obecné teorie relativity*.

XII.7 Integrované tenzorových polí

Je obecně známo, jak významnou roli hrají v klasické fyzice zákony zachování energie a hybnosti. V teorii relativity je role těchto veličin a zákonů jejich zachování ještě významnější, protože se tu odhalují vzájemné souvislosti, které jsou široce využívány při dalším rozvoji fyziky. Pro pochopení těchto souvislostí je nutné, abychom se seznámili se způsobem výpočtu úhrnných veličin příslušejících fyzikálním polím. Budeme proto studovat teorii integrování tenzorových polí.

Označme

$$d\Omega = dX^0 dX^1 dX^2 dX^3 \quad (\text{XII.157})$$

integrační element v prostoročase. Vzhledem k transformacím Poincarého grupy se tento element chová jako skalár, protože je

$$d\Omega' = dX'^0 dX'^1 dX'^2 dX'^3 = \left| \text{Det} \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j} \right) \right| d\Omega = \left| \text{Det} (c^i_j) \right| d\Omega = d\Omega \quad (\text{XII.158})$$

(srov. (XII.135) a (XII.85)). Integrál tenzorového pole přes oblast v prostoročase, například

$$S^i_{kl} = \int_{\Omega} s^i_{kl} d\Omega, \quad (\text{XII.159})$$

se při uvedených transformacích chová takto

$$S'^i_{kl} = \int_{\Omega} d_p^i c_k^q c_l^r s^p_{qr} d\Omega = d_p^i c_k^q c_l^r S^p_{qr} \quad (\text{XII.160})$$

(poněvadž transformační matice jsou konstantní, dají se vytknout před integrál). Veličiny S^p_{qr} jsou tedy komponenty tenzoru. Tento tenzor se nevztahuje k určitému bodu prostoru, ale charakterizuje celou oblast, přes níž se počítá. Je definován na vektorovém prostoru, který je sdružen s afinním prostorem podle XII.2. Můžeme jej proto nazvat volným tenzorem pro odlišení od hodnoty tenzorového pole v bodě afinního prostoru, kterou nazýváme vázaným tenzorem.

Pro teorii zákonů zachování, o které se dále zajímáme, je velmi důležitá souvislost mezi „objemovými“ integrály typu (XII.159) a integrály přes hranici dané oblasti (tj. zobecněnými plošnými integrály). Proto se musíme zabývat i těmito integrály. Hranice čtyřrozměrné oblasti může být aspoň po částech zapsána parametricky jako

$$X^i = X^i(u, v, w), \quad (\text{XII.161})$$

kde u, v, w jsou parametry sloužící jako souřadnice na třírozměrné ploše v 4-rozměrném prostoru. Tuto plochu nazýváme *hyperplochou* či *nadplochou*. Označme parametry jako q^α , kde $\alpha = 1, 2, 3$, a zapišme (XII.161) jako

$$X^i = X^i(q^\alpha). \quad (\text{XII.162})$$

Zápisu (XII.162) můžeme dát obecnější platnost. Nechť jest $\alpha = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, N$, přičemž $k \leq N$, pak (XII.162) představuje nadplochu k -tého

řádu v N -rozměrném prostoru. Speciálně pro $k = 1$ je tato plocha křivkou, pro $k = 2$ obyčejnou plochou atd. Pro $k = N$ jde o zavedení nových (obecně křivočarých) souřadnic namísto původních souřadnic X^i .

Připomeňme si, že s křivkou parametrizovanou jediným parametrem q jako

$$X^i = X^i(q) \quad (\text{XII.163})$$

je spojen její tečný vektor

$$\xi^i = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta X^i}{\Delta q} = \frac{dX^i}{dq}. \quad (\text{XII.164})$$

Dále si připomeňme, že vektory kovariantní báze (XII.22) v pseudokartézských souřadnicových soustavách byly jednotkové úseky na osách příslušné soustavy, tj. tečné vektory k souřadnicovým čarám, podle nichž se mění jen jedna ze souřadnic a které jsou touto souřadnicí parametrizovány. Také v souřadnicích q^α můžeme v každém bodě nadplochy (XII.162) zavést k -tici tečných vektorů k souřadnicovým čarám. Tyto vektory mají podle (XII.164) kontravariantní komponenty

$$e^i_{(\alpha)} = \frac{\partial X^i}{\partial q^\alpha}, \quad (\text{XII.165})$$

i je číslo komponenty, α číslo vektoru. Tvoří bázi v prostoru vektorů tečných k dané nadploše, který je k -rozměrným podprostorem N -rozměrného vektorového prostoru. Zadáním této báze ve všech bodech nadplochy (XII.162) vzniká k -tice vektorových polí tečných k souřadnicovým čarám, která přejímá úlohu kovariantní báze spojené se systémem souřadnic q^α . Při záměně souřadnic

$$q'^\alpha = q'^\alpha(q^\beta) \quad (\text{XII.166})$$

vzniká nová kovariantní báze

$$e'^i_{(\alpha)} = \frac{\partial X^i}{\partial q'^\alpha} = \frac{\partial X^i}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha} = e^i_{(\beta)} c_\alpha{}^\beta, \quad (\text{XII.167})$$

tj.

$$e'_\alpha{}^i = c_\alpha{}^\beta e_\beta{}^i, \quad (\text{XII.168})$$

což je vztah (XII.56), v němž úlohu transformační matice hraje matice

$$c_\alpha{}^\beta = \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}. \quad (\text{XII.169})$$

Podle první rovnosti (XII.39) můžeme v nadploše zavést metrické pole

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(q^\delta) = e_\alpha e_\beta = g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial X^k}{\partial q^\beta}. \quad (\text{XII.170})$$

Povšimněme si, že metrické pole (XII.170) odpovídá prepisu diferenciálního vztahu (XII.17) do souřadnic q^α na dané nadploše

$$ds^2 = g_{ik} dX^i dX^k = g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial X^k}{\partial q^\beta} dq^\alpha dq^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta. \quad (\text{XII.171})$$

(V případě, že všechny vektory tečné k dané nadploše jsou prostorupodobné, může být vhodné změnit znaménko metrického pole jako v (XII.78). Pro úvahy tohoto odstavce to však není podstatné.)

Na vektorová a tenzorová pole na dané nadploše jsou nyní aplikovatelné vztahy a definice (XII.56) až (XII.70), v nichž jsme nespécifikovali ani transformační matici, ani metrický tenzor. Tato pole můžeme zkoumat v souřadnicích q^α bez odvolání na prostor vyšší dimenze, do něhož je zkoumaná nadplocha vnořena. Studujeme tak vnitřní geometrii dané nadplochy, v níž je metrické pole obecně závislé na souřadnicích. To znamená, že souřadnice jsou křivočaré. Obecně neexistuje transformace, která by dala metrickému poli konstantní hodnoty, tj. samotná nadplocha je zakřivena. Vzhledem k tomu nemáme důvod omezit se na zvláštní třídu souřadnicových soustav s konstantními transformačními koeficienty. Nemůžeme proto beze změny přenést do zakřivených prostorů, jejichž příkladem naše nadplocha je, operace derivování a integrování polí, které jsme zavedli za předpokladu konstantnosti těchto koeficientů.

Základy teorie integrování připomeneme jen v té míře, v níž jsou nezbytné pro pochopení dalšího fyzikálního výkladu.

Při integrování přes oblast nadplochy platí pro její integrační element, sestavený z diferenciálů souřadnic,

$$d\Sigma' = dq'^1 \dots dq'^k = |J| dq^1 \dots dq^k = |J| d\Sigma, \quad (\text{XII.172})$$

kde

$$J = \text{Det} \left(\frac{\partial q'^\alpha}{\partial q^\beta} \right) \quad (\text{XII.173})$$

je jakobián transformace (XII.166). Na druhé straně z transformačního vztahu

$$\tilde{g}'_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\gamma}{\partial q'^\alpha} \frac{\partial q^\delta}{\partial q'^\beta} \tilde{g}_{\gamma\delta} \quad (\text{XII.174})$$

výpočtem determinantu dostaneme

$$\tilde{g}' = \frac{1}{J^2} \tilde{g}, \quad (\text{XII.175})$$

kde \tilde{g} je determinant metrického pole $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ (srov. obdobný vztah (XII.146)). Tudiž integrační element

$$dS = \sqrt{|\tilde{g}|} d\Sigma \quad (\text{XII.176})$$

bude skalárem vůči záměnam souřadnic q^α . Tento element proto hraje úlohu integračního elementu v zakřivených souřadnicích (srov. úlohu $\sqrt{|g|}$ ve vztahu (XII.147)). Integrál z (XII.176) má význam „objemu“ nadplochy

$$S = \int_{\Sigma} \sqrt{|\tilde{g}|} dq^1 \dots dq^k. \quad (\text{XII.177})$$

Povšimněme si, že integrálem tohoto typu je i délka světočáry $X^i(T)$, o níž jsme diskutovali v XII.1. Vzorec (XII.19) lze totiž přepsat jako

$$s = \int \sqrt{|\tilde{g}|} dT = \int \sqrt{\left| g_{ik} \frac{dX^i}{dT} \frac{dX^k}{dT} \right|} dT = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c dT = c\tau. \quad (\text{XII.178})$$

Dále se omezíme na konkrétní případ 3-rozměrné nadplochy ve 4-rozměrném prostoročase. Zde je často důležitý integrál toku vektorového pole nadplochou

$$\int_{\Sigma} A^i n_i dS, \quad (\text{XII.179})$$

kde n_i je pole jednotkové normály k nadploše a dS je dáno vztahem (XII.176). Vektor mající směr normály najdeme podle (XII.145) a (XII.165) jako vektor kolmý ke všem tečným vektorům nadplochy, tj.

$$\nu_i = \epsilon_{ijkl} \frac{\partial X^j}{\partial u} \frac{\partial X^k}{\partial v} \frac{\partial X^l}{\partial w}. \quad (\text{XII.180})$$

Tento vektor musíme normovat. Užitím vztahů (XII.142) a (XII.143) se snadno ukáže, že $\nu_i \nu^i = -\tilde{g}$ a tedy vzhledem k (XII.176)

$$n_i dS = \frac{\nu_i}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \sqrt{|\tilde{g}|} d\Sigma = d\Sigma_i. \quad (\text{XII.181})$$

Je tedy

$$d\Sigma_i = \nu_i d\Sigma = \epsilon_{ijkl} \frac{\partial X^j}{\partial u} \frac{\partial X^k}{\partial v} \frac{\partial X^l}{\partial w} du dv dw \quad (\text{XII.182})$$

nový integrační element sloužící k výpočtu integrálů 2. druhu na rozdíl od integrálů 1. druhu s integračním elementem (XII.176).

Nyní můžeme bez důkazu zformulovat větu Gaussovu–Ostrogradského, která má zásadní význam pro teorii zákonů zachování. Podle této věty platí následující vztah spojující integrál přes oblast Ω s integrálem přes uzavřenou plochu Σ tuto oblast ohraničující

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X^k} P(X^i) d\Omega = \oint_{\Sigma} P(X^i(q^\alpha)) d\Sigma_k. \quad (\text{XII.183})$$

Přitom souřadnice q^α na Σ musejí být voleny tak, aby vektor ν_i směřoval ven z dané oblasti. Gaussova–Ostrogradského věta platí za jistých předpokladů o hladkosti funkce P a hranici oblasti, které jsou ve fyzikálních aplikacích zpravidla splněny. V uvedeném tvaru je (XII.183) větou matematické analýzy, která nezávisí na tom, jak se funkce P chová vzhledem k transformacím souřadnic X^i . V praxi je ovšem nejdůležitější případ, kdy P představuje komponenty vektorového či tenzorového pole s jedním sčítacím indexem, takže

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A^i}{\partial X^i} d\Omega = \oint_{\Sigma} A^i d\Sigma_i, \quad (\text{XII.184})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T^{ik}}{\partial X^k} d\Omega = \oint_{\Sigma} T^{ik} d\Sigma_k. \quad (\text{XII.185})$$

V prvním případě představují dané integrály skalár, v druhém případě volný vektor. Slovy můžeme říci, že integrál z divergence přes oblast se rovná toku přes hranici oblasti.

Gaussova–Ostrogradského věta platí v prostoru libovolné dimenze, tedy i v třírozměrném prostoru, kde se nejčastěji používá ve tvarech

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div} \mathbf{A} d\mathcal{V} = \oint_{\Sigma} \mathbf{A} d\Sigma, \quad (\text{XII.186})$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} d\mathcal{V} = \oint_{\Sigma} T_{\alpha\beta} d\Sigma_\beta, \quad (\text{XII.187})$$

přičemž

$$d\mathcal{V} = dX_1 dX_2 dX_3, \quad d\Sigma_\kappa = \epsilon_{\kappa\lambda\mu} \frac{\partial X_\lambda}{\partial u} \frac{\partial X_\mu}{\partial v} du dv. \quad (\text{XII.188})$$

XII.8 Tenzor energie a hybnosti

Uvažujme nyní o spojitým rozložení a pohybu hmoty. Jeho nejdůležitější charakteristikou je zřejmě hustota hmotnosti, která je podle principu ekvivalence hmotnosti a energie úměrná hustotě energie. Tuto hustotu energie označíme w . Zahrnuje-li veličina w všechny druhy energie, které se v daném systému uplatňují, musí být podle zákona zachování energie její přírůstek za jednotku času v libovolném prostorovém objemu V roven toku energie přes hranici tohoto objemu (směrem dovnitř), tj. musí platit

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial T} dV = - \oint_{\Sigma} s_{\alpha} d\Sigma_{\alpha}, \quad (\text{XII.189})$$

kde jsme jako s_{α} označili prostorový 3-vektor hustoty toku energie. Užitím Gaussovy–Ostrogradského věty (XII.186) převedeme pravou stranu na objemový integrál a protože daný vztah platí pro libovolný objem, dostáváme rovnici kontinuity pro energii

$$\frac{\partial w}{\partial T} + \frac{\partial s_{\alpha}}{\partial X_{\alpha}} = 0. \quad (\text{XII.190})$$

Další dynamickou veličinou charakterizující spojitě rozložení hmoty je hustota hybnosti π_{α} . Budeme předpokládat, že bilanci všech forem hybnosti lze zachytit obdobnou rovnicí jako pro energii — změna každé komponenty hybnosti v objemu V za jednotku času je dána tokem této komponenty přes hranici objemu, tj. platí

$$\int_V \frac{\partial \pi_{\alpha}}{\partial T} dV = - \oint_{\Sigma} \Pi_{\alpha\beta} d\Sigma_{\beta}, \quad (\text{XII.191})$$

kde veličiny $\Pi_{\alpha\beta}$ jsou komponenty prostorového tenzoru. Tento tenzor nazveme hustotou toku hybnosti. Z (XII.191) plyne opět rovnice kontinuity pro hybnost

$$\frac{\partial \pi_{\alpha}}{\partial T} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial X_{\beta}} = 0. \quad (\text{XII.192})$$

Sestavme nyní veličiny w , s_{α} , π_{α} , $\Pi_{\alpha\beta}$ do 4-rozměrné matice takto

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & s_{\alpha}/c \\ c\pi_{\alpha} & \Pi_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.193})$$

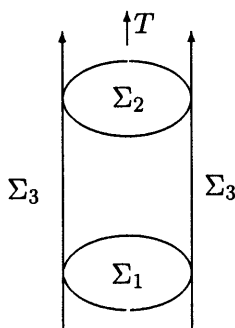
kde indexy i, k probíhají hodnoty 0, 1, 2, 3.

Rovnice kontinuity (XII.190) a (XII.192) můžeme napsat souhrnně jako

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial X^k} = 0, \quad (\text{XII.194})$$

pro $i = 0$ dostáváme (XII.190) a pro $i = \alpha$ (XII.192).

Uvažujme nyní o hmotném systému, který se nachází v jisté oblasti prostoru, takže mimo tuto oblast jsou veličiny T^{ik} rovny nule, tj. v prostoročase jsou veličiny T^{ik} nenulové uvnitř jisté „trubice“, viz obr. 34.



Obr. 34: Světová trubice v čtyřrozměrném prostoročase. Řezy trubici Σ_1, Σ_2 představují oblast třírozměrného prostoru v časech T_1, T_2 , zatímco Σ_3 je třírozměrná nadplocha obsahující události na hranici uvedené oblasti v časovém intervalu od T_1 do T_2 .

Zintegrujme předchozí rovnice kontinuity přes čtyřrozměrnou oblast Ω , jejíž hranice sestává ze dvou nadploch Σ_1, Σ_2 protínajících danou trubici a ze „spojující“ plochy Σ_3 , která trubici „obaluje“, takže veličiny T_{ik} jsou již na ní nulové, popř. klesají k nule se zvětšováním Σ_3 tak rychle, že příslušný příspěvek k integrálu v limitě vymizí. Užitím Gaussovy věty dospíváme k závěru, že má-li být integrál přes hranici oblasti Ω nulový, musejí se rovnat (při souhlasné orientaci normál) integrály přes Σ_1 a Σ_2 , tj. dospějeme k *integrálnímu vyjádření zákona zachování*. Podle něho jsou veličiny

$$K^i = \int_{\Sigma} T^{ik} d\Sigma_k \quad (\text{XII.195})$$

stejně pro všechny plochy Σ . Volíme-li Σ jako prostorový objem v daném okamžiku, přechází (XII.195) v

$$K^i = \int_{\mathcal{V}} T^{i0} d\mathcal{V}, \quad (\text{XII.196})$$

přičemž veličiny K^i se zachovávají v čase. Podle (XII.193) pak je

$$P^i = \frac{1}{c} K^i = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{w}{c}, \pi_\alpha \right) dV = \left(\frac{E}{c}, p_\alpha \right), \quad (\text{XII.197})$$

čili P^i představuje totální čtyřhybnost systému, jehož složkami jsou celková energie (dělená c) a celková hybnost. Protože čtyřhybnost je čtyřvektor, lze předpokládat, že T^{ik} tvoří tenzorové pole (či tenzor v daném bodě prostoročasu). Tento tenzor se nazývá *tenzorem energie a hybnosti daného systému*.

Předpokládejme nyní, že v uvažovaném systému má smysl mluvit o rychlosti každého jeho elementu, takže lze definovat rychlostní pole. V tomto případě lze z toku hybnosti vydělit tok daný unášením hybnosti, přičemž hustota toku α -té komponenty hybnosti je $\pi_\alpha v$. Tenzor hustoty toku hybnosti je ve tvaru

$$\Pi_{\alpha\beta} = \pi_\alpha v_\beta - \tau_{\alpha\beta}, \quad (\text{XII.198})$$

kde $-\tau_{\alpha\beta}$ popisuje tok hybnosti relativní vzhledem ke kontinuu. Rovnici kontinuity (XII.192) pak můžeme rozepsat jako

$$\frac{\partial \pi_\alpha}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_\beta} (\pi_\alpha v_\beta - \tau_{\alpha\beta}) = 0. \quad (\text{XII.199})$$

Tato rovnice se formálně shoduje s pohybovou rovnicí klasické mechaniky kontinua, v níž $\tau_{\alpha\beta}$ má význam tenzoru napětí. Proto budeme $\tau_{\alpha\beta}$ nazývat *tenzorem relativních napětí*, zatímco záporně vzatou úhrnnou hustotu toku hybnosti $\sigma_{\alpha\beta} = -\Pi_{\alpha\beta}$ nazveme *tenzorem absolutních napětí*. Vidíme tedy, že v teorii relativity lze tenzor napětí, tj. plošné síly, interpretovat jako tok hybnosti.

Uvažujme nyní o jistém bodě zkoumané látky v daném okamžiku a zaveďme (lokálně inerciální) vztahný systém tak, aby rychlost v byla v tomto bodě nulová. Zanedbáme-li procesy spojené s přenosem energie ve formě tepla, můžeme předpokládat, že je zde nulová i hustota toku energie a hybnosti. Tenzor energie a hybnosti má tedy ve zvoleném systému tvar

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\tau_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.200})$$

kde ε je hustota energie v uvažovaném klidovém systému — klidová hustota energie — a $\tau_{\alpha\beta}$ je tenzor napětí v klidovém systému. O $\tau_{\alpha\beta}$ lze na základě argumentů podávaných v klasické mechanice kontinua předpokládat, že je

to tenzor symetrický. Proto je symetrickým i tenzor T^{ik} . Tvar T^{ik} lze v libovolném inerciálním systému obdržet z (XII.200) na základě známých transformačních vztahů pro tenzory. Symetrie T^{ik} musí přitom zůstat zachována, což vede k symetrii tenzoru absolutních napětí a k jednoduchému vztahu mezi hustotou hybnosti a hustotou toku energie

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}, \quad \pi_{\alpha} = \frac{1}{c^2} s_{\alpha}. \quad (\text{XII.201})$$

Druhý vztah znamená, že hybnost je tok energie dělený c^2 , tj. tok hmotnosti. Poznamenejme ovšem, že (XII.200) není nejobecnější možný tvar tenzoru energie a hybnosti.

Povšimněme si ještě případu, kdy systém popsán tenzorem energie a hybnosti T^{ik} interaguje s dalšími systémy, o něž se zajímáme pouze z hlediska jejich vlivu na uvažovaný systém a nezahrnujeme proto jejich energie a hybnosti do tenzoru energie a hybnosti T^{ik} . V tomto případě můžeme psát

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial X^k} = f^i, \quad (\text{XII.202})$$

kde čtyřvektor f^i zachycuje vnější vlivy narušující platnost rovnic kontinuity (XII.190) a (XII.192) pro veličiny odvozené pouze z T^{ik} . Tyto rovnice nyní nabudou tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial T} + \frac{\partial s_{\alpha}}{\partial X_{\alpha}} = c f^0, \quad (\text{XII.203})$$

$$\frac{\partial \pi_{\alpha}}{\partial T} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial X_{\beta}} = f^{\alpha}. \quad (\text{XII.204})$$

Porovnáme-li (XII.204) s odpovídajícími rovnicemi klasické mechaniky kontinua, vidíme, že f^{α} má význam hustoty síly působící na systém. Z (XII.203) vidíme, že $c f^0$ je přírůstek energie objemové jednotky za jednotku času způsobený vnějším vlivem, tj. hustota výkonu. Pišme

$$\mathbf{f} = f^i = \left(\frac{\eta}{c}, \mathbf{f} \right), \quad (\text{XII.205})$$

kde η je zmíněná hustota výkonu a \mathbf{f} je prostorová hustota síly. U mechanických procesů platí

$$\eta = \mathbf{f} \mathbf{v}, \quad (\text{XII.206})$$

což má za následek, že čtyřvektor hustoty čtyřsíly f^i je kolmý na čtyřrychlost (srov. (XII.109))

$$\mathbf{f} \mathbf{u} = g_{ik} f^i u^k = 0. \quad (\text{XII.207})$$

U nemechanických procesů se energie dodává nejen ve formě práce podle vztahu (XII.206), ale i ve formě tepla, a proto zde (XII.207) již neplatí. Tyto procesy studovat nebudeme.

Povšimněme si ještě situace, kdy spolu interagují dva systémy vytvářející uzavřený systém, přičemž každý z nich má tenzor energie a hybnosti závislý pouze na svých vlastních parametrech. Pak platí

$$\frac{\partial T_{(1)}^{ik}}{\partial X^k} = -\frac{\partial T_{(2)}^{ik}}{\partial X^k}, \quad \text{tj.} \quad f_{(1)}^i = -f_{(2)}^i. \quad (\text{XII.208})$$

Hustoty sil, kterými na sebe systémy působí, jsou tedy stejné velikosti, ale opačného směru. To můžeme považovat za relativistické vyjádření zákona akce a reakce.

Relativistická teorie polí (např. elektromagnetického pole) ukazuje, že tenzor energie–impulzu může být přiřazen i těmto polím. Pole tak nabývají základních mechanických atributů — jsou nositeli energie a hybnosti, jež se šíří jejich prostřednictvím a mají podobně jako kontinuum tenzor napětí.

XII.9 Pohybové rovnice ideální tekutiny

U ideální tekutiny neexistují v klidovém systému jejího libovolného elementu smykové síly a tlak p je zde podle Pascalova zákona ve všech směrech stejný. V tomto klidovém systému je

$$\tau_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{XII.209})$$

Tenzor energie a hybnosti má v něm tedy tvar

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (\text{XII.210})$$

což můžeme zapsat pomocí čtyřrychlosti $u^i = (1, 0, 0, 0)$ jako

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - p g^{ik}. \quad (\text{XII.211})$$

Protože p , ε jsou podle definice veličiny nezávislé na výběru souřadnicové soustavy (hustota energie a tlak v klidovém systému), platí zápis tenzoru

energie a hybnosti (XII.211) v libovolné soustavě. Vypíšeme veličiny w , s_α , π_α , $\Pi_{\alpha\beta}$ podle (XII.193). Máme

$$w = \frac{\varepsilon + \frac{pv^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad s_\alpha = c^2 \pi_\alpha = \frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v_\alpha, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \pi_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{XII.212})$$

Zapišme nyní rovnice (XII.202) pro tenzor energie a hybnosti (XII.211). Je

$$T^{ik}{}_{,k} = (\varepsilon u^k)_{,k} u^i + \varepsilon u^i{}_{,k} u^k - [p(g^{ik} - u^i u^k)]_{,k} = f^i. \quad (\text{XII.213})$$

Přítom pro stručnější zápis užíváme opět (XII.152). Tyto rovnice můžeme přepsat do jednoduššího tvaru. Vynásobíme-li je u_i a uijeme-li vztahů

$$u^i u_i = 1, \quad (u^i u_i)_{,k} = 2u^i{}_{,k} u_i = 0 \quad (\text{XII.214})$$

a omezíme-li se na mechanické procesy, při nichž je $f^i u_i = 0$, dostáváme

$$(\varepsilon u^k)_{,k} + p u^k{}_{,k} = 0. \quad (\text{XII.215})$$

Dosazením do (XII.213) s využitím vztahu (XII.148), tj.

$$u^i{}_{,k} u^k = \frac{du^i}{ds}, \quad (\text{XII.216})$$

obdržíme

$$(\varepsilon + p) \frac{du^i}{ds} = p_{,k} (g^{ik} - u^i u^k) + f^i. \quad (\text{XII.217})$$

Vynásobením (XII.217) čtyřrychlostí u^i dostáváme (pro mechanické procesy) identitu $0 = 0$. To znamená, že čtyři rovnice (XII.217) nejsou nezávislé. Jako neznámé vystupují v těchto rovnicích tři nezávislé komponenty čtyřrychlosti, hustota energie a tlak. Počet nezávislých rovnic je proto i po doplnění rovnicí (XII.215) nedostatečný k určení pohybu systému a musíme ještě dodat stavovou rovnici tekutiny

$$\varepsilon = \varepsilon(p), \quad (\text{XII.218})$$

která může být zjištěna experimentálně.

Limitním případem ideální tekutiny je *nekoherentní látka* (prach), v níž je tlak nulový (tj. jsou zanedbatelné vnitřní síly „krátkého dosahu“). Předpokládáme-li, že nulové jsou i síly f^i , zjednoduší se (XII.215) a (XII.217) na tvar

$$(\varepsilon u^k)_{,k} = 0, \quad \frac{du^i}{ds} = 0. \quad (\text{XII.219})$$

Rozeberme si význam těchto rovnic. Pro vysvětlení první z nich zavedeme (navíc k hustotě energie w a klidové hustotě energie ε) ještě hustotu klidové energie η jako množství klidové energie na jednotkový objem inerciálního systému, vůči němuž se zkoumaná látka obecně pohybuje. V případě nulového tlaku je mezi uvedenými hustotami vztah

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} w, \quad (\text{XII.220})$$

což plyne ze vztahu pro objem (XI.71) a z (XII.212) pro nulový tlak. První z uvažovaných rovnic lze pak zapsat jako

$$(\eta v_\alpha)_{,\alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial T} = 0, \quad (\text{XII.221})$$

což je rovnice kontinuity. Lze tedy dospět k integrálnímu zákonu zachování veličiny

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon u^0 dV = \int_{\mathcal{V}} \eta dV, \quad (\text{XII.222})$$

která má význam úhrnné klidové energie systému.

Druhou rovnici (XII.219) prepíšeme na základě definice čtyřrychlosti na tvar

$$\frac{d^2 X^i}{ds^2} = 0, \quad (\text{XII.223})$$

který zřejmě vyjadřuje skutečnost, že elementy nekoherentní hmoty se v nepřítomnosti vnějších sil pohybují rovnoměrně a přímočaře.

Pro srovnání s klasickými rovnicemi mechaniky ideálních tekutin je výhodnější přepsat rovnice (XII.217) a (XII.215) do třírozměrného tvaru pomocí obyčejných rychlostí v_α . Namísto klidové hustoty energie zavedeme ekvivalentní hustotu hmotnosti $\mu_0 = \varepsilon/c^2$. Po nepříliš obtížném přepočtu dostaneme

$$\gamma^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dT} = -\text{grad } p - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial T} + \mathbf{f}, \quad (\text{XII.224})$$

$$\gamma \frac{d\mu_0}{dT} + \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} + \operatorname{div} \gamma \mathbf{v} \right) = 0 . \quad (\text{XII.225})$$

Tyto rovnice zjednodušíme předpokladem, že \mathbf{v}/c lze zanedbat, tj. že jde o pomalý pohyb. Podle prvního vztahu (XII.212) pak není třeba rozlišovat mezi veličinou μ_0 a obyčejnou hustotou hmotnosti $\mu = w/c^2$. Je tedy

$$\left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dT} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} , \quad (\text{XII.226})$$

$$\frac{d\mu}{dT} + \left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{XII.227})$$

Rovnice (XII.227) se liší od Eulerových rovnic nerelativistické mechaniky kontinua již jen tím, že v nich na místě hustoty μ stojí veličina $\mu + p/c^2$. Jsou-li navíc tlaky malé, lze zanedbat i p/c^2 a naše rovnice přecházejí na tvar

$$\mu \frac{d\mathbf{v}}{dT} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} , \quad (\text{XII.228})$$

$$\frac{d\mu}{dT} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \mu}{\partial T} + \operatorname{div} \mu \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{XII.229})$$

V rovnicích (XII.228) a (XII.229) rozeznáváme Eulerovy rovnice (VII.167) a rovnici kontinuity (VII.166) v klasickém tvaru. Znovu se tak přesvědčujeme o tom, že limitním případem rovnic teorie relativity jsou rovnice newtonovské fyziky.

Poznamenejme na závěr, že relativistické rovnice pohybu ideální tekutiny nejsou jen čistě teoretickou záležitostí, jak by se mohlo na první pohled zdát. Tyto rovnice mají důležité aplikace v astrofyzice a v kosmologii v situacích, kdy nerelativistické přiblížení je zcela nedostatečné.

XII.10 Variační princip v relativistické mechanice

Známe již velký význam variačního principu pro jednoduchou formulaci zákonů klasické mechaniky a pro účinné řešení jejích problémů. Podobný a patrně ještě větší význam má variační formulace i v relativistických teoriích. Požadavek relativistické invariance je zde spolehlivým vodítkem na cestě k nalezení správné teorie. Vyjádření fyzikálních zákonů pomocí variačního principu se vyznačuje stručností a matematickou elegancí. Kromě toho teoretická fyzika ukazuje na hlubší souvislosti mezi variačními principy, symetriemi fyzikálních zákonů a zákony zachování. Tato souvislost zůstává

v plné platnosti i v teorii relativity a lze jí využít při rozvíjení a zobecňování teorií stejně jako při řešení konkrétních úloh.

Rozsah našeho textu nám dovoluje zabývat se pouze variačním principem pro pohyb částice ve vnějším poli, tedy úlohou, kterou jsme již řešili v rámci klasické mechaniky. Stejně jako tam půjde o to, porovnat všechny možné pohyby dané částice v silovém poli, kterými lze spojit zadanou počáteční a koncovou polohu částice v zadaném počátečním a koncovém čase. Skutečný pohyb částice se vyznačuje minimálností akce, která může být v klasické mechanice zapsána jako časový integrál Lagrangeovy funkce.

Zabývejme se nejprve relativistickou akcí volné částice. Protože v relativistické fyzice je pohyb částice popsán její světočarou, je přirozené předpokládat, že akce S je úměrná invariantní délce světočáry, přičemž koeficient úměrnosti je funkcí klidové hmotnosti částice m_0 , která je skalárem. Je tedy

$$S = \int_{s_1}^{s_2} K(m_0) ds . \quad (\text{XII.230})$$

Minimální hodnotu tohoto funkcionálu hledáme na třídě parametrizovaných světočar $X^i = X^i(\sigma)$, kde $X^i = X^i(\sigma_1)$, $X^i = X^i(\sigma_2)$ jsou pevně zadány, tj. světočáry mají společný počáteční a koncový bod. Pak je

$$S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} K \sqrt{g_{ik} \frac{dX^i}{d\sigma} \frac{dX^k}{d\sigma}} d\sigma . \quad (\text{XII.231})$$

Volíme-li speciálně za parametr čas T , dostáváme zápis akce pomocí třírozměrné rychlosti v

$$S = \int_{T_1}^{T_2} K c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT . \quad (\text{XII.232})$$

K určení K můžeme nyní užít požadavku korespondence s klasickou mechanikou, kde Lagrangeovou funkcí volné částice je její kinetická energie $m_0 v^2/2$. Rozvineme Lagrangeovu funkci z (XII.232) do Taylorovy řady podle výrazu v/c a obdržíme tak

$$K c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = K c - \frac{K}{2c} v^2 + \dots . \quad (\text{XII.233})$$

První konstantní člen nepřispívá k pohybovým rovnicím a druhý se musí rovnat klasické kinetické energii, takže je

$$K = -m_0 c . \quad (\text{XII.234})$$

Získáme

$$S = -m_0c \int ds = -m_0c^2 \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT. \quad (\text{XII.235})$$

Lagrangeova funkce částice je tedy v třírozměrné formulaci teorie relativity

$$L = -m_0c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{XII.236})$$

Podle vztahů Lagrangeovy teorie plyne pro hybnost částice

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{XII.237})$$

a pro její energii

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{XII.238})$$

což jsou známé relativistické vzorce (XI.109) a (XI.119).

Ve čtyřrozměrné formulaci je výhodné použít k parametrizaci intervalu s , takže

$$S = -m_0c \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ik}u^i u^k} ds, \quad (\text{XII.239})$$

kde $u^i = dX^i/ds$ značí čtyřrychlost splňující vztah $g_{ik}u^i u^k = 1$. Lagrangeova funkce vzhledem k intervalu je pak

$$\mathcal{L} = -m_0c \sqrt{g_{ik}u^i u^k}. \quad (\text{XII.240})$$

Uvažujme nyní o interakci částice s polem. Jako jeden z nejprostších typů interakce se z hlediska relativistické invariance nabízí působení čtyřvektorového pole na částici s akcí

$$S_{\text{int}} = K_{\text{int}} \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{A}_i u^i ds. \quad (\text{XII.241})$$

Označíme-li komponenty pole \mathcal{A}_i jako

$$\mathcal{A}_i = (\varphi, -c\mathbf{A}), \quad (\text{XII.242})$$

máme v třírozměrném tvaru

$$S_{\text{int}} = K_{\text{int}} c \int_{T_1}^{T_2} (\varphi - \mathbf{A}\mathbf{v}) dT . \quad (\text{XII.243})$$

Zvolíme-li konstantu úměrnosti

$$K_{\text{int}} = -\frac{e}{c} , \quad (\text{XII.244})$$

dostáváme akci elektrického náboje e v elektromagnetickém poli o skalárním potenciálu φ a vektorovém potenciálu \mathbf{A} , jak je nám již známa z části A. Vidíme tedy, že klasický výraz pro interakční část akce v elektromagnetickém poli lze zachovat i v teorii relativity, takže tato akce je

$$L\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dT}, T\right) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e(\mathbf{A}\mathbf{v} - \varphi) , \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dT} , \quad (\text{XII.245})$$

v třírozměrném a

$$\mathcal{L}\left(X^i, \frac{dX^i}{ds}\right) = -m_0 c \sqrt{g_{ik} u^i u^k} - \frac{e}{c} \mathcal{A}_i u^i , \quad u^i = \frac{dX^i}{ds} , \quad (\text{XII.246})$$

ve čtyřrozměrném zápisu.

Odtud lze získat relativistické pohybové rovnice náboje v elektromagnetickém poli jako příslušné Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dT} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0 . \quad (\text{XII.247})$$

V prvním případě jsou to rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}}{dT} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (\text{XII.248})$$

kde

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} , \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} . \quad (\text{XII.249})$$

Od rovnic klasické mechaniky se tyto rovnice liší jen tím, že \mathbf{p} je relativistická hybnost.

V druhém případě dostaneme

$$m_0 c^2 g_{ik} \frac{du^k}{ds} = e F_{ik} u^k , \quad (\text{XII.250})$$

kde

$$F_{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial X^i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial X^k} \quad (\text{XII.251})$$

je tenzor elektromagnetického pole, jehož komponenty lze vyjádřit pomocí elektrické intenzity \mathbf{E} a magnetické indukce \mathbf{B} . Jak si lze snadno ověřit, obsahují rovnice (XII.250) oproti rovnicím (XII.248) navíc ještě vztah pro změnu relativistické energie \mathcal{E} částice v poli

$$\frac{d\mathcal{E}}{dT} = e\mathbf{E}\mathbf{v} . \quad (\text{XII.252})$$

Úplná relativistická teorie elektromagnetické interakce by si žádala ještě znalost zákonů, podle nichž se elektromagnetické pole mění a je ovlivňováno přítomností pohybujících se nábojů. Tím bychom však již překročili hranice mechaniky.

XII.11 Příklady

1. Najděte transformační zákon pro složky symetrického tenzoru T^{ik} při speciální Lorentzově transformaci (XI.42).

Řešení: Vydeme z transformačního vztahu

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} T^{lm} \quad (\text{XII.253})$$

a obdržíme tak (využitím symetrie T^{ik})

$$T'^{00} = \frac{T'^{00} + 2\frac{V}{c}T'^{01} + \frac{V^2}{c^2}T'^{11}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad T'^{22} = T'^{22},$$

$$T'^{01} = \frac{T'^{01} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{V}{c}T'^{00} + \frac{V}{c}T'^{11}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad T'^{02} = \frac{T'^{02} + \frac{V}{c}T'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{XII.254})$$

a podobným postupem dostaneme ostatní složky.

2. Ukažte, že není možné, aby izolovaný volný elektron absorboval nebo emitoval foton.

Řešení: Zákon zachování úhrné čtyřhybnosti nám dává

$$\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_e = \mathbf{P}'_e, \quad (\text{XII.255})$$

kde \mathbf{P}_γ je čtyřhybnost fotonu, \mathbf{P}_e a \mathbf{P}'_e jsou čtyřhybnosti elektronu před a po uvažované události. Umocníme obě strany rovnice a dostáváme

$$\mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\gamma + 2\mathbf{P}_e \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{P}'_e \mathbf{P}'_e, \quad (\text{XII.256})$$

protože však $\mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\gamma = 0$ a $\mathbf{P}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{P}'_e \mathbf{P}'_e$, je $\mathbf{P}_e \mathbf{P}_\gamma = 0$. Ale v klidové soustavě elektronu před danou událostí, kde

$$\mathbf{P}_e = (m_e c, \mathbf{0}), \quad \mathbf{P}_\gamma = (E/c, \mathbf{p}),$$

by musela být energie fotonu nulová, tj. nemohl by to být foton, což je spor. Proto takový proces není možný.

Příklady k samostatnému řešení

1. Nechť F^{ik} je antisymetrické tenzorové pole. Dokažte, že platí

$$F_{m,l}^i F^l_i = -F_{mi,k} F^{ik}.$$

(Čárka označuje parciální derivaci.)

2. Ukažte, že komponenty Kroneckerova symbolu δ_i^j tvoří tenzor, popř. tenzorové pole, a to vzhledem k libovolné transformaci souřadnic.

3. Ukažte, že křivka

$$\begin{aligned} x &= \int r \cos \theta \cos \phi \, d\lambda, \\ y &= \int r \cos \theta \sin \phi \, d\lambda, \\ z &= \int r \sin \theta \, d\lambda, \\ t &= \int r \, d\lambda, \end{aligned}$$

kde r , θ a ϕ jsou libovolné funkce parametru λ (afinní parametr, například vlastní čas), je nulovou křivkou, tj. interval počítaný podél této křivky je nulový.

4. Nechť se dvě soustavy pohybují rychlostmi \mathbf{V}_1 a \mathbf{V}_2 (třírozměrné rychlosti). Ukažte, že jejich relativní rychlost je daná vztahem

$$V^2 = \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)^2 - \frac{(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)^2}{c^2}}{(1 - \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2)^2}.$$

XIII MECHANIKA V OBEČNÉ TEORII RELATIVITY

Obecná teorie relativity (1915) je výsledkem Einsteinovy snahy nalézt relativistický tvar gravitačního zákona. Ukázalo se, že to vyžaduje podstatný krok za hranice speciální teorie relativity — zavedení *zakřiveného prostoročasu*. Na tomto základě vznikla teorie gravitace, která je dodnes v naprostém souladu s experimenty a aplikuje se s úspěchem v astrofyzice i v kosmologii.

Nebudeme se zabývat touto teorií v celé šíři, ale omezíme se na její „mechanickou“ stránku: pohyby částic s nenulovou i s nulovou klidovou hmotností v gravitačním poli. Ukážeme nejprve myšlenkové zdroje a matematický aparát obecné teorie relativity. Uvedeme *Einsteinovy gravitační rovnice* a jejich vztah k Newtonovu gravitačnímu zákonu. Seznámíme se s řešením těchto rovnic pro případ centrálně symetrického zdroje — *Schwarzschildovo řešení* — a ukážeme, jak se pohyb částic a fotonů v tomto řešení liší od předpovědí newtonovské teorie.

XIII.1 Gravitační pole v nerelativistické mechanice

Z Keplerových zákonů založených na pozorování pohybů planet Sluneční soustavy Newton vyvodil gravitační zákon ve tvaru

$$\mathbf{F} = -k \frac{M_1 M_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (\text{XIII.1})$$

kde k značí (Newtonovu) gravitační konstantu, M_1 , popř. M_2 , udávají *tíhové* (těžké, gravitační) hmotnosti zdroje síly (XIII.1), popř. jejího detektoru (zkušební částice). Tyto hmotnosti mají v rámci newtonovské teorie obdobný význam jako náboje v Coulombově zákonu elektrostatiky.

Působí-li na uvažovanou částici gravitační pole, udílí jí zrychlení \mathbf{a} , které se silou (XIII.1) souvisí vztahem

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{a}, \quad (\text{XIII.2})$$

kde m_2 značí *setrvačnou* hmotnost částice. Uvažovaná částice nechť se nachází na povrchu Země mající poloměr R a těžkou hmotnost M_1 . Pro poměr

těžké hmotnosti M_2 a setrvačné hmotnosti m_2 uvažované částice z předchozího textu snadno obdržíme, že

$$\frac{M_2}{m_2} = g \frac{R^2}{kM_1}. \quad (\text{XIII.3})$$

Výraz R^2/kM_1 je stejný pro všechny možné takovéto zkušební částice v tomto místě se nacházející, a to zcela bez ohledu na jejich různá složení, tvar apod. Z (XIII.3) je poté patrné, že poměr těžké a setrvačné hmotnosti částice je určen výlučně jejím gravitačním zrychlením. Nebude-li toto zrychlení záviset ani na složení částic, ani na jejich tvaru apod., bude poměr na levé straně konstantní. Můžeme pak volit pro těžkou a setrvačnou hmotnost stejnou jednotku a psát

$$m = M \quad (\text{XIII.4})$$

a lze hovořit o ekvivalenci hmotnosti těžké a setrvačné. Zda a proč je tomu tak, nemůže newtonovská teorie gravitace objasnit. Experimenty prověřující, jak přesně je rovnost (XIII.4) splněna, se mnohokrát realizovaly vlastně již od dob Newtonových. Ve skupinách R. Dickeho a V. Braginského se v průběhu šedesátých a sedmdesátých let našeho století podařilo dosáhnout obdivuhodné přesnosti a díky jim dnes víme, že

$$\frac{m}{M} = 1 \pm 2.10^{-12}.$$

V inerciální soustavě K (ct, X, Y, Z) nechť se zkušební částice nachází v homogenním gravitačním poli intenzity \mathbf{g} . Pohyb tohoto bodu je zde popsán rovnicí

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dT^2} = M \mathbf{g}. \quad (\text{XIII.5})$$

Od inerciální soustavy K přejdeme k rovnoměrně zrychlené (neinerciální) soustavě S (ct, x, y, z) pomocí transformace

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2, \quad t = T, \quad (\text{XIII.6})$$

kde \mathbf{g} značí konstantní vektor. Z (XIII.5) poté obdržíme, že

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = M \mathbf{g} - m \mathbf{g}, \quad (\text{XIII.7})$$

a bude-li platit (XIII.4), pak v S bude

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (\text{XIII.8})$$

Silový gravitační člen $M\mathbf{g}$ v (XIII.5) se tak plně zkompenzoval polem setrvačné síly $(-m\mathbf{g})$ vzniklým přechodem k neinerciální soustavě S .

Pozorovatel nacházející se v neinerciální soustavě S určené transformačními vztahy (XIII.6) nezjistí tudíž žádný rozdíl v zákonech mechaniky ve srovnání s případem, že by se nacházel v inerciální soustavě bez gravitačního pole. Můžeme tedy říci, že působení homogenního gravitačního pole lze zrušit, přejdeme-li do soustavy volně v tomto gravitačním poli padající.

Nebude-li gravitační pole homogenní, půjde-li například o gravitační pole Země, předchozí závěry budou patrně platit jen v malých prostorových oblastech a krátkých časových intervalech, a to takových, že pole v nich lze považovat za homogenní. Zcela přesně platí v daném bodě prostoročasu, kde lze vždy dosáhnout vymizení intenzity gravitačního pole podle (XIII.8). Říkáme proto, že gravitační pole lze zrušit lokálně. Toto jeho zrušení znamená přechod k lokálně inerciálnímu systému. Původní systém s gravitačním polem se tedy projevuje jako systém neinerciální. Pozorovatel v kabině rakety, která se pohybuje v prostoru bez gravitace zrychleně vlivem tažné síly, si může vykládat výsledky svých pozorování pohybu volných částic tím, že se kabina nachází v klidu v gravitačním poli. Lze proto vyslovit princip tzv. *lokální ekvivalence*: *Neinerciální vztahná soustava je lokálně ekvivalentní nějakému gravitačnímu poli.*

XIII.2 Gravitační pole v relativistické mechanice

Vyděme z experimentálního faktu rovnosti těžké a setrvačné hmotnosti a z principu lokální ekvivalence. Znamená to, jak jsme uvažili, že v okolí každého bodu prostoročasu lze zavést tzv. *lokálně inerciální systém*.

Nechť K značí takový lokální inerciální systém a přejdeme od něho transformací souřadnic k jinému systému S , který již nebude inerciálním ani v okolí uvažovaného (prostoročasového) bodu. Takovou transformaci píšme ve tvaru

$$X^i = X^i(x^k), \quad (\text{XIII.9})$$

kde se souřadnice X^i vztahují k soustavě K a souřadnice x^k k soustavě S . Funkce $X^i(x^k)$ nechť jsou spojitě a dostatečně hladké, jakobián transformace (XIII.9) nechť je nenulový, takže existuje transformace inverzní. Diferencováním (XIII.9) a dosazením do $ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$ dospějeme pro čtverec intervalu k výrazu

$$ds^2 = g_{ik}(x^l) dx^i dx^k, \quad (\text{XIII.10})$$

kde $g_{ik}(x^l)$ jsou funkce prostorových souřadnic x^α a časové souřadnice x^0 . Podle principu lokální ekvivalence jsou silová pole v neinerciálních soustavách lokálně ekvivalentní gravitačnímu poli. Z (XIII.10) vidíme, že neinerciálnost systému (tj. silová pole, která se v něm objeví) je popsána 10 funkcemi souřadnic $g_{ik}(x^m)$. Podle principu lokální ekvivalence musíme předpokládat, že v relativistické teorii gravitace je veličinami $g_{ik}(x^m)$ popsáno gravitační pole. Přitom však nemusí existovat v celém prostoročase (ani v jeho konečné oblasti) transformace souřadnic, kterou by metrické pole získalo hodnoty

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{XIII.11})$$

tj. není možné zrušit gravitační pole globálně. To znamená, že geometrie prostoročasu s gravitačním polem se liší od geometrie Minkowskiho, ve kterou přechází pouze lokálně.

Prostoročas s gravitačním polem je tedy zakřivený na rozdíl od plochého prostoročasu speciální teorie relativity. Nadále budeme vycházet z toho, že gravitační pole je popsáno deseti funkcemi $g_{ik}(x^m)$, komponentami *pole metrického tenzoru* (metrikou) prostoročasu.

XIII.3 Tenzorová pole v křivočarých souřadnicích. Lokálně geodetická soustava

Z předchozího výkladu je vidět, že se musíme zabývat souřadnicovými soustavami, v nichž jsou komponenty metrického tenzoru g_{ik} funkcemi souřadnic. Souřadnicím, ve kterých tyto komponenty nemají konstantní hodnoty, říkáme *křivočaré souřadnice*. Není-li možné dát jim konstantní hodnoty ani přechodem k jiným souřadnicím, říkáme, že je zakřiven příslušný prostor. S kritériem zakřivenosti prostoru se seznámíme později v XIII.7. Zatím budeme studovat geometrii v zakřivených souřadnicích bez ohledu na to, zda sám prostor je plochý či zakřivený.

S některými prvky geometrie v zakřivených souřadnicích jsme se již seznámili. Uveďme nyní konkrétní příklad z oblasti euklidovské geometrie 3-rozměrného prostoru. Nechť ve vzorci (XII.162) probíhají indexy i a α hodnoty 1, 2, 3 a je $X^i = (X, Y, Z)$, $q^\alpha = (r, \varphi, \vartheta)$, přičemž

$$X = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$\begin{aligned} Y &= r \sin \varphi \sin \vartheta, \\ Z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{XIII.12})$$

S výjimkou osy Z , kde neexistuje inverzní transformace, přiřazuje (XIII.12) každému bodu prostoru jeho polární souřadnice (r, φ, ϑ) . Euklidovské metrické pole můžeme v těchto souřadnicích zapsat jako

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dr^2 + r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2). \quad (\text{XIII.13})$$

Komponenty metrického pole jsou tedy $g_{rr} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta$, $g_{\vartheta\vartheta} = r^2$, ostatní se rovnají nule. K témuž výsledku bychom zřejmě došli i užitím transformačních vztahů (XII.64) pro komponenty tenzoru s transformační maticí $c_\alpha^i = \partial X^i / \partial q^\alpha$. Zajímejme se nyní o kulovou plochu o jednotkovém poloměru, tj. položíme $r = 1$, $dr = 0$, z (XIII.13) pak dostáváme, že

$$ds^2 = \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2. \quad (\text{XIII.14})$$

Vztah (XIII.14) udává metrické pole na kouli v souřadnicích φ a ϑ . Souřadnicové čáry odpovídající konstantnímu ϑ jsou rovnoběžky, konstantnímu φ odpovídají poledníky. Souřadnicová soustava neobsahuje póly, kde se poledníky protínají. Kulová plocha je příkladem zakřiveného prostoru, kde zavedení kartézských souřadnic není možné. Není dokonce ani možné pokrýt celou kouli jediným systémem souřadnic. Geometrie zakřivených prostorů, v nichž lze lokálně zavést souřadnice s metrickým polem na těchto souřadnicích závislým, se nazývá *riemannovská geometrie*. Není přitom nutné, aby tyto prostory byly nadplochami vnořenými do Euklidova prostoru vyšší dimenze.

Nyní se obraťme k čtyřrozměrnému prostoročasu. Vezměme si nejprve příklad plochého prostoročasu s pseudokartézskými souřadnicemi X^i . Položíme $\mathbf{g} = (g, 0, 0)$ a uijme transformace k zrychlenému systému podle (XIII.6). Tak dostaneme

$$\begin{aligned} -ds^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 - (cdT)^2 = \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2gt}{c} dx d(ct) - \left(1 - \frac{g^2 t^2}{c^2}\right) (cdt)^2. \end{aligned} \quad (\text{XIII.15})$$

Jsou-li novými souřadnicemi x, y, z, ct , má v nich metrické pole komponenty

$$g_{ik}(x, y, z, ct) = \begin{pmatrix} 1 - g^2 t^2 / c^2 & -gt/c & 0 & 0 \\ -gt/c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XIII.16})$$

V obecné situaci je metrické pole funkcí čtyř souřadnic x^0, x^1, x^2, x^3 . Souřadnice jsou zpravidla voleny tak, že tečné vektory k souřadnicovým čarám x^0 jsou časopodobné, zatímco ke zbývajícím souřadnicovým čarám prostorupodobné. To znamená, že čáry $x^\alpha = \text{konst}$ mohou být světočarami hmotných bodů, kdežto nadplochy $x^0 = \text{konst}$ jsou tvořeny událostmi absolutně odlehlými. Můžeme užívat transformací souřadnic

$$x'^i = x'^i(x^k) \quad (\text{XIII.17})$$

s nenulovým jakobiánem a dostatečnou hladkostí, při nichž se komponenty tenzorových polí transformují podle vztahů typu (XII.134) s transformačními maticemi

$$c_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad d_i^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}. \quad (\text{XIII.18})$$

Pro libovolný bod (událost) prostoročasu lze najít třídu souřadnicových soustav, které mají jisté význačné vlastnosti. Především je možné lineárními transformacemi souřadnic dospět k ortonormální bázi v daném bodě, tj. k metrickému tenzoru (XII.39). Předpokládejme, že již máme souřadnice x^i o této vlastnosti. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v dané události (v daném bodě) nabývají nulových hodnot (Ize toho dosáhnout posunutím počátku). Hledejme nyní nové souřadnice X^i jako kvadratické funkce x^i , tj.

$$X^i = \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i x^k x^l, \quad \Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i, \quad (\text{XIII.19})$$

tak, aby v souřadnicích X^i byly nulové první derivace metrického pole, tj. aby v malém okolí daného bodu bylo metrické pole (přibližně) konstantní. Taková soustava bude zřejmě maximálním přiblížením k pseudokartézské soustavě souřadnic v plochem prostoročase⁵⁹. Nazveme ji *soustavou lokálně geodetickou*.

V bodě $x^i = 0$ zřejmě platí

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \quad (\text{XIII.20})$$

a protože z (XIII.20) plyne, že

$$0 = \frac{\partial}{\partial X^i} \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial X^s} \right) = \Gamma_{is}^j + \frac{\partial^2 x^j}{\partial X^s \partial X^i}, \quad (\text{XIII.21})$$

⁵⁹ Poznamenejme, že geometrii plochého prostoročasu proto nazýváme *pseudoeuklidovskou* a geometrii zakřiveného prostoročasu *pseudoriemannovskou*.

platí

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial X^s \partial X^i} = -\Gamma_{si}^j. \quad (\text{XIII.22})$$

Podmínka nulovosti derivací g_{ik} v souřadnicích X^j vzhledem k transformačním vztahům pro g_{ik} dává

$$0 = \frac{\partial g_{ik}(X^s)}{\partial X^l} = \frac{\partial \left(g_{ab}(x^s) \frac{\partial x^a}{\partial X^i} \frac{\partial x^b}{\partial X^k} \right)}{\partial X^l}, \quad (\text{XIII.23})$$

což vzhledem k (XIII.20) a (XIII.22) vede ke vztahu

$$g_{ik,l} = g_{ak} \Gamma_{il}^a + g_{ai} \Gamma_{kl}^a. \quad (\text{XIII.24})$$

Cyklickou záměnou indexů získáme analogické rovnice pro $g_{li,k}$ a $g_{kl,i}$. Jestliže první z těchto rovnic přičteme k (XIII.24) a druhou od (XIII.24) odečteme, dostaneme po jednoduché úpravě užívající (XII.51)

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{lm,k} - g_{kl,m}). \quad (\text{XIII.25})$$

Tím je nalezen konkrétní tvar transformace (XIII.17) k lokálně geodetické soustavě. Veličiny Γ_{kl}^i se nazývají *Christoffelovy symboly*⁶⁰. Představují soustavu 40 funkcí prostoročasových souřadnic. V lokálně geodetické soustavě jsou tyto funkce rovny nule. Z toho vidíme, že nejsou složkami tenzoru, protože tenzor nulový v jedné soustavě musí být nulový ve všech soustavách. Lze říci, že Christoffelovy symboly jsou mírou odchylky soustavy od lokální geodetičnosti, tj. mírou zakřivenosti souřadnicového systému.

Zabývejme se nyní otázkou derivování tenzorových polí v křivočarých souřadnicích. Víme již, že derivace tenzorového pole podle souřadnic se nechová jako tenzorové pole vzhledem k obecným (nelineárním) transformačním souřadnic. Můžeme však definovat tenzorové pole, jehož složkami jsou derivace v lokálně geodetické soustavě. Tuto tzv. *kovariantní derivaci* budeme značit středníkem, tj. položíme

$$A_{i;j} = \frac{\partial A_i(X^s)}{\partial X^j}, \quad (\text{XIII.26})$$

a podobně pro libovolné tenzorové pole. Pro nalezení složek pole (XIII.26) v souřadnicích x^i uijeme transformačního zákona pro vektor

$$\frac{\partial A_i(X^s)}{\partial X^j} = \frac{\partial \left(A_k(x^s) \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \right)}{\partial X^j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k, \quad (\text{XIII.27})$$

⁶⁰ Připomeňme si, že jsme se s nimi již setkali v souvislosti se zavedením křivočarých souřadnic v euklidovském prostoru v části B.

kde jsme opět užili (XIII.20) a (XIII.22). V obecných souřadnicích x^i se tedy kovariantní derivace vektoru vyjádří jako

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma_{ij}^k A_k, \quad (\text{XIII.28})$$

kde čárkou značíme obyčejnou derivaci.

Obdobně lze obdržet vztahy pro skalární, kontravariantní vektorové pole a smíšené tenzorové pole

$$\varphi_{;i} = \varphi_{,i}, \quad A^i_{;j} = A^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} A^k, \quad (\text{XIII.29})$$

$$S^i_{k;l} = S^i_{k,l} + \Gamma^i_{kj} S^j_l - \Gamma^s_{kl} S^i_s. \quad (\text{XIII.30})$$

Odtud je již patrné, jak by se vyjádřila kovariantní derivace tenzorového pole libovolného řádu. Kovariantní derivace metrického pole je podle definice rovna jeho obyčejné derivaci v lokálně geodetické soustavě, tj. nule,

$$g_{ik;l} = 0. \quad (\text{XIII.31})$$

Nyní je zřejmé, že diferenciální tenzorové rovnice speciální teorie relativity, platné v pseudokartézských souřadnicích, platí i v obecných souřadnicích křivočarých, nahradíme-li v nich obyčejné derivace derivacemi kovariantními. Například zákony zachování energie a hybnosti v diferenciálním tvaru lze přepsat jako

$$T^{ik}_{;k} = 0. \quad (\text{XIII.32})$$

Zobecněním principu lokální ekvivalence neinerciální (tj. křivočaré) soustavy a gravitačního pole dospíváme k závěru, že tento tvar si rovnice podrží i v případě, že prostor je zakřiven a pseudokartézské souřadnice v něm nelze zavést. Vliv gravitace na fyzikální systémy se tedy zachytí záměnou obyčejných derivací za kovariantní. Lze také říci, že rovnice speciální teorie relativity zůstávají v platnosti v lokálně geodetické soustavě, což představuje nové obecnější vyjádření principu ekvivalence.

V předešlém výkladu, zejména v speciální teorii relativity, jsme se ještě setkávali s derivací vektorového pole podél světočáry. Obecněji je možné v pseudokartézských souřadnicích plochého prostoročasu zavést derivaci vektorového pole A^i podél parametrizované křivky $X^i(\lambda)$ jako

$$\frac{dA^i}{d\lambda} = \frac{\partial A^i}{\partial X^j} \frac{dX^j}{d\lambda}, \quad (\text{XIII.33})$$

kde $dX^j/d\lambda$ je tečný vektor k parametrizované křivce. V obecných souřadnicích výraz (XIII.33) již patrně není vektorovým polem a je proto nutné nahradit jej absolutní derivací (podle parametrizované křivky)

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = A^i_{;j} \frac{dx^j}{d\lambda}. \quad (\text{XIII.34})$$

Přitom $dX^j/d\lambda$ má opět význam tečného vektoru, neboť při transformaci k novým souřadnicím x'^i platí

$$\frac{dx'^j}{d\lambda} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\lambda}, \quad (\text{XIII.35})$$

což je transformační vztah pro komponenty vektoru. Vztah (XIII.34) můžeme rozepsat jako

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = \frac{dA^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\lambda} A^k, \quad (\text{XIII.36})$$

odkud je vidět, že absolutní derivace podle křivky závisí pouze na hodnotách pole na dané křivce. Lze proto definovat paralelní přenos vektoru podél křivky rovnicí

$$\frac{DA^i}{d\lambda} = 0. \quad (\text{XIII.37})$$

Aplikujme (XIII.37) na tečný vektor k dané křivce $\xi^i = dx^i/d\lambda$, tj. hledejme křivku, podél níž se tečný vektor paralelně přenáší. Takovou křivku můžeme nazvat „nejpřímější“, tj. jde o přímkou v plochem prostoru a o její přirozené zobecnění v prostoru zakřiveném. Po rozepsání pomocí (XIII.36) máme

$$\frac{D\xi^i}{d\lambda} = \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (\text{XIII.38})$$

Čára $x^i(\lambda)$ určená rovnicí (XIII.38) se nazývá *geodetickou čarou*, touto rovnicí je zároveň určena její *kanonická parametrizace*⁶¹.

Vynásobíme-li rovnice (XIII.38) výrazem $g_{ik}\xi^k$ a uvážíme (XIII.31), dostáváme

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{il}\xi^i\xi^l) = 0, \quad (\text{XIII.39})$$

tj. veličina $g_{il}\xi^i\xi^l$ je podél geodetiky při kanonické parametrizaci konstantní. To znamená, že se zachovává kvadrát velikosti tečného vektoru ke geodetice. Změnou měřítka parametru mu můžeme dát hodnotu 1 (pro časupodobný

⁶¹ Až na lineární transformaci, tj. na volbu počátku a měřítka.

vektor) nebo -1 (pro prostorupodobný vektor). V prvním případě je vektor ξ^i čtyřrychlostí částice, jejíž pohyb je zobrazen danou světočárou, tj.

$$\xi^i = u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad g_{ik}u^i u^k = 1, \quad (\text{XIII.40})$$

parametrem je tedy interval a (XIII.38) lze psát jako

$$w^i = \frac{Du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (\text{XIII.41})$$

kde w^i značí čtyřzrychlení. V lokálně geodetické soustavě přechází (XIII.41) ve vztah $a = 0$, tj. v zákon setrvačnosti platný pro volnou částici. Z principu ekvivalence lze tedy usoudit, že (XIII.41) je zákon pohybu částice, která je podrobena pouze gravitačním silám, tj. pohyb takové částice je zobrazen geodetickou čarou v prostoročase (a proto její pohyb nezáleží na vlastnostech částice, ale jen na gravitačním poli, pro což v Newtonově teorii nebylo zdůvodnění). Člen s Christoffelovými symboly v (XIII.41) dává po vynásobení klidovou hmotností částice gravitační čtyřsílu, která na částici působí. V lokálně geodetické soustavě je tato čtyřsíla nulová — tento systém je tedy lokálně inerciálním systémem.

V případě, že tečný vektor ke světočáře je světelný, tj. je-li

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = 0, \quad (\text{XIII.42})$$

jsou všechny kanonické parametrizace rovnocenné. Geodetiku nelze parametrizovat intervalem, protože ten je podél ní nulový⁶². V tomto případě předpokládáme, že geodetika (XIII.38) odpovídá pohybu fotonu (světelného paprsku) v gravitačním poli.

XIII.4 Vztažné soustavy a soustavy souřadnic

Vztažnou (referenční) soustavou R nazýváme libovolný soubor reálných či myšlených hmotných bodů, které dostatečně hustě vyplňují vyšetřovanou oblast. Když těmto bodům přiřadíme vzájemně jednoznačným způsobem trojice reálných čísel x^α , říkáme, že jsme ve vyšetřované oblasti zavedli soustavu prostorových souřadnic S_p . Abychom ještě určili časový okamžik, ve kterém v daném pevném referenčním bodě nastala nějaká událost, musíme v každém referenčním bodě časové okamžiky očíslovat, tj. přiřadit jim reálné

⁶² Pomocí kanonické parametrizace lze srovnávat délku úseků „v životě“ daného fotonu, ale nikoliv dvou různých fotonů.

číslo, které se monotónně mění podél světočáry. Říkame, že jsme zavedli *souřadnicový čas* $x^0 = ct$; soubor myšlených souřadnicových hodin, které tento čas určují, označíme S_t . Konkrétní realizací souřadnicových hodin může být budík či přesýpací hodiny, podstatným je ono vzájemně jednoznačné přiřazení. Je-li v uvažované referenční soustavě provedeno obojí přiřazení, říkáme, že jsme v R zavedli soustavu prostoročasových souřadnic S_{pt} (pro stručnost budeme značit S). Souřadnicovou soustavou S je referenční soustava určena jednoznačně.

V konkrétní referenční soustavě R můžeme užívat nejen různých S_p , ale i různých S_t . Vedle transformací typu

$$x'^\alpha = x'^\alpha (x^\beta), \quad (\text{XIII.43})$$

lze tedy uvnitř R užívat i transformací typu

$$x'^0 = x'^0 (x^\beta, x^0) = x'^0 (x^k), \quad (\text{XIII.44})$$

které znamenají přechod k jinému (obecně s odlišnou synchronizací i tempem chodu) souboru souřadnicových hodin.

Transformace (XIII.43) a (XIII.44) jsou podmnožinou obecných transformací typu

$$x'^i = x'^i (x^k), \quad (\text{XIII.45})$$

kde funkce x'^i jsou spojitě, vzájemně jednoznačné a dostatečně hladké. Těmito transformacemi je určen přechod od referenční soustavy R k jiné referenční soustavě R' (tj. přechod mezi soustavami, které se vzájemně pohybují)⁶³.

XIII.5 Měření času a délek

Uvažujme o dvou blízkých událostech, které nastaly ve vztažném bodě A referenční soustavy R systému $S (x^i)$. V tomto bodě nechť se nachází v klidu ideální hodiny H měřící vlastní čas. Interval jejich světočáry má tvar

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2, \quad (\text{XIII.46})$$

⁶³ Obvykle se omezuje na vztažné soustavy realizovatelné částicemi s nenulovou klidovou hmotností.

neboť $dx^\alpha = 0$ (hodiny H jsou v R v klidu). Zavedeme-li lokálně inerciální soustavu K^0 takovou, že je zároveň momentálně klidovou soustavou ideálních hodin H, z invariance intervalu dostáváme, že v K^0 platí

$$ds^2 = c^2 (dT^0)^2. \quad (\text{XIII.47})$$

Čas T^0 je udáván ideálními hodinami soustavy K^0 , které jsou v bodě A v klidu. Můžeme tedy psát, že

$$dT^0 = d\tau, \quad (\text{XIII.48})$$

kde $d\tau$ je interval vlastního času. Ze vztahů (XIII.46) až (XIII.48) obdržíme

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt. \quad (\text{XIII.49})$$

Komponenta

$$g_{00} > 0, \quad (\text{XIII.50})$$

tedy zprostředkuje vztah mezi souřadnicovým časem t a vlastním časem τ v pevném bodě referenční soustavy.

Uvažujme o dvou blízkých událostech v referenčním bodě A a o dvou blízkých událostech v jiném referenčním bodě B téže vztažné soustavy. Podle vzorce (XIII.49) můžeme psát

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(A)} dt_A, \quad d\tau_B = \sqrt{g_{00}(B)} dt_B \quad (\text{XIII.51})$$

a bude-li $dt_A = dt_B$, dostáváme vztah

$$d\tau_B = \sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}} d\tau_A \quad (\text{XIII.52})$$

spojující intervaly vlastního času mezi dvojicemi událostí, které nastaly v různých referenčních bodech vztažné soustavy R , v týchž souřadnicových časech.

Najdeme nyní výraz pro vzdálenost mezi dvěma blízkými referenčními body. Z bodu B o souřadnicích $x^\alpha + dx^\alpha$ nechť je vyslán světelný signál do bodu A o souřadnicích x^α . Signál se zde odrazí a putuje zpět do bodu B. Časový interval, který signál na tuto cestu spotřeboval, změřený ideálními hodinami v bodě B, vynásobený veličinou c a dělený dvěma, je vzdáleností $d\sigma$ mezi body A, B určenou radiolokační metodou. Interval (XIII.10) napíšeme ve tvaru

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} (dx^0)^2. \quad (\text{XIII.53})$$

Řešíme-li rovnici

$$ds^2 = 0 \quad (\text{XIII.54})$$

vzhledem k dx^0 , obdržíme dva kořeny

$$dx^{0(1)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right), \quad (\text{XIII.55})$$

$$dx^{0(2)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right). \quad (\text{XIII.56})$$

Bude-li x^0 značit okamžik, v němž světelný signál dorazil z bodu B do bodu A, bude

$$x^0 + dx^{0(1)} \quad (\text{XIII.57})$$

značit okamžik jeho vyslání z bodu B a

$$x^0 + dx^{0(2)} \quad (\text{XIII.58})$$

bude značit okamžik jeho zpětného návratu do tohoto bodu. Interval souřadnicového času mezi odesláním a příchodem signálu je tedy roven

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}. \quad (\text{XIII.59})$$

Interval vlastního času obdržíme vynásobením výrazem $\sqrt{g_{00}}/c$ a vzdálenost $d\sigma$ pak ještě vynásobením $c/2$. Jakožto výsledek bude

$$d\sigma^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta. \quad (\text{XIII.60})$$

Tento vztah se často přepisuje na tvar

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{XIII.61})$$

kde

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \quad (\text{XIII.62})$$

Devět veličin $\gamma_{\alpha\beta}$ tvoří třírozměrný metrický tenzor určující geometrii ve vztahné soustavě R . Ze vzorce (XIII.61) je patrné, že geometrie v obecných referenčních soustavách nebude geometrií euklidovskou.

Bude-li soustava x^i inerciální soustavou, v níž jsou zavedeny kartézské prostorové souřadnice, je

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{XIII.63})$$

takže

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{XIII.64})$$

jak má být.

Pro veličiny $(-g_{0\alpha}/\sqrt{g_{00}})$ se často ještě zavádí označení

$$g_\alpha \equiv -\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (\text{XIII.65})$$

XIII.6 Měření metrických koeficientů

Metrický koeficient g_{00} určíme přímo z (XIII.49) užitím ideálních hodin nacházejících se v klidu v pevném referenčním bodě soustavy R a souřadnicových hodin, které se v tomto bodě rovněž nacházejí v klidu.

Ideální hodiny nechť se v uvažované referenční soustavě pohybují rychlostí $v^\alpha = dx^\alpha/dt$. Takto definovanou rychlost nazveme *rychlostí souřadnicovou*. Výraz pro interval (XIII.10) lze pomocí (XIII.61) a (XIII.65) psát ve tvaru

$$ds^2 = -\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \left[\sqrt{g_{00}} dx^0 - g_\alpha dx^\alpha \right]^2. \quad (\text{XIII.66})$$

Uvažované ideální hodiny ukazují vlastní čas τ , pro jeho přírůstek $d\tau$ ze vzorce (XIII.66) dostaneme

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{\left[\sqrt{g_{00}} - g_\alpha \frac{v^\alpha}{c} \right]^2 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (\text{XIII.67})$$

kde

$$v^2 = \gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \quad (\text{XIII.68})$$

je druhá mocnina absolutní hodnoty souřadnicové rychlosti uvažovaných ideálních hodin.

Snadno vidíme, že při $v^\alpha = 0$ přejde (XIII.67) ve vztah (XIII.49). Stejně tak snadno se nahlédne, že bude-li referenční soustava inerciální a v ní když bude

$$g_{00} = 1, \quad g_\alpha = 0, \quad v^2 = \delta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad (\text{XIII.69})$$

dává formule (XIII.67) známý vztah pro dilataci času (srov. (XII.18))

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT. \quad (\text{XIII.70})$$

Nyní se změní poměr $d\tau/dt$ pro ideální hodiny pohybující se v daném místě a čase různými rychlostmi v^α . Devět takových měření postačí k tomu, abychom ze vzorce (XIII.67) určili zbylé koeficienty g_α , $g_{\alpha\beta}$. To se provede v každém referenčním bodě a v každém čase. Tak se získá v dané referenční soustavě pole koeficientů $g_{ik}(x^m)$, což bylo naším úkolem.

XIII.7 Riemannův tenzor křivosti

Rovnice (XIII.17) a (XIII.25) umožňují přechod k lokálně geodetické soustavě. Položme si nyní otázku, kdy je možné přejít od křivočarych souřadnic x^i s metrickým polem $g_{ik}(x^0)$ k pseudokartézským souřadnicím X^i , v nichž má g_{ik} tvar (XII.39). Jinými slovy jde o to, jak poznat v křivočarych souřadnicích, zda daný prostor je či není plochý.

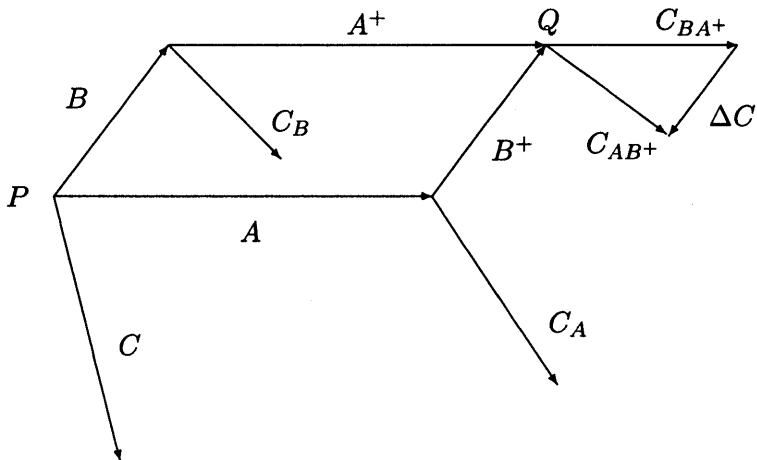
Význačnou vlastností plochého prostoru je jednoznačnost paralelního přenosu. Spojíme-li dva body P, Q v prostoročase různými křivkami α , β a přeneseme vektor A^i z P do Q paralelně podle α i podle β , bude mít v kartézských souřadnicích, v nichž je $\Gamma_{jk}^i = 0$, přenášený vektor stále stejné komponenty. Výsledek přenosu bude proto nezávislý na tom, po které cestě se vektor přenáší. V zakřivených prostorech tomu tak obecně není. Uvedme prostý příklad ze sférické geometrie — máme-li na pólu vektor orientovaný ve směru nultého poledníku a přeneseme jej podél tohoto poledníku na rovník, bude přenesený vektor na rovník kolmý. Jestliže jej však přeneseme na totéž místo nejprve podle 90. poledníku a potom podle rovníku, bude mít přenesený vektor směr rovníku.

Lze ukázat, že jednoznačnost paralelního přenosu je nejen nutnou, ale i postačující podmínkou plochosti prostoru. Důkaz alespoň naznačíme. Je-li paralelní přenos jednoznačnou operací, lze ortonormální bázi v daném bodě „roznést“ do celého prostoru a provést transformaci k této bázi. Koeficienty dané transformace c_i^j jsou jistými funkcemi souřadnic. Hledáme transformaci souřadnic $X^j = X^j(x^i)$ tak, aby c_i^j bylo možné napsat jako

$$c_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}. \quad (\text{XIII.71})$$

Lze dokázat, že taková transformace vždy existuje. S paralelně roznesenou bází je proto možné spojit soustavu souřadnic, která je vzhledem k ortonormalitě báze pseudokartézská.

Kritérium plochosti prostoru, založené na paralelním přenosu, lze převést do jiné formy, která je použitelná. Mějme dvě křivky $x_1^i(\lambda)$, $x_2^i(\lambda)$ procházející bodem P. Nanesme z tohoto bodu na každou křivku malý úsek



Obr. 35: Paralelní přenos. Z bodu P přenášíme vektor B^i podle A^i a vektor A^i podle B^i . Dostaneme infinitesimální rovnoběžník, podle něhož pak paralelně přenášíme vektor C^i z bodu P do bodu Q .

$\delta_1 x^i$ a $\delta_2 x^i$. Tyto úseky můžeme přibližně považovat za vektory, jež označíme A^i a B^i . Přeneseme-li paralelně B^i podle A^i a A^i podle B^i , vznikne „infinitesimální rovnoběžník“, viz obr. 35, v němž A^{+i} , B^{+i} jsou paralelně přenesené úseky. Z rovnice (XIII.37)

$$0 = DB^i = dB^i + \Gamma_{kl}^i B^k A^l \quad (\text{XIII.72})$$

pro paralelní přenos zjišťujeme, že musí být

$$B^{+i} = B^i + dB^i = B^i - \Gamma_{kl}^i B^k A^l \quad (\text{XIII.73})$$

a podobně

$$A^{+i} = A^i + dA^i = A^i - \Gamma_{kl}^i A^k B^l. \quad (\text{XIII.74})$$

Snadno se lze přesvědčit, v důsledku symetrie Christoffelových symbolů, že

$$A^i + B^{+i} = B^i + A^{+i}, \quad (\text{XIII.75})$$

tj., že rovnoběžník se vskutku „uzavírá“ v bodě, který označíme Q . Mějme nyní vektor C^i v bodě P a přenesme jej do Q jednak podél A^i a B^{+i} , jednak podél B^i a A^{+i} . Uvažujme nejprve první přenos. Po přenosu podél A^i budou komponenty přeneseného vektoru rovny

$$C_A^i = C^i - \Gamma_{kl}^i A^k C^l. \quad (\text{XIII.76})$$

Po dalším přenosu podél B^{+i} bude

$$C_{AB^+}^i = C_A^i - \Gamma_A^{i \quad kl} B^{+k} C_A^l. \quad (\text{XIII.77})$$

Přítom podle Taylorova rozvoje do 1. řádu klademe

$$\Gamma_A^{i \quad kl} = \Gamma_{kl}^i + \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{x^j} A^j. \quad (\text{XIII.78})$$

Dosadíme-li do (XIII.77) z (XIII.72), (XIII.76), (XIII.78) a zanedbáme členy vyššího než 2. řádu v malých veličinách A^i , B^i , dostáváme jistý výraz pro $C_{AB^+}^i$, z něhož se určí $C_{BA^+}^i$ výměnou A^i a B^i . Odečtením obou výrazů dospějeme k výsledku

$$\Delta C^i = C_{AB^+}^i - C_{BA^+}^i = R^i_{klm} A^k B^l C^m, \quad (\text{XIII.79})$$

kde

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}. \quad (\text{XIII.80})$$

Vzhledem k tenzorové povaze všech ostatních veličin v (XIII.79) musí být taky R^i_{klm} tenzor. Tento tenzor se nazývá (*Riemannův*) *tenzor křivosti*. Vidíme, že nulovost Riemannova tenzoru v daném bodě P je nutnou a postačující podmínkou jednoznačnosti paralelního přenosu v infinitesimálním okolí tohoto bodu.

Poněkud složitěji lze ukázat, že nulovost pole tenzoru křivosti je nutnou a postačující podmínkou jednoznačnosti paralelního přenosu v celém prostoru, popř. v určité jeho oblasti (za předpokladu, že tato oblast je jednoduše souvislá, tj. že v ní lze každou uzavřenou křivku „stáhnout“ spojitou deformací do bodu). Nulovost pole tenzoru křivosti je tedy ekvivalentní možnosti zavedení pseudokartézských souřadnic v daném prostoru (popř. v dané oblasti či její jednoduše souvislé podoblasti).

Z fyzikálního hlediska lze říci, že nulové pole tenzoru křivosti udává přítomnost skutečného (žádnou transformací souřadnic globálně neodstranitelného) gravitačního pole. Přítomnost tohoto pole se projevuje například v existenci slapových jevů (příliv a odliv), které nemohou být zrušeny přechodem k lokálně geodetické soustavě.

Tenzor křivosti má řadu důležitých matematických vlastností. Jejich ověření se snadno provede přímým výpočtem využitím lokálně geodetické soustavy, v níž jsou Γ^i_{kl} (nikoliv však jejich derivace) rovny nule a výraz (XIII.80) se tedy zjednodušuje na první dva členy. Především platí vztahy symetrie a antisymetrie

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \quad R_{iklm} = R_{lmik}. \quad (\text{XIII.81})$$

Dále platí, že je nulový součet cyklických permutací přes libovolnou trojici indexů, například

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \quad (\text{XIII.82})$$

Lze ukázat, s uvážením (XIII.81) a (XIII.82), že tenzor křivosti má v 4-rozměrném prostoročase pouze 20 nezávislých komponent. Rovněž platí tzv. diferenciální identita Bianchiho

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0, \quad (\text{XIII.83})$$

jejímž zúžením přes ik a ln dostáváme

$$R^l_{m;l} = \frac{1}{2} R_{,m}. \quad (\text{XIII.84})$$

Zajímavý a důležitý je vztah

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl} \quad (\text{XIII.85})$$

a obdobné „komutační vztahy“ pro jiná pole, které ukazují, že na rozdíl od obyčejných parciálních derivací není pořadí kovariantních derivací v zakřiveném prostoru zaměnitelné.

Zúžením Riemannova tenzoru křivosti obdržíme další fyzikálně a geometricky důležité tenzory. Je to *Ricciho tenzor křivosti*

$$R_{ik} = R_{ki} = R^l_{ilk} \quad (\text{XIII.86})$$

a *skalární křivost*

$$R = g^{ik} R_{ik}. \quad (\text{XIII.87})$$

Einsteinovým tenzorem se nazývá symetrický tenzor

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik}. \quad (\text{XIII.88})$$

Jeho vyznačnou vlastností je nulovost jeho kovariantní divergence

$$G^{ik}_{;k} = 0, \quad (\text{XIII.89})$$

která se dokáže užitím (XIII.84).

XIII.8 Einsteinovy gravitační rovnice

V newtonovské teorii gravitace získáme gravitační potenciál φ buzený zadanou hmotností s hustotou μ řešením Poissonovy rovnice

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu, \quad (\text{XIII.90})$$

kde Δ značí Laplaceův operátor, k je Newtonova gravitační konstanta.

V teorii relativity je gravitační pole popsáno deseti funkcemi $g_{ik}(x^m)$. Relativistické rovnice pro gravitační pole, které je buzeno zdrojem popsaným tenzorem energie a hybnosti T_{ik} budeme, v pevně zvolené referenční soustavě, předpokládat ve tvaru

$$X_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad (\text{XIII.91})$$

kde κ je konstanta a X_{ik} je dosud neznámých deset funkcí, které nechť obsahují pouze metrické koeficienty v nejvýše druhých parciálních derivacích podle x^k . Dále budeme požadovat, aby funkce X_{ik} byly v proměnných g_{ik} invariantními co do formy při každé transformaci (XIII.45) mezi referenčními systémy. Můžeme též říci, že požadujeme, aby gravitační zákon splňoval tzv. *obecný princip relativity*.

Do třetice požadujeme, aby vymizela tenzorová divergence tenzoru X_{ik} , aby tedy platilo

$$X^{ik}{}_{;k} = 0, \quad (\text{XIII.92})$$

čímž budou automaticky splněny zákony zachování (XIII.32).

Uvedené požadavky již vedou k jednoznačnému určení tvaru tenzoru X_{ik} . Tyto úvahy provádět nebudeme, ale zapíšeme ihned odpovídající výsledek ve tvaru

$$R_{ik} - \frac{1}{2} Rg_{ik} - \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad (\text{XIII.93})$$

kde R_{ik} je Ricciho tenzor křivosti vytvořený z Riemannova tenzoru křivosti $R^i{}_{jkl}$. Invariant R je definován vztahem (XIII.87), konstanta Λ značí tzv. *kosmologickou konstantu*.

Pokud jde o problematiku, která není kosmologického charakteru, klade se $\Lambda = 0$ a Einsteinovy gravitační rovnice se proto píší ve tvaru

$$R_{ik} - \frac{1}{2} Rg_{ik} = \kappa T_{ik}. \quad (\text{XIII.94})$$

V prázdném prostoru (ve fyzikálním vakuu) platí, že

$$T_{ik} = 0. \quad (\text{XIII.95})$$

Zúžením tenzorové rovnice (XIII.94) dostáváme v tomto případě, že $R = 0$ a Einsteinovy rovnice ve vakuu mají tedy tvar

$$R_{ik} = 0. \quad (\text{XIII.96})$$

Kdybychom Einsteinovy gravitační rovnice rozepsali pro hledané funkce $g_{ik}(x^m)$, zjistíme, že je to složitý systém deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic pro deset neznámých funkcí $g_{ik}(x^m)$ při zadaném T_{ik} splňujícím (XIII.92). Einsteinovy gravitační rovnice jsou jádrem *obecné teorie relativity* asi tak, jako je Poissonova rovnice (XIII.90) jádrem newtonovské teorie gravitace.

XIII.9 Pohyb částic v gravitačním poli

Zákony newtonovské teorie gravitace se dělí do dvou skupin. V první skupině se nachází Newtonův gravitační zákon (Poissonova rovnice), podle kterého zadaná hmotnost budí gravitační pole. Do druhé skupiny patří pohybové rovnice určující pohyb zkušebních částic⁶⁴ ve vnějším gravitačním poli.

V Einsteinově teorii gravitace je situace jiná. Levá strana Einsteinova gravitačního zákona vyhovuje čtyřem diferenciálním identitám (XIII.92), z nichž plynou čtyři podmínky na tenzor energie a hybnosti

$$T^{ik}{}_{;k} = 0. \quad (\text{XIII.97})$$

To je však zároveň přirozené zobecnění rovnic (XII.194), které vyjadřují zákony zachování energie a hybnosti hmoty ve speciální teorii relativity. Einsteinovy rovnice tedy obsahují i zákony pohybu hmoty. Lze proto očekávat, že pohybové rovnice částic v gravitačním poli, (XIII.41), které jsme dosud chápali jako zobecnění rovnic ze speciální teorie relativity, vyplývají z Einsteinova gravitačního zákona.

Ukažme, že tomu tak opravdu je. Nechť uvažované částice tvoří nekoherentní prach, který se nachází v gravitačním poli g_{ik} , k němuž sám přispívá. Příslušný tenzor energie a hybnosti má tvar

$$T^{ik} = \mu c^2 u^i u^k, \quad (\text{XIII.98})$$

kde $\mu = \epsilon/c^2$ značí klidovou hustotu klidové hmotnosti uvažovaného kontinua (nekoherentního prachu) a u^i je čtyřrychlost dx^i/ds . Rovnice (XIII.97) dává

$$u^i (\mu u^k)_{;k} + \mu u^k u^i{}_{;k} = 0. \quad (\text{XIII.99})$$

⁶⁴ Zkušební částicí míníme částici, na niž nepůsobí žádné jiné síly než gravitační a jejíž vlastní vliv na gravitační pole je zanedbatelný.

Po vynásobení vektorem u_i odtud dostáváme

$$\left(\mu u^k\right)_{;k} + \mu u^k u_i u^i_{;k} = 0, \quad (\text{XIII.100})$$

kde jsme užili jednotkovosti čtyřrychlosti

$$u^i u_i = 1. \quad (\text{XIII.101})$$

Zderivováním tohoto vztahu dostáváme

$$u_i u^i_{;k} = 0 \quad (\text{XIII.102})$$

a srovnáním s (XIII.100) vidíme, že

$$\left(\mu u^k\right)_{;k} = 0, \quad (\text{XIII.103})$$

což je rovnice kontinuity, která je tedy rovněž důsledkem Einsteinových rovnic. Dosazením (XIII.103) do (XIII.99) vzhledem k libovlnnosti u^i dostáváme

$$u^k u^i_{;k} = 0. \quad (\text{XIII.104})$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\frac{du^i}{ds} = u^i_{;k} u^k, \quad (\text{XIII.105})$$

můžeme rovnici (XIII.104) psát ve tvaru

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0, \quad (\text{XIII.106})$$

nebo též ve tvaru

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (\text{XIII.107})$$

To jsou však zároveň rovnice pro světočáry $x^i = x^i(s)$ volných testovacích částic v gravitačním poli g_{ik} , tedy rovnice geodetických čar.

XIII.10 Rovnice geodetiky ve stacionárním a slabém gravitačním poli

Často nás zajímá pohyb částic v gravitačních polích kosmických těles, která jsou časově neproměnná (stacionární) a ne příliš silná, takže částice v nich nenabývají velkých rychlostí.

Bude-li se uvažovaná testovací částice pohybovat dostatečně pomalu, lze zanedbat člen $(dx^\alpha/d\tau)$ ve srovnání se členem $dt/d\tau$ a rovnicí (XIII.107) můžeme proto psát ve tvaru

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0. \quad (\text{XIII.108})$$

Ze stacionárnosti (nezávislosti metrického pole na x^0) plyne

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}. \quad (\text{XIII.109})$$

Vzhledem ke slabosti pole je možné zavést téměř Minkowskiho souřadnice, ve kterých platí

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \quad |h_{ik}| \ll 1. \quad (\text{XIII.110})$$

Veličiny (XIII.109) pak v prvním řádu vzhledem k h_{ik} dávají

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{(0)ik} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}, \quad (\text{XIII.111})$$

takže rovnice geodetiky naší testovací částice jsou

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}, \quad (\text{XIII.112})$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0. \quad (\text{XIII.113})$$

Druhou rovnici rozřešíme a dosazením do první rovnice pak obdržíme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \nabla h_{00}. \quad (\text{XIII.114})$$

Newtonova pohybová rovnice má tvar

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla\varphi, \quad (\text{XIII.115})$$

kde φ značí newtonovský gravitační potenciál. Porovnáním rovnic (XIII.114) a (XIII.115) dostaneme, že

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \text{konst.} \quad (\text{XIII.116})$$

Ve velkých vzdálenostech od zdroje nechť uvažovaná metrika přechází v Minkowskiho, pro φ bude tudíž platit, že $\varphi \rightarrow 0$ při $r \rightarrow \infty$. Konstanta v (XIII.116) bude tudíž rovna nule a můžeme psát, že

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right). \quad (\text{XIII.117})$$

XIII.11 Limitní tvar Einsteinova gravitačního zákona

Hledejme limitní tvar Einsteinova gravitačního zákona pro případ, že gravitační pole je slabé a jeho zdrojem je pomalu se pohybující látka. Vyjdeme z upraveného tvaru rovnic (XIII.94)

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} \right), \quad (\text{XIII.118})$$

kde T značí stopu tenzoru T_{ik} . U tenzoru energie a hybnosti zanedbáme vliv tlaku a píšeme tedy

$$T_i^k = \mu c^2 u_i u^k. \quad (\text{XIII.119})$$

Látka nechť se pohybuje, jak jsme si řekli, nerelativistickými rychlostmi. Položíme tedy

$$u_\alpha = 0, \quad u^0 = u_0 = 1. \quad (\text{XIII.120})$$

Ze všech komponent tenzoru T_{ik} pak nenulovou zůstane pouze komponenta T_0^0 , pro niž obdržíme

$$T_0^0 = \mu c^2, \quad (\text{XIII.121})$$

takže

$$T = \mu c^2. \quad (\text{XIII.122})$$

Einsteinovy rovnice (XIII.118) pro $i = k = 0$ dávají

$$R_0^0 = \frac{\kappa c^2}{2} \mu. \quad (\text{XIII.123})$$

Pro výpočet složky R_0^0 Ricciho tenzoru užijeme vzhledem k slabosti pole vyjádření metrického koeficientu g_{00} ve tvaru (XIII.117). Tak v potřebném přiblížení obdržíme

$$R_0^0 = R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (\text{XIII.124})$$

a

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{XIII.125})$$

Je tedy

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} \equiv \frac{1}{c^2} \Delta \varphi \quad (\text{XIII.126})$$

a Einsteinovy rovnice v daném přiblížení dávají

$$\Delta \varphi = \frac{\kappa c^4}{2} \mu. \quad (\text{XIII.127})$$

V newtonovské teorii gravitace, jak víme, se gravitační potenciál φ buzený zadanou hmotností získá řešením Poissonovy rovnice

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu, \quad (\text{XIII.128})$$

kde k je *Newtonova gravitační konstanta*. Srovnání (XIII.127) a (XIII.128) vede k závěru, že

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4}. \quad (\text{XIII.129})$$

Konstanta κ se nazývá *Einsteinovou gravitační konstantou*.

Einsteinův gravitační zákon přechází tedy v daném přiblížení v Newtonův gravitační zákon. Einsteinova teorie tedy splňuje *princip korespondence*, který požaduje, aby nová, složitější teorie reprodukovala výsledky starší teorie v oblasti, v níž se tato teorie osvědčila. Je pozoruhodné, že při „odvozování“ Einsteinovy teorie nebyla taková korespondence nikde předpokládána.

XIII.12 Pohybové rovnice částic ve Schwarzschildově poli

Nejdůležitější přesné řešení Einsteinových rovnic obecné teorie relativity popisuje vnější gravitační pole sféricky symetrického zdroje. Takovými zdroji jsou v dostatečně dobrém přiblížení Slunce, Země a jiné hvězdy a planety, pokud je jejich rotace nepříliš rychlá. Toto řešení našel roku 1916 K. Schwarzschild. Může být napsáno ve tvaru

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 \left(\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2\right), \quad (\text{XIII.130})$$

kde r, ϑ, φ jsou sférické souřadnice. Veličina

$$r_g = \frac{2kM}{c^2} \quad (\text{XIII.131})$$

značí tzv. *gravitační poloměr zdroje*⁶⁵ a M jeho celkovou hmotnost. Že metrika (XIII.130) je řešením Einsteinových gravitačních rovnic ve vakuu

$$R_{ik} = 0, \quad (\text{XIII.132})$$

⁶⁵ U těles jako je Země či Slunce leží gravitační poloměr hluboko v jejich nitru, kde již řešení nemá uvedený tvar. Nebudeme se proto zabývat neobvyklými jevy, které nastávají v jeho blízkosti.

lze prověřit přímým výpočtem. Ze vztahu (XIII.130) máme, že při $r \rightarrow \infty$ přechází tato metrika v Minkowskioho prostoročas zapsaný ve sférických souřadnicích.

Naším cílem je studovat pohyby částic a fotonů ve Schwarzschildově poli a obdržet tak relativistické opravy k Newtonově teorii, které umožňují experimentální prověření obecné teorie relativity. Schwarzschildovo řešení (XIII.130) napíšeme proto ve tvaru

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - A^{-1}(r) dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (\text{XIII.133})$$

kde

$$A(r) \equiv 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (\text{XIII.134})$$

a vypíšeme pro ně pohybové rovnice volné zkušební částice

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (\text{XIII.135})$$

Přímým výpočtem po nalezení Christoffelových indexů Γ^i_{jk} zjistíme, že rovnice (XIII.135) dávají

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{A'}{A} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (\text{XIII.136})$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - rA \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - rA \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{A'A}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \quad (\text{XIII.137})$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (\text{XIII.138})$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \cotg \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (\text{XIII.139})$$

kde čárka značí derivaci podle r . Počátečním podmínkám, které lze splnit bez újmy na obecnosti vhodnou volbou souřadnicového systému

$$\frac{d\vartheta}{ds} = 0, \quad \cos \vartheta = 0, \quad (\text{XIII.140})$$

odpovídá řešení

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{XIII.141})$$

rovnice (XIII.138) v kterémkoliv okamžiku. Pohyb naší zkušební částice v poli (XIII.133) se tedy bude stále dít v této ploše a na proměnnou ϑ již proto nebudeme myslet.

Po integraci rovnic (XIII.139) a (XIII.136) získáme

$$\frac{d\varphi}{ds} r^2 = \frac{h_0}{c}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k_0}{Ac^2}, \quad (\text{XIII.142})$$

kde h_0 a k_0 značí integrační konstanty.

Nyní by bylo třeba integrovat zbývající rovnici geodetiky (XIII.137). Nebudeme při hledání tvaru trajektorie $r(\varphi)$ postupovat takto přímo, nýbrž z výrazu (XIII.133) vyloučíme dt a ds pomocí (XIII.142). Obdržíme tak

$$\frac{1}{A} \left(\frac{h_0}{r^2 c} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{h_0^2}{r^2 c^2} - \frac{k_0^2}{Ac^2} = -1. \quad (\text{XIII.143})$$

Zaved'eme substituci

$$\frac{1}{r} = u, \quad (\text{XIII.144})$$

takže rovnici (XIII.143) můžeme poté zapsat ve tvaru

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = -\frac{c^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{k_0^2}{c^4} \right) + \frac{2kM}{h_0^2} u + \frac{2kM}{c^2} u^3. \quad (\text{XIII.145})$$

Derivací předchozího výrazu podle φ po úpravě obdržíme rovnice pro trajektorii

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{kM}{h_0^2} + \frac{3kMu^2}{c^2}, \quad (\text{XIII.146})$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h_0}{c}. \quad (\text{XIII.147})$$

V newtonovské mechanice je trajektorie zkušební částice nacházející se ve statickém a sférickém gravitačním poli popsána rovnicemi

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{kM}{h_0^2}, \quad (\text{XIII.148})$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_0. \quad (\text{XIII.149})$$

Od odpovídajících rovnic obecné teorie relativity (XIII.146) a (XIII.147) se liší členem

$$\frac{3kM}{c^2} u^2. \quad (\text{XIII.150})$$

Newtonovu rovnici (XIII.148) přepíšeme do tvaru

$$u_N'' + u_N = A, \quad (\text{XIII.151})$$

kde jsme označili

$$A = \frac{kM}{h_0^2}. \quad (\text{XIII.152})$$

Snadno prověříme, že řešení této rovnice nabývá tvaru

$$u_N = A + B \cos(\varphi + \delta), \quad (\text{XIII.153})$$

kde B a δ jsou integrační konstanty. Vhodnou orientací os můžeme dosáhnout toho, že $\delta = 0$, takže řešení (XIII.153) má známý tvar elipsy

$$u_N = A + B \cos \varphi. \quad (\text{XIII.154})$$

Integrace rovnic (XIII.146) vede k eliptickým integrálům, které lze vypočítat pouze numericky. V případě, že rychlost zkušební částice je malá ve srovnání s rychlostí světla, lze člen $\frac{3kM}{c^2} u^2$ považovat jen za malou poruchu a řešení rovnice (XIII.146), kterou přepíšeme na tvar

$$u'' + u = A + \frac{\epsilon u^2}{A}, \quad \epsilon = \frac{3k^2 M^2}{h_0^2 c^2}, \quad (\text{XIII.155})$$

můžeme pak hledat metodou postupných aproximací. Předpokládáme, že řešení (XIII.155) nabývá tvaru

$$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \epsilon v(\varphi) + O(\epsilon^2), \quad (\text{XIII.156})$$

kde ϵ je malý parametr. Hledáme nyní u_0 a v . Nejprve dosadíme (XIII.156) do (XIII.155) a obdržíme

$$u_0'' + \epsilon v'' + u_0 + \epsilon v = A + \frac{\epsilon u_0^2}{A} + O(\epsilon^2). \quad (\text{XIII.157})$$

Porovnáním členů nultého řádu v ϵ získáme rovnici

$$u_0'' + u_0 = A, \quad (\text{XIII.158})$$

kteřá je shodná s Newtonovou rovnicí (XIII.151). Je tedy

$$u_0 = u_N. \quad (\text{XIII.159})$$

Analogicky porovnáním členů prvního řádu v ϵ dospějeme k rovnici

$$\begin{aligned} v'' + v = \frac{u_0^2}{A} &= A + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{A} \cos^2 \varphi \\ &= \left(A + \frac{B^2}{2A} \right) + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{2A} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (\text{XIII.160})$$

Obecným řešením homogenních rovnic pro funkci u_0 i pro funkci v jsou funkce tvaru $B \cos \varphi$. K nalezení obecného řešení rovnice (XIII.160) stačí tedy znát pouze partikulární řešení této rovnice. Protože je tato rovnice lineární ve v , lze psát v jako součet $v = v_a + v_b + v_c$, kde v_a , v_b , v_c jsou řešením rovnic

$$\begin{aligned} v_a'' + v_a &= A + \frac{B^2}{2A}, \\ v_b'' + v_b &= 2B \cos \varphi, \\ v_c'' + v_c &= \frac{B^2}{2A} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (\text{XIII.161})$$

Partikulárním řešením těchto rovnic jsou funkce

$$\begin{aligned} v_a &= A + \frac{B^2}{2A}, \\ v_b &= B\varphi \sin \varphi, \\ v_c &= -\frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (\text{XIII.162})$$

Takže partikulární řešení (XIII.160) je tvaru

$$v = \left(A + \frac{B^2}{2A} \right) + B\varphi \sin \varphi - \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi. \quad (\text{XIII.163})$$

Omezíme-li se na řešení do prvního řádu v ϵ včetně, máme

$$u = u_N + v = \left(A + \epsilon A + \frac{\epsilon B^2}{2A} \right) + \left(B \cos \varphi - \frac{\epsilon B^2}{6A} \cos 2\varphi \right) + \epsilon B\varphi \sin \varphi. \quad (\text{XIII.164})$$

Protože v uvažovaném přiblížení platí, že

$$\cos(\varphi - \epsilon\varphi) = \cos \varphi \cos \epsilon\varphi + \sin \varphi \sin \epsilon\varphi = \cos \varphi + \epsilon\varphi \sin \varphi, \quad (\text{XIII.165})$$

můžeme řešení (XIII.164) psát ve tvaru

$$u = A + B \cos(\varphi - \epsilon\varphi) + \epsilon \left[A - \frac{B^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi \right]. \quad (\text{XIII.166})$$

Vliv členu v hranaté závorce na tvar trajektorie nebudeme nyní zkoumat. Uvedeme pouze, že jde o malé periodické variace vzdálenosti zkušební částice. Neperiodický efekt způsobuje člen $\epsilon\varphi$, který se objevuje v argumentu funkce kosinus. Řešení (XIII.166) napíšeme proto ve tvaru

$$u = A + B \cos(\varphi - \epsilon\varphi) + (\text{periodický člen řádu } \epsilon). \quad (\text{XIII.167})$$

Perihelium zkušební částice (planety) se získá tehdy, je-li $u = 1/r$ maximální. Z rovnice (XIII.167) plyne, že u bude maximální, bude-li

$$\varphi(1 - \epsilon) = 2\pi n, \quad (\text{XIII.168})$$

neboli přibližně

$$\varphi = 2\pi n(1 + \epsilon). \quad (\text{XIII.169})$$

Vykoná-li tedy uvažovaná zkušební částice jeden oběh ($n = 1$), posune se perihelium ve směru pohybu částice o úhel

$$\delta\varphi = 2\pi\epsilon = 2\pi \left(\frac{3k^2 M^2}{c^2 h_0^2} \right). \quad (\text{XIII.170})$$

Z elementární analytické geometrie usoudíme, že

$$h_0^2 = kMa(1 - e^2), \quad (\text{XIII.171})$$

kde a je poloosa a e excentricita elipsy. Pro posun perihelia můžeme proto psát formuli

$$\delta\varphi = \frac{6\pi kM}{ac^2(1 - e^2)}. \quad (\text{XIII.172})$$

Eliptická trajektorie se tak pozvolna otáčí ve směru oběhu zkušební částice. Existenci či neexistenci tohoto jevu lze podrobit experimentální prověrce. Výhodným může být k tomuto účelu pohyb planety blízké Slunci s hodně excentrickou drahou. Pro planetu Merkur dává formule (XIII.172) plynoucí z obecné teorie relativity hodnotu posunu za jedno století

$$\delta\varphi = 42,98''. \quad (\text{XIII.173})$$

Je zajímavé konstatovat, že existence (v rámci newtonovské teorie gravitace neobjasněné) velikosti posunu Merkurova perihelia byla astronomům známa

dlouho před vznikem obecné teorie relativity. Uvedený vzorec byl spolehlivě ověřen i pro těsné dvojhvězdy.

Experimentální údaje z radarových měření vedou k hodnotě

$$\delta\varphi = 43,11'' \pm 0,21'', \quad (\text{XIII.174})$$

která je s výsledkem (XIII.173) ve velmi dobrém souladu. Položíme-li, jak se často činí, teoretickou hodnotu rovnu jedné, potom můžeme konstatovat, že radarová měření vedou k hodnotě

$$1,003 \pm 0,005. \quad (\text{XIII.175})$$

Souhlas s teorií je tedy vynikající.

XIII.13 Ohyb světla ve Schwarzschildově poli

Všimněme si nyní trajektorie testovací částice s nulovou klidovou hmotností (foton) pohybující se v poli (XIII.130). V tomto případě je

$$ds^2 = 0, \quad (\text{XIII.176})$$

a tedy

$$h_0 \rightarrow \infty \quad (\text{XIII.177})$$

ve vzorci (XIII.146). Rovnice trajektorie pro fotony je tedy

$$u'' + u = \frac{3kM}{c^2} u^2. \quad (\text{XIII.178})$$

Budeme se opět zabývat pouze případy, kdy lze člen

$$\epsilon = \frac{3kM}{c^2} \quad (\text{XIII.179})$$

považovat za malý ve srovnání s ostatními členy v rovnici (XIII.178). Budeme opět psát

$$u'' + u = \epsilon u^2 \quad (\text{XIII.180})$$

a znovu užijeme standardní poruchovou metodu k řešení této rovnice. Řešení rovnice (XIII.180) předpokládáme ve tvaru

$$u = u_0 + \epsilon v + O(\epsilon^2), \quad (\text{XIII.181})$$

takže po dosazení do (XIII.180) dostaneme

$$u_0'' + u_0 + \epsilon v'' + \epsilon v = \epsilon u_0^2 + O(\epsilon^2). \quad (\text{XIII.182})$$

Porovnání členů nultého řádu v (XIII.182) vede k rovnici

$$u_0'' + u_0 = 0, \quad (\text{XIII.183})$$

která má řešení

$$u_0 = A \cos(\varphi + \delta), \quad (\text{XIII.184})$$

kde A je integrační konstanta. Vhodnou orientací souřadnicových os lze dosáhnout toho, že $\delta = 0$, takže

$$u_0 = A \cos \varphi, \quad (\text{XIII.185})$$

což lze pomocí proměnné r v nulté aproximaci psát ve tvaru

$$r \cos \varphi = \frac{1}{A}. \quad (\text{XIII.186})$$

Protože $r \cos \varphi$ je „kartézská“ souřadnice x , předchozí rovnice zřejmě reprezentuje přímkou rovnoběžnou s osou y . V nulté aproximaci se tedy světelný paprsek v centrálním poli (XIII.130) nezakříví. Z (XIII.176) plyne, že vzdálenost nejbližšího bodu trajektorie k centru je $1/A$. Tuto vzdálenost budeme značit r_0 a budeme tedy psát

$$u_0 = \frac{1}{r_0} \cos \varphi. \quad (\text{XIII.187})$$

Porovnání členů první mocniny v ϵ vede k rovnici

$$v'' + v = u_0^2 = \frac{1}{r_0^2} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2r_0^2} (1 + \cos 2\varphi). \quad (\text{XIII.188})$$

Řešení této rovnice předpokládejme ve tvaru

$$v = \alpha + \beta \cos 2\varphi, \quad (\text{XIII.189})$$

kde α a β jsou neznámé konstanty. Derivování vede ke vztahu

$$v'' = -4\beta \cos 2\varphi, \quad (\text{XIII.190})$$

a tedy

$$v'' + v = \alpha - 3\beta \cos 2\varphi. \quad (\text{XIII.191})$$

Porovnáním s (XIII.188) dostáváme, že musí být

$$\alpha = \frac{1}{2r_0^2}, \quad \beta = -\frac{1}{6r_0^2}, \quad (\text{XIII.192})$$

tudíž

$$v = \frac{1}{2r_0^2} - \frac{1}{6r_0^2} \cos 2\varphi = \frac{2}{3r_0^2} - \frac{1}{3r_0^2} \cos^2 \varphi. \quad (\text{XIII.193})$$

Řešení původní rovnice do členů prvního řádu v ϵ včetně má tedy tvar

$$u = \frac{1}{r_0} \cos \varphi - \frac{\epsilon}{3r_0^2} \cos^2 \varphi + \frac{2\epsilon}{3r_0^2}. \quad (\text{XIII.194})$$

Vidíme, že malá porucha ϵ způsobuje odchylku trajektorie od přímky v první aproximaci. Dochází k ohybu světla v gravitačním poli (XIII.130). Vypočteme nyní celkový úhel ohybu. Asymptoty trajektorie odpovídají těm hodnotám úhlu φ , pro které je r nekonečno ($u = 0$ v (XIII.194)). Abychom úhly asymptot našli, musíme řešit kvadratickou rovnici získanou položením $u = 0$ do (XIII.184)

$$\frac{\epsilon}{3r_0^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{r_0} \cos \varphi - \frac{2\epsilon}{3r_0^2} = 0, \quad (\text{XIII.195})$$

neboli

$$\cos^2 \varphi - \frac{3r_0}{\epsilon} \cos \varphi - 2 = 0. \quad (\text{XIII.196})$$

Řešením je

$$\cos \varphi = \frac{3r_0}{2\epsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{9r_0^2}{4\epsilon} + 2\right)} = \frac{3r_0}{2\epsilon} \left[1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{8\epsilon^2}{9r_0^2}\right)}\right]. \quad (\text{XIII.197})$$

Aby $\cos \varphi$ byl menší či nejvýše roven jedné, musíme vzít znaménko minus ve vztahu (XIII.197). Rozvoj (XIII.197) do členů prvního řádu v ϵ dává výsledek

$$\cos \varphi = -\frac{2\epsilon}{3r_0} = -\frac{2kM}{c^2 r_0}. \quad (\text{XIII.198})$$

Odtud je patrné, že uhel φ je blízký $\pi/2$ či $-\pi/2$. Položíme proto

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta, \quad (\text{XIII.199})$$

takže pro první asymptotu obdržíme

$$\sin \delta = \frac{2kM}{c^2 r_0}, \quad (\text{XIII.200})$$

neboli přibližně

$$\delta = \frac{2kM}{c^2 r_0}. \quad (\text{XIII.201})$$

Podobný postup provedeme pro druhou asymptotu. Pro ni budeme psát $\varphi = -\pi/2 - \delta$ a obdržíme stejnou velikost odchylky

$$\delta = \frac{2kM}{c^2 r_0}. \quad (\text{XIII.202})$$

Totální úhel ohybu (úhel mezi asymptotami) je tedy roven

$$\Delta \equiv 2\delta = \frac{4kM}{c^2 r_0}. \quad (\text{XIII.203})$$

Experimentální prověrka je uskutečnitelná. Zjišťují se přesné polohy známých zdrojů záření na nebeské sféře v době, kdy jsou od Slunce vzdáleny, a v době, kdy jsou právě na pokraji slunečního kotouče.

Teoretická hodnota úhlu Δ vypočtená z obecně relativistického vztahu (XIII.203) v případě Slunce dává

$$\Delta = 1,75''. \quad (\text{XIII.204})$$

Měření z roku 1975 dávají hodnotu

$$\Delta = 1,76'' \pm 0,02''. \quad (\text{XIII.205})$$

Opět lze teoretickou hodnotu (XIII.204) položit rovnu jedné. Poslední měření z roku 1990 vedou k hodnotě

$$1,000 \pm 0,001, \quad (\text{XIII.206})$$

což je opět velmi vynikající souhlas s teorií.

XIII.14 Rudý posun spektrálních čar

Všimněme si nyní vztorce (XIII.52)

$$\Delta\tau_B = \sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}} \Delta\tau_A, \quad (\text{XIII.207})$$

který ukazuje, že interval vlastního času měřeného ideálními hodinami nacházejícími se v různých bodech A, B referenční soustavy je různý.

Pro slabá gravitační pole (XIII.117) můžeme psát

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \Delta\tau_A, \quad \Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B. \quad (\text{XIII.208})$$

Pak lze v případě Schwarzschildova pole psát

$$\Delta\tau_B = \left[1 + \frac{kM}{c^2} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)\right] \Delta\tau_A. \quad (\text{XIII.209})$$

Pro relativní posun frekvencí v místě pozorování odtud obdržíme

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \equiv \frac{\frac{1}{\Delta\tau_A} - \frac{1}{\Delta\tau_B}}{\frac{1}{\Delta\tau_A}} = \frac{kM}{c^2} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right). \quad (\text{XIII.210})$$

Pozorujeme-li například z povrchu Země (bod B) světlo vyslané zářícím atomem na povrchu Slunce (bod A), je $r_B \gg r_A$ a místo (XIII.210) můžeme psát

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{kM}{c^2} \frac{1}{r_A}. \quad (\text{XIII.211})$$

Po dosazení příslušných veličin vychází teoretická hodnota rudého posunu čar ve spektru záření vyslaného atomu z povrchu Slunce rovna

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -2.10^{-6}. \quad (\text{XIII.212})$$

Položíme-li tuto teoretickou hodnotu opět za rovnou jedné, pak lze uvést, že měření vedou k hodnotě

$$1,01 \pm 0,06. \quad (\text{XIII.213})$$

S přesností jednoho procenta byl vzorec (XIII.210) ověřen v čistě pozemských podmínkách užitím Mössbauerova jevu, kdy byl gama zářič umístěn asi dvacet metrů nad povrchem Země.

XIII.15 Zpoždování radarových signálů

Posun perihelií, ohyb světla a rudý posuv spektrálních čar tvoří tři klasické testy obecné teorie relativity. V novější době rozvoj techniky umožnil ještě

čtvrtý test⁶⁶. Vyšleme-li ze Země elektromagnetický (radarový) signál a necháme jej odrazit od planety či družice, pak čas t_E mezi jeho vysláním a opětným přijetím na Zemi je podle obecné teorie relativity poněkud větší než čas t_N plynoucí z Newtonovy teorie.

Zpoždění můžeme propočítat podobným způsobem jako v předchozích kapitolách. Uvedeme pouze výsledek

$$t_E = t_N + \Delta t, \quad (\text{XIII.214})$$

kde

$$\Delta t = \frac{4kM}{c^3} \ln \left(\frac{r_e + r_p + R}{r_e + r_p - R} \right) \quad (\text{XIII.215})$$

je zmíněný relativistický korekční člen. Zde M je hmotnost Slunce, r_e či r_p značí radiální souřadnice Země, popř. tělesa, od něhož se radarový signál odráží, R je vzdálenost mezi oběma tělesy. Před srovnáním s realitou se ještě přepočítává souřadnicový čas (XIII.215) na vlastní čas měřený ideálními (atomovými) hodinami, provádí se korekce na pohyby obou těles a na disperzi elektromagnetických signálů v okolí Slunce. Po jejich provedení vychází teoretická hodnota časového zpoždění (pro signál vyslaný ze Země a odražený Venuší) rovna

$$\Delta \tau = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{s} \quad (\text{XIII.216})$$

pro signál, který se téměř dotýká okraje Slunce. Experimenty byly provedeny u planet Merkur a Venuše i u družic Mariner, Viking, Voyager. Označili se teoretická hodnota zpoždění plynoucího z obecné teorie relativity za rovnou jedné, měření časového zpoždění radarových signálů odražených družicí Viking ukázala, že platí

$$1,002 \pm 0,004. \quad (\text{XIII.217})$$

Voyager 2 prověřil odpovídající vzorec (XIII.215) s přesností 0,1%. Tento experiment je patrně dnes nejpřesnějším potvrzením předpovědi obecné teorie relativity (nemluvíme-li o rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti, kterou newtonovská teorie gravitace předpokládala, ale nevysvětlila).

XIII.16 Příklady

1. V souřadnicovém systému se souřadnicemi x^m mějme délkový element $ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$. Ukažte, že po transformaci $x^m \rightarrow x'^m$ bude mít délkový

⁶⁶ Existence čtvrtého jevu, zpoždování radarových signálů, unikla Einsteinově pozornosti. Na tento jev upozornil Shapiro až roku 1964.

interval tvar $ds^2 = g_{mn}dx'^m dx'^n$, a vyjádřete g_{mn} pomocí parciálních derivací $\partial x^m / \partial x'^n$.

Řešení:

$$\begin{aligned} ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b &= \eta_{ab} \left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^m} \right) dx'^m \left(\frac{\partial x^b}{\partial x'^n} \right) dx'^n \\ &= \left(\eta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x'^m} \frac{\partial x^b}{\partial x'^n} \right) dx'^m dx'^n = g_{mn} dx'^m dx'^n. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$g_{mn} = \eta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x'^m} \frac{\partial x^b}{\partial x'^n}.$$

2. V polárních souřadnicích v rovině $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ najděte Christoffelovy symboly třemi různými způsoby:

a) z rovnic geodetik

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} \Gamma_{ab}^m = 0$$

a s využitím faktu, že geodetikami jsou přímky,

b) na základě transformačních vztahů přepočtem z kartézských souřadnic, kde jsou jejich hodnoty nulové,

c) pomocí definičního vztahu (XIII.25).

Řešení:

a) Nejdřív uvažujme přímky $\vartheta = 0$, $r = s$, kde s je kanonický parametr (délka). Rovnice geodetiky dává

$$\frac{d^2 x^m}{dr^2} + \Gamma_{rr}^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\vartheta = 0.$$

Neradiální přímky parametizujeme pomocí nekanonického parametru ϑ . Rovnice geodetiky přepsány pomocí ϑ dávají

$$\frac{d^2 x^m}{d\vartheta^2} + \frac{d^2 \vartheta / ds^2}{(d\vartheta / ds)^2} \frac{dx^m}{d\vartheta} + \frac{dx^a}{d\vartheta} \frac{dx^b}{d\vartheta} \Gamma_{ab}^m = 0. \quad (\text{XIII.218})$$

Obecná rovnice přímky v polárních souřadnicích je

$$r \cos(\vartheta - \alpha) = R_0, \quad (\text{XIII.219})$$

kde α , R_0 jsou libovolné konstanty. Tato rovnice spolu s $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ dává $ds/d\vartheta = R_0/\cos^2 \Psi$, kde $\Psi \equiv \vartheta - \alpha$, což nakonec vede k rovnici

$$\frac{\left(\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\right)}{\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2} = -2\operatorname{tg} \Psi.$$

Rovnice geodetiky pak jsou

$$\frac{d^2 x^m}{d\vartheta^2} - 2\operatorname{tg} \Psi \frac{dx^m}{d\vartheta} + \frac{dx^a}{d\vartheta} \frac{dx^b}{d\vartheta} \Gamma_{ab}^m = 0. \quad (\text{XIII.220})$$

Uvažujme bod $\vartheta = \alpha$ (tj. $\Psi = 0$) a $r = R_0$ na přímce. Pak rovnice (XIII.220) přejde do tvaru

$$\frac{d^2 x^m}{d\vartheta^2} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^m = 0.$$

Z této rovnice získáme $\Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} = 0$ a $\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -r$. Protože α a R_0 jsou libovolné, platí to v celé rovině.

Nakonec uvažujme libovolný bod na přímce a rozepišme rovnice geodetiky (XIII.220) s využitím již spočtených Christoffelových symbolů. Pro komponentu $m = \vartheta$ získáme, že $\Gamma_{\vartheta r}^{\vartheta} = 1/r$.

b) Ze vztahů $r^2 = x^2 + y^2$ a $\cotg \vartheta = x/y$ získáme transformační matici

$$d_m^{a'} = \begin{matrix} m = x & m = y \\ \left[\begin{array}{cc} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{\sin \vartheta}{r} & \frac{\cos \vartheta}{r} \end{array} \right] \end{matrix}$$

a k ní inverzní matici

$$c_{b'}^m = \begin{matrix} b' = r & b' = \vartheta \\ \left[\begin{array}{cc} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{array} \right] \end{matrix}.$$

Příklad: $x = r \cos \vartheta \Rightarrow dx = dr \cos \vartheta - r \sin \vartheta d\vartheta \Rightarrow$ první řádek v matici $c_{b'}^m$. Transformační vztah pro Christoffelovy symboly má tvar

$$\Gamma_{b'p'}^{a'} = d_q^{a'} c_{b'}^m c_{p'}^n \Gamma_{mn}^q + d_m^{a'} c_{b',p'}^m.$$

V tomto transformačním vztahu je nenulový pouze druhý člen, protože $\Gamma_{mn}^q = 0$ v kartézských souřadnicích. Po dlouhých, ale přímočarých výpočtech obdržíme nenulové Christoffelovy symboly $\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -r$ a $\Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = 1/r$.

c) Použitím vztahu (XIII.25)

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{lm,k} - g_{kl,m})$$

a výrazu pro délkový element $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ dostáváme nenulové Christoffelovy symboly přímo

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = g^{rr} \left(-\frac{1}{2} g_{\vartheta\vartheta,r} \right) = -r,$$

$$\Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = g^{\vartheta\vartheta} \left(\frac{1}{2} g_{\vartheta\vartheta,r} \right) = 1/r.$$

3. V souřadnicovém systému (t, r, θ, ϕ) mějme zadán sféricky symetrický délkový interval

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{XIII.221})$$

kde $\nu = \nu(r, t)$ a $\lambda = \lambda(r, t)$ jsou libovolné funkce.

- najděte g_{ab} , g (determinant g_{ab}) a g^{ab} ,
- vypočtěte Christoffelovy symboly Γ_{bp}^a ,
- spočtěte Riemannův tenzor křivosti R_{abps} (využijte vztahy (XIII.81) a (XIII.82)),
- určete Ricciho tenzor R_{ab} a skalární křivost R ,
- sestavte Einsteinovy gravitační rovnice ve vakuu (XIII.96) pro zadaný délkový interval (XIII.221) a ověřte, že řešení (XIII.130) vyhovuje těmto rovnicím.

Řešení: Souřadnice (t, r, θ, ϕ) si označíme následujícím způsobem

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi).$$

V dalším textu bude čárka odpovídat derivaci podle r a tečka derivaci podle t .

a) Pro kovariantní metrický tenzor, jeho determinant a kontravariantní metrický tenzor máme

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

$$g = \det(g_{ab}) = -e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2 \theta,$$

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

b) Podle vztahu (XIII.25), jsou nenulové složky Christoffelových symbolů

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \dot{\nu}, & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \nu', & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cotg \theta. \end{aligned}$$

c) Pro nenulové komponenty Riemannova tenzoru křivosti, s využitím symetrií, máme

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{1}{2} e^{\nu} \nu'' + \frac{1}{4} e^{\lambda} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4} e^{\lambda} \dot{\nu} \dot{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\lambda} \ddot{\lambda} - \frac{1}{4} e^{\nu} \nu'^2 + \frac{1}{4} e^{\nu} \nu' \lambda', \\ R_{0202} &= -\frac{1}{2} r e^{\nu-\lambda} \nu', \\ R_{0212} &= -\frac{1}{2} r \dot{\lambda}, \\ R_{0303} &= -\frac{1}{2} r e^{\nu-\lambda} \nu' \sin^2 \theta, \\ R_{0313} &= -\frac{1}{2} r \dot{\lambda} \sin^2 \theta, \\ R_{1212} &= -\frac{1}{2} r \lambda', \\ R_{1313} &= -\frac{1}{2} r \lambda' \sin^2 \theta, \\ R_{2323} &= r^2 e^{-\lambda} \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

d) Nenulové složky Ricciho tenzoru jsou

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu'' - \frac{1}{4} \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{4} \dot{\nu} \dot{\lambda} - \frac{1}{2} \ddot{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \nu'^2 - \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \nu' \lambda' + \frac{1}{r} e^{\nu-\lambda} \nu', \\
R_{01} &= \frac{1}{r} \dot{\lambda}, \\
R_{11} &= -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} e^{\lambda-\nu} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \dot{\nu} \dot{\lambda} \\
& + \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \ddot{\lambda} - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{r} \lambda', \\
R_{22} &= -\frac{1}{2} r e^{-\lambda} \nu' + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} + 1, \\
R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}.
\end{aligned}$$

Pro skalární křivost ze vztahu (XIII.87) obdržíme

$$\begin{aligned}
R &= e^{-\lambda} \nu'' - \frac{1}{2} e^{-\nu} \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} e^{-\nu} \dot{\nu} \dot{\lambda} \\
& - e^{-\nu} \ddot{\lambda} + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \nu'^2 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \nu' \lambda' \\
& + \frac{2}{r} e^{-\lambda} \nu' - \frac{2}{r} e^{-\lambda} \lambda' + \frac{2}{r^2} e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2}.
\end{aligned}$$

e) Za neznámé funkce $\nu = \nu(r, t)$ a $\lambda = \lambda(r, t)$ dosadíme Schwarzschildovo řešení (XIII.130), tj.

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right)$$

a ověříme, že skutečně platí

$$R_{ab} = 0.$$

Příklady k samostatnému řešení

1. Přesvědčte se, že metrický tenzor je kovariantně konstantní, tj. že platí $g_{ab;p} = 0$.

2. Dokažte tyto identity

a) $g_{ab,p} = \Gamma_{abp} + \Gamma_{bap}$,

b) $g_{am} g^{mb}{}_{,p} = -g^{mb} g_{am,p}$,

c) $g^{ab}{}_{,p} = -\Gamma_{mp}^a g^{mb} - \Gamma_{mp}^b g^{ma}$.

3. Vypočtěte nenulové komponenty Christoffelových symbolů a Riemannova tenzoru křivosti pro dvoudimenzionální prostoročas

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2.$$

$[\Gamma_{uu}^v = v, \Gamma_{vu}^u = 1/v, \text{Riemannův tenzor je nulový}]$.

LITERATURA

Část A

Učebnice a učební texty

- Brdička M., Hladík A.:** Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987.
- Calkin M. G.:** Lagrangian and Hamiltonian mechanics. World Scientific, Singapore 1996 (Part I), 1999 (Part II).
- Obetková V., Mamrillová A., Košinárová A.:** Teoretická mechanika. Alfa, Bratislava 1990.
- Goldstein H.:** Classical Mechanics. Adisson-Wesley, Reading 1980.
- Horský J., Novotný J.:** Teoretická mechanika. SPN, Praha 1985.
- Landau L. D., Lifšic E. M.:** Mechanika. Nauka, Moskva 1973.
- Leech J. W.:** Klasická mechanika. SNTL, Praha 1970 (překlad).
- Olchovskij I. I.:** Kurs teoretičeskoj mechaniki dlja fizikov. Nauka, Moskva 1970.
- Rubinowicz W., Krolikowski W.:** Mechanika teoretyczna. PWN, Warszawa 1967.
- Saletan E. J., Cromer A. H.:** Theoretical Mechanics. J. Willey, New York 1971.
- Schmutzer E.:** Grundlagen der Theoretischen Physik. Teil I., DAW, Berlin 1991.
- Thirring W.:** Lehrbuch der Mathematischen Physik. Band I. Springer Vrlg., Wien 1988.
- Trkal V.:** Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV, Praha 1956.
- Macur M.:** Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua I, II. VUT, Brno 1995, 1996.
- Polak L.S. (ed.):** Variacionnyje principy mechaniki. GIFML, Moskva 1959.
- Slavík J.:** Teoretická mechanika. Moderní přehled I, II. Západočeská univerzita Plzeň, 1995.

Doplňující literatura

- Arnold V. I.:** Matematičeskije metody klassičeskoj mechaniki. Nauka, Moskva 1979.
- Gelfand I. M., Fomin S. B.:** Variacionnoje isčislenije. GIFML, Moskva 1961.
- Buchar J., Bartoň S., Křivánek I.:** Mechanika těles. Mendelova univerzita, Brno 1996.
- Kvasnica J.:** Matematický aparát fyziky. Academia. Praha 1997.
- Peitgen H., Jürgens H., Saupe D.:** Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, Springer Vrlg., Wien 1993.

Část B

Učebnice a učební texty

- Brdička M.:** Mechanika kontinua. NČSAV, Praha 1959.
- Brdička M., Samek L., Sopko B.:** Mechanika kontinua. Academia, Praha 2000.
- Eglit M. E., Hodges D. H., (eds):** Continuum Mechanics via Problems and Exercises (Part I and II). World Scientific, Singapore 1996.
- Horský J., Novotný J.:** Mechanika kontinua. SPN, Praha 1984.
- Iljušin A. A., Lomakin V. A., Šmakov A. P.:** Zadači i upražněníja po mehanike splošnych sred. MGU, Moskva 1979.
- Landau L. D., Lifšic E. M.:** Mechanika splošnych sred. Gostechizdat, Moskva 1953.
- Murnaghan F. D.:** Finite Deformation of an Elastic Solid. Acad. Press, New York, London 1951.
- Obetková V. a kol.:** Teoretická mechanika II. MFF UKo, Bratislava 1983.
- Sedov L. I.:** Mechanika splošnoj sredy I, II. Nauka, Moskva 1970.
- Sommerfeld A.:** Mechanik der deformierbaren Medien. DAV, Leipzig 1954.

Doplňující literatura

- Kvasnica J.:** Termodynamika. SNTL, Praha 1965.
- Tichonov A., Samarský A.:** Rovnice matematické fyziky. NČSAV, Praha 1955.
- Škvor Z.:** Akustika a elektroakustika. Academia, Praha 2001.

Část C

Učebnice a učební texty

- Bičák J., Rudenko V. N.:** Teorie relativity a gravitační vlny. MFF UK, Praha 1985.
- Das A.:** The Special Theory of Relativity. Springer Vrlg, New York 1993.
- Einstein A.:** The Meaning of Relativity. Princeton U.P., 1953.
- Horský J.:** Úvod do teorie relativity. SNTL, Praha 1975.
- d'Inverno R.:** Introducing Einstein's Relativity. Clarendon Press, Oxford 1992.
- Kuchař K.:** Základy obecné teorie relativity. Academia, Praha 1968.
- Landau L. D., Lifšic E. M.:** Teorija polja. Nauka, Moskva 1973.
- Misner Ch. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.:** Gravitation. Freeman and Co., San Francisco 1973.
- Novotný J., Horský J.:** Teorie relativity. SPN, Praha 1985.
- Schwarz H.:** Introduction to Special Relativity. McGraw-Hill, New York 1968.

- Sextl R., Urbantke H.:** Relativität, Gruppen, Teilchen. Springer Vrlg, Wien 1992.
Stephenson G., Kilmister C. W.: Special Relativity for Physicists. Longmans, London 1967.
Votruba, V.: Základy speciální teorie relativity. Academia, Praha 1977.

Doplňující literatura

- Bartuška K.:** Kapitoly ze speciální teorie relativity. SPN, Praha 1989.
Boček L.: Tenzorový počet. SNTL, Praha 1976.
Einstein A.: Jak vidím svět. LN, Praha 1993.
Einstein A.: Z mých pozdních let. LN, Praha 1995.
Horský J., Bartoň S.: Relativistický vesmír. Ando Publ., Brno 1997.
Krupka D., Musilová J.: Integrální počet na Eukleidových prostorech a diferencovatelných varietách. UJEP, Brno 1981.
Pauli W.: Theory of Relativity. Pergamon Press, Oxford 1958.
Štoll J., Tolar J.: Teoretická fyzika (nekvantová). ČVUT, Praha 1994.
Will C. M.: Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge University Press, Cambridge 1993.
Zhang Y. Z.: Special Relativity and its Experimental Foundations. World Scientific, Singapore 1997.

REJSTŘÍK

- aberrace světla, 260, 283
- amplituda, 102, 150, 226
- antisymetrie, 373
- asymptoty trajektorie, 388
- báze
 - kontravariantní, 21
 - kovariantní, 20
- bod
 - hmotný, 18
- budoucnost, 306
- cirkulace pole, 171
- čára
 - geodetická, 365
 - souřadnicová, 20, 361
- čas
 - souřadnicový, 368
 - vlastní, 276, 368
- číslo
 - Froudeho, 246
 - Machovo, 227
 - Reynoldsovo, 245
 - Strouhalovo, 246
- čtverec intervalu, 359
- čtyřhybnost, 326, 329
- čtyřimpulz, 326
- čtyřrychlost, 326, 334, 366
- čtyřsíla, 328
- čtyřtenzor, 321
- čtyřvektor, 320
 - Minkowskiho síly, 328
- čtyřzrychlení, 328, 334
- defekt
 - hmotnostní, 298, 332
- deformace, 309
 - kontinua, 158
 - malé, 160
 - pružná, 195
 - smyková, 201
 - tenzor, 160
- délka, 392
 - charakteristická, 244
 - kyvadla, 95
 - směšovací, 244
 - světočáry, 311
 - trajektorie, 18
 - trubice, 239
 - vlastní, 280
 - vlnová, 102, 264
- derivace, 66
 - absolutní, 365
 - kovariantní, 167, 187, 338, 363
 - obyčejná, 187, 364
 - parciální, 157, 168
 - totální, 54, 73, 88
- deviátor, 161
- diagram
 - Minkowskiho, 306
- diferenciál funkce, 66
- dilatace času, 266
- dráha, 18
- efekt
 - neperiodický, 385
- ekvivalence, 37, 49
 - hmotnosti, 358

- hmotnosti a energie, 255, 293
- lokální, 359
- princip, 344
- rovníc, 81
- element objemu, 335
- elipsoid, 181
 - setrvačnosti, 115
- energie, 326
 - interakční, 42
 - kinetická, 38, 292
 - tuhého tělesa, 112
 - klidová, 350
 - vnitřní, 293
 - mechanická, 39
 - nemechanická, 40
 - potenciální
 - efektivní, 143
 - tuhého tělesa, 121
 - relativistická, 326
 - rotační, 112
 - translační, 112
 - vazební, 298
 - vnitřní, 137, 182, 187
 - volná, 186, 194
 - Gibbsova, 186
 - Helmholtzova, 186
 - zákon zachování, 39, 297
 - zobecněná, 65, 70, 72, 79
- éter, 259, 262, 266
- extrém, 67
 - funkce, 66
 - funkcionálu, 66
 - potenciální energie, 63
- extremálnost funkcionálu, 67
- faktor
 - Lorentzův, 274, 290, 326
- forma
 - bilineární, 163, 315
 - bilineární symetrická, 113
 - kvadratická, 64, 114, 163
 - multilineární, 163
 - pozitivně definitní, 113, 315
- formule
 - barometrická, 210
 - Frenetova, 19
- frekvence, 102, 226, 260
 - klasická, 297
 - klidová, 284
 - kruhová, 102, 123
 - relativní posun, 390
 - vlastní, 132
 - struny, 203
 - vln, 201
- funkce, 88
 - disipativní, 62, 185, 239
 - eliptická, 123
 - generující, 71
 - Hamiltonova, 80, 84
 - homogenní, 147
 - Lagrangeova, 62, 73, 352
 - potenciálová, 38
 - zobecněná, 62
 - Routhova, 83
 - rozdělovací, 93
 - skalární, 170
 - termodynamická, 193
 - vlastní, 203
 - vlnová, 105
 - vytvěřující, 85
- funkcionál, 66, 67, 91, 352
- generátory, 71
- geodetika, 365, 366
 - rovnice, 378
- geometrie, 59
 - euklidovská, 18, 305, 310, 313
 - Minkowskiho, 305, 307, 310, 360
 - prostorochasu, 305, 360
 - pseudoeuklidovská
 - Minkowskiho, 305
 - riemannovská, 361
 - sférická, 371
 - v zakřivených souřadnicích, 360
- gravitace, 178, 358
 - Einsteinova teorie, 376
 - měsíční, 48
 - míra, 33
 - newtonovská teorie, 375, 376
 - relativistická teorie, 360

- gyroskop, 125, 126
- hamiltonián, 105
- hmotnost, 31, 289, 330
 - fotonu, 332
 - klidová, 291, 293, 326, 386
 - elektronu, 331
 - proměnná, 128
 - redukováná, 137, 142
 - relativistická, 297
 - rozložení, 174
 - setrvačná, 31, 357
 - systému, 43
 - tělesa, 112
 - tíhová, 33, 357
- hodiny
 - atomové, 279
 - ideální, 17, 278, 311, 367
 - souřadnicové, 367
 - zpoždění, 276
- homogenita
 - času, 324
 - prostoru, 324
- hustota, 71, 174
 - čtyřsily, 347
 - energie, 344, 349
 - entropie, 213, 231
 - hmotnosti, 109, 174, 191, 214, 344
 - hybnosti, 344, 347
 - klidová, 376
 - kontinua, 196
 - pravděpodobnosti, 106
 - síly, 237, 347
 - toku
 - energie, 218, 344
 - energie a hybnosti, 346
 - hmotnosti, 176
 - hybnosti, 217, 344, 346
 - plynu, 230
 - výkonu, 347
- hybnost, 42, 120, 326, 347
 - částice, 290
 - fotonu, 327
 - hmotného bodu, 43
 - relativistická, 326
 - úhrotná, 177, 293
 - zobecněná, 64, 70, 72
- hydrostatika, 209
- hyperplocha, 339
- identita, 176, 349
 - Bianchiho, 374
 - diferenciální, 376
 - Jacobiho, 88
- integrál
 - circulace rychlosti, 218
 - energie, 37, 134
 - hybnosti, 37
 - křivkový, 38, 41, 171, 173
 - Lagrangeovy funkce, 352
 - momentu hybnosti, 37
 - objemový, 119
 - plošný, 41, 119, 171, 173
 - pohybových rovnic, 64, 89
 - skalární funkce, 170
 - toku vektorového pole, 342
- integrály
 - 1. druhu, 171
 - 2. druhu, 171
 - eliptické, 383
 - Lagrangeových rovnic
 - první, 63
 - pohybových rovnic
 - první, 35
 - tenzorových polí, 338
- interval, 17, 305, 311
 - časový, 259, 276
 - časupodobný, 308
 - prostorupodobný, 308
 - souřadnicového času, 369
 - světelný, 308
 - světočáry, 367
 - velikost, 308
 - vlastního času, 278, 368
- invariance, 70, 257, 289, 324
 - Eulerových rovnic, 234
 - fyzikálních zákonů, 33, 324
 - intervalu, 368
 - relativistická, 351
 - zrušení, 237

- invariant R, 375
- izotropie, 194
 - prostoru, 32, 324
 - tekutiny, 208, 234
- jakobián, 92, 170, 341, 359
- jev, 123, 135
 - aerodynamický, 244
 - Comptonův, 332
 - Dopplerův, 260, 283
 - Mössbauerův, 279
 - precesní, 136
 - přílivu a odlivu, 48, 373
 - setrvačnickový, 123
- kmity
 - harmonické, 132, 150
 - malé, 130
 - struny, 201
 - volné, 133
- koeficient
 - metrický, 370
 - odporu, 249
 - Poissonův, 195
 - strhávací, 262, 285
 - tepelné vodivosti, 208, 238
 - turbulentní vazkosti, 244
 - všestranného stlačení, 194
- koeficienty
 - elastické, 192
 - Laméovy, 24, 194
 - pružnosti, 193
 - tepelné pružnosti, 192
 - vazkosti, 235
- konstanta
 - aditivní, 39
 - Boltzmannova, 210
 - Einsteinova gravitační, 380
 - kosmologická, 375
 - Newtonova gravitační, 210, 375
 - Planckova, 104, 327
 - Poissonova, 213
 - tepelné roztažnosti, 195
 - úměrnosti, 207
- kontrakce délky, 266, 280, 281
- křivka, 52, 157, 215, 308
 - nejpřímější, 365
 - uzavřená, 144, 373
 - tekoucí, 220
- křivost, 373, 374
 - skalární, 374
- kužel, 227, 316
 - světelný, 316
- kuželosečka, 145
- kvadrát
 - časové vzdálenost, 305
 - intervalu události, 313
 - prostorové vzdálenost, 305
 - velikosti vektoru, 22
 - vzdálenosti, 159
- kvazisoučasnost, 306
- kyvadlo
 - matematické, 148
 - reverzní, 37
- matice, 315
 - antisymetrická, 158
 - forem, 118
 - inverzní, 22, 116, 165, 318, 393
 - jednotková, 21
 - Kroneckerova, 28
 - Lorentzova, 323
 - symetrická, 117, 158
 - transformační, 165, 319, 340, 362
- Merkur, 385, 391
- měření
 - času, 368
 - metrických koeficientů, 370
 - vzdálenosti, 270, 369
- metoda
 - Lagrangeova, 121
 - měření rychlosti světla, 260
 - poruchová, 386
 - postupných aproximací, 383
 - radiolokační, 271, 368
 - Römerova, 261
 - separace proměnných, 202
 - synchronizace, 269, 272
- metrika, 378, 380
- minulost, 306

- absolutní, 308
- model
 - ideální tekutiny, 208
 - ideálních hodin, 278
 - kontinua, 156
 - tuhého tělesa, 155
 - zmenšený, 244
- modul, 150
 - μ , 199
 - E, 194
 - pružnosti, 199
 - pružnosti ve smyku, 194
 - smykový, 205
 - Youngův, 194
- moment
 - hybnosti, 37, 45, 111, 163
 - setrvačnicku, 286
 - setrvačnosti, 122
 - síly, 45, 119, 223
- momenty
 - deviační, 115
 - setrvačnosti, 115
 - hlavní, 115
- multiplikátory
 - Lagrangeovy, 58
- náboj
 - částice, 47
 - elektrický, 33, 296, 354
 - hustota, 176
 - velikost, 279
 - relativní rychlost, 34
- nadplocha, 55, 170, 339, 342
- napětí, 179
- nutace, 135
- objem, 106
 - fázový, 92
 - kontinua, 182
 - nadplochy, 342
 - orientovaný, 334
 - relativní přírůstek, 195
 - specifický, 231
 - tělesa, 111, 281
 - zobecněný, 170
- odchylka trajektorie, 388
- odpor, 119, 223, 234
- ohyb světla, 388
- operátor
 - d'Alembertův, 337
 - diferenciální, 41, 337
 - energie, 105
 - Laplaceův, 101, 166, 250, 337, 375
 - nabla, 101
- osa, 109
 - časová, 307
 - gyroskopu, 126
 - hlavní, 114, 181
 - kartézská, 306
 - otáčení, 72, 123
 - prostorová, 308, 323
 - rotace, 26
 - setrvačnicku, 122, 286
 - těžkého, 135
 - souřadnic, 18, 161, 387
 - symetrie, 110, 121
 - trubice, 240
 - úhlové rychlosti, 37
 - zemská, 135
- oscilátor
 - energie, 87
 - harmonický, 87, 132
- otočení, 32, 246, 286, 305, 323
- paprsek
 - světelný, 366
- paradox, 50, 280, 309
 - d'Alembertův, 223, 234, 247
 - dvojčat, 279
 - hodin, 309
- parametr, 219
 - číslo
 - Froudeho, 246
 - Reynoldsovo, 245
 - Strouhalovo, 246
 - kontinua, 209
 - kuželosečky, 145
 - podobnosti, 245
- parametrizace
 - kanonická, 365

- perihelium, 145, 385
- plocha, 52
 - druhého stupně, 114
 - ekvipotenciální, 226
 - konstantní akce, 101
 - kulová, 361
 - nespojivosti, 228
 - souřadnicová, 20
 - vazebná, 52
 - vnořená, 170
- podobnost, 37
 - parametry, 245
 - teorie, 244
- pohyb, 91
 - absolutní, 266
 - bodů, 91
 - částice, 325, 352, 366
 - zkusební, 376
 - Eulerův, 157
 - finitní, 143
 - fotonu, 366
 - fyzikální studium, 19
 - hmotného bodu, 17, 34
 - hmoty, 344
 - hodin, 278
 - hřebene vlny, 282
 - hyperbolický, 296
 - infinitní, 144
 - izoentropický, 213, 220
 - jednorozměrný, 80
 - kontinua, 187, 198
 - pružného, 190, 192
 - Lagrangeův, 157
 - nábojů, 33
 - neinerciální, 279, 286
 - planet, 357, 385
 - potenciálový, 220
 - přímočarý, 142, 222, 255, 271
 - retrogradní, 135
 - rotační, 110, 111
 - rovnoměrný, 257, 271, 308
 - s proměnnou hmotností, 129
 - setrvačnicku
 - těžkého, 135
 - volného, 122
 - slunečního systému, 261
 - soustavy nábojů, 263
 - tekutiny
 - ideální, 209, 220, 351
 - nestlačitelné, 216
 - nevěřivý, 220
 - potenciálový, 223
 - reálné, 208
 - stacionární, 215, 221
 - vazké, 237
 - translační, 109, 159, 225
 - tuhého systému, 27
 - tuhého tělesa, 109
 - tuhých těles, 221
 - věřivý, 159
 - volné částice, 72
 - Země, 30, 261
 - zrychlený, 286, 295
- pokus, 257, 279
 - 1. řádu, 260
 - 2. řádu, 260
- Fizeauův, 262, 285
- Hoekův, 261
- Championův, 331
- Kennedyův–Thorndikův, 266
- Lodgeův, 265
- Michelsonův–Morleyův, 263, 281
- pole
 - čtyřrychlosti, 336
 - čtyřzrychlení, 336
 - elektrické, 33, 265
 - elektromagnetické, 34, 102, 259
 - gravitační, 33, 37, 357, 360, 375
 - magnetické, 33, 265, 296
 - metrické, 167, 334, 341
 - euklidovské, 361
 - nevěřivé, 199, 226
 - nezřídlové, 199, 225
 - posunutí, 159, 191
 - potenciálové, 199
 - rychlostní, 157, 209, 235, 241, 346
 - silové, 42, 101, 119, 360
 - skalární, 166, 333
 - solenoidální, 199
 - tenzorové, 159, 166, 333, 363

- tenzor napětí, 178
- vektorové, 166, 333
- poloměr křivosti trajektorie, 19
- posun, 262, 265
 - perihelia, 385
 - počátku, 71
 - relativní, 390
 - rudý, 390
 - v čase, 32
 - v prostoru, 32
 - virtuální, 55
- posuv, 279
- potenciál, 42, 77, 211, 237
 - Coulombův, 50
 - gravitační, 187, 210, 375
 - newtonovský, 378
 - rychlosti, 220
 - skalární, 77, 354
 - termodynamický, 186
 - vektorový, 76, 354
- pravidlo, 24
 - Einsteinovo sumační, 22, 60
 - pravotočivého šroubu, 26
 - synchronizace, 270
- precese, 123, 135
 - pseudoregulární, 135
 - regulární, 122
 - Thomasova, 286
- princip
 - d'Alembertův, 52, 56
 - diferenciální, 68
 - ekvivalence, 344
 - lokální, 37, 359, 364
 - Fermatův, 103
 - Hamiltonův, 52, 68, 81
 - homogenity
 - času, 32
 - prostoru, 32
 - integrální, 68
 - izotropie prostoru, 32
 - korespondence, 380
 - Maupertuisův, 82, 103
 - minimální akce, 52
 - nejmenší akce, 68, 103
 - neurčitosti, 90
 - nezávislosti sil, 31
 - relativity, 32, 222, 250, 266, 324
 - Galileiho, 257
 - obecný, 375
 - setrvačnosti, 30, 255, 289
 - stacionární akce, 68
 - superpozice, 210
 - symetrie, 32
 - šíření interakcí, 309
 - variační, 81, 82, 304, 352
 - virtuální práce, 57
- principy
 - speciální teorie relativity, 267, 279
- problém
 - dvou těles, 128, 141
 - Keplerův, 128, 144
 - srážek, 128
 - teorie pružnosti, 196
- prostor
 - absolutní, 29, 255
 - ařinný, 312
 - euklidovský, 119, 305
 - fázový, 80, 88, 92
 - izotropie, 324
 - konfigurační, 54, 81
 - Minkowskiho, 305
 - vektorový, 313
 - plochý, 371
 - třírozměrný, 18, 102
 - vektorový, 113, 162
 - zakřivený, 341, 360, 371
- prostorčas, 170, 305, 338, 359
 - čtyřrozměrný, 361
 - geometrie, 360
 - Minkowskiho, 304, 324
 - plochý, 361
- proudění, 262
 - energie, 182
 - ideální tekutiny, 223
 - kinematika, 237
 - laminární, 241
 - nadvukové, 227, 228
 - nevířivé, 220
 - podzvukové, 228
 - potenciálové, 221

- stacionární, 157, 215, 246
- turbulentní, 242, 249
- válcovou trubicí, 244
- vazké tekutiny, 239
- proudnice, 157, 215
- průmět síly, 179
- pružnost
 - koefficienty, 192–194
 - moduly, 192
 - adiabatické, 199
 - izotermické, 199
 - teorie, 196
- přenos
 - paralelní, 365, 371
- pseudoskalár, 163
- pseudotenzor, 163, 334
- pseudovektor, 26, 163
- reakce
 - řetězová, 298
 - termonukleární, 299
- relace ortonormality, 25, 316
- rotace, 76, 109, 168, 174, 237, 338
 - zemská, 48, 126, 135
- rovnice
 - Bernoulliho, 216
 - Ciolkovského, 146
 - eikonalu, 103
 - Einsteinovy gravitační, 375
 - entropie, 187
 - Eulerovy, 67, 214, 351
 - dynamické, 121
 - kinematické, 111
 - geodetiky, 378
 - geometrické optiky, 103
 - Hamiltonova–Jacobiho, 97
 - Hamiltonovy kanonické, 80, 90
 - hydrodynamiky, 216
 - charakteristická, 131
 - kinematické, 237
 - kompatibility, 161, 196
 - kontinua, 198, 208
 - kontinuity, 106, 176, 187, 344
 - Lagrangeovy
 - 1. druhu, 58
 - 2. druhu, 61, 84
 - Laplaceova, 222
 - Maxwellovy, 263
 - Meščerského, 130
 - Navierovy–Stokesovy, 237, 240
 - Newtonovy pohybové, 34, 52
 - obecné teorie relativity, 382
 - pohybové, 294, 381
 - kontinua, 179, 187
 - Poissonova, 187, 211, 375
 - první integrál, 35
 - relativistické, 351, 375
 - Reynoldsovy, 243
 - rovnováhy, 195, 209
 - sekulární, 116
 - Schrödingerova, 97, 105
 - speciální teorie relativity, 364
 - stavová, 209
 - trajektorie, 386
 - trojúhelníková, 312
 - vlnová, 102, 200, 225
 - vnitřní energie, 187
 - rozptýl, 139, 140
 - rychlost, 19, 22, 156, 296
 - absolutní, 259
 - cirkulace, 218
 - éteru, 259
 - fázová, 282
 - Galileiho transformace, 258
 - kartézské složky, 19
 - kontinua, 157
 - Lorentzova transformace, 273
 - nadsvětelná, 309
 - nadzvuková, 227
 - nerelativistická, 379
 - paprsková, 259, 282
 - podsvětelná, 275, 311
 - relativní, 128, 138, 258
 - rotační, 27
 - souřadnicová, 370
 - světla, 104, 259, 275, 309
 - fázová, 258
 - šíření interakcí, 309
 - tekutiny, 215
 - translační, 26

- úhlová, 110
- unášivá, 27
- vazké tekutiny, 238
- zkušební částice, 383
- zobecněná, 63, 79

- setrvačnický, 122, 286
 - těžký, 122
 - nesymetrický, 136
 - symetrický, 133
 - volný, 122
- síla, 291
 - centrální, 40, 45
 - Coriolisova, 36
 - dalekého dosahu, 177
 - efektivní, 57
 - Eulerova, 37
 - fiktivní, 37
 - gravitační, 37
 - krátkého dosahu, 178
 - Lorentzova, 33
 - Minkowskiho, 328
 - objemová, 177, 183
 - odstředivá, 37, 143
 - plošná, 178, 346
 - potenciálová, 38
 - pravá, 29
 - reaktivní, 129
 - setrvačná, 36
 - setrvační, 359
 - skutečná, 29
 - translační, 37
 - tření, 247
 - vazebná, 53, 56
 - vazební, 119
 - vtištěná, 56
 - vztlaková, 223
 - zobecněná, 60
 - Žukovského, 223
- současnost, 256
 - absolutní, 18, 273, 309
 - relativní, 267
- součin
 - skalární, 21, 22, 313
 - tenzorový, 163
 - vektorový, 26, 28, 168, 335
- souřadnice, 18
 - cyklická, 63, 72, 82
 - časová, 256, 326, 360
 - imaginární, 313
 - kartézská, 20, 22
 - konfiguračního prostoru, 54
 - křivočará, 20, 338
 - Minkowskiho, 378
 - nová, 87, 92
 - ortogonální, 23
 - prostorověčasová, 293, 305, 363
 - prostorová, 256, 322, 360
 - pseudokartézská, 320, 333, 361
 - radiální, 391
 - válcová, 24
 - zobecněná, 59, 63, 68, 79, 130
- soustava
 - inerciální, 358
 - kartézská souřadnicová, 18
 - laboratorní, 136
 - lokálně geodetická, 362, 366
 - neinerciální, 358
 - pravotočivá, 26
 - privilegovaná, 263
 - referenční, 366
 - sluneční, 29
 - těžišťová, 136
 - tuhá, 18
 - vztažná, 18, 263, 366
- srážka částic
 - nepružná, 137, 289, 330
 - pružná, 138, 139, 330
- střed hmotnosti, 43
- světlo, 258, 259, 261, 265, 390
- světločára, 308, 311
- symbol
 - Christoffelův, 167, 363
 - Kroneckerův, 313
 - Levi-Civitiův, 334
 - Levi-Civitiův, 26, 168
- symetrie, 20, 68, 373
- synchronizace hodin, 260
- systém
 - inerciální, 29, 36, 256

- lokálně inerciální, 359
- neinerciální, 31, 279
- pravotočivý, 110
- privilegovaný, 30, 255
- vztažný, 18, 29, 109
- tachyon, 327
- tekutina, 207
 - barotropní, 209
 - ideální, 207, 208, 350
 - nestlačitelná, 216, 220, 236
 - reálná, 208, 223
 - vazká, 235, 236, 244
- tenzor, 113, 162, 314
 - p -tého řádu, 162, 318
 - absolutních napětí, 180, 217, 346
 - antisymetrický, 114, 335
 - deformace, 160, 161, 181
 - druhého řádu, 113, 114
 - Einsteinův, 374
 - elektromagnetického pole, 355
 - energie a hybnosti, 346, 348, 375
 - izotropní, 114, 163
 - komponenty
 - kontravariantní, 165
 - kovariantní, 165
 - smíšené, 315
 - Kroneckerův, 193
 - Levi-Civitův, 163, 335
 - malé deformace, 160
 - metrický, 20, 21, 114, 163, 164, 316, 360
 - napětí, 178, 192, 207, 346
 - posunutí, 192
 - prostorochasový, 320, 337
 - prostorový, 320
 - pružnosti, 192
 - relativních napětí, 180, 346
 - Ricciho, 374
 - Riemannův, 373
 - rychlosti deformace, 159, 183, 235
 - setrvačnosti, 112, 114, 121, 163
 - symetrický, 113, 114
 - vazkých napětí, 243
 - zúžení, 163
- teorém
 - Noetherové, 52, 72
 - virialový, 147
- teorie kmitů, 119, 131
- teorie malých kmitů, 125
- těžiště, 44
- tlak, 179, 210, 348
 - normální, 207
 - v plynu, 208
 - záporný, 208
- tok
 - tepelný, 182, 187, 208, 238
 - vektorového pole, 172, 342
- trajektorie
 - částic, 157, 215, 331, 382
 - eliptická, 385
- transformace, 32, 363
 - Galileiho, 30
 - obecná, 257
 - speciální, 30, 257
 - identická, 30, 87, 321
 - invariance, 70, 71
 - inverzní, 20, 85, 322
 - kanonická, 84
 - kanonické, 87
 - Legendrova duální, 81
 - lineární, 325
 - Lorentzova, 273, 289, 305
 - inverzní, 274
 - obecná, 71
 - prostorochasová, 320
 - prostorová, 337
 - souřadnic, 359, 362
 - vektorů, 164
- translace
 - počátku, 324
 - Poincarého grupy, 335
 - prostorová, 72
- tření, 234
 - vnitřní, 234
- třída
 - transformací, 84, 97
- tvar trajektorie, 382
- událost, 17, 256, 304, 367

- kvazisisoučasná, 327
- úhel
 - Eulerův, 110
 - ohybu, 388
 - rozptylu, 139
 - sklonu, 287
 - vrcholový, 227
- úloha, 121, 161
 - hledání extrému
 - funkce, 66
 - funkcionálu, 66
 - nalezení akce, 92
 - okrajová, 196
 - řešitelná, 128
 - základní, 66
- variace, 66, 69
 - akce, 70, 91
 - funkcionálu, 66
 - izochronní, 69
 - neizochronní, 69
 - periodické, 385
- varieta, 55, 59
- vazba, 54, 122
 - anholonomní, 54
 - hmotného bodu, 52
 - holonomní, 54
 - jednostranná, 53
 - oboustranná, 53
 - rheonomní, 54
 - semiholonomní, 55
 - skleronomní, 54
 - slabá, 150
- vektor, 162, 312
 - časupodobný, 316, 366
 - čtyřrozměrný, 312, 325
 - hustoty hybnosti, 179
 - hustoty tepelného toku, 182
 - hustoty toku energie, 344
 - hybnosti, 42, 72
 - jednotkový, 19, 110
 - kontravariantní, 22, 24, 316
 - kovariantní, 22, 24, 316
 - momentu hybnosti, 45, 122
 - ortonormální, 18
 - polohový, 18, 40, 156, 274, 312
 - posunutí, 196
 - prostorový, 320
 - prostorupodobný, 316, 366
 - rychlosti, 19, 22
 - světelný, 316, 327
 - tečný, 19, 20, 157, 171, 215, 362
 - třírozměrný, 320
 - úhlové rychlosti, 26, 114
 - vázaný, 169
 - virtuálního posunutí, 55
 - vlastní, 118
 - vlnový, 102, 103, 201
 - volný, 169, 343
 - zobecněné síly, 60
 - zrychlení, 19, 22
- velikost hybnosti, 291
- velikost vektoru, 122, 182, 326
- Venuše, 391
- věta, 89, 114, 116, 118
 1. impulzová, 43, 177
 1. termodynamická, 183
 2. impulzová, 45, 180
 2. termodynamická, 184, 239
- Eulerova, 147
- Gaussova, 173, 174, 212, 343
- Helmholtzova, 166, 174, 199
- Liouvilleova, 92, 94
- Pythagorova, 272
- Steinerova, 116
- Stokesova, 41, 172, 220
- Thomsonova, 220
- virialová, 147
- vítr
 - éterový, 259
- vlna, 102, 201
 - kompresní, 200, 201
 - monochromatická, 102
 - obecná, 201
 - podélní, 201
 - povrchová, 201, 226
 - příční, 201
 - Rayleighova, 201
 - rázová, 228, 229
 - světelná, 258

- torzní, 201
- zvuková, 226
- vlnění, 213, 258
 - elektromagnetické, 102, 258
 - rychlost, 200
 - světelné, 283
- výchylka struny, 201
- vzdálenost, 368
 - euklidovská, 305
 - mezi událostmi, 305
 - mezimolekulární, 178
 - prostorová, 280
 - radiolokační, 270
 - relativní, 30
 - vztažných bodů, 18, 256
 - záměrná, 139
- vzorec
 - Rutherfordův, 150
 - Stokesův, 247
- vztlak
 - hydrostatický, 212
- zákon
 - 1. Newtonův, 29, 255, 257, 289
 - 2. Newtonův, 31, 43, 291
 - 3. Newtonův, 32
 - akce a reakce, 32, 42, 348
 - Archimédův, 212
 - Biotův–Savartův, 33
 - Coulombův, 33, 357
 - Einsteinův gravitační, 376, 380
 - ekvivalence, 293
 - gravitační, 375
 - Hagenův–Poiseuilleův, 241
 - Hookův, 192, 195, 196
 - Newtonův gravitační, 33, 210, 357, 376, 380
 - parabolický, 240, 241
 - Pascalův, 207, 348
 - setrvačnosti, 44, 257, 366
 - skládání rychlostí, 258, 275
 - klasický, 277
 - relativistický, 277, 285
 - zákon zachování
 - čtyřhybnosti, 329
 - energie, 39, 81, 297, 300, 344
 - hmotnosti, 174, 290, 300, 332
 - hmotnosti–energie, 300
 - hybnosti, 42, 180, 289, 290
 - momentu hybnosti, 45
- zákony
 - Keplerovy, 145, 357
 - klasické mechaniky, 97
 - Newtonovy, 32
 - pohybu kontinua, 174
 - zachování, 72
- závorka
 - Poissonova, 88, 89
- zrychlení, 19, 23, 31, 32, 54
 - Coriolisovo, 27
 - dostředivé, 27
 - Eulerovo, 27
 - fyzikální komponenty, 24
 - kovariantní komponenty, 23
 - normálové, 19
 - tíhové, 48
 - translační, 26, 27
 - úhlové, 27
 - unášivé, 27



prof. RNDr. Jan Horský, DrSc.
prof. RNDr. Jan Novotný, CSc.
RNDr. Milan Štefaník, Ph.D.

MECHANIKA VE FYZICE

Vydala Academia
nakladatelství Akademie věd České republiky
Legerova 61, 120 00 Praha 2
s finanční podporou Akademie věd České republiky
Praha 2001

Vazbu navrhl Oleg Man
Redaktor publikace Mgr. Aleš Baďura
Sazbu zhotovili autoři
Grafickou úpravu a zlom do stránek provedli Milan Štefaník a Jan Horský
Vytiskla **SERIFA**®, s. r. o., Jinonická 80, Praha 5

Vydání 1.
Ediční číslo 1563
ISBN 80-200-0208-1