# 3. Diferenciální počet funkcí reálné proměnné

Matematika pro ekonomy

Jaro 2012

Ivana Vaculová

# Osnova:

**A) Funkce – opakování** (vlastnosti funkcí, lineární, kvadratické, mocninné, exponenciální a logaritmické funkce)

**B) Derivace funkce**

1 Pojem derivace

2 Geometrický význam derivace funkce

3 Derivace základních funkcí

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

5 Derivace složené funkce

6 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce

6. 1 Monotónnost funkce

6. 2 Extrémy funkce

6. 3 Konkávní a konvexní funkce, inflexní body

# A) Funkce - opakování

## Pojem funkce

V odborných a přírodovědných předmětech se často setkáváme s úlohami, ve kterých se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách jiné veličiny. Tuto závislost popisujeme pomocí pojmu **funkce** jako zobrazení v **R**.

*Nechť **A** a **B** jsou dvě neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu **x** z množiny **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo **y** z množiny **B**, které označíme **y=f(x)**, pak množina **f** uspořádaných dvojic **[x;f(x)]** se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně **funkce f**).*

$$f : y = f(x),\ x \in D(f)$$

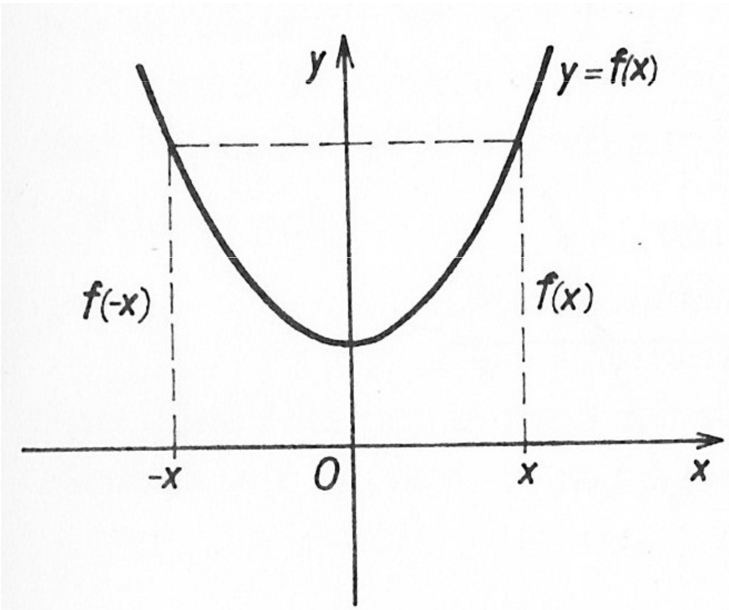
**Množinu A** označujeme **D(f)** a nazýváme **definičním oborem funkce f.**
**Množinu B** označujeme **H(f**) a nazýváme **oborem hodnot funkce f.**
Číslo ***x*** je **nezávisle** proměnná, argument funkce f.
Číslo ***y*** je **závisle** proměnná, funkční hodnota funkce f v bodě x.

# Vlastnosti funkcí

## a) Sudé funkce, liché funkce

**Sudá funkce**

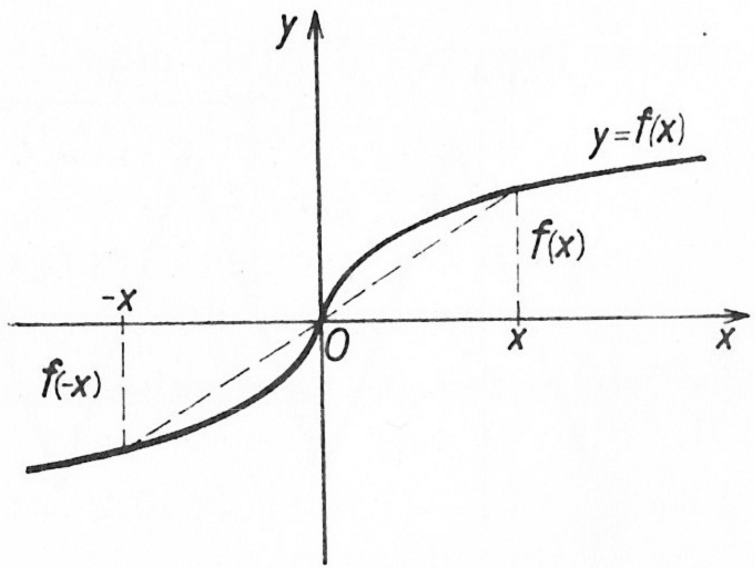
$$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$$
$$\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$$




Graf je souměrný podle osy y.

**Lichá funkce**

$$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$$
$$\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$$




Graf je středově souměrný podle počátku.

*Např.:* $f_1 : y = x^2, D(f) = R$
$f_2 : y = x^{-2}, D(f) = R - \{0\}$

*Např.:* $f_1 : y = x^3, D(f) = R$
$f_2 : y = x^{-3}, D(f) = R - \{0\}$

# Vlastnosti funkcí

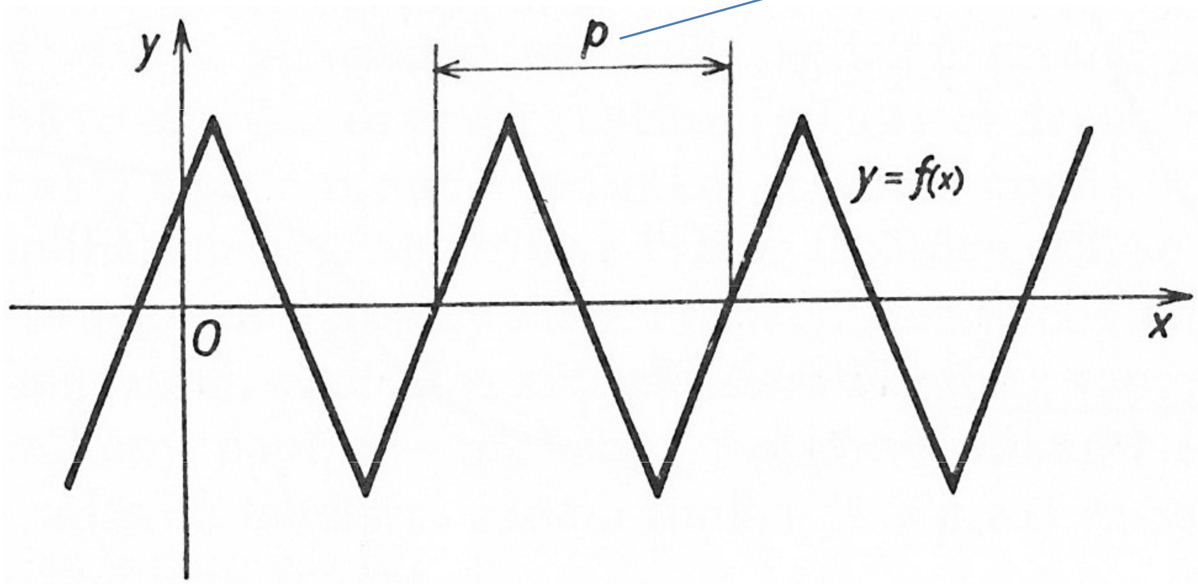
## b) Periodické funkce

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo **p > 0**, že pro každé **k ϵ Z** platí:

**1) Je-li *x ϵ D(f)*, pak *x + kp ϵ D(f)***

**2) *f (x + kp) = f (x)***

perioda funkce



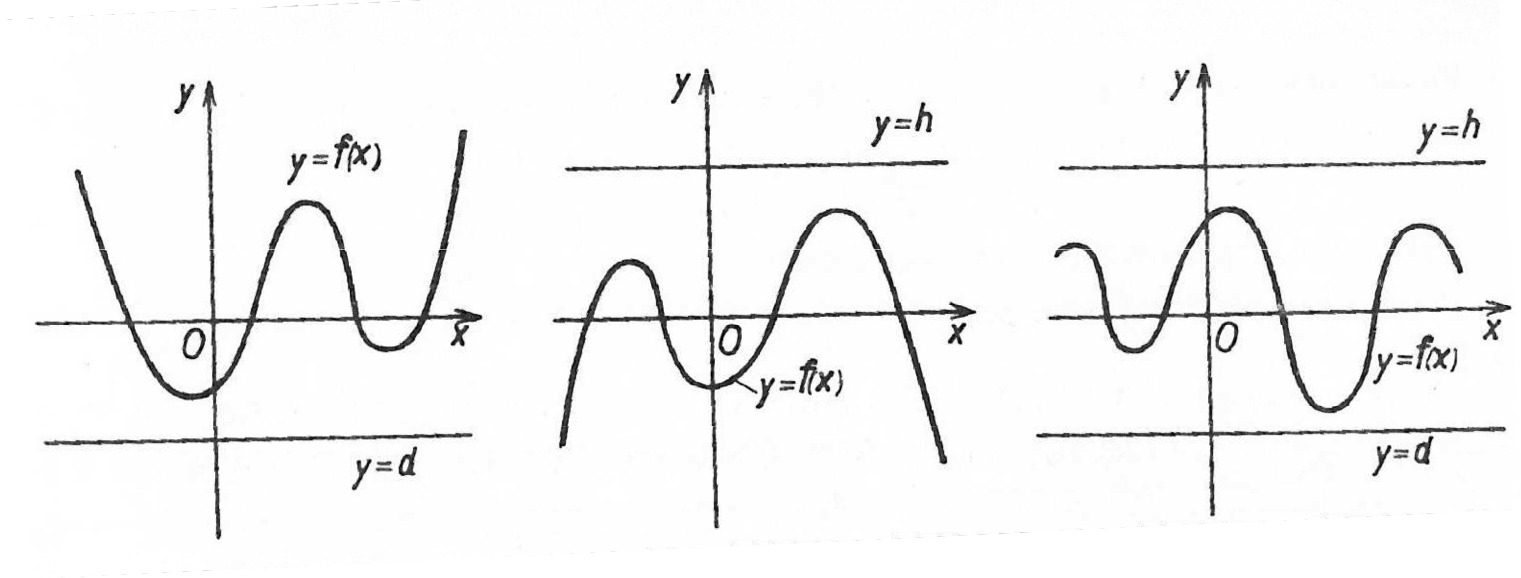

*Např.:* $f_1 : y = \cos\ x,\ f_2 : y = \sin\ x$

$f_3 : y = tg\ x,\ f_4 : y = \mathrm{cotg}\ \mathrm{x}$

# Vlastnosti funkcí

## c) Funkce omezená (zdola, shora), maximum a minimum funkce

| Zdola omezená | Shora omezená | Omezená |
|---|---|---|
| $\exists d : \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq d$ | $\exists h : \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq h$ | Je omezená shora i zdola. |




Funkce ***f*** má v bodě ***a*** **maximum**, právě když: $\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a)$

Funkce ***f*** má v bodě ***b*** **minimum**, právě když: $\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(b)$

# Vlastnosti funkcí

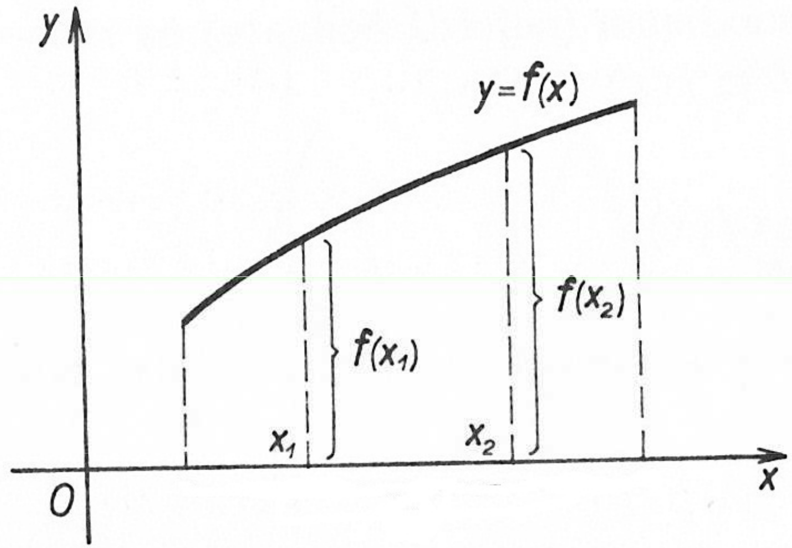
## d) Rostoucí a klesající funkce

Rostoucí funkce

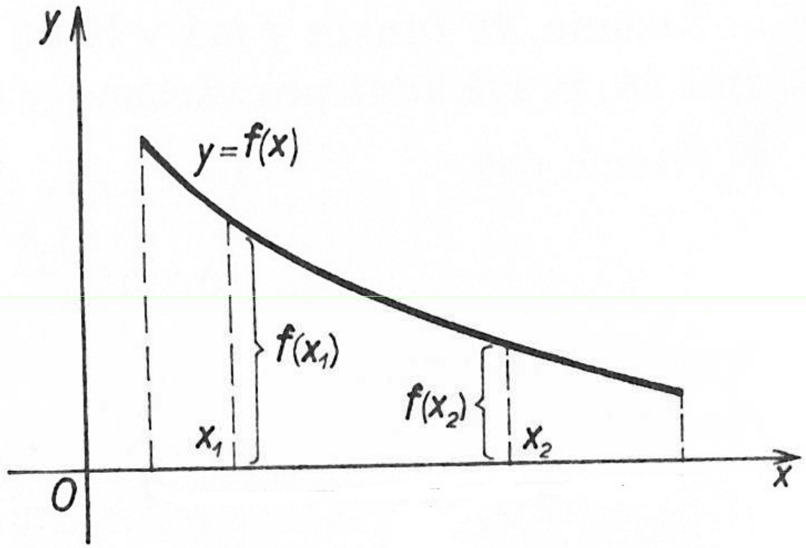
$$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) < f(x_2)$$

Klesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) > f(x_2)$$




Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.




Je-li funkce klesající, pak je prostá.

$$\textit{Funkce}\ \text{je}\ \textit{prostá} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \neq f(x_2)$$

Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **RYZE MONOTÓNNÍ.**

# Vlastnosti funkcí

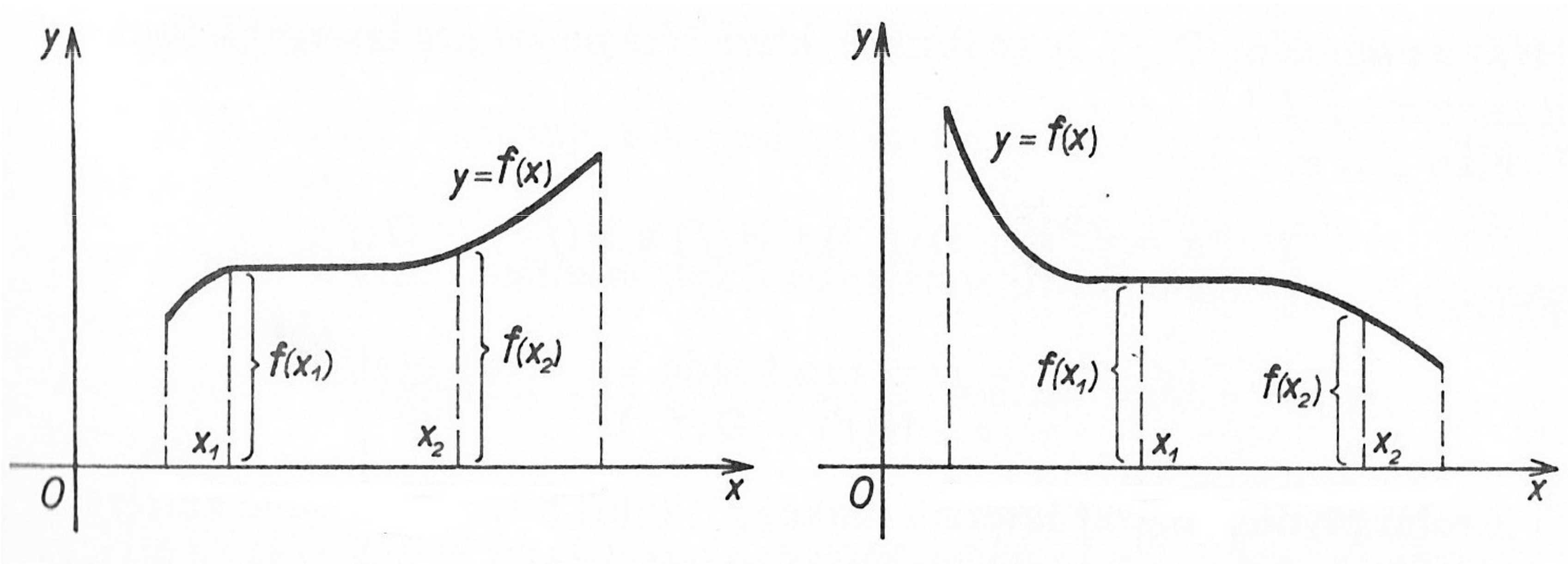
**d) Neklesající a nerostoucí funkce**

Neklesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \leq f(x_2)$$

Nerostoucí funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): \mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) \geq f(x_2)$$




Funkce nerostoucí a neklesající se souhrnně nazývají **MONOTÓNNÍ.**

# Vlastnosti funkcí

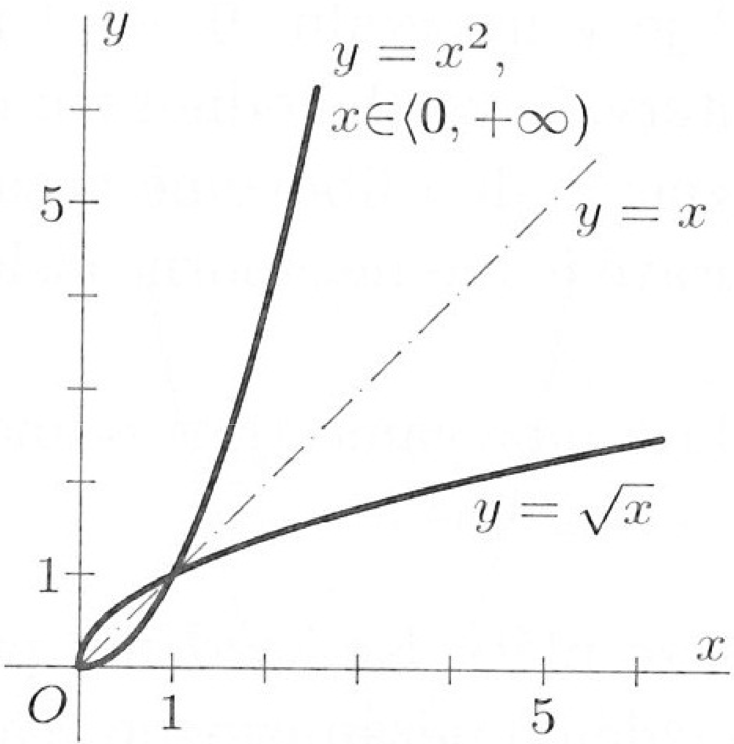
## e) Inverzní funkce

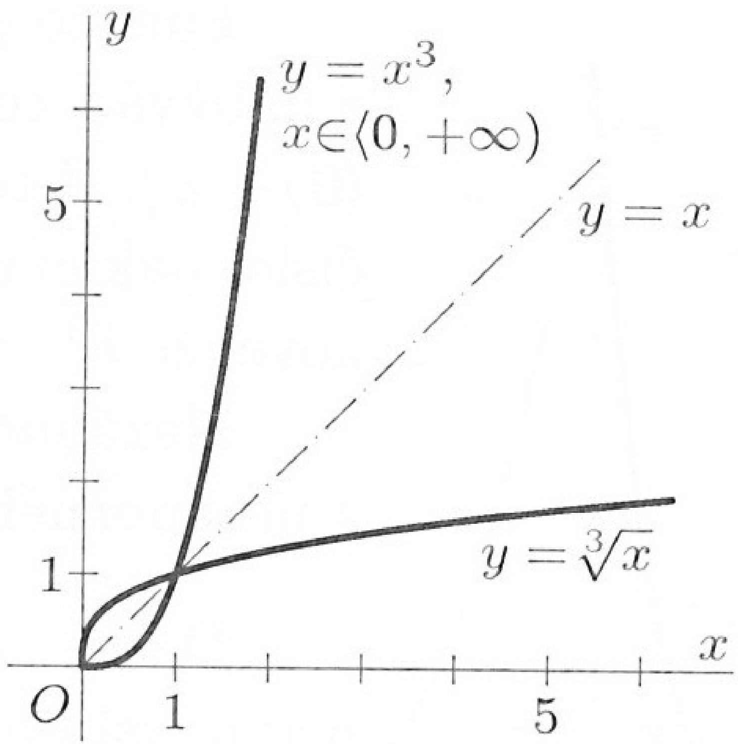
**Inverzní funkce** k ***prosté*** funkci ***f*** je funkce ***f*** $^{-1}$, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

**Grafy funkcí** ***f*** a ***f*** $^{-1}$ sestrojené v téže soustavě souřadnic *0xy* se stejnou délkovou jednotkou na obou osách **jsou souměrně sdruženy podle přímky** $y = x$.

**Např.:**



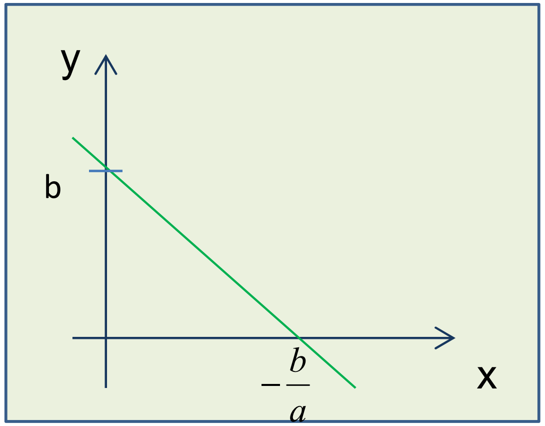



# 1 LINEÁRNÍ FUNKCE

$$f: y = ax + b, \quad D(f) = R$$

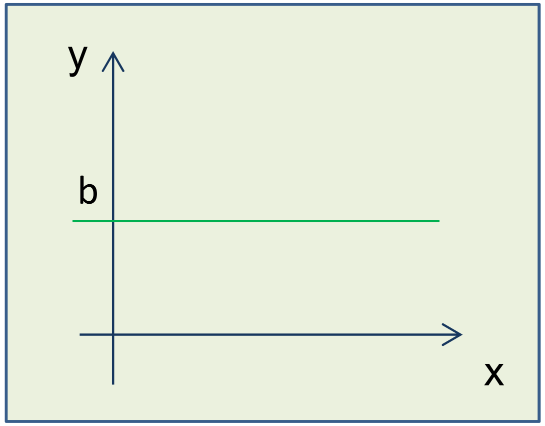
**Graf: Přímka**

a < 0



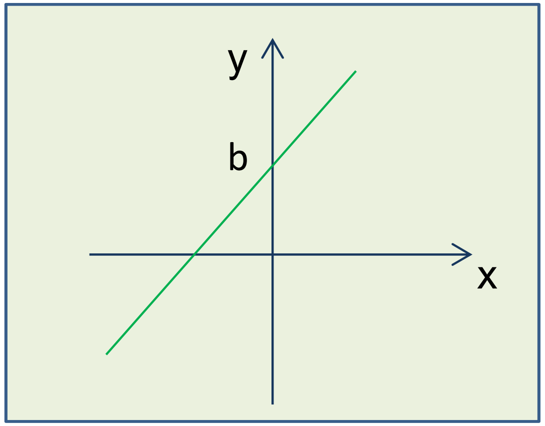

D(f) = R, H(f) = R
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.

a = 0




D(f) = R, H(f) = {b}
Je omezená.
Je nerostoucí a neklesající.
Není prostá.
Má maximum a minimum pro každé x∊R.
Je spojitá v R.

a > 0



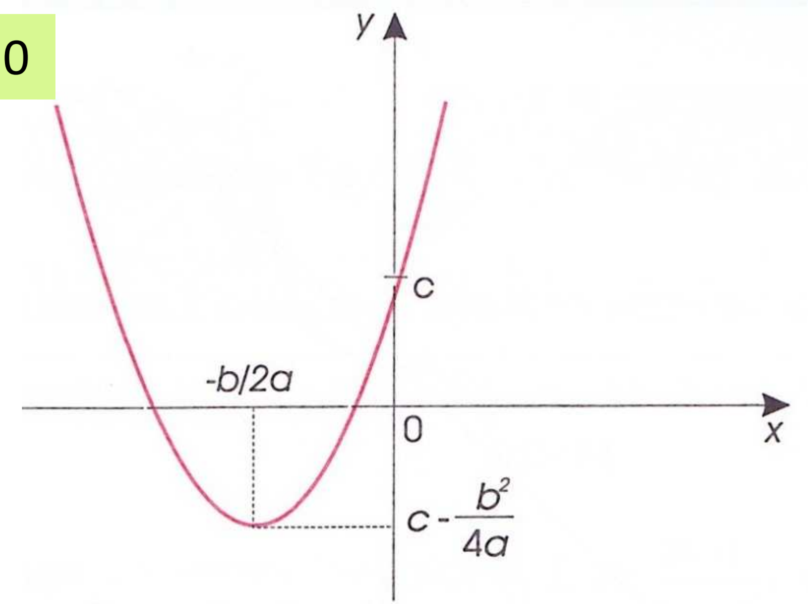

D(f) = R, H(f) = R
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.

# 2 KVADRATICKÁ FUNKCE

= každá funkce typu: $f: y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, D(f) = R$

**Graf: Parabola**

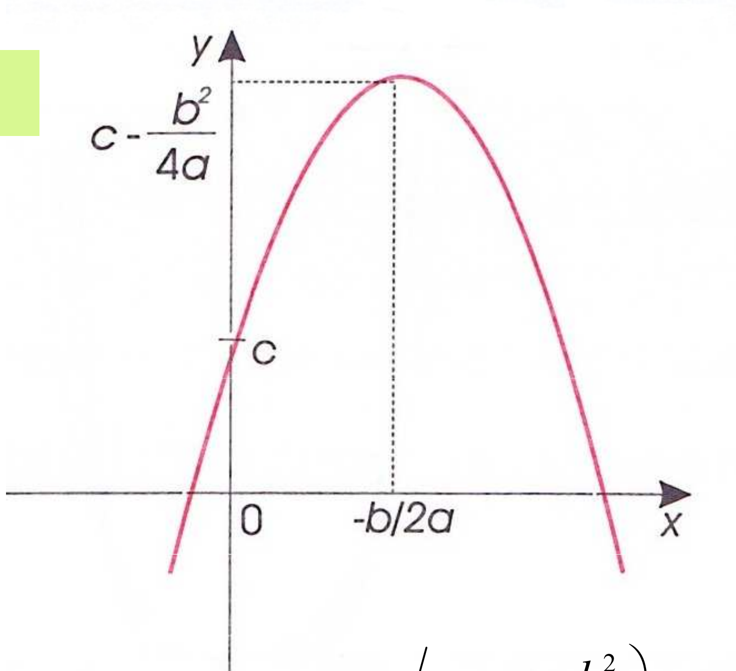
a > 0




$$D(f) = R, \; H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right)$$

Je zdola omezená, není shora omezená.
Pro b=0 je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro x ϵ <-b/2a, +∞) .
Je klesající pro x ϵ (+∞, -b/2a>.
Není prostá.
Má ostré minimum [-b/2a;c-$b^2$/4a]
Je spojitá v R.

a < 0




$$D(f) = R, \; H(f) = \left\langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

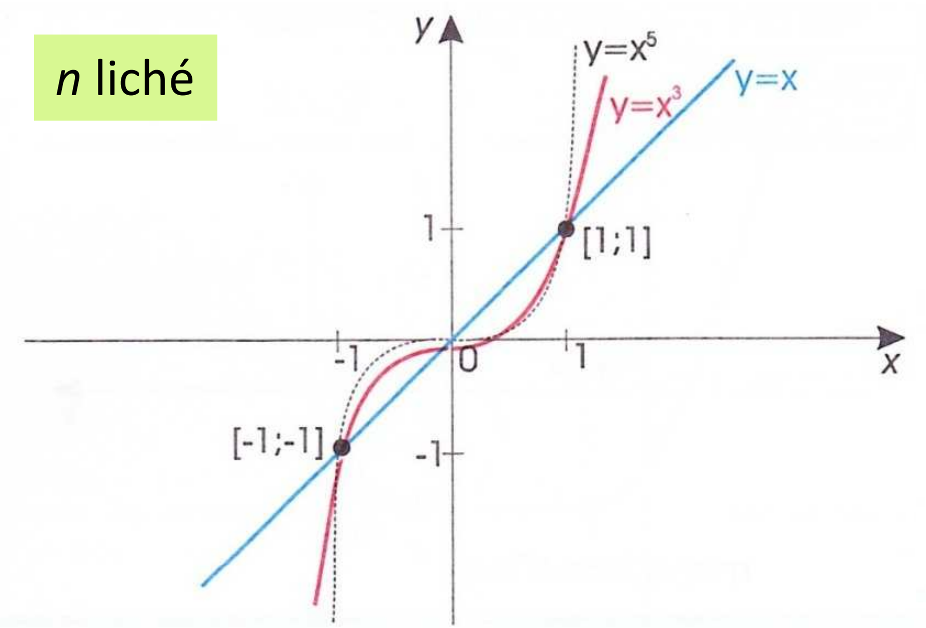
Je shora omezená, není zdola omezená.
Pro b=0 je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro x ϵ (+∞, -b/2a> .
Je klesající pro x ϵ <-b/2a, +∞).
Není prostá.
Má ostré maximum [-b/2a;c-$b^2$/4a]
Je spojitá v R.

# 3 MOCNINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

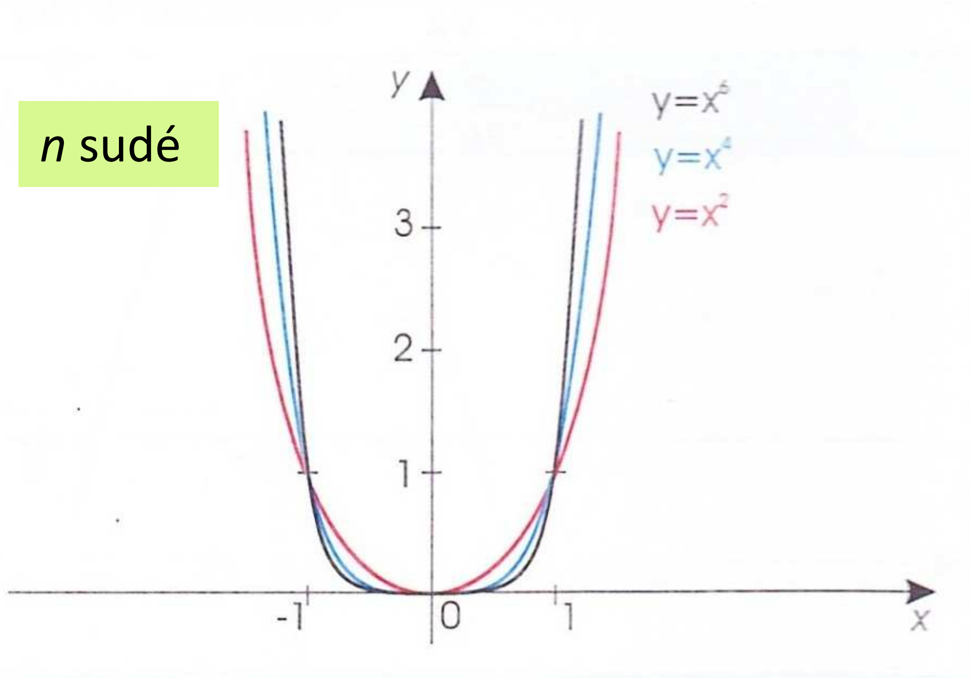
$$f: y = x^n, \quad n \in N, D(f) = R$$

Pro: n = 1: lineární funkce *f: y = x*
n = 2: kvadratická funkce *f:* $y = x^2$
n = 3: kubická funkce *f:* $y = x^3$

**Graf: n = 1: přímka**
**n > 1: parabola n-tého stupně**




D(f) = R, H(f) = R
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R.



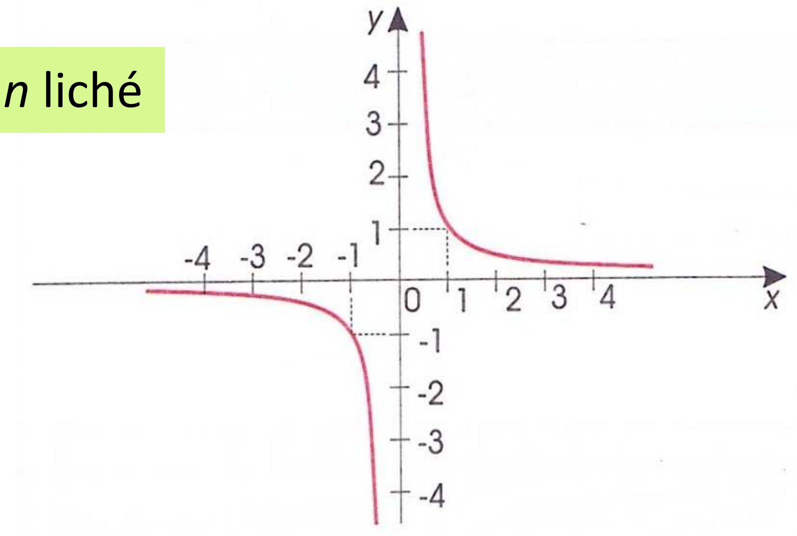

D(f) = R, H(f) = <0, +∞)
Je sudá.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Je rostoucí pro x ϵ <0, +∞) .
Je klesající pro x ϵ (-∞, 0>.
Není prostá.
Nemá maximum, má minimum [0,0].
Je spojitá v R.

# 4 MOCNINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

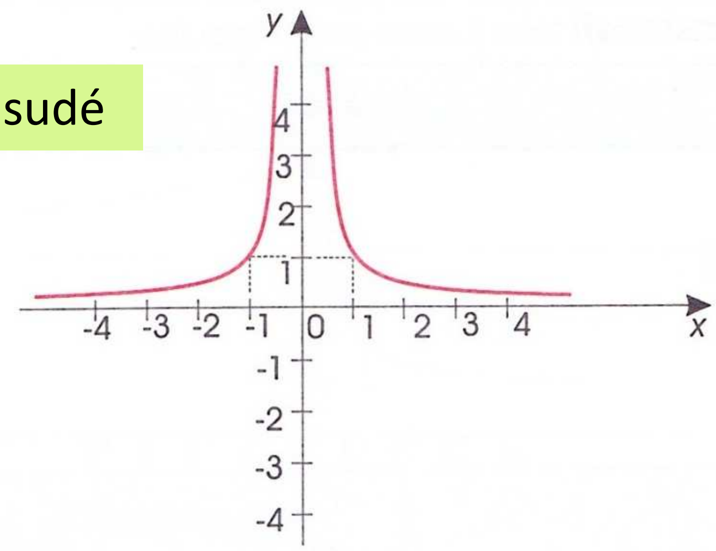
= funkce $f: y = x^{-n}, \quad n \in N, D(f) = R$

**Graf:**
**hyperbola stupně n+1**

*n* liché




*n* sudé




D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Klesá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.

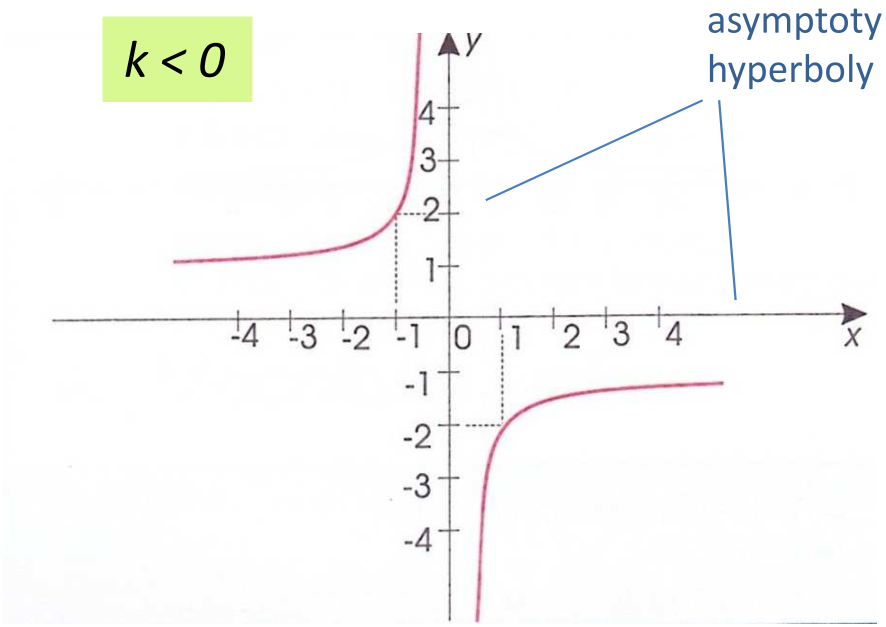
D(f) = R – {0}, H(f) = (0, +∞).
Je sudá.
Je omezená zdola, není shora omezená.
Je rostoucí pro x ϵ (-∞, 0) .
Je klesající pro x ϵ (0, +∞).
Není prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

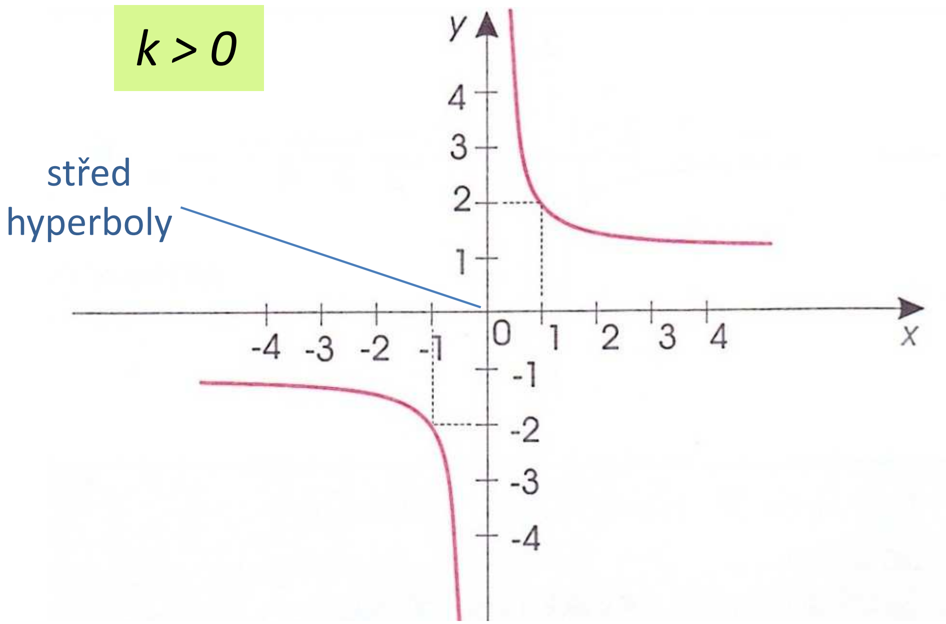
# 5 LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

$$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

Nepřímá úměrnost: $f: y = \frac{k}{x} \quad , \quad k \neq 0, D(f) = R - \{0\}$

**Graf: rovnoosá hyperbola**




D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je rostoucí pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

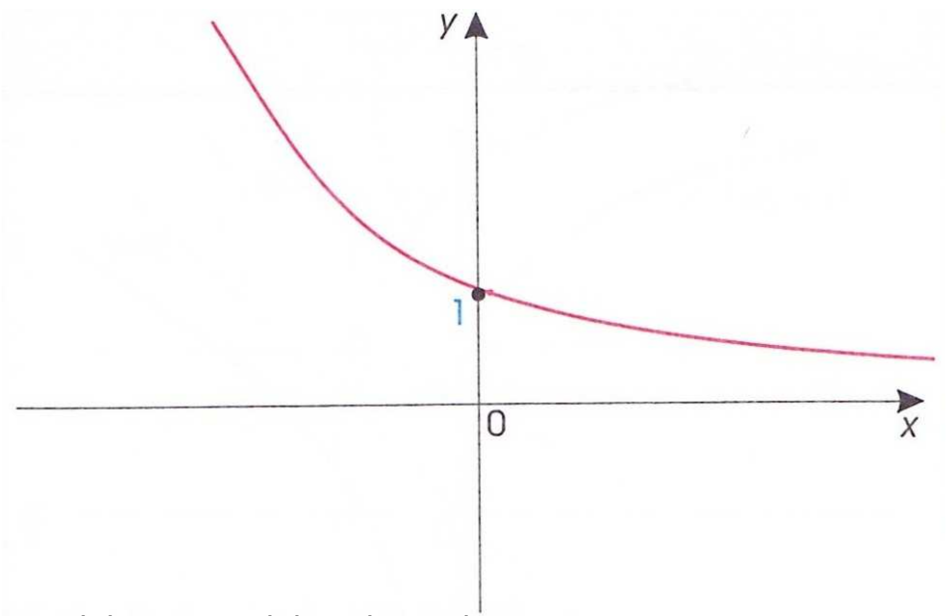
D(f) = R – {0}, H(f) = R – {0}.
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Je klesající pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).
Je prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá pro x ϵ (-∞, 0) a x ϵ (0, +∞).

# 6 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f : y = a^x, \quad \mathrm{a} > 0, a \neq 1, D(f) = R$$

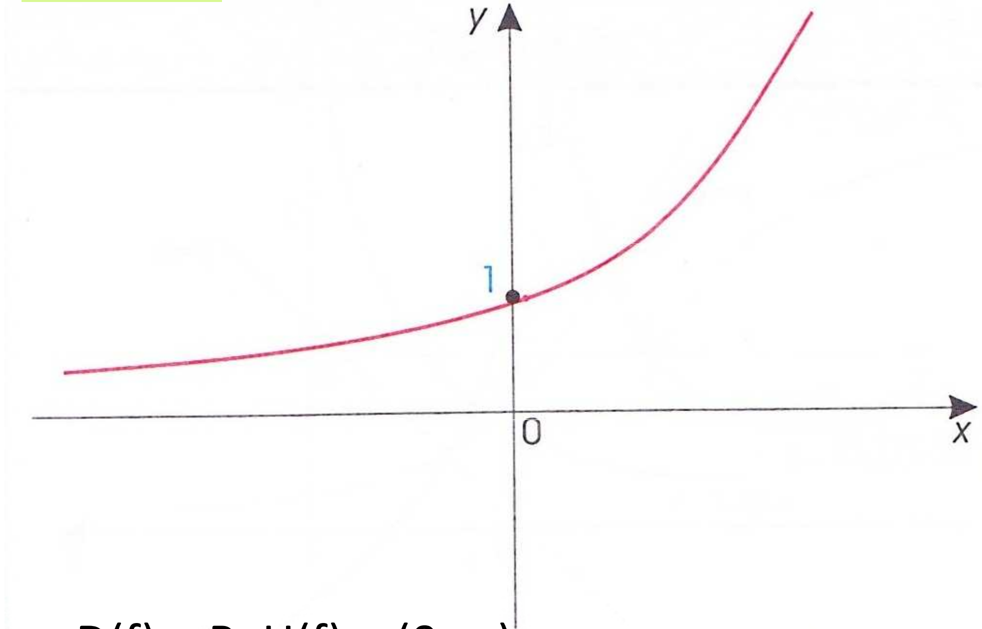
**Graf: exponenciální křivka (exponenciála)**

*0 < a < 1*




D(f) = R, H(f) = (0;∞).
Není ani sudá, ani lichá.
Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci logaritmické.
Je spojitá v R.

*a > 1*



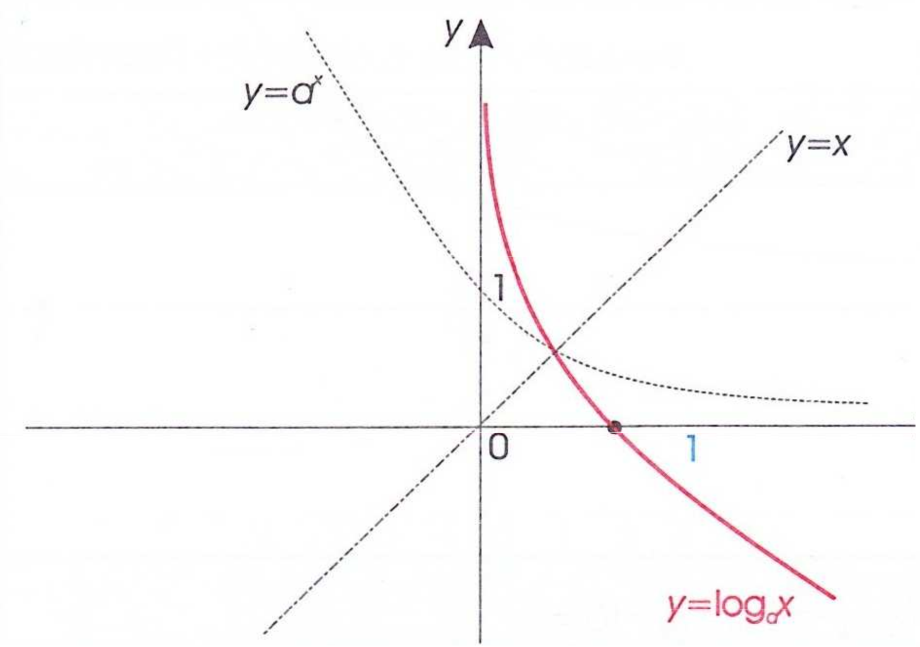

D(f) = R, H(f) = (0;∞).
Není ani sudá, ani lichá.
Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci logaritmické.
Je spojitá v R.

# 7 LOGARITMICKÁ FUNKCE

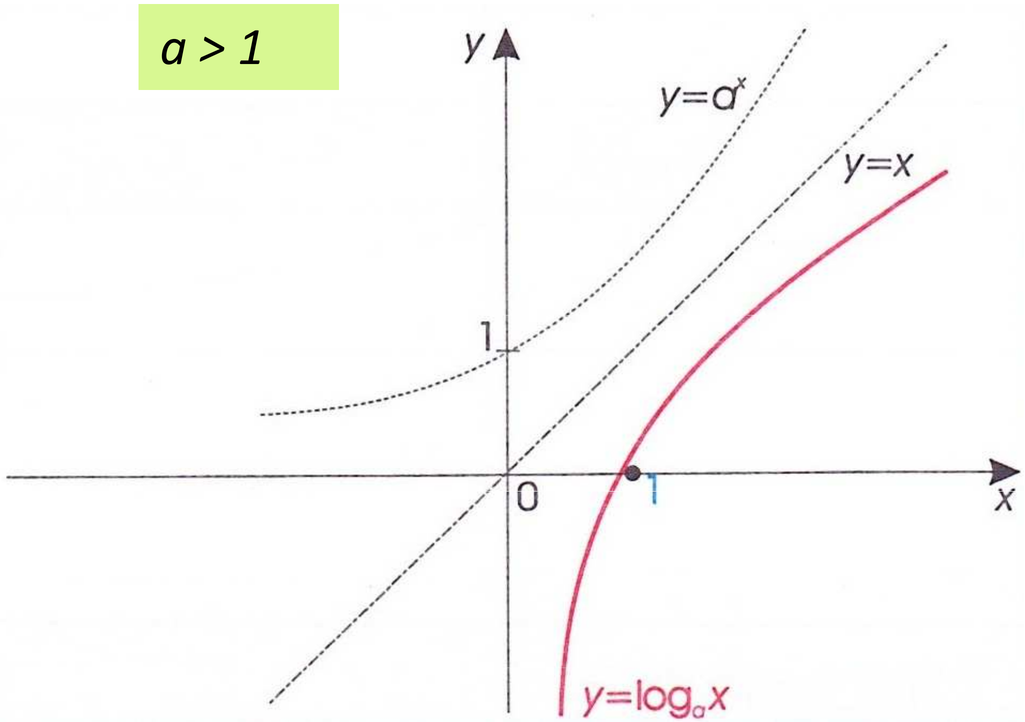
$$f: y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = (0; \infty)$$

**Graf: logaritmická křivka**

*0 < a < 1*




*a > 1*

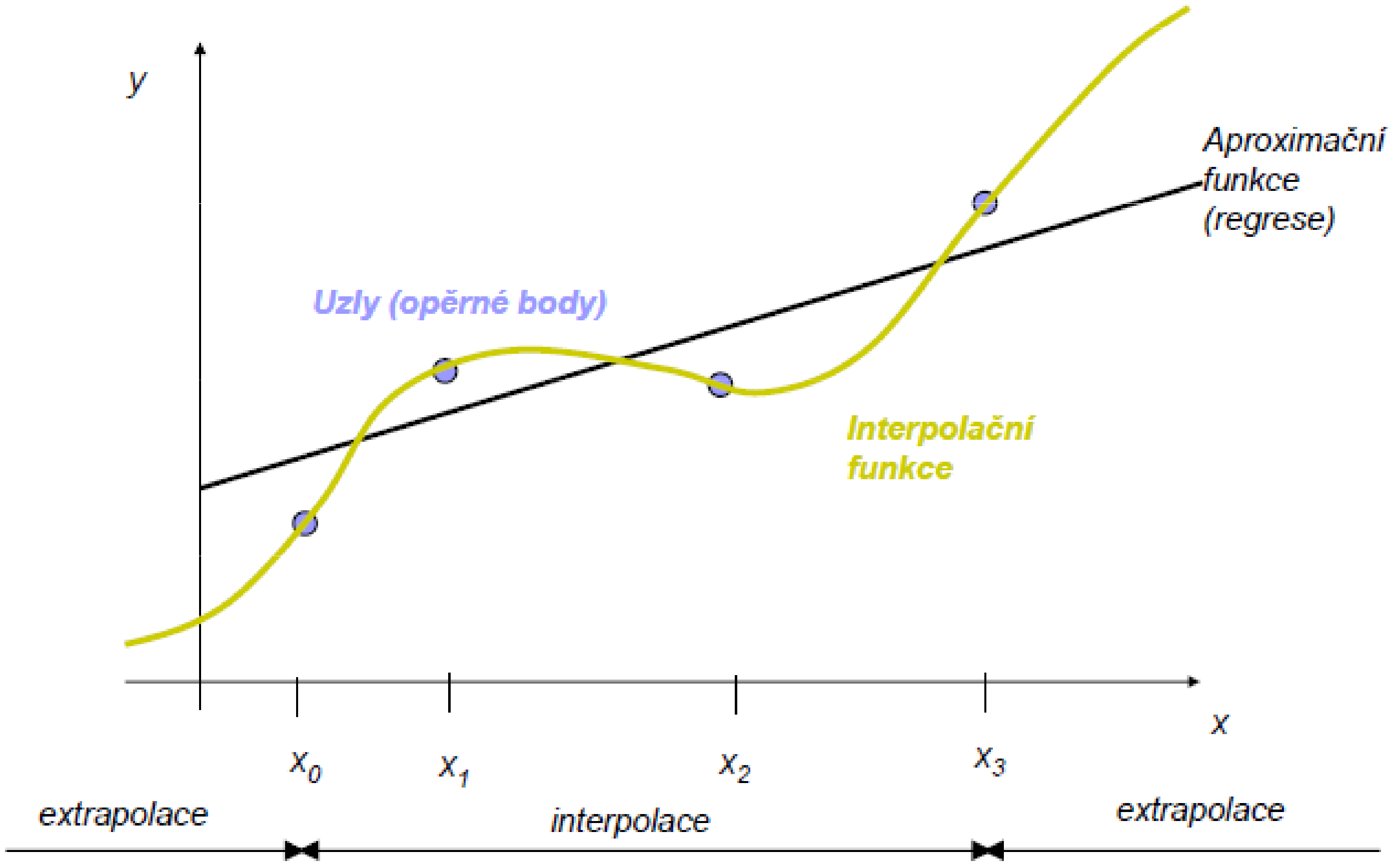



D(f) = (0;∞), H(f) = R.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v (0;∞).

D(f) = (0;∞), H(f) = R.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v (0;∞).

# Interpolace a extrapolace, aproximace

- **Interpolační funkcí rozumíme funkci *f, která splňuje*** interpolační podmínky $f(x_i) = y_i,\ i=0,\ldots,n,$ tedy graf interpolační funkce prochází opěrnými body.
- Graf **aproximační funkce neprochází nutně** danými opěrnými body, ale vystihuje jejich rozložení (minimalizuje odchylku od zadaných opěrných bodů).
- **Extrapolací rozumíme využití interpolační funkce mimo** interval $<x_0, x_n>$.



# Interpolace polynomem

Pro $(n+1)$ opěrných bodů určujeme polynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

splňující interpolační podmínky

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i$$

**Příklad:**

Pro dvojici opěrných bodů (0,2), (1,1)
určíme interpolační polynom
Přímý výpočet:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 + a_1 x_0 = y_0 \Rightarrow a_0 + a_1.0 = 2$$

$$a_0 + a_1 x_1 = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1.1 = 1$$

$$a_0 = 2, a_1 = -1$$

$$f(x) = 2 - x$$

# B) Derivace funkce

## 1 Pojem derivace

Je-li funkce *f* definována v okolí bodu $x_o$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Potom tuto limitu označujeme ***f`(x<sub>o</sub>)*** a nazýváme ji **derivací funkce f v bodě $x_o$.**

**Derivace funkce *f* v bodě $x_o$ je tedy číslo:**

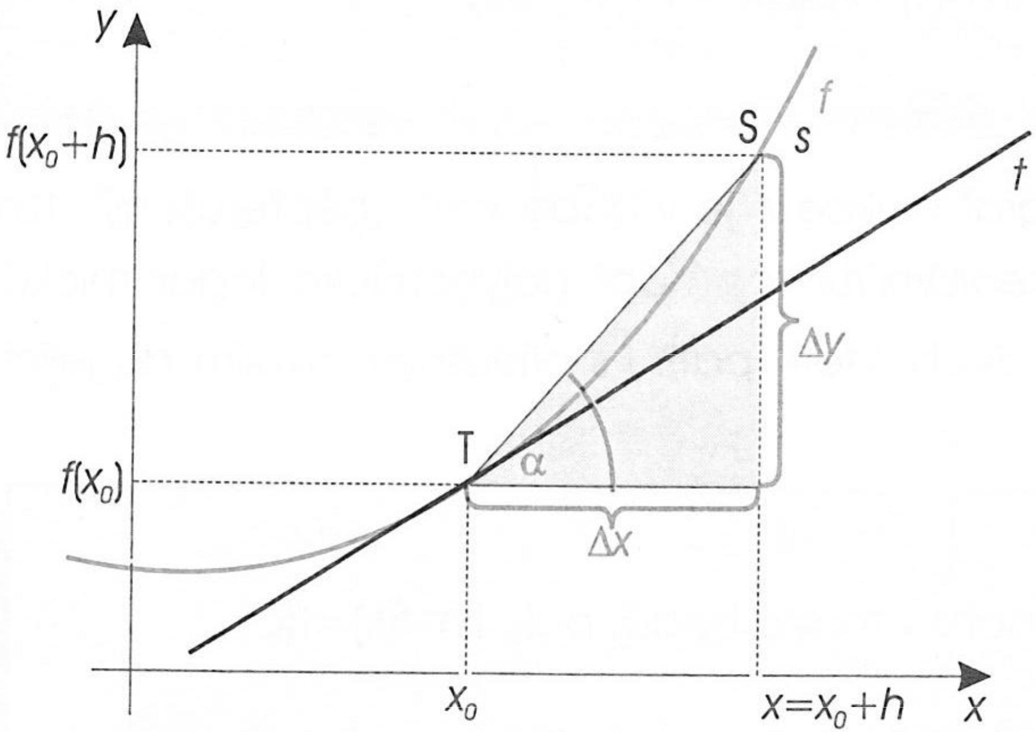
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pozn.: Při označení $x = x_o + h$ a $x - x_o = h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# 2 Geometrický význam derivace funkce

Pro **směrnici tečny $k_T$** ke grafu funkce ***f*** v bodě **T [$x_o$,$y_o$]** platí: $k_T = f'(x_0)$




Platí totiž: směrnice sečny ST je

$$k_S = tgx = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě T [$x_o$, $y_o$].

Pro směrnici tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Rovnici tečny** pak můžeme psát ve tvaru: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

# 3 Derivace základních funkcí

| Funkce $f$: $y = f(x)$ | Vzorce pro derivaci funkce $f$ | Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathsf{D}(f')$) |
|---|---|---|
| $y = c\ (c \in \mathsf{R})$ | $y' = 0$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^n,\ n \in \mathsf{N}$ | $y' = nx^{n-1}$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^k,\ k \in \mathsf{Z}$ | $y' = kx^{k-1}$ | $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| $y = x^r,\ r \in \mathsf{R}$ | $y' = rx^{r-1}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \mathrm{e}^x$ | $y' = \mathrm{e}^x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$ | $y' = a^x \ln a$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \log_a x\ (a > 0)$ | $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \mathrm{tg}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| $y = \mathrm{cotg}\ x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ |

# 4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce f: u = f(x), g: v = g(x) mají derivaci v každém bodě x ϵ M, pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna x ϵ M (u podílu g (x) ≠ 0) následující vzorce:

a) $(u + v)' = u' + v'$,

b) $(u - v)' = u' - v'$,

c) $(uv)' = u'v + uv'$,

d) $(cu)' = cu'$, $c \in R$,

e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad v \neq 0$.

# 5 Derivace složených funkcí

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě $x_0$ a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$ , **má složená funkce** $y = f(g(x))$ **derivaci v bodě** $x_0$ a platí:

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

# 6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 6. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu <a,b> a má v každém bodě $x \in (a; b)$ derivaci $f`(x_o)$. Pak platí:

- Je-li $f`(x_o) > 0$ pro každé $x \in (a;b)$ $\Rightarrow$ f je **rostoucí** na <a,b> .
- Je-li $f`(x_o) < 0$ pro každé $x \in (a;b)$ $\Rightarrow$ f je **klesající** na <a,b> .

# 6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 6. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce f v bodě $x_o$ derivaci a je-li f\`($x_o$) = 0, pak $x_o$ nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě $x_o$ může, ale nemusí mít funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý " z extrému.

Nechť f\`($x_o$) = 0 a nechť existuje v bodě $x_o$ druhá derivace. Pak:

- Je-li f\`\`($x_o$) < 0 ⇨ má funkce f v bodě $x_o$ ostré **lokální maximum**.
- Je-li f\`\`($x_o$) > 0 ⇨ má funkce f v bodě $x_o$ ostré **lokální minimum**.

# 6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 6. 3 Konkávní a konvexní funkce, inflexní body

Pro funkci, která je **konvexní** na intervalu **I** platí:

$f''(x) > 0$, pro každé $x \in$ **I**

Pro funkci, která je **konkávní** na intervalu **I** platí:

$f''(x) < 0$, pro každé $x \in$ **I**

**Inflexní bod**, je bod, ve kterém graf funkce přechází z konvexního tvaru do konkávního nebo naopak.

Inflexní body získáme tak, že druhou derivaci funkce položíme rovnu nule a vypočítáme kořeny vzniklé rovnice: $f''(x) = 0$.

# Literatura


- Kaňka M. a kol. Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Praha: Victoria Pubishing, 1996.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/08_MI_KAP%202_1.pdf