# Typy úloh k písemné části zkoušky

Zkoušející: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.,

1. Jsou dány množiny M = $\{1,2,3,4\}$ a N = $\{a,b,c,d\}$.
   a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
   b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete přesně jeho typ.
   c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
   d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
   e) Na množině N definujte dvě různé permutace $P_1$, $P_2$ a určete permutace $P_1 \bullet P_2$ a $P_2 \bullet P_1$.

2. Je dána množina M = $\{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:
   R = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq y \ \Rightarrow\ x+y=5\}$, T = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq 2 \ \vee\ y = x+1\}$,
   U = $\{[x,y] \in M \times M;\ x < 3 \ \wedge\ y = x+1\}$, V = $\{[1,3],[2,1],[3,2]\}$.
   a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?
   b) Zapište relace $R^{-1}$, $V^{-1}$, V•V, U•V, R•U, R•(V•U). Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

3. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M = $\{a,b,c\}$ operace * :

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | | a | b |
| b | a | b | c |
| c | b | c | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | b | a | c |
| b | c | b | a |
| c | a | c | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | a | a |
| b | | c | b |
| c | a | b | c |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | c |
| c | c | b | a |

4. V množině M = $\{a,b,c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
   a) K $\wedge$ ~~EN~~ b) ND $\wedge$ ~~K~~ $\wedge$ EN c) ND $\wedge$ EN $\wedge$ ~~EI~~ d) A $\wedge$ ~~ZR~~ e) ~~K~~ $\wedge$ EN $\wedge$ ~~EI~~ f) EI $\wedge$ ZR g) ND $\wedge$ ~~A~~ $\wedge$ EI $\wedge$ ~~ZR~~
   U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v M existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

5. Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace $\circ$ v množině **N** (**C, Q, R**) :
   a) $x \circ y = 2x + y$ b) $x \circ y = x + y + 1$ c) $x \circ y = 2x + 2y$
   d) $x \circ y = 2x - y$ e) $x \circ y = x + y - 2$ f) $x \circ y = x - 2y$
   g) $x \circ y = xy + 1$ h) $x \circ y = x + y + xy$ i) $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly +, - , ·, : označují obvyklé číselné operace):
   ( **N** , + ), ( **N** , - ), ( **N** , · ), ( **N** , : ), ( **C** , + ), (**C**, - ),
   ( **C** , · ), ( **C** , : ), ( **Q** , · ), ( **N** , + , ·), ( **C** , + , ·), ( **Q** , + , ·)
   ( $P$(M), $\cup$ ), ( $P$(M), $\cap$ ), ( $P$(M), $\cup$, $\cap$ ), ( $P$(M), $\cap$, $\cup$ ), kde $P$(M) je potenční systém množiny M = $\{a,b,\}$

7. Nechť (G, $\circ$ ) je komutativní grupa. Dokažte podrobně, že pro každé prvky a,b,c $\in$ G platí: a) $\overline{a \circ b} = \overline{a} \circ \overline{b}$ b) $\overline{\overline{a}} = a$ c) c $\circ$ a = c $\circ$ b $\Rightarrow$ a = b .

8. Množina N $= \{0, 1, 2, ...\}$ je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné , b) nekonečné .

9. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny A, B, C tak, že množiny A, B mají společné dva prvky.
   a) Rozhodněte a zapište, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.
   b) Porovnejte kardinální čísla množin A, B, C. Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.
   c) Určete $|A| + |B|$, $|A| + |C|$, $|B| + |C|$, $|A| . |B|$, $|A| . |C|$.

10. Je dáno číslo 54. Zvolte si další přirozené číslo větší než 65 a menší než 70. Obě čísla zapište ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) číselné soustavě, použijte obě metody převodu. Dále vypočítejte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) soustavě jejich součet, součin a rozdíl (proveďte zkoušky správnosti). Všechny výsledky získané ve čtyřkové soustavě převeďte přímo do soustavy dvojkové a šestnáctkové.

11. Vypočtěte a proveďte zkoušky správnosti:
    a) $ABA_{12} + BAB_{12}$, b) $1A2E3_{16} - 76B9_{16}$, c) $13721_8 : 5_8$ . Výsledky porovnejte.

12. Trojciferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 6. Přesuneme-li ji na místo stovek (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 387 větší než původní číslo. Určete původní číslo.

13. Čtyřciferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet roven 22. Obě krajní číslice jsou stejné, obě vnitřní číslice jsou rovněž stejné. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Určete obě čísla.

14. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla A, B platí:
    a) –(A + B) = (–A) + (–B) b) (–A) . B = –(A . B) c) (–A) . (–B) = A . B
    (v důkazu využijte této reprezentace: A = [ a, b ], B = [ c, d ]).

15. Pro celá čísla A, B, X platí A + X = B. Určete celé číslo X = $[x \dot{,}\, y]$, jestliže
    A = $[1 \dot{,}\, 3]$, B = $[7 \dot{,}\, 2]$ .

16. Dokažte, že sčítání a násobení celých čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel.)

17. Dokažte, že rovnice A **.** X = B nemá v množině všech celých čísel řešení pro
    A = $[3 \dot{,}\, 0]$, B = $[0 \dot{,}\, 4]$ .

18. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.

19. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují
    a) celé číslo O (nula) b) celé číslo J (jedna)

20. Jsou dána celá čísla A = $[1 \dot{,}\, 3]$, B = $[4 \dot{,}\, 5]$.
    a) Vypočítejte A + B , A . B, A – B. b) Porovnejte čísla A, B.
    Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.

21. Dokažte, že pro každá tři celá čísla A, B, C platí: $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$ .
    Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „<" v úloze 16 na s. 199 v učebnici.

22. Vypočtěte: $a + |b| . |a| - |-a| + |a . b| - |a|^2 + |-b|$ pro a = -6 , b = 3 .

23. Dokažte, že pro každé celé číslo $a$ platí $|a| = |-a|$ .

24. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.(Pomocí tříd zlomků.)

25. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem (–5). Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.

26. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísly desetinnými.

27. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo
    a) 3,56 b) $1,\overline{43}$ c) $0,2\overline{7}$ d) $0,1\overline{9}$

**Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů** studovaných v předmětech: **Základy algebry a aritmetiky** a **Aritmetika 1**