RNDr. Jiří HERMAN, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

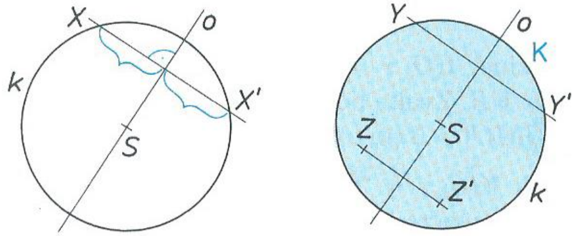
Matematika

Kruhy a válce

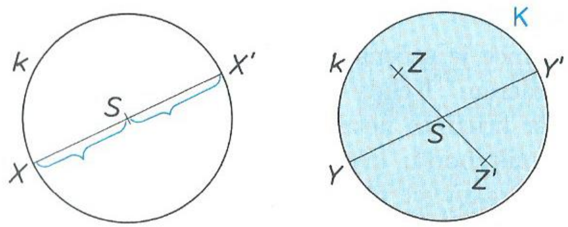
PROMETHEUS

Jsou kružnice a kruh souměrné?

Víme již, že kružnice je osově souměrný útvar. Každá přímka, která prochází středem kružnice, je její osou souměrnosti. Stejně tak je i osou souměrnosti kruhu, který je touto kružnicí ohraničen.

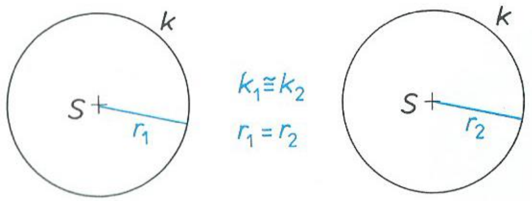


Kružnice je také středově souměrná. Její střed je zároveň jejím středem souměrnosti. Totéž platí i o kruhu, který je touto kružnicí ohraničen.



Nakonec ještě připomeneme, jak poznáme *shodné* kružnice:

- Jsou-li dvě kružnice shodné, pak mají stejné poloměry.
- Mají-li dvě kružnice stejné poloměry, jsou shodné.



5. Narýsujte

a) tři shodné kružnice, které mají různé středy,

b) tři různé kružnice, které mají týž střed.

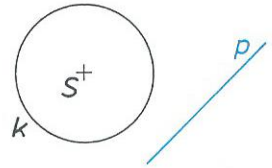
6. Sestrojte kružnici $k(S; 4\,\mathrm{cm})$. Narýsujte její tři osy souměrnosti o_1, o_2, o_3 tak, aby každé dvě svíraly úhel 60°. Průsečíky os s kružnicí jsou vrcholy šestiúhelníku. Sestrojte jeho strany a zdůvodněte, že jde o pravidelný šestiúhelník, tj. šestiúhelník, který má shodné všechny strany a shodné všechny vnitřní úhly.

2 KRUŽNICE A PŘÍMKA

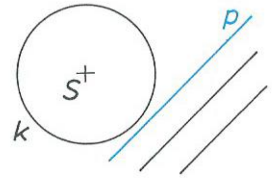
V této kapitole prozkoumáme, kolik společných bodů mohou mít přímka a kružnice ležící v jedné rovině a kdy jednotlivé případy nastanou.

Jakou vzájemnou polohu může mít kružnice a přímka?

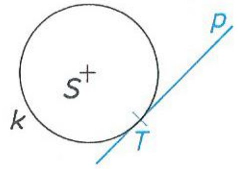
Na obrázku je narýsována kružnice k a „daleko" od ní přímka p. Kružnice k a přímka p nemají žádný společný bod. Takové přímce říkáme **vnější přímka** kružnice k.



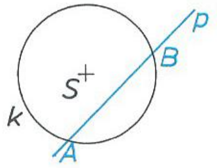
Představme si, že tuto přímku začneme směrem ke kružnici „posouvat". Posouváme ji tak, že zůstává s původní přímkou rovnoběžná.



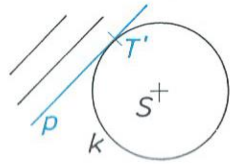
V jednom okamžiku se přímka kružnice „dotkne". Znamená to, že má s kružnicí k jediný společný bod T. Taková přímka se nazývá **tečna** kružnice k. Bodu T říkáme **bod dotyku** přímky p a kružnice k.



Posunujme přímku p dále. Nyní má s kružnicí k dva společné body A, B. Takové přímce říkáme **sečna** kružnice k. Body A, B se nazývají **průsečíky** přímky p a kružnice k.



Při dalším posouvání dostaneme ještě jednu tečnu a pak opět vnější přímky kružnice k.



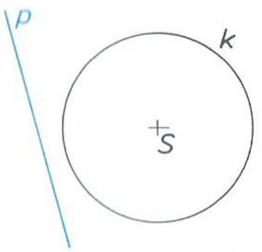
Uvědomte si, že průběh pokusu, který jsme prováděli, nezávisí na tom, jaký směr měla původní přímka.

Podle vzájemné polohy přímky a kružnice rozeznáváme:

- *vnější přímku* – nemá s kružnicí žádný společný bod
- *tečnu* – má s kružnicí jediný společný bod – *bod dotyku*
- *sečnu* – má s kružnicí dva společné body – *průsečíky*

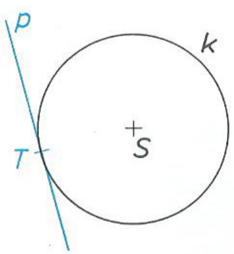
Všechny tři různé vzájemné polohy si znovu prohlédněte na obrázcích doplněných o symbolické zápisy:

vnější přímka



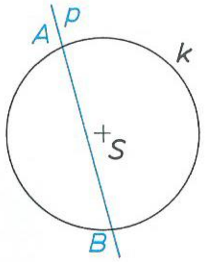
$p \cap k = \emptyset$

tečna



$p \cap k = \{T\}$

sečna



$p \cap k = \{A, B\}$

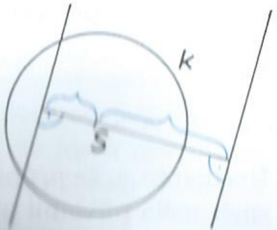
Ve starší matematické literatuře se vnější přímky kružnice nazývají *nesečny*.

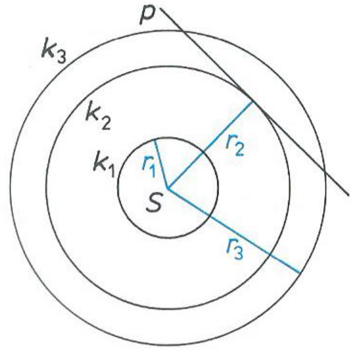
1. Narýsujte kružnici $k(S; 3\,\text{cm})$ a sestrojte přímku p, která je vnější přímkou kružnice k, a přímku q, která je její sečnou.

2. Zvolte kružnici k a v její vnější oblasti bod X. Sestrojte dvě různé přímky a, b, které procházejí bodem X a jsou
   a) sečnami kružnice k, b) vnějšími přímkami kružnice k.

Jak rozhodnout o vzájemné poloze přímky a kružnice?

Vraťme se ještě jednou k pokusu s posouváním přímky. Jistě jste si všimli, že vzájemná poloha přímky a kružnice záleží na tom, jak „daleko“ je přímka od kružnice umístěna. Jak je možné tuto „vzdálenost“ popsat? Správně tušíte, že při tom hraje roli *vzdálenost* středu kružnice od posouvané přímky.





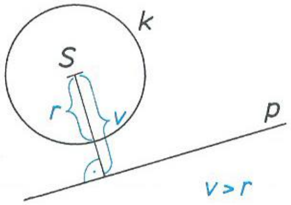
Prozkoumáme teď jinou situaci. Představme si, že v rovině je dána přímka p a bod S, který na ní neleží. Kolem bodu S opíšeme kružnici o „malém“ poloměru. Přímka p bude vnější přímkou této kružnice. Nyní začneme poloměr kružnice zvětšovat. Vidíme, že vzájemná poloha „zvětšované“ kružnice a přímky p záleží na *poloměru* kružnice.

Pozorování shrneme: Vzájemná poloha přímky p a kružnice $k(S; r)$ závisí jak na poloměru r, tak i na vzdálenosti středu S od přímky p.

Mohou nastat tři případy:

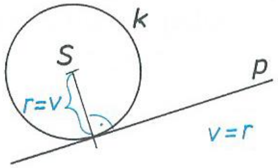
Přímka p je ***vnější přímkou*** kružnice $k(S; r)$, pokud je vzdálenost v středu S od přímky p *větší* než poloměr r kružnice k:

$\boxed{v > r}$



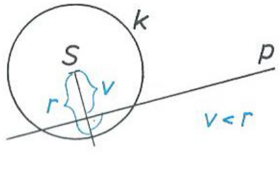
Přímka p je *tečnou* kružnice $k(S; r)$, pokud je vzdálenost v středu S od přímky p *rovna* poloměru r kružnice k:

$\boxed{v = r}$



Přímka p je *sečnou* kružnice $k(S; r)$, pokud je vzdálenost v středu S od přímky p *menší* než poloměr r kružnice k:

$\boxed{v < r}$

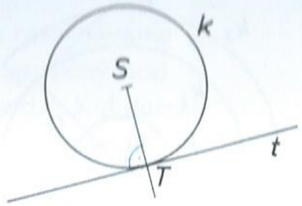


3. Je dána kružnice $l(O; 6\,\text{cm})$ a přímka q. Určete vzájemnou polohu přímky q a kružnice l, je-li přímka q od bodu O vzdálena
   a) 5,5 cm, b) 6 cm, c) 6,5 cm.

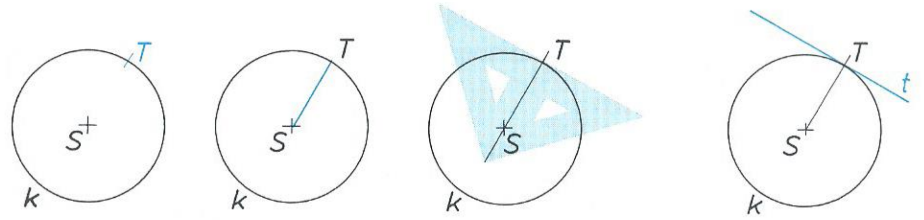
4. Bod X je od přímky a vzdálen 8,5 cm. Jaká je vzájemná poloha přímky a a kružnice $k(X; r)$, je-li
   a) $r = 8{,}5\,\text{cm}$, b) $r = 5{,}5\,\text{cm}$, c) $r = 9{,}5\,\text{cm}$?

? Jak sestrojit tečnu kružnice?

Znázorněme ještě jednou situaci, kdy přímka t je tečnou kružnice $k(S; r)$. Označme T jejich bod dotyku. Všimněte si, že tečna t je kolmá k poloměru ST.



Této vlastnosti využíváme při konstrukci tečny kružnice, která prochází daným bodem na kružnici. Postup si prohlédněte na obrázcích.

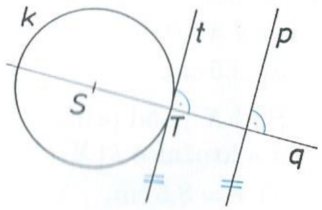


Zvolíme-li na kružnici k se středem S libovolný bod T, pak existuje jediná tečna t, která se kružnice k dotýká v bodě T. Sestrojíme ji jako kolmici vedenou bodem T k přímce ST.

Naučili jsme se řešit nejjednodušší úlohu o tečně – vést ji daným bodem ležícím na kružnici. Obtížnější je sestrojit tečnu kružnice, která prochází bodem, který na kružnici neleží. Taková úloha má řešení, jen když daný bod leží ve vnější oblasti kružnice. Naučíme se to později.

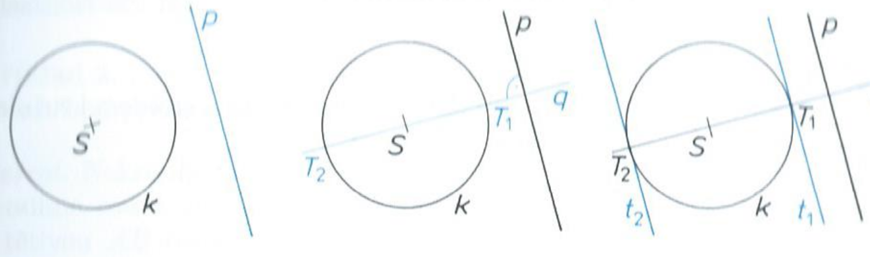
Příklad 1. Je dána kružnice k se středem S a její vnější přímka p. Sestrojte tečnu t kružnice k, která je s přímkou p rovnoběžná. Kolik takových tečen existuje?

Řešení. Nejprve zjistíme, kde leží bod dotyku T hledané tečny. Víme, že poloměr ST musí být k tečně t kolmý. Proto musí být kolmý i k přímce p, která je s tečnou t rovnoběžná.



Hledaný bod T tedy leží na přímce q, která je kolmá k přímce p a prochází bodem S. Protože přímka q je sečnou kružnice k, protíná ji ve dvou bodech T_1 a T_2. Existují tedy dvě tečny t_1 a t_2 rovnoběžné s přímkou p.

Postup konstrukce si prohlédněte na obrázcích.

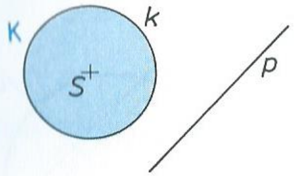


5. Sestrojte kružnici k o poloměru 4 cm. Zvolte na ní bod X a sestrojte tečnu, která se kružnice k v bodě X dotýká.

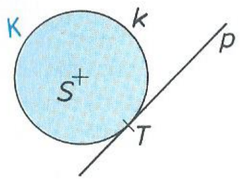
6. Je dána kružnice k a její sečna p. Sestrojte tečnu kružnice k, která je s přímkou p rovnoběžná. Kolik má úloha řešení?

Kolik společných bodů může mít přímka a kruh?

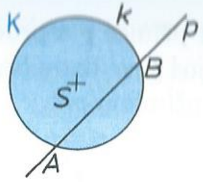
Představme si, že v rovině je sestrojen kruh K, který je ohraničen kružnicí k, a přímka p. Vzájemná poloha kruhu K a přímky p je určena vzájemnou polohou kružnice k a přímky p. Mohou tedy nastat tři případy:



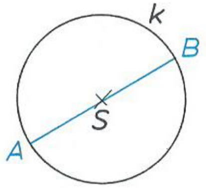
Přímka p je *vnější přímkou* kružnice k, nemá s ní žádný společný bod. Nemá tedy žádný společný bod ani s kruhem K: $p \cap \mathsf{K} = \emptyset$. Přímka p se nazývá **vnější přímka** kruhu K.



Přímka p je *tečnou* kružnice k. Bod dotyku T je jediným společným bodem nejen přímky p a kružnice k, ale také přímky p a kruhu K: $p \cap \mathsf{K} = \{T\}$. Říkáme, že přímka p je **tečnou** kruhu K.

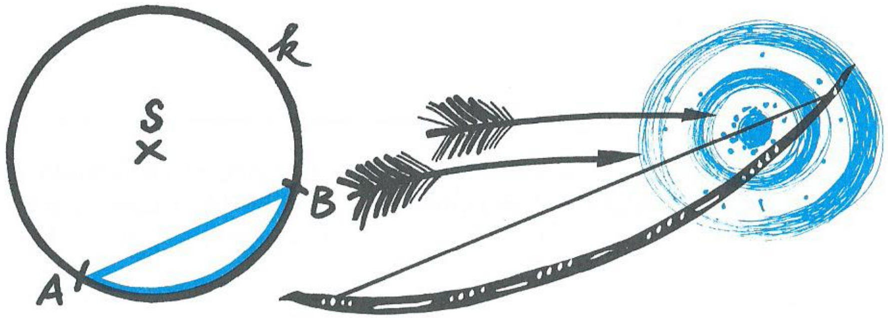


Přímka p je *sečnou* kružnice k a protíná ji v bodech A a B. Společné body přímky p a kruhu K vyplní celou úsečku s krajními body A, B: $p \cap \mathsf{K} = AB$. Přímka p se nazývá **sečna** kruhu K a úsečka AB **tětiva** kruhu K. Častěji však říkáme, že úsečka AB je **tětivou kružnice** k.



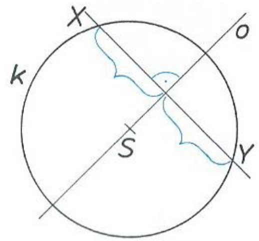
Již víte, že tětivu, která prochází středem kružnice, nazýváme *průměrem*.

Část kružnice spolu s úsečkou AB na první pohled připomíná *luk*. Zřejmě proto se název tětiva používá nejen pro část luku, ale i pro úsečku s krajními body na kružnici.



? Jaké vlastnosti má tětiva kružnice?

Řekli jsme již, že tětiva kružnice k je každá úsečka XY, jejíž krajní body X, Y leží na kružnici k. Protože vzdálenosti obou bodů X a Y od středu S kružnice k jsou stejné (rovné poloměru kružnice), leží bod S na ose úsečky XY.



> *Tětiva* kružnice je každá úsečka, jejíž krajní body leží na této kružnici. Osa tětivy prochází středem kružnice.

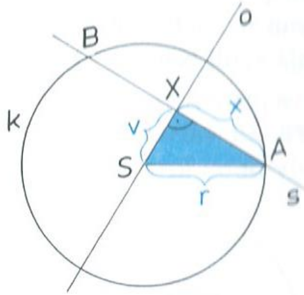
□**7.** Jakou největší délku může mít tětiva kružnice $k(S; 4\,\mathrm{cm})$?

8. Na kružnici $k(S; r)$ jsou dány čtyři body A, B, C a D tak, že tětivy AB a CD jsou shodné. Dokažte, že úhly ASB a CSD jsou shodné.

Vlastnost osy tětivy můžeme využít při výpočtu délky tětivy.

Příklad 2. Sečna s protíná kružnici $k(S; 26\,\mathrm{cm})$ v bodech A, B. Vzdálenost bodu S od přímky s je $10\,\mathrm{cm}$. Určete délku tětivy AB.

Řešení. Nakreslíme obrázek, kde navíc zakreslíme osu o tětivy AB. Její průsečík s tětivou AB označíme X. Všimněte si, že trojúhelník AXS je pravoúhlý s přeponou SA a odvěsnami SX a AX. Označme délky jeho stran r, v a x podle obrázku. Protože bod X je středem úsečky AB, platí $|AB| = 2x$.



Délky r a v známe, délku x určíme z Pythagorovy věty:

$$x^2 = r^2 - v^2$$
$$x = \sqrt{r^2 - v^2}$$

Po dosazení hodnot $r = 26\,\mathrm{cm}$, $v = 10\,\mathrm{cm}$ dostaneme:

$$x = \sqrt{26^2 - 10^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{676 - 100}\,\mathrm{cm} = \sqrt{576}\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$$
$$|AB| = 2x = 48\,\mathrm{cm}$$

Tětiva AB má délku $48\,\mathrm{cm}$.

9. Určete poloměr kružnice, jestliže je její střed vzdálen $5\,\mathrm{cm}$ od tětivy, která má délku $2{,}4\,\mathrm{dm}$.

10. Kružnice má průměr $2\,\mathrm{dm}$, její tětiva má délku $12\,\mathrm{cm}$. Jaká je vzdálenost středu kružnice od této tětivy?

11. Tětiva AB kružnice $k(S; r)$ má délku r. Určete velikost úhlu ASB.

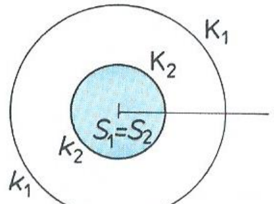
3 DVĚ KRUŽNICE

V minulé kapitole jsme zjišťovali, jakou vzájemnou polohu mohou mít kružnice a přímka, které leží ve stejné rovině. Nyní budeme podobnou otázku zkoumat pro dvě kružnice.

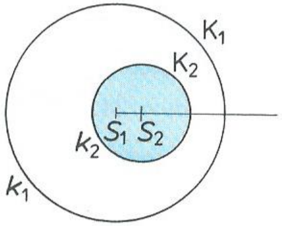
? Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě kružnice?

Vystřihněte si z papíru dva kruhy s různými poloměry a špendlíkem vyznačte jejich středy. Oba kruhy budeme přemísťovat v rovině a přitom zkoumat, jakou polohu zaujímají kružnice, které je ohraničují. Kruh s větším poloměrem označíme $\mathsf{K}_1(S_1; r_1)$. Kružnici, která jej ohraničuje, označíme k_1. Menší kruh $\mathsf{K}_2(S_2; r_2)$ je ohraničen kružnicí k_2.

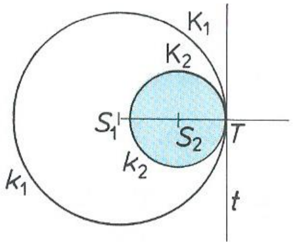
Pokus provedeme tak, že kruh K_1 bude nehybný a kruh K_2 budeme posouvat například ve vodorovném směru zleva doprava. Začneme případem, kdy středy obou kruhů splynou.



Kruh K_2 leží celý v kruhu K_1, je tedy jeho podmnožinou: $\mathsf{K}_2 \subset \mathsf{K}_1$. Kružnice k_1 a k_2 mají společný střed $S_1 = S_2$. Takové kružnice se nazývají **soustředné**. Protože $r_1 > r_2$, nemají obě kružnice žádný společný bod: $k_1 \cap k_2 = \emptyset$.

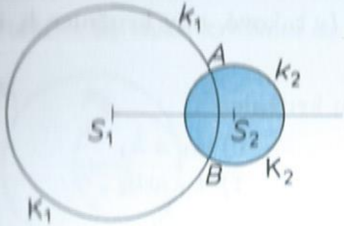


Nyní kruh K_2 posouvejme vodorovně doprava. Zpočátku kruh K_2 zůstává v kruhu K_1 a kružnice k_1 a k_2 nemají žádný společný bod: $k_1 \cap k_2 = \emptyset$. Kružnice k_2 leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1.

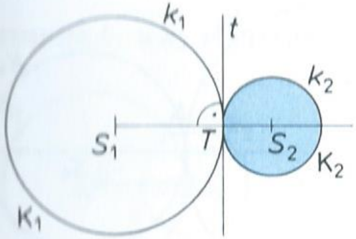


Posunujme kruh K_2 dále. V jistém okamžiku (viz obrázek) budou mít kružnice k_1 a k_2 jediný společný bod T: $k_1 \cap k_2 = \{T\}$. Bod T se nazývá **bod dotyku** kružnic k_1 a k_2. Říkáme, že kružnice k_1 a k_2 mají v bodě T **vnitřní dotyk**.

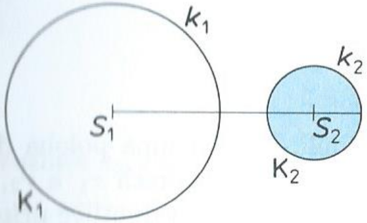
Všimněte si také, že přímka t, která prochází bodem dotyku T a je kolmá k přímce S_1S_2, je společnou tečnou obou kružnic.



Při dalším posouvání kruhu K_2 budou mít kružnice k_1 a k_2 po jistou dobu společné dva body A, B: $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Říkáme, že se kružnice k_1 a k_2 protínají v bodech A, B. Ty se nazývají **průsečíky** obou kružnic.



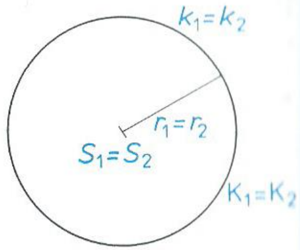
Ještě v jednom dalším okamžiku budou mít obě kružnice jediný společný bod T: $k_1 \cap k_2 = \{T\}$. Ten se opět jmenuje **bod dotyku** obou kružnic. Nyní však říkáme, že kružnice k_1 a k_2 mají v bodě T **vnější dotyk**. Přímka t je společnou tečnou obou kružnic v bodě T.



Při dalším posouvání kruhu K_2 už nebudou mít kružnice k_1 a k_2 žádný společný bod: $k_1 \cap k_2 = \emptyset$. V tomto případě kružnice k_2 leží ve vnější oblasti kružnice k_1.

Zjistili jsme, že dvě kružnice buď nemají žádný společný bod, nebo mají právě jeden společný bod (pokud se dotýkají), nebo dva společné body (pokud se protínají). Může nastat ještě jiná situace?

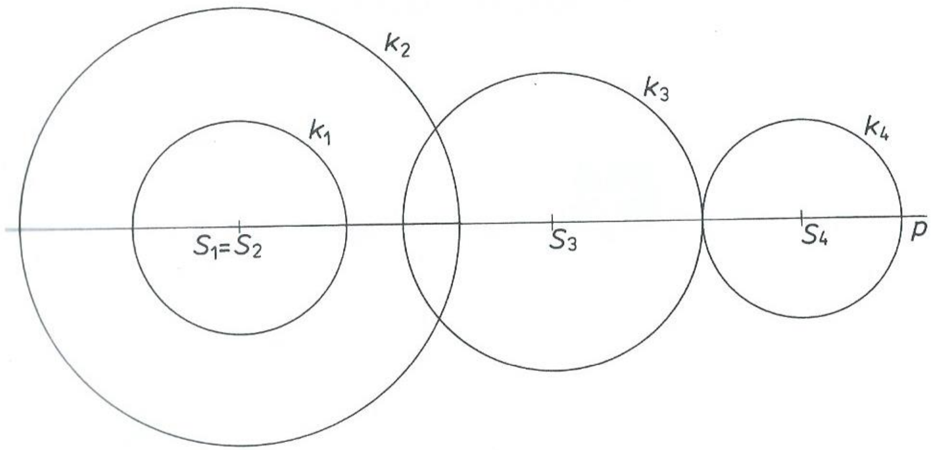
Ano, avšak pokusem s dvěma kruhy s různými poloměry ji neobjevíme. Nastává tehdy, pokud obě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ jsou soustředné ($S_1 = S_2$) a jejich poloměry jsou stejné ($r_1 = r_2$). Tehdy jsou obě kružnice stejné množiny bodů. Mají tedy nekonečně mnoho společných bodů. Říkáme, že takové kružnice jsou **totožné**.



1. Narýsujte dvě soustředné kružnice l_1 a l_2 takové, aby kružnice l_1 měla třikrát větší poloměr než kružnice l_2.

2. Podle obrázku určete vzájemnou polohu kružnic:

   a) k_1 a k_2 b) k_1 a k_3 c) k_1 a k_4
   d) k_2 a k_3 e) k_2 a k_4 f) k_3 a k_4



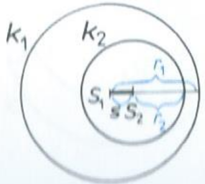
Na čem závisí vzájemná poloha dvou kružnic?

Při pokusu s dvěma kruhy jste si jistě všimli, že vzájemná poloha dvou kružnic $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ závisí nejen na poloměrech r_1 a r_2, ale také na vzdálenosti středů S_1 a S_2. Prozkoumáme nyní jednotlivé případy vzájemné polohy podrobněji. Nebude nás už zajímat případ soustředných kružnic ($S_1 = S_2$). V dalších úvahách tedy budou mít kružnice k_1, k_2 různé středy ($S_1 \neq S_2$).

Úsečka S_1S_2 se nazývá **středná** kružnic k_1, k_2 (nebo kruhů K_1, K_2). Stejný název používáme i pro délku $|S_1S_2|$ této úsečky, kterou značíme s.

Podobně jako v pokusu s vystřiženými kruhy budeme předpokládat, že platí $r_1 > r_2$.

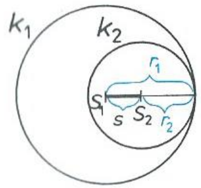
- Kružnice k_2 leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1.



Na obrázku jsou vyznačeny úsečky délek r_1, r_2 a s. Vidíme, že úsečka délky $s + r_2$ je částí úsečky délky r_1. Proto platí $s + r_2 < r_1$. Jestliže „osamostatníme" délku s, dostaneme:

$$\boxed{s < r_1 - r_2}$$

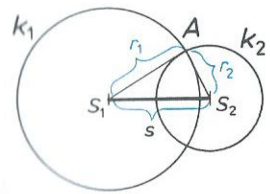
- Kružnice k_2 má s kružnicí k_1 vnitřní dotyk.



Z obrázku vyplývá podmínka vnitřního dotyku kružnic $s + r_2 = r_1$, neboli:

$$\boxed{s = r_1 - r_2}$$

- Kružnice k_1 a k_2 se protínají.



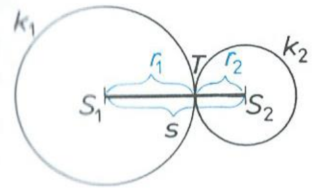
Na obrázku protínajících se kružnic vyznačíme poloměry „směřující" do jednoho ze společných bodů. Zapišme dvě trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník S_1S_2A:

$$s < r_1 + r_2,$$
$$r_1 < s + r_2, \text{ tzn. } r_1 - r_2 < s.$$

Pro střednou s tedy platí:

$$\boxed{r_1 - r_2 < s < r_1 + r_2}$$

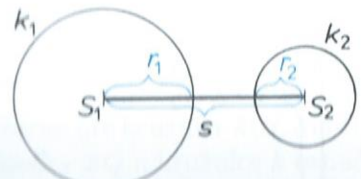
- Kružnice k_2 má s kružnicí k_1 vnější dotyk.



Úsečka S_1S_2 je nyní bodem dotyku rozdělena na poloměry obou kružnic:

$$\boxed{s = r_1 + r_2}$$

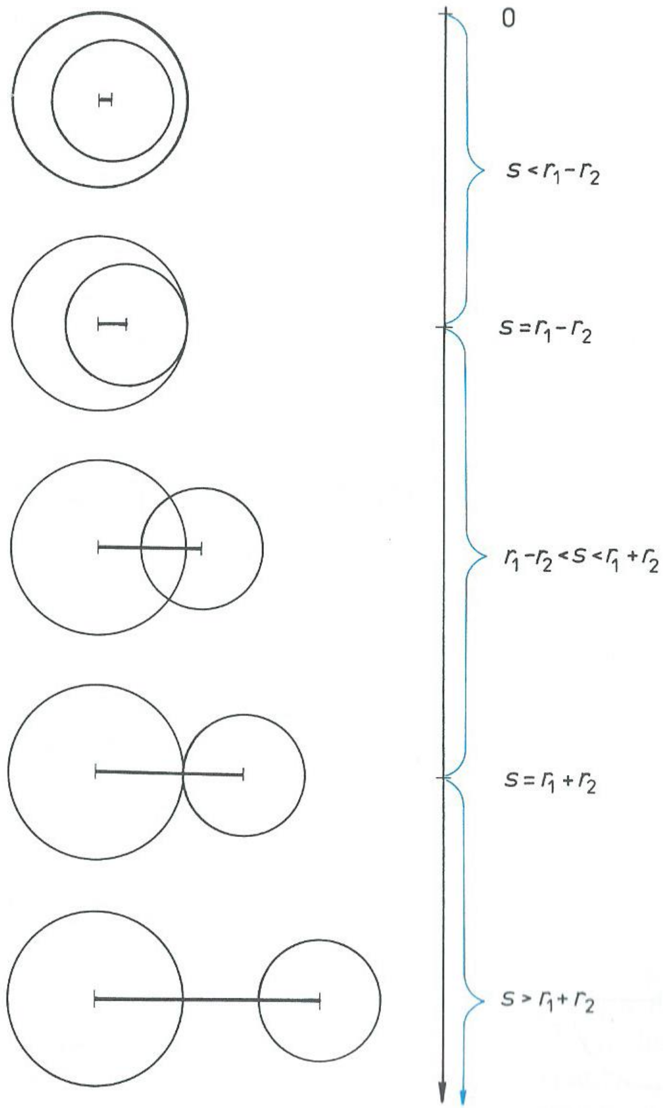
- Kružnice k_2 leží ve vnější oblasti kružnice k_1.



V tomto případě se úsečka S_1S_2 „skládá" z obou poloměrů a „zbytku":

$$\boxed{s > r_1 + r_2}$$

Všechny případy vzájemné polohy dvou kružnic s různými středy a různými poloměry shrneme na obrázku. Větší kružnice má poloměr r_1, menší má poloměr r_2 a vzdálenost jejich středů je s. Hodnoty s jsou znázorněny na svislé ose:



3. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; 1{,}5\,\mathrm{cm})$ a $k_2(S_2; 3\,\mathrm{cm})$. Úsečka S_1S_2 má délku 4 cm. Jaká je vzájemná poloha obou kružnic? O správnosti své odpovědi se přesvědčte narýsováním obrázku.

4. Jsou dány tři kružnice $l_1(O_1; 2\,\mathrm{cm})$, $l_2(O_2; 2\,\mathrm{cm})$ a $l_3(O_3; 2{,}5\,\mathrm{cm})$. Pro vzdálenosti jejich středů platí: $|O_1O_2| = 6\,\mathrm{cm}$, $|O_2O_3| = 7\,\mathrm{cm}$, $|O_1O_3| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. Bez rýsování určete, jakou vzájemnou polohu mají kružnice:
   a) l_1 a l_2 b) l_2 a l_3 c) l_1 a l_3

5. Je dána kružnice $m(M; 5\,\mathrm{cm})$ a bod O tak, že $|MO| = 1\,\mathrm{cm}$. Pro kterou hodnotu r (v centimetrech)
   a) má kružnice $o(O; r)$ s kružnicí m vnitřní dotyk,
   b) leží kružnice $o(O; r)$ ve vnitřní oblasti kružnice m,
   c) se kružnice $o(O; r)$ a m protínají?

6. Popište všechny možné vzájemné polohy dvou shodných kružnic $k_1(S_1; r)$, $k_2(S_2; r)$ v závislosti na délce s středné S_1S_2. (V případě $S_1 = S_2$ klademe $s = 0$.)

CVIČENÍ 1

1. Načrtněte dvě protínající se kružnice a zvolte 11 různých bodů tak, aby ve vnitřní oblasti každé z kružnic leželo právě 7 z těchto bodů.

2. Narýsujte kruh se středem S a jeho dva kolmé průměry AB a CD. Vyznačte
   a) bod L, který je vnitřním bodem kruhu i vnitřním bodem úhlu ASC,
   b) bod M, který náleží kružnici, která kruh ohraničuje, a je vnitřním bodem úhlu BSC,
   c) bod N, který je vnitřním bodem kruhu a náleží jak úhlu ASD, tak úhlu BSD.

3. Na kolik částí rozdělí kruh dvě rovnoběžné sečny? Na kolik částí ho rozdělí 3, 4 a n rovnoběžných sečen? (Předpokládejte, že žádné dvě sečny nejsou totožné.)

4. Narýsujte kružnici $k(S; 3\,\mathrm{cm})$ a bod Q takový, že $|SQ| = 5\,\mathrm{cm}$. Průsečík úsečky SQ a kružnice k označte P. Sestrojte tři rovnoběžné přímky p, q a s tak, aby bod S ležel na přímce s, přímka p byla tečnou kružnice k s bodem dotyku P a přímka q procházela bodem Q. Určete vzájemnou polohu kružnice k a každé z těchto tří přímek.