Kapitola I

VEKTOROVÉ PROSTORY

§ 1. DEFINICE VEKTOROVÉHO PROSTORU, PODPROSTORY

Definice : Nechť P je pole, nechť V je aditivní abelovská grupa a nechť pro každý prvek $p \in P$ a každý prvek $\mathbf{u} \in V$ je definován prvek $p \, . \, \mathbf{u} \in V$ tak, že platí :

(i) $p \, . \, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p \, . \, \mathbf{u} + p \, . \, \mathbf{v}$

(ii) $(p + q) \, . \, \mathbf{u} = p \, . \, \mathbf{u} + q \, . \, \mathbf{u}$

(iii) $(p \, . \, q) \, . \, \mathbf{u} = p \, . \, (q \, . \, \mathbf{u})$.

(iv) $1 \, . \, \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Pak V nazýváme *vektorovým prostorem nad polem* P.
Prvky množiny V nazýváme *vektory*, prvky množiny P nazýváme *skaláry*.
Nulový prvek z V nazýváme *nulovým vektorem* a označujeme $\mathbf{o}$, opačný prvek k $\mathbf{u} \in V$ nazýváme *opačným vektorem k vektoru* $\mathbf{u}$ a označujeme $-\mathbf{u}$.
Prvek $p \, . \, \mathbf{u}$ nazýváme *součinem skaláru* p *s vektorem* $\mathbf{u}$.

Poznámka : Výše definovaný součin skaláru s vektorem je vlastně speciálním typem zobrazení, a sice zobrazením $P \times V \to V$, které někdy nazýváme *vnější operací*, na rozdíl od (binární) operace na množině, např. V, což je zobrazení $V \times V \to V$, které se pak nazývá *vnitřní operací*.

V definici vektorového prostoru se setkáváme se třemi vnitřními operacemi a jednou vnější operací, při čemž některé označujeme stejnými symboly (sčítání ve V a sčítání v P symbolem $+$, resp. násobení v P a násobení skaláru s vektorem označujeme symbolem $.$) I když nemůže dojít k nedorozumění (vzhledem k tomu, že vektory od skalárů odlišujeme graficky), je třeba si tuto skutečnost dobře uvědomit.

Příklad 1.1 : Nechť $S = (S, +, .)$ je libovolné pole, nechť $T \subseteq S$ je libovolné podpole pole S. Pak zřejmě $(S, +)$ je aditivní abelovská grupa, která je vektorovým prostorem nad polem T, jestliže součinem skaláru z T s vektorem z S rozumíme součin těchto prvků v poli S.

Takto lze tedy chápat $\mathbb{R}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ resp. $\mathbb{R}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (při obvyklých operacích sčítání a násobení čísel). I když v obou případech jde o tutéž množinu, totiž $\mathbb{R}$, uvažované vektorové prostory jsou zřejmě různé.

Příklad 1.2.: Nechť $V = \{o\}$ je jednoprvková grupa a nechť P je libovolné pole. Pro každé $p \in P$ definujme $p \cdot o = o$. Pak V je vektorovým prostorem nad polem P, který budeme nazývat nulovým vektorovým prostorem (nad polem P).

Příklad 1.3 : Nechť P je libovolné pole, nechť n je pevné přirozené číslo. Označme :

$$P^{(n)} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in P,\ i = 1, \cdots, n\}$$

a definujme pro lib. $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n) \in P^{(n)}$, $p \in P$: $u + v = (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$

$p \cdot u = (p \cdot u_1, \cdots, p \cdot u_n)$

Pak zřejmě $u + v \in P^{(n)}$, $p \cdot u \in P^{(n)}$ a lehce se ověří, že $P^{(n)}$ je vektorovým prostorem nad polem P.

Tento příklad bude nejčastěji používaným příkladem vektorového prostoru, zejména pro $P = \mathbb{R}$. Dalším zajímavým specielním případem tohoto typu je vektorový prostor $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ (kde p je prvočíslo), který má zřejmě konečný počet prvků.

Příklad 1.4 : Označme $\mathbb{R}[x]$ množinu všech polynomů o neurčité x, s reálnými koeficienty. Na množině $\mathbb{R}[x]$ definujme operaci $+$ jakožto obyčejné sčítání polynomů, resp. pro libovolné $p \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}[x]$ definujeme $p \cdot f$ jakožto obyčejný násobek polynomu f reálným číslem p.

Vzhledem k těmto operacím je $\mathbb{R}[x]$ vektorovým prostorem nad polem $\mathbb{R}$. Nulovým vektorem tohoto vektorového prostoru je pak zřejmě nulový polynom, tj. polynom, jehož všechny koeficienty jsou nulové.

Příklad 1.5 : Nechť n je pevné přirozené číslo. Označme $\mathbb{R}_n[x]$ množinu sestávající z nulového polynomu a dále ze všech polynomů o neurčité x, s reálnými koeficienty, stupně $\leqslant n$. Operace definujeme stejně jako v příkladu 1.4. Potom se lehce ověří, že $\mathbb{R}_n[x]$ je vektorovým prostorem nad polem $\mathbb{R}$.

Věta 1.1 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $p, q \in P$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí :*

1. $p \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = p \cdot \mathbf{u} - p \cdot \mathbf{v}$
2. $(p - q) \cdot \mathbf{u} = p \cdot \mathbf{u} - q \cdot \mathbf{u}$
3. $p \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o} \Leftrightarrow p = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$
4. $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

[D ů k a z : ad 1: $p \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = p \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) + p \cdot \mathbf{v} + (-p \cdot \mathbf{v}) =$

$= p \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) + (-p\mathbf{v}) = p \cdot \mathbf{u} + (-p \cdot \mathbf{v}) =$

$= p \cdot \mathbf{u} - p \cdot \mathbf{v}$

ad 2: $(p - q) \cdot \mathbf{u} = (p + (-q)) \cdot \mathbf{u} + q \cdot \mathbf{u} + (-q \cdot \mathbf{u}) =$

$= (p + (-q) + q) \cdot \mathbf{u} + (-q \cdot \mathbf{u}) = p \cdot \mathbf{u} - q \cdot \mathbf{u}$

ad 3: " $\Leftarrow$ " : je-li $p = 0$, pak $0 \cdot \mathbf{u} = (0 - 0) \cdot \mathbf{u} =$

$= 0 \cdot \mathbf{u} - 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$

je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak $p \cdot \mathbf{o} = p \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{o}) =$

$= p \cdot \mathbf{o} - p \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$

" $\Rightarrow$ " : nechť $p \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$, $p \neq 0$. Pak $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} =$

$= (p^{-1} \cdot p) \cdot \mathbf{u} = p^{-1}(p \cdot \mathbf{u}) = p^{-1} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$

ad 4: $(-1) \cdot \mathbf{u} = (0 - 1) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} - 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o} - \mathbf{u} = -\mathbf{u}$]

Definice : Nechť V je vektorový prostor nad polem P. Neprázdnou podmnožinu W množiny V nazýváme *vektorovým podprostorem* (nebo krátce *podprostorem*) *vektorového prostoru* V, jestliže platí :

(i) je-li $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, pak $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$

(ii) je-li $p \in P$, $\mathbf{w} \in W$, pak $p \cdot \mathbf{w} \in W$

Poznámka : lehce se ověří, že podmínky (i) a (ii) jsou ekvivalentní následující jediné podmínce :

(iii) je-li $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, $p, q \in P$, pak $p \cdot \mathbf{w} + q \cdot \mathbf{w}' \in W$.

Dále je vidět, že je-li $\mathbf{w} \in W$, pak $(-1) \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{w} \in W$ a $\mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{o} \in W$. Tedy každý podprostor W vektorového prostoru V musí být (vzhledem k operaci +) podgrupou V a musí mj. vždycky obsahovat nulový vektor $\mathbf{o}$ vektorového prostoru V.

Věta 1.2 : *Každý vektorový podprostor W vektorového prostoru V nad polem P je sám vektorovým prostorem nad polem P.*

[D ů k a z : z předchozí poznámky plyne, že W je aditivní abelovská grupa, z definice podprostoru pak vyplývá, že je definováno násobení skaláru z P s vektorem z W při čemž axiomy (i) – (iv) z definice vektorového prostoru jsou zřejmě splněny.]

Příklad 1.6 : Nechť V je libovolný vektorový prostor nad polem P. Pak zřejmě $W = V$, resp. $W = \{o\}$ jsou vždy podprostory ve V. Tyto podprostory budeme nazývat triviálními, kdežto všechny ostatní podprostory V budeme nazývat netriviálními podprostory.

Příklad 1.7 : Nechť (u_1,u_2,u_3) je pevný vektor prostoru $\mathbf{R}^{(3)}$. Pak např. $W = \{r . (u_1,u_2,u_3) \mid r \in \mathbf{R}\}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^{(3)}$. Je vidět, že v $\mathbf{R}^{(3)}$ existuje nekonečně mnoho různých podprostorů.

Příklad 1.8 : Množina $W = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(x) = f(-x)\}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}[x]$, kdežto např. množina $M = \{x^2 + ax + b \mid a,b \in \mathbf{R}\}$ podprostorem $\mathbf{R}[x]$ není (neboť např. nulový vektor nepatří do M).

Věta 1.3 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $I \neq \phi$ je nějaká indexová množina a nechť W_i, $i \in I$ je podprostor ve V. Pak : $\bigcap_{i \in I} W_i$ je podprostor V.*

[D ů k a z : množina $\bigcap_{i \in I} W_i$ je zřejmě neprázdná, protože $o \in W_i$ pro každé $i \in I$, a tedy $o \in \bigcap_{i \in I} W_i$.
Dále nechť $w, w' \in \bigcap_{i \in I} W_i$, $p \in P$. Pak $w, w' \in W_i$ pro každé $i \in I$ a tedy podle definice podprostoru $w + w' \in W_i$, resp. $p . w \in W_i$ pro každé $i \in I$. Tedy $w + w'$, $p . w \in \bigcap_{i \in I} W_i$.]

Uvědomme si, že indexová množina I je libovolná (neprázdná) a že tedy průnik podprostorů uvažujeme pro libovolný, konečný či nekonečný, počet podprostorů.

Nechť $M \neq \phi$ je podmnožina vektorového prostoru V (tzn. obecně nikoliv podprostor). Pak existuje podprostor W_i prostoru V, obsahující množinu M (např. prostor V sám má tuto vlastnost). Podle předchozí věty průnik $W = \bigcap W_i (W_i \supseteq M)$

všech takovýchto podprostorů je podprostorem ve V. Zřejmě je to nejmenší podprostor ve V (vzhledem k množinové inklusi), obsahující množinu M. Podprostor W pak nazýváme *podprostorem, generovaným množinou M*. Prvky množiny M nazýváme *generátory* podprostoru W.

Definice : Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak *součtem podprostorů* W_1, W_2 nazýváme množinu $(W_1 + W_2)$ definovanou :

$$W_1 + W_2 = \{ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2 \} .$$

Následující věta ukáže, že součet dvou podprostorů je opět podprostorem daného vektorového prostoru a navíc podá názornou charakterizaci součtu.

Věta 1.4 : *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V nad polem P. Pak: $W_1 + W_2$ je podprostorem ve V, který je roven podprostoru, generovanému množinou $(W_1 \cup W_2)$.*

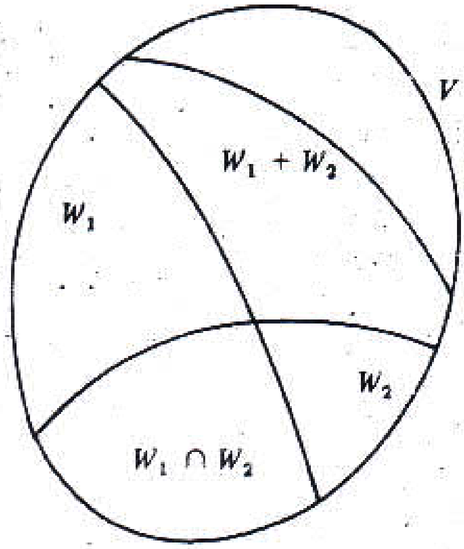
[D ů k a z : a) nejprve dokážeme, že $W_1 + W_2$ je podprostorem ve V.
Ale $\mathbf{o} \in W_1, W_2$, tzn. $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} \in W_1 + W_2$. Tedy $W_1 + W_2 \neq \phi$.
Nechť dále $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W_1 + W_2$, $p \in P$. Potom existují vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \in W_2$ tak, že platí : $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'$. Pak ale :
$\mathbf{w} + \mathbf{w}' = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + (\mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2') = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1') + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2') \in W_1 + W_2$, resp.
$p \cdot \mathbf{w} = p \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = p \cdot \mathbf{w}_1 + p \cdot \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$, a tedy $W_1 + W_2$ je podprostorem ve V.

b) musíme dokázat množinovou rovnost :

$$W_1 + W_2 = \bigcap U_i \ \ (U_i \text{ je podprostor } V \text{ a } U_i \supseteq W_1 \cup W_2).$$

Ale $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, poněvadž pro lib. $\mathbf{w}_1 \in W_1$ je $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{o} \in W_1 + W_2$. Analogicky $W_2 \subseteq W_1 + W_2$, tzn. $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Podle a) je však $W_1 + W_2$ podprostorem ve V, tedy je : $\bigcap U_i$ (U_i je podprostor V a $U_i \supseteq W_1 \cup W_2$) $\subset W_1 + W_2$. Naopak, nechť $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$. Pak existují vektory $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tak, že $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Ale zřejmě $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$, tzn. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in U_i$ kde U_i je libovolný podprostor ve V, s vlastností $U_i \supseteq W_1 \cup W_2$

Pak ale $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in U_i$, tzn. $W_1 + W_2 \subseteq \bigcap U_i$ (U_i je podprostor V a $U_i \supseteq W_1 \cup W_2$). Dohromady platí tedy dokazovaná rovnost.]



Součet dvou podprostorů je tedy nejmenším podprostorem, obsahujícím množinové sjednocení těchto podprostorů. Je třeba mít na paměti, že součet podprostorů obecně není roven jejich množinovému sjednocení. Dále je třeba si uvědomit, že vyjádření vektoru $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$; $\mathbf{w}_1 \in W_1$; $\mathbf{w}_2 \in W_2$ obecně není jednoznačné. Obojí ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.9 : Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{(3)}$ mějme dány dva podprostory

$$W_1 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\},$$
$$W_2 = \{(y_1, 0, y_2) \mid y_1, y_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Zřejmě platí : $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^{(3)}$ a dále $W_1 \cup W_2 = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}$ a $u_2 = 0$ nebo $u_3 = 0\}$.

Je tedy vidět, že $W_1 \cup W_2 \subsetneqq W_1 + W_2$.

Vyjádření vektoru $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ není v tomto případě jednoznačné, neboť např.: $(3,1,1) \in W_1 + W_2$, při čemž :

$$(3,1,1) = (1,1,0) + (2,0,1) = (4,1,0) + (-1,0,1).$$

Poznámka : pojem součtu dvou podprostorů lze obvyklým způsobem rozšířit na libovolný konečný počet podprostorů, tzn. jsou-li $W_1, W_2, \cdots, W_k$ podprostory ve V, pak

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_i \in W_i, i = 1,2,\cdots,k\}$$

při čemž součet $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ je zřejmě opět podprostorem ve V a sice podprostorem, generovaným množinou $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$.

Definice : Nechť $W_1, W_2, \cdots, W_k$ ($k \geqslant 2$ přirozené číslo) jsou podprostory vektorového prostoru V nad polem P. Součet $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ nazýváme *přímým součtem podprostorů* $W_1, W_2, \cdots, W_k$ a označujeme $W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_k$, jestliže platí :

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{o\}\ , \text{ pro } i = 1,2,\cdots,k\ .$$

Jestliže celý vektorový prostor V je přímým součtem dvou podprostorů, tzn. $V = W_1 \dotplus W_2$, pak říkáme, že W_1 a W_2 jsou *komplementárními podprostory ve* V.

Z definice vyplývá, že součet dvou podprostorů je přímý, právě když jejich průnik je roven nulovému podprostoru $\{o\}$. Následující věta udává jinou charakterizaci přímého součtu.

Věta 1.5 ; *Nechť* $W_1, W_2, \cdots, W_k$ ($k \geqslant 2$ *přirozené číslo*) *jsou podprostory vektorového prostoru* V ; *nechť* $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$. *Pak součet* W *je přímý právě když libovolný vektor* $\mathbf{w} \in W$ *lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k$, $\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1,2,\cdots,k$.

[D ů k a z : a) předpokládejme, že součet W je přímý a že platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_k = \mathbf{w}'_1 + \cdots + \mathbf{w}'_k\ , \text{ kde } \mathbf{w}_i, \mathbf{w}'_i \in W_i\ .$$

Pak $o = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1) + \cdots + (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}'_k)$ a tedy $\mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + \cdots$
$\cdots + (\mathbf{w}'_{i-1} - \mathbf{w}_{i-1}) + (\mathbf{w}'_{i+1} - \mathbf{w}_{i+1}) + \cdots + (\mathbf{w}'_k - \mathbf{w}_k)$.
Odsud je vidět, že $(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i) \in W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{o\}$.
Tedy $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i$, pro $i = 1,2,\cdots,k$ a vyjádření je jednoznačné.

b) naopak, předpokládejme, že výše uvedené vyjádření lib. vektoru $\mathbf{w} \in W$ je jednoznačné. Nechť $\mathbf{x} \in W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k)$, tzn. $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{w}_{i+1} + \cdots + \mathbf{w}_k$, kde $\mathbf{w}_j \in W_j$. Pak ale

$$o = w_1 + \cdots + w_{i-1} + (-x) + w_{i+1} + \cdots + w_k$$

a jelikož $o = o + o + \cdots + o$, z jednoznačnosti vyjádření plyne, že $x = o$. To však znamená, že součet W je přímý.]

Příklad 1.10 : Podprostory $W_1 = \{ (x,y,0) \mid x,y \in \mathrm{R} \}$ a $W_2 = \{ (0,z,z) \mid z \in \mathrm{R} \}$ jsou komplementárními podprostory v $\mathbf{R}^{(3)}$, tzn. jejich součet je přímý a je roven $\mathbf{R}^{(3)}$. Na druhé straně, podprostory W_1 a W_2 z příkladu 1.9. nejsou komplementárními podprostory v $\mathbf{R}^{(3)}$ (jejich součet je sice roven $\mathbf{R}^{(3)}$, ale není však přímý).

§ 2. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST VEKTORŮ. BÁZE. DIMENZE

Definice : Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Řekneme, že vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací konečné posloupnosti vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ (nebo krátce *lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$), jestliže existují skaláry $p_1, \cdots, p_k \in P$ takové, že :

$$\mathbf{u} = p_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + p_k \cdot \mathbf{u}_k .$$

Množinu všech vektorů z V, které jsou lineárními kombinacemi daných vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, budeme označovat symbolem $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$. Tedy :

$$L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k) = \{ \mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \text{ je lineární kombinací vektorů } \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \} .$$

Poznámka : nulový vektor $\mathbf{o}$ je zřejmě lineární kombinací každé konečné posloupnosti vektorů (stačí totiž položit $p_1 = \cdots = p_k = 0$). Dále je třeba si uvědomit, že ve výše uvažované konečné posloupnosti vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ nemusí vystupovat navzájem různé vektory, tzn. může se stát, že $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ pro $i \neq j$.

Věta 2.1 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s \in V$. Je-li $\mathbf{u}_i \in L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$, $i = 1, \cdots, r$, pak platí $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r) \subseteq L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$.*

[D ů k a z : podle předpokladu je $\mathbf{u}_i = p_{i1} \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + p_{is} \cdot \mathbf{v}_s$, $p_{ij} \in P$, $i = 1, \cdots, r$. Nechť $\mathbf{w} \in L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r)$. Pak je $\mathbf{w} = q_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + q_r \cdot \mathbf{u}_r$ a po dosazení dostáváme : $\mathbf{w} = q_1 (p_{11} \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + p_{1s} \cdot \mathbf{v}_s) + \cdots + q_r(p_{r1} \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + p_{rs} \cdot \mathbf{v}_s) = (q_1 \cdot p_{11} + \cdots + q_r p_{r1}) \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + (q_1 p_{1s} + \cdots + q_r p_{rs}) \cdot \mathbf{v}_s \in L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$.]

Věta 2.2 : *Nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů vektorového prostoru V. Pak $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ je podprostorem ve V, který je roven podprostoru generovanému množinou $\{ \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \}$.*

[D ů k a z : první část tvrzení je zřejmá, neboť jistě je $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k) \neq \phi$ a součet dvou lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, resp. násobek lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ skalárem z P jsou opět lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$. Tedy $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ je podprostorem ve V a zbývá dokázat množinovou rovnost :

$$L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k) = \bigcap U_i \quad (U_i \text{ je podprostor } V \text{ a } U_i \supseteq \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\})$$

Ale množina na pravé straně je podprostorem V, obsahujícím vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, tzn. obsahuje také libovolnou lineární kombinaci těchto vektorů. Tedy je
$L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k) \subseteq \bigcap U_i \quad (U_i$ je podprostor $V : U_i \supseteq \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\})$.
Naopak $L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ je podprostorem V, obsahujícím vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, tzn. musí pak platit : $\bigcap U_i \quad (U_i$ je podprostor $V : U_i \supseteq \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}) \subseteq$
$\subseteq L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$.
Obě dokázané inkluze pak dohromady dávají žádanou rovnost.]

Definice : Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Řekneme, že tato posloupnost je lineárně závislá, jestliže existují skaláry $p_1, \cdots, p_k \in P$, z nichž alespoň jeden je různý od nuly, takové, že :

$$p_1 . \mathbf{u}_1 + \cdots + p_k . \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

V opačném případě nazýváme posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislou.

Poznámka : a) přesně vzato, jsou lineární závislost a nezávislost vlastnostmi konečné posloupnosti vektorů. V zájmu stručnějšího vyjadřování budeme v dalším říkat rovněž "*lineárně závislé vektory*", resp. "*lineárně nezávislé vektory*".

b) pojem lineární nezávislosti je zřejmě negací pojmu lineární závislosti. Explicitně vyjádřeno to znamená toto :
konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je lineárně nezávislá, jestliže :

$$p_1 . \mathbf{u}_1 + \cdots + p_k . \mathbf{u}_k = \mathbf{o}, \; p_i \in P \Rightarrow p_1 = \cdots = p_k = 0$$

Věta 2.3 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Pak platí :*

a) *při* $k \geqslant 2$ *jsou vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *lineárně závislé* $\Leftrightarrow$ *existuje* i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *tak, že vektor* $\mathbf{u}_i$ *je lineární kombinací zbývajících vektorů* (*tj. vektorů* $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \cdots, \mathbf{u}_k$)

b) *při* $k = 1$ *je vektor* $\mathbf{u}_1$ *lineárně závislý* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$.

[D ů k a z : ad a)

" $\Rightarrow$ " : nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé vektory. Pak existují skaláry $p_1, \cdots, p_k \in P$ tak, že $p_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + p_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, při čemž alespoň jeden z těchto skalárů je nenulový. Nechť např. $p_i \neq 0$. Pak ale existuje v poli P prvek p_i^{-1} a po úpravě dostáváme :

$$\mathbf{u}_i = -p_i^{-1} \cdot p_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \cdots - p_i^{-1} p_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} - p_i^{-1} p_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} - \cdots - p_i^{-1} p_k \cdot \mathbf{u}_k$$

a tedy vektor $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací zbývajících vektorů.

" $\Leftarrow$ " : nechť $\mathbf{u}_i = q_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + q_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + q_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + q_k \cdot \mathbf{u}_k$, $q_j \in P$. Po přepsání odtud dostáváme

$$q_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + q_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + (-1) \cdot \mathbf{u}_i + q_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + q_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

a protože $-1 \neq 0$ v poli P, jsou podle definice vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé.

ad b) :

Vektor $\mathbf{u}_1$ je lineárně závislý $\Leftrightarrow$ existuje $p \neq 0$: $p \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$ podle věty 1.1.]

Poznámka : je třeba si uvědomit, že pro $k \geqslant 2$ předchozí věta pouze zajišťuje existenci vektoru, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů. Nelze tedy obecně tvrdit, že každý z vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace zbývajících. Například vektory $\mathbf{u}_1 = (0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1)$ jsou lineárně závislé v $\mathbf{R}^{(2)}$, neboť $\mathbf{u}_1 = 0 \cdot \mathbf{u}_2 + (-1) \cdot \mathbf{u}_3$. Při tom je ale vidět, že vektor $\mathbf{u}_2$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_3$.

Důsledek : Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť

(1) $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$

je konečná posloupnost vektorů z V. Pak platí :

1. obsahuje-li posloupnost (1) nulový vektor, pak je lineárně závislá
2. obsahuje-li posloupnost (1) dva stejné vektory, pak je lineárně závislá
3. je-li nějaká posloupnost vybraná z (1) lineárně závislá, pak je i (1) lineárně závislá
4. je-li (1) lineárně nezávislá, pak každá posloupnost vybraná z (1) je lineárně nezávislá.

[D ů k a z : všechna tvrzení důsledku plynou přímo z definice lineární závislosti, resp. z předchozí věty.]

Věta 2.4 : (Steinitzova věta o výměně) *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s \in V$. Nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé a nechť $\mathbf{u}_i \in L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$, pro $i = 1, \cdots, r$. Pak platí :*

1. $r \leqslant s$
2. *při vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s$ je*

$$L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s) = L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \cdots, \mathbf{v}_s)$$

[D ů k a z : provedeme matematickou indukcí vzhledem k r.
Nechť $r = 1$. Pak je jistě $r \leqslant s$. Z předpokladu $\mathbf{u}_1 \in L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$ plyne, že lze psát : $\mathbf{u}_1 = p_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + p_s \cdot \mathbf{v}_s$, kde $p_i \in P$. Dále, podle předpokladu je vektor $\mathbf{u}_1$ lineárně nezávislý, tzn. podle věty 2.3 je $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Pak ale aspoň jeden ze skalárů p_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ musí být nenulový. Přečíslujme vektory $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s$ tak, že bude $p_1 \neq 0$. Potom

$$\mathbf{v}_1 = p_1^{-1} \cdot \mathbf{u}_1 + (-p_1^{-1} \cdot p_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + (-p_1^{-1} \cdot p_s) \cdot \mathbf{v}_s$$

tzn. $\mathbf{v}_1 \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s)$. Jelikož triviálním způsobem platí : $\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s)$, pak podle věty 2.1. je $L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s) \subseteq L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi : podle předpokladu je však $\mathbf{u}_1 \in L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$ a $\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s \in L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s)$ platí triviálně. Tedy opět podle věty 2.1. dostáváme $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s) \subseteq L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s)$. Dohromady pak platí rovnost $L(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s)$. Tedy, obě části tvrzení věty jsme dokázali pro $r = 1$.

Předpokládejme dále, že věta platí pro všechna přirozená r' : $1 \leq r' \leq r - 1$ a dokažme ji pro r. Ale vektory $u_1, \cdots, u_{r-1}$ jsou lineárně nezávislé (podle předchozího důsledku, neboť vektory $u_1, \cdots, u_{r-1}, u_r$ jsou lineárně nezávislé), tzn. podle indukčního předpokladu, při vhodném přečíslování vektorů $v_1, \cdots, v_s$ je $L(v_1, \cdots, v_s) = L(u_1, \cdots, u_{r-1}, v_r, \cdots, v_s)$. Podle předpokladu věty je však $u_r \in L(v_1, \cdots, v_s)$, tzn. lze pak psát

$$u_r = p_1 \cdot u_1 + \cdots + p_{r-1} \cdot u_{r-1} + p_r \cdot v_r + \cdots + p_s \cdot v_s .$$

Odsud však dostáváme, že především $r \leq s$ a dále, že alespoň jeden z prvků $p_r, \cdots, p_s$ je různý od nuly (jinak spor s tím, že $u_1, \cdots, u_r$ jsou lineárně nezávislé). Přečíslujme vektory $v_r, \cdots, v_s$ tak, že $p_r \neq 0$. Potom však:

$$v_r = -p_r^{-1} \cdot p_1 \cdot u_1 - \cdots - p_r^{-1} p_{r-1} \cdot u_{r-1} + p_r^{-1} \cdot u_r - p_r^{-1} \cdot p_{r+1} \cdot v_{r+1} - \cdots$$
$$\cdots - p_r^{-1} \cdot p_s \cdot v_s ,$$

tzn. $v_r \in L(u_1, \cdots, u_r, v_{r+1}, \cdots, v_s)$. Triviálním způsobem opět platí, že $u_1, \cdots, u_{r-1}, v_{r+1}, \cdots, v_s \in L(u_1, \cdots, u_r, v_{r+1}, \cdots, v_s)$. Tedy dostáváme:

$$L(v_1, \cdots, v_s) = L(u_1, \cdots, u_{r-1}, v_r, \cdots, v_s) \subseteq L(u_1, \cdots, u_r, v_{r+1}, \cdots, v_s) .$$

Inkluse $L(u_1, \cdots, u_r, v_{r+1}, \cdots, v_s) \subseteq L(v_1, \cdots, v_s)$ je však triviální (s využitím předpokladu věty), tzn. dohromady pak dostáváme žádanou rovnost.

Definice: Konečná posloupnost vektorů $u_1, \cdots, u_n$ vektorového prostoru V nad polem P se nazývá *bází prostoru* V, jestliže

(i) $u_1, \cdots, u_n$ jsou lineárně nezávislé

(ii) $u_1, \cdots, u_n$ jsou generátory prostoru V, tzn. $V = L(u_1, \cdots, u_n)$.

Poznámka: Definice nic neříká o tom, kolik bází má daný vektorový prostor. Např. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, resp. $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ jsou dvě různé báze prostoru $R^{(3)}$. Je tedy vidět, že obecně nemá daný vektorový prostor jedinou bázi. Např. vektorový prostor $R^{(3)}$ má zřejmě nekonečně mnoho bází. Může se ale také stát, že vektorový prostor nemá žádnou bázi, jako je tomu v případě vektorového prostoru $\mathbf{R}[x]$ všech polynomů neurčité x, s reálnými koeficienty (jestliže by totiž konečná posloupnost polynomů $\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n$ byla bází $\mathbf{R}[x]$, pak by se každý polynom dal napsat jako lineární kombinace $\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n$, což však zřejmě není možné). Rovněž nulový vektorový prostor $V = \{\mathbf{o}\}$ nemá bázi.

Definice : **Řekneme, že konečná posloupnost vektorů** $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ vektorového prostoru V je ***maximální lineárně nezávislou posloupností vektorů ve V***, jestliže

(i) posloupnost $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ je lineárně nezávislá.

(ii) pro libovolné $\mathbf{w} \in V$ je posloupnost $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}$ lineárně závislá.

Věta 2.5 : *Konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ vektorového prostoru V nad polem P je bází prostoru V právě když $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ je maximální lineárně nezávislou posloupností vektorů ve V.*

[D ů k a z : a) nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ je bází prostoru V. Pak jsou vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé a pro libovolné $\mathbf{w} \in V$ je $\mathbf{w} \in L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$, jak plyne z definice báze. Podle věty 2.3. jsou pak vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}$ lineárně závislé.

b) naopak, nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ je maximální lineárně nezávislá posloupnost vektorů ve V. Pak $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $\mathbf{w} \in V$ je libovolný vektor. Pak podle předpokladu jsou $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}$ lineárně závislé, tzn. existují prvky $p_1, \cdots, p_n, p \in P$ tak, že alespoň jeden z nich je nenulový a platí

$$p_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + p_n \cdot \mathbf{u}_n + p \cdot \mathbf{w} = \mathbf{o}$$

ale $p \neq 0$ (jinak spor s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$), tzn. existuje p^{-1} a platí : $\mathbf{w} = -p^{-1}p_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \cdots - p^{-1}p_n \cdot \mathbf{u}_n$, což znamená, že $\mathbf{w} \in L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$. Tím jsme dokázali inklusi $V \subseteq L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$. Protože však opačná inkluse je triviální, platí rovnost : $V = L(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$.]

Věta 2.6 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P; nechť $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru V. Pak platí :*

1. *je-li* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ *bází* V, *pak* $m = n$
2. *jsou-li* $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_s$ *generátory prostoru* V, *pak z nich lze vybrat bázi.*
3. *každou konečnou posloupnost lineárně nezávislých vektorů z* V *lze doplnit na bázi* V.

[D ů k a z : ad 1 : aplikujeme-li dvakrát Steinitzovu větu, dostáváme $n \leqslant m$ a $m \leqslant n$. Tedy $m = n$.

ad 2 : podle předpokladu věty má prostor V bázi, tzn. V není nulovým prostorem.

Nechť nyní $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_s$ jsou generátory prostoru V. Pak alespoň jeden z nich je různý od $\mathbf{o}$ a zřejmě je lze přečíslovat tak, že $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t$ jsou lineárně nezávislé a $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_j$ jsou lineárně závislé pro $j > t$. Pak pro $j > t$ je $\mathbf{w}_j \in L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t)$ a užitím věty 2.1. dostáváme (neboť $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t \in L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t)$ triviálně) : $V = L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_s) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t) \subseteq V$, tzn. musí platit rovnost a dostáváme $V = L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t)$. Tedy $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t$ je báze V.

ad 3 : plyne ihned ze Steinitzovy věty a z věty 2.5.]

Poznámka : předchozí věta mj. říká, že má-li vektorový prostor bázi, pak všechny jeho báze mají stejný počet vektorů.

Věta 2.7 : *Nechť* $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ *je báze vektorového prostoru* V *nad polem* P, *nechť* $\mathbf{w}$ *je libovolný vektor z* V. *Pak* $\mathbf{w}$ *lze vyjádřit ve tvaru :*

$$\mathbf{w} = p_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + p_n \cdot \mathbf{u}_n \quad , \quad p_i \in P \; , \; 1 \leqslant i \leqslant n$$

při čemž toto vyjádření je jednoznačné

[D ů k a z : z definice báze plyne, že vektor $\mathbf{w}$ lze vyjádřit v uvedeném tvaru. Dokažme, že takovéto vyjádření je právě jedno. Nechť tedy :

$$\mathbf{w} = p_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + p_n \cdot \mathbf{u}_n = q_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + q_n \cdot \mathbf{u}_n \; , \; p_i, q_i \in P$$

Pak odečtením a úpravou dostáváme :

$$(p_1 - q_1) \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + (p_n - q_n) \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ jsou však lineárně nezávislé, tzn. musí být $p_i - q_i = 0$, neboli $p_i = q_i$ pro $i = 1, \cdots, n$.]

Definice : Nechť V je vektorový prostor nad polem P. Pak :

(i) je-li V nulovým vektorovým prostorem, tzn. $V = \{\mathbf{o}\}$, říkáme, že má dimenzi nula ;

(ii) existuje-li báze $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ prostoru V, říkáme, že V má dimenzi n ;

(iii) je-li $V \neq \{\mathbf{o}\}$ a nemá-li žádnou bázi, říkáme, že má dimenzi nekonečno.

Píšeme pak : $\dim V = 0$, resp. $\dim V = n$, resp. $\dim V = \infty$.

Vektorové prostory (i) a (ii) nazýváme *konečnědimenzionální*, vektorové prostory (iii) nazýváme *nekonečnědimenzionální*.

Příklad 2.1 : V prostoru $P^{(n)}$ je zřejmě posloupnost vektorů : $\mathbf{u}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\mathbf{u}_n = (0,\cdots,0,1)$ bází, což znamená, že $\dim P^{(n)} = n$. Speciálně tedy $\dim \mathbf{R}^{(3)} = 3$, $\dim \mathbf{K}^{(5)} = 5$, $\dim \mathbf{Z}_7^{(4)} = 4$, atd.

Příklad 2.2 : Vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ nemá bázi a při tom zřejmě $\mathbf{R}[x] \neq \{\mathbf{o}\}$, tzn. $\dim \mathbf{R}[x] = \infty$.

Příklad 2.3 : V prostoru $\mathbf{R}_n[x]$ je bází např. posloupnost $\mathbf{f}_0 = 1$, $\mathbf{f}_1 = x$, $\mathbf{f}_2 = x^2, \cdots, \mathbf{f}_n = x^n$. To tedy znamená, že $\dim \mathbf{R}_n[x] = n + 1$.

Příklad 2.4 : a) uvažujeme-li $\mathbf{K}$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ (viz příklad 1.1), pak např. 1 je jeho bází, tzn. $\dim \mathbf{K} = 1$.

b) uvažujeme-li však $\mathbf{K}$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$, pak např. $1, i$ je jeho bází, tzn. $\dim \mathbf{K} = 2$.

Uvědomme si, že v těchto případech sice symbol $\mathbf{K}$ značí stejnou množinu, ale dva různé vektorové prostory (jednou nad $\mathbf{K}$, podruhé nad $\mathbf{R}$). Aby nedošlo k nedorozumění, musíme v těchto situacích uvažovaný vektorový prostor vždy řádně popsat.

ÚMLUVA : Všude v dalším se budeme zabývat pouze konečnědimenzionálními vektorovými prostory. Řekneme-li tedy, že V je vektorový prostor nad polem P, bude to automaticky znamenat, že V je konečnědimenzionální vektorový prostor nad P, tzn. buďto nulový prostor nebo prostor, v němž existuje báze.

Věta 2.8 : *Nechť V je vektorový prostor nad polem P, nechť W je podprostor ve V. Pak platí :*

1. $\dim W \leqslant \dim V$;
2. $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.

[D ů k a z : je-li $V = \{o\}$ nebo $W = \{o\}$, pak celá věta zřejmě platí. Nechť tedy je $\dim V = n \neq 0$, nechť $v_1, \cdots, v_n$ je báze V a nechť $W \neq \{o\}$.

ad 1 : jsou-li $w_1, \cdots, w_r$ lineárně nezávislé vektory z W , pak jistě také $w_1, \cdots, w_r \in V = L(v_1, \cdots, v_n)$ a podle Steinitzovy věty je $r \leqslant n$. Nechť r je největší přirozené číslo s touto vlastností. Pak je zřejmě $W = L(w_1, \cdots, w_r)$, tzn. $\dim W = r \leqslant n = \dim V$.

ad 2 : nechť $\dim W = \dim V = n$. Pak existují lineárně nezávislé vektory $w_1, \cdots, w_n \in W$ takové, že $L(w_1, \cdots, w_n) = W$. Podle Steinitzovy věty pak platí $L(v_1, \cdots, v_n) = L(w_1, \cdots, w_n)$, nebo-li $W = V$. Tím jsme dokázali jednu implikaci, při čemž druhá implikace je zřejmě triviální.]

Věta 2.9 : *Nechť W_1 , W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V nad polem P .*
Pak platí :

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 .$$

[D ů k a z : je-li jeden z podprostorů nulový, pak tvrzení věty zřejmě platí.
Předpokládejme tedy, že $\dim W_1 = r \neq 0$, $\dim W_2 = s \neq 0$.
Průnik $W_1 \cap W_2$ je podprostorem ve V , tedy buď je $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ nebo existuje báze $W_1 \cap W_2$, tzn. lineárně nezávislé vektory $w_1, \cdots, w_t$ s vlastností $W_1 \cap W_2 = L(w_1, \cdots, w_t)$.
Podle věty 2.6. (3.část) existují vektory $u_{t+1}, \cdots, u_r \in W_1$ tak, že $w_1, \cdots, w_t$, $u_{t+1}, \cdots, u_r$ je báze W_1 , resp. vektory $v_{t+1}, \cdots, v_s \in W_2$ tak, že $w_1, \cdots, w_t$, $v_{t+1}, \cdots, v_s$ je báze W_2 (v případě $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ položíme zřejmě $t = 0$) .
Nyní ukážeme, že vektory

(2) $$w_1, \cdots, w_t, u_{t+1}, \cdots, u_r, v_{t+1}, \cdots, v_s$$

tvoří bázi $W_1 + W_2$.

a) ukážeme lineární nezávislost vektorů (2) . Nechť

$$(3) \quad p_1 . \mathbf{w}_1 + \cdots + p_t . \mathbf{w}_t + p_{t+1} . \mathbf{u}_{t+1} + \cdots + p_r . \mathbf{u}_r + q_{t+1} . \mathbf{v}_{t+1} + \cdots + q_s . \mathbf{v}_s = \mathbf{o} .$$

Označme $\mathbf{w} = p_1 . \mathbf{w}_1 + \cdots + p_t . \mathbf{w}_t + p_{t+1} . \mathbf{u}_{t+1} + \cdots + p_r . \mathbf{u}_r$.
Pak ale je $\mathbf{w} = -q_{t+1} . \mathbf{v}_{t+1} - \cdots - q_s . \mathbf{v}_s \in W_1 \cap W_2$ a podle věty 2.7. dostáváme (protože vektory $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé) :

$$p_{t+1} = \cdots = p_r = 0 .$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (3) , dostáváme :

$$p_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + p_t . \mathbf{w}_t + q_{t+1} . \mathbf{v}_{t+1} + \cdots + q_s . \mathbf{v}_s = \mathbf{o} .$$

Odtud však z lineární nezávislosti těchto vektorů dostáváme :

$$p_1 = \cdots = p_t = q_{t+1} = \cdots = q_s = 0 .$$

Tedy vektory (2) jsou lineárně nezávislé.

b) vektory (2) patří zřejmě do $W_1 + W_2$, tzn. je $L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{t+1}, \cdots, \mathbf{v}_s) \subseteq W_1 + W_2$. Naopak, nechť $\mathbf{x} \in W_1 + W_2$, tzn. existují vektory $\mathbf{x}_1 \in W_1$, $\mathbf{x}_2 \in W_2$ takové, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 .$$

Ale zřejmě $\mathbf{x}_1 \in L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{t+1}, \cdots, \mathbf{v}_s)$ a analogicky pro $\mathbf{x}_2$. Tedy $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{t+1}, \cdots, \mathbf{v}_s)$, tzn. $W_1 + W_2 \subseteq L(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \cdots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{t+1}, \cdots, \mathbf{v}_s)$ a dohromady dostáváme rovnost.

Dokázali jsme tedy, že vektory (2) tvoří bázi $W_1 + W_2$, což znamená, že $\dim(W_1 + W_2) = r + s - t$
Pak ale : $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = (r + s - t) + t = r + s = \dim W_1 + \dim W_2$.]

Poznamenejme, že předchozí větu nelze přímo zobecnit pro k podprostorů ($k > 2$) daného vektorového prostoru, jak plyne z následujícího příkladu.

Příklad 2.5 : Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{(3)}$ jsou $W_1 = \{ (k,l,0) | k,l \in \mathbf{R} \}$, $W_2 = \{ (m,0,n) | m,n \in \mathbf{R} \}$, $W_3 = \{ (0,r,s) | r,s \in \mathbf{R} \}$ dvoudimenzionálními podprostory. Zřejmě je $W_1 + W_2 + W_3 = \mathbf{R}^{(3)}$, resp. $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{ \mathbf{o} \}$. Pak tedy $\dim (W_1 + W_2 + W_3) + \dim (W_1 \cap W_2 \cap W_3) = 3$, ale $\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = 6$.

Pro přímé součty se však v jistém smyslu podobné tvrzení dá vyslovit i pro více než dva podprostory, jak ukazuje následující věta.

Věta 2.10 : *Nechť $W_1, W_2, \cdots, W_k$ $(k \geqslant 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V nad polem P; nechť součet podprostorů $W_1, W_2, \cdots, W_k$ je přímý. Pak platí :*

$$\dim (W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k .$$

[D ů k a z : provedeme matematickou indukcí vzhledem ke k. Pro $k = 2$ tvrzení věty plyne z věty 2.9. a z definice přímého součtu. Nechť tedy tvrzení platí pro všechna přirozená $k' : 2 \leqslant k' \leqslant k - 1$. Pak ale : $\dim (W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_k) = \dim (W_1 \dotplus (W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_k)) = \dim W_1 + \dim (W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.]

Poznámka : z předchozí věty plyne jednoduchá konstrukce báze přímého součtu podprostorů. Stačí totiž vedle sebe vypsat báze všech uvažovaných podprostorů které bázi mají (tzn. jsou nenulové) a tyto vektory pak dohromady tvoří bázi přímého součtu těchto podprostorů.