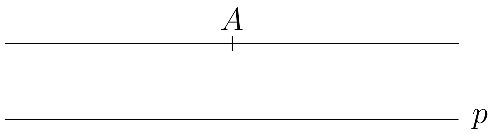
0.1 Axiom rovnoběžnosti a neeukleidovské geometrie

Uvažujeme-li rovinu určenou přímkou p a bodem $A \notin p$, víme, že v této rovině existuje jediná přímka procházející bodem A, která nemá s přímkou p žádný společný bod.

Tuto nám zřejmou skutečnost není možné odvodit z dosud zavedených axiomů incidence a uspořádání, a to ani tehdy, když knim přidáme další dvě skupiny axiomů – axiomy shodnosti a axiomy spojitosti, se kterými se seznámíme v dalším textu. Tuto skutečnost je třeba také zavést axiomaticky a vyjadřuje ji tzv. **axiom rovnoběžnosti** (známý také jako **pátý Eukleidův postulát**), který označíme R.

R: **Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou p a bodem A existuje právě jedna přímka procházející bodem A, která nemá s přímkou p žádný společný bod.**



Obr. 1

Přímka procházející bodem A, o níž se hovoří v axiomu R, se nazývá *rovnoběžka* s přímkou p. Axiom R zavádí do geometrie vztah rovnoběžnosti přímek.

Definice 0.1 *Rovnoběžnými* nazýváme takové dvě přímky, které leží v jedné rovině a nemají společný bod, nebo dvě splývající přímky.

Vztah rovnoběžnosti přímek je zřejmě reflexivní a symetrický a též tranzitivní.

Věta 0.1 *Nechť p, q, r jsou tři libovolné přímky. Platí-li že $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak je též $p \parallel r$.*

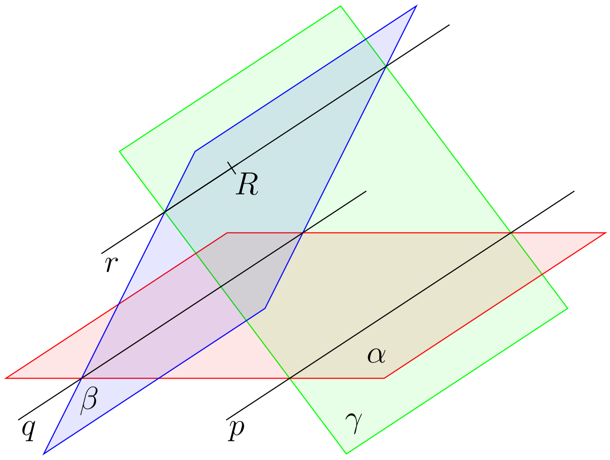
Důkaz: *Věta zřejmě platí, je-li $q = r$ nebo $p = q$ nebo $p = r$. Předpokládejme tedy, že přímky p, q, r jsou po dvou různé a uvažujme dvě možnosti:*

1) p, q, r leží v jedné rovině,

2) p, q, r neleží v jedné rovině.

Ad 1) Přímky p, r nemohou mít společný bod, neboť pak by tímto bodem procházely dvě různé rovnoběžky s přímkou q. Je tedy $p \parallel q$.

Ad 2) Rovinu, v níž leží přímky p, q označme α a rovinu, v níž leží přímky q, r, označme β. Protože $q \cap r = \emptyset$ a $\alpha \cap \beta = q$, je $\alpha \cap r = \emptyset$. Protože $p \cap q = \emptyset$, $p \subset \alpha$ a



Obr. 2

$\alpha \cap \beta = q$, je také $\beta \cap p = \emptyset$. Zvolme na přímce r bod R a rovinu určenou přímkou p a bodem R označme γ (viz obr. 1.19).

Protože $R \notin \alpha$, je $\gamma \cap \alpha = p$. Vzhledem k tomu, že $\beta \cap \alpha = q$, $\gamma \cap \alpha = p$ a $p \cap q = \emptyset$, je $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$. Protože $p \not\subset \beta$, je $\beta \neq \gamma$, ale bod $R \in \beta \cap \gamma$. To znamená, že existuje přímka $k = \beta \cap \gamma$. Protože platí $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$, je $k \cap \alpha = \emptyset$ a též $k \cap q = \emptyset$. Protože $R \in k$, je $r = k$. Je tedy $r \subset \gamma$ a platí $r \cap \alpha = \emptyset$. Protože $p \subset \alpha$, je též $r \cap p = \emptyset$.

Celkem tedy dostáváme: $r \subset \gamma$, $p \subset \gamma$ a $r \cap p = \emptyset$. Odtud plyne, že $p \parallel r$, což jsme měli dokázat. □

Geometrie vybudovaná jen z uvedených čtyř skupin axiomů (incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti) se nazývá geometrie absolutní.[1] Přidáme-li k těmto axiomům ještě axiom rovnoběžnosti, formulovaný původně jako V. Eukleidův postulát, dostáváme tzv. **eukleidovskou geometrii**.[2] Eukleidovská geometrie je právě ta geometrie, kterou jsme intuitivně zavedli na základní a střední škole, v níž tvrzení axiomu rovnoběžnosti bereme jako zřejmou skutečnost. Jak již bylo naznačeno v historických souvislostech na straně 16, právě fakt, že tvrzení axiomu rovnoběžnosti není možno odvodit z výše uvedených axiomů, patří v matematice k objevům zásadního významu.

Dlouhá staletí se jej matematici bezúspěšně snažili dokázat z předchozích čtyř, což nakonec vedlo v 19. století[3] k objevu **neeukleidovské geometrie**. Neeukleidovská geometrie – někdy také nazývaná Lobačevského geometrie – je tedy taková geometrie, která k prvním čtyřem skupinám axiomů přidává negaci axiomu rovnoběžnosti. (Tj. v axiomu rovnoběžnosti nahradí tvrzení „existuje právě jedna“, buď tvrzením „neexistuje žádná“ nebo „existují alespoň dvě“.)

---

[1] V absolutní geometrii lze dokázat, že existuje v rovině určené přímkou p a bodem A *alespoň jedna přímka*, která prochází bodem A a nemá s přímkou p žádný společný bod. Pak bychom axiom rovnoběžnosti mohli vyslovit se silnějším tvrzením *právě jedna* na místo *nejvýše jedna*.

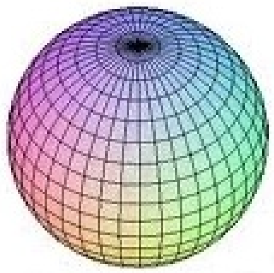
[2] Pátý postulát formulovaný Eukleidem ve spise *Základy*, viz strana 14, postulát V., obsahuje tvrzení ekvivalentní uvedenému axiomu R.

[3] Více historických poznámek k objevu neeukleidovské geometrie na straně 16.

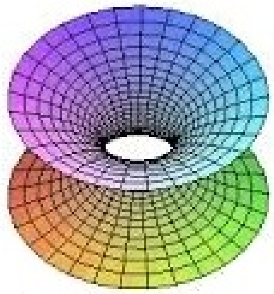
Podle toho, jakým způsobem pátý axiom popřeme, rozlišujeme dva základní typy neeukleidovské geometrie – sférickou geometrii a hyperbolickou geometrii.

Sférický axiom: Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou p a bodem A neexistuje žádná přímka vedená bodem A, která neprotíná p.

Hyperbolický axiom: Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou p a bodem A existují nejméně dvě různé přímky vedené bodem A, které neprotínají p.



Obr. 3 Sféra



Obr. 4 Pseudosféra

Tyto geometrie si nelze snadno představit v rovině, ale mnoho vztahů a souvislostí neeukleidovských geometrií je možné pochopit na modelech geometrií, kdy místo roviny uvažujeme tzv. Lobačevského rovinu[4] nebo plochy, které jsou nějakým způsobem zakřivené. Názvy eliptická geometrie (resp. sférická) a hyperbolická geometrie vychází právě z toho, jaký mají tyto geometrie model. Nejjednodušším modelem eliptické geometrie je povrch koule (sféra), kde přímky jsou „velké“ kružnice (průniky sféry s rovinami, které procházejí jejím středem), viz obr. 1.20. Hyperbolickou geometrii lze kreslit například na tzv. pseudosféru, viz obr. 1.21.

Poznámka 0.1 V neeukleidovských geometriích platí některá tvrzení zcela odlišná od tvrzení, která známe v eukleidovské geometrii. Např. uvedeme souvislost axiomu rovnoběžnosti, případně jeho negace, se součtem úhlů v trojúhelníku. Jednou ze základních vět eukleidovské geometrie je ta, která říká, že součet velikostí všech vnitřních

[4]Model Lobačevského roviny pochází od matematiků E. Beltramiho (1835 – 1900) a F. Kleina (1849 – 1925). Uvažujeme rovinu ve smyslu eukleidovské geometrie a nechť je v této rovině dán kruh. Lobačevského rovinou (tj. L-rovinou) rozumíme množinu všech vnitřních bodů tohoto kruhu. Tyto body jsou body Lobačevského roviny, tj. L-body. L-přímkami rozumíme všechny tětivy uvažovaného kruhu, ale bez jejích krajních bodů. Např. vztah L-bod leží mezi jinými dvěma L-body je stejný jako pro tyto body v eukleidovské rovině a podobně v tomto modelu není obtížné prověřit, že platí axiomy incidence a uspořádání. Shodnost je však definovaná jinak než v eukleidovské geometrii. Z tohoto modelu je zřejmé, že bodem A prochází dokonce nekonečně mnoho přímek, které nemají s přímkou p společný bod.

úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Tato věta je ekvivalentní axiomu rovnoběžnosti. V neeukleidovské geometrii se tedy součet úhlů v trojúhelníku liší od 180°:[5]

- Ve sférické geometrii je součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku větší než 180°.
- V hyperbolické geometrii je součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku menší než 180°.

Pro představivost poslouží modely na obrázcích 1.20, 1.21. Důkazy přesahují rámec tohoto textu a lze je nalézt např. v [**?**].

Fakt, že existuje více geometrií, vede přirozeně k otázkám, zda jsou všechny tyto geometrie odrazem určité oblasti objektivní reality, jaké je jejich využití a jaká je geometrie našeho vesmírného prostoru, neboť rozvíjet tyto geometrie jen na modelech by nemělo hlubšího smyslu. Tyto otázky již značně přesahují vymezený rámec tohoto textu. Poznamenejme tedy jen stručně, že neeukleidovská geometrie má skutečně odraz i v naší objektivní realitě – např. v Einsteinově obecné teorii relativity je časoprostor zakřivený v důsledku přítomnosti hmoty a hybnosti, tj. má neeukleidovskou geometrii. V současnosti se geometrie pořád vyvíjí a to jak geometrie praktická (například výpočetní geometrie a počítačová grafika), tak teoretická, která má úzkou souvislost s teoretickou fyzikou.

---

[5] Tzv. úhlovou výchylku trojúhelníka nezávisle studovali v obou zmiňovaných geometriích matematici C. F. Gauss a J. H. Lambert.

0.2 Polohové vlatnosti bodů, přímek a rovin

Vlastnosti bodů, přímek a rovin, které jsou založeny na vztazích incidence, uspořádání a rovnoběžnosti nazýváme *polohové vlastnosti.* Základní polohové vlastnosti bodů, přímek a rovin jsou vysloveny v axiomech incidence, uspořádání a rovnoběžnosti. Z nich se pak odvozují další vlastnosti a vztahy (např. věty 1.2, 1.3, 1.4, 1.8). V následujícím textu uvedeme ve větách 1.9 až 1.15 další polohové vlastnosti týkající se vzájemných poloh přímek a rovin.

Věta 0.2 ***(O vzájemné poloze dvou přímek)***
Dvě přímky v prostoru mají právě jednu z těchto čtyř vzájemných poloh:

A. přímky splývají,

B. přímky mají jeden společný bod,

C. přímky nemají společný bod a leží v téže rovině,

D. přímky nemají společný bod a neleží v žádné rovině.

Přímky z případů A. a C. nazýváme *rovnoběžné*, z případu B. *různoběžné* a z případu D. *mimoběžné*.

Důkaz: *Při důkazu této věty je třeba ukázat, že možnosti A. - D. mohou nastat a že nemůže nastat žádný jiný případ vzájemné polohy dvou přímek.*
Případ A. nastane tehdy, mají-li obě přímky společné dva různé body, neboť těmito bodu je podle axiomu I_1 určena jediná přímka.
Případ B. plyne z axiomu I_3 a I_1. Podle I_3 existují tři různé body, které neleží v téže přímce. Označme je A, B, C. Pak je podle axiomu I_1 určena body A, B jediná přímka a body A, C rovněž jediná přímka. Tyto přímky mají jediný společný bod A.
Případ C. plyne z axiomů I_3, I_1 a axiomu rovnoběžnosti. Podle I_3 existují tři různé body, které neleží v téže přímce. Označme je opět A, B, C. Body A, B je podle I_1 určena jediná přímka a bod C na ní neleží. Z axiomu rovnoběžnosti plyne, že bodem C prochází právě jedna rovnoběžka s přímkou AB, tj. přímka, která nemá s přímkou AB žádný společný bod a leží s ní v jedné rovině, což je rovina ABC.
Případ D.: Podle axiomu I_8 existují čtyři různé body, které neleží v téže rovině. Označme je A, B, C, D. Nechť body A, B určují přímku p, body C, D určují přímku q. Je zřejmé, že neexistuje rovina, v níž by ležely obě přímky p, q. Pokud by tyto přímky měly společný bod P, pak by rovina APC obsahovala podle axiomu I_6 obě přímky a tedy i body A, B, C, D, což by byl spor s předpokledem, že body A, B, C, D neleží v téže rovině. Přímky p, q tedy nemají společný bod.
Tím je dokázáno, že případy A. – D. mohou nastat. Abychom ukázali, že žádný další případ již nastat nemůže, provedeme v následujícím schematu dichotomické třídění

dvojic přímek.[6]

$$\textit{dvě přímky}\begin{cases} \textit{splývají, případ A. } \textbf{\textit{rovnoběžné}} \\ \textit{nesplývají}\begin{cases} \textit{mají společný bod, případ B. } \textbf{\textit{různoběžné}} \\ \textit{nemají společný bod}\begin{cases} \textit{leží v jedné rovině, C. } \textbf{\textit{rovnoběžné}} \\ \textit{neleží v jedné rovině, D. } \textbf{\textit{mimoběžné}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ze schematu je nyní zřejmé, že žádný další případ kromě případů A. – D. vzájemné polohy dvou přímek již nastat nemůže. Tím je věta dokázána. □

Další věty o vzájemné poloze přímek a rovin uvádíme bez důkazů. Při jejich důkazech bychom postupovali obdobně jako v důkazy věty 1.9.

Věta 0.3 ***(O vzájemné poloze přímky a roviny)***
Přímka a rovina mají právě jednu z těchto tří vzájemných poloh:

A. *přímka leží v rovině,*

B. *přímka má s rovinou jeden společný bod,*

C. *přímky nemá s rovinou žádný společný bod.*

V případě B. říkáme, že přímka je různoběžná s rovinou, resp. že rovina je různoběžná s přímkou, resp. že přímka a rovina jsou různoběžné. V případě C. říkáme, že přímka a rovina jsou rovnoběžné, resp. že přímka je rovnoběžná s rovinou, resp. že rovina je rovnoběžná s přímkou. Také v případě A. říkáme, že přímka a rovina jsou rovnoběžné.

Věta 0.4 ***(O vzájemné poloze dvou rovin)***
Dvě roviny mají právě jednu z těchto tří vzájemných poloh:

A. *obě roviny splývají,*

B. *roviny mají společnou právě jednu přímku,*

C. *roviny nemají společný žádný bod.*

Dvě roviny v případech A. a C. nazýváme *rovnoběžné*, v případě B. *různoběžné*. Společná přímka v případě B. se nazývá *průsečnice* rovin.

Věta 0.5 ***(O vzájemné poloze tří různých rovin)***
Tři různé roviny mají právě jednu z následjících pěti možných vzájemných poloh:

A. *každé dvě roviny z daných rovin jsou rovnoběžné,*

B. *dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích,*

---

[6]Pro úplnost ještě poznamenejme, že dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod. Pokud by totiž měly víc než jeden společný bod, splynuly by.

C. všechny tři roviny procházejí jednou přímkou,

D. každé dvě roviny se protínají, každé dvě průsečnice jsou různé rovnoběžky,

E. všechny tři roviny mají společný jediný bod.

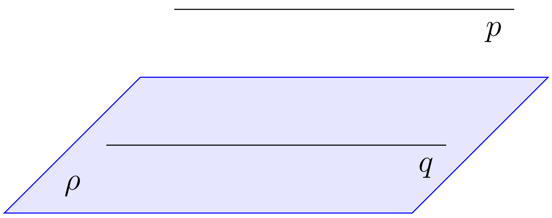
Pro stručné vyjadřování zavedeme následující názvy: v případě C. budeme hovořit o *svazku rovin*, v případě B. o *dvojsvazku rovin*, v případě D. o *trojsvazku* a v případě E. o *trsu rovin.*

■ **0.1** Jako cvičení si vzájemné polohy tří rovin uvedené ve větě 1.12 načrtněte a vymodelujte.

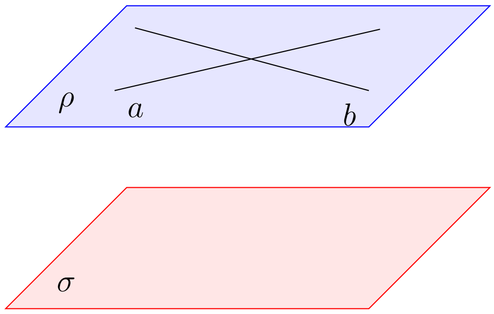
Věta 0.6 ***(Kritétium rovnoběžnosti přímky a roviny)***
Je-li přímka p rovnoběžná alespoň s jednou přímkou roviny ρ, je přímka p s rovinou ρ rovnoběžná.

Užijeme-li stejné označení jako v obr. 1.22, můžeme větu 1.13 zapsat symbolicky takto:

$$(p \parallel q \wedge q \subset \rho) \Rightarrow p \parallel \rho \ .$$



Obr. 5



Obr. 6

Věta 0.7 ***(Kritétium rovnoběžnosti dvou rovin)***
Obsahuje-li rovina ρ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou σ, je rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ.

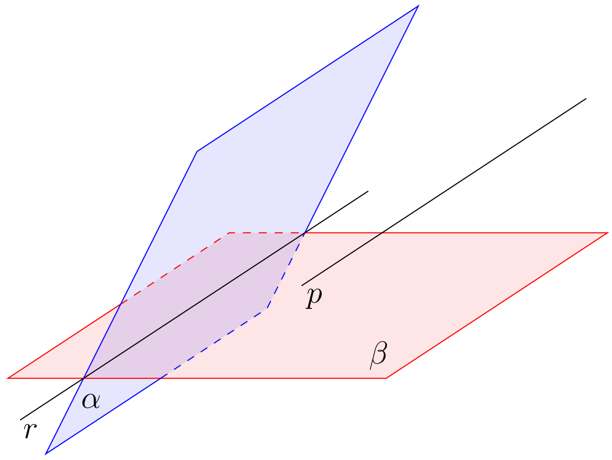
Užijeme-li stejné označení jako v obr. 1.23, můžeme větu 1.14 zapsat symbolicky takto:

$$(a \nparallel b \wedge a \subset \rho \wedge b \subset \rho \wedge a \parallel \sigma \wedge b \parallel \sigma) \Rightarrow \rho \parallel \sigma \ .$$

Věta 0.8 *Přímka p je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami právě tehdy, když je rovnoběžná s jejich průsečnicí.*

Také v tomto případě je možné užitím stejného označení jako v obr. 1.24 větu 1.15 zapsat symbolicky takto:

$$(\alpha \nparallel \beta \wedge p \parallel \alpha \wedge p \parallel \beta) \Leftrightarrow (\alpha \cap \beta = r \wedge p \parallel r) \ .$$



Obr. 7

Cvičení:

■ **0.2** Ověřte, že relace „přímka x je rovnoběžná s přímkou y“ v množině všech přímek prostoru je ekvivalence. Jak nazýváme třídy rozkladu příslušné této ekvivalenci?

■ **0.3** Jsou dány čtyři navzájem různé přímky a, b, c, d téže roviny takové, že $a \parallel b$, $c \parallel d$. Jaký útvar může být průnikem rovinných pásů s hraničními přímkami a, b, resp. c, d.

■ **0.4** Zvolte bod X uvnitř strany AB a bod Y uvnitř strany BC trojúhelníku ABS. Úsečky AY, CX mají společný bod. Zdůvodněte.

Literatura

[1] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[3] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[4] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[5] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[6] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[7] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[8] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady* Dějiny matematiky, svazek 20. Prometheus, Praha, 2001.