PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Co je úkolem učitelů geometrie na základních školách?

Jak stará geometrie je a co do ní patří?

Co je úkolem učitelů na základních školách?

- Vytvořit u žáků kvalitní základy geometrických znalostí
- Podněcovat abstraktní geometrické myšlení žáků takovým způsobem, aby žáci byli schopni je sami nadále rozvíjet v oblastech, které si sami zvolí
- Tento předmět je koncipován tak, aby si budoucí učitelé vytvořili nadhled a sledovali propojení geometrie s dalšími oblastmi matematiky a ostatních disciplín

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Jak stará geometrie je a co do ní patří?

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Co je geometrie a co do ní patří?

- Vše, co dokumentuje pochopení a využití tvarů
- Všude kolem nás je přítomen jistý prvek geometrické abstrakce
- Geometrická abstrakce se promítá do všech dalších matematických i nematematických disciplín
- Geometrické myšlení je příznačné po tisíce let

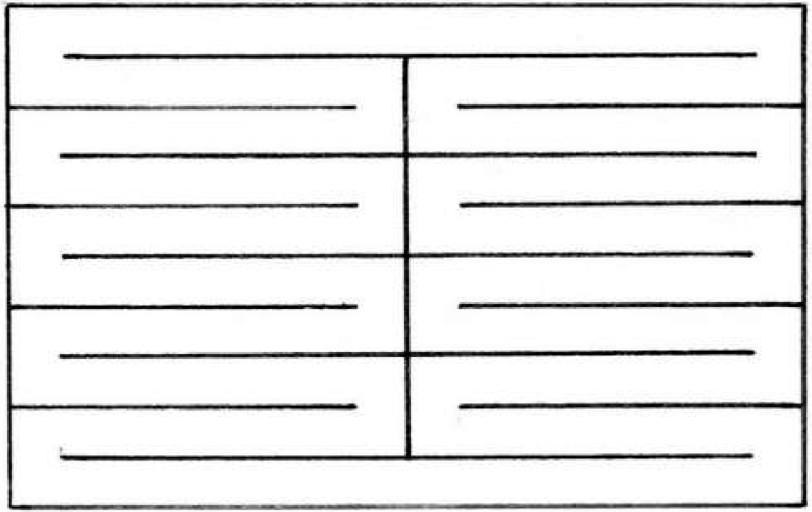
Geometrie 1

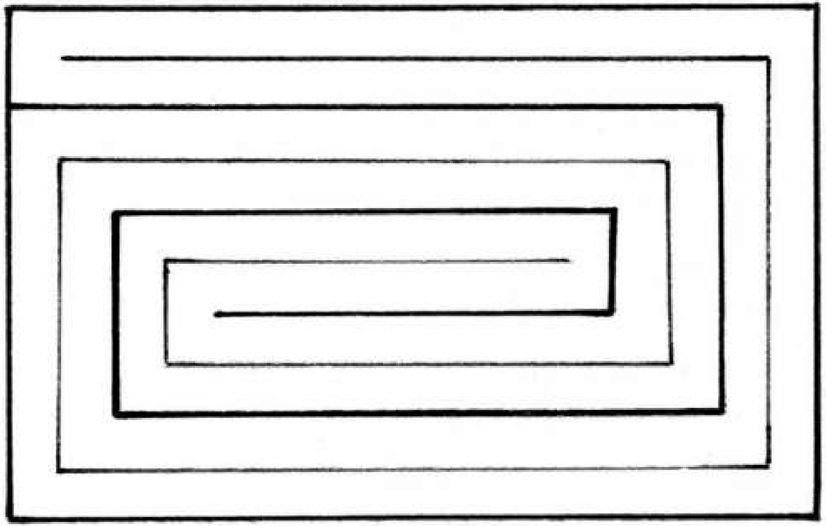
- Opakování a upřesnění geometrických pojmů, se kterými jsme se setkali na ZŠ a SŠ
- Přiblížení podstaty axiomatické výstavby geometrie, především vytváření nových pojmů pomocí pojmů dříve zavedených
- Naznačeny otázky, které souvisí s axiomatickou výstavbou geometrie

Motivační úloha

Úloha 1 : Ve staré Babylónii potřebovala moudrá královna získat pozemek od loupeživého kupce. Navrhla množství zlata, které mu dá za pozemek ohraničený kůží z jeho největšího vola, do které udělá otvor. Kupec se usmíval pod vousy, neboť si představil **plochu o obsahu** kůže z jeho vola a hromada zlata přišla mu dvojnásobná za libovolně velký pozemek vymezený kůží. Když ho ale královna přivedla k pozemku, zblednul. Jakým způsobem moudrá královna udělala otvor v kůži a **obvod pozemku** vytyčila?

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita





Analogické zadání: Prolezu otvorem v pohlednici?

Motivační úlohy

Úloha 2 :

V království měli dva různě velké čtverce vzácné zlaté látky. Potřebovali udělat nový královský trůn, kterým bude tato látka pokrytá. Jak velký nový čtverec mohou udělat z těchto dvou čtverců, aby látka nezbyla?

Uvažujte např. čtverce o stranách 30cm a 40cm.

A jakým způsobem má švadlena látku rozstříhat?

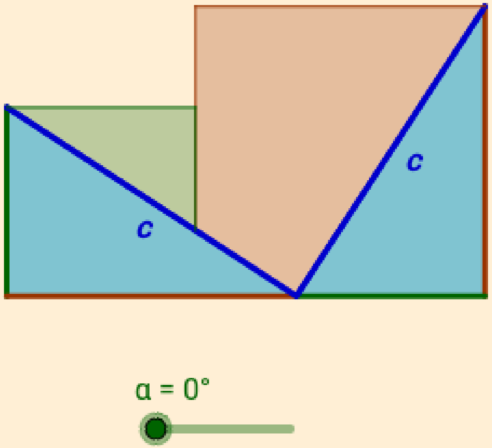
Vezměme čtverec o straně ***a***

a k němu přidejme čtverec o straně ***b***

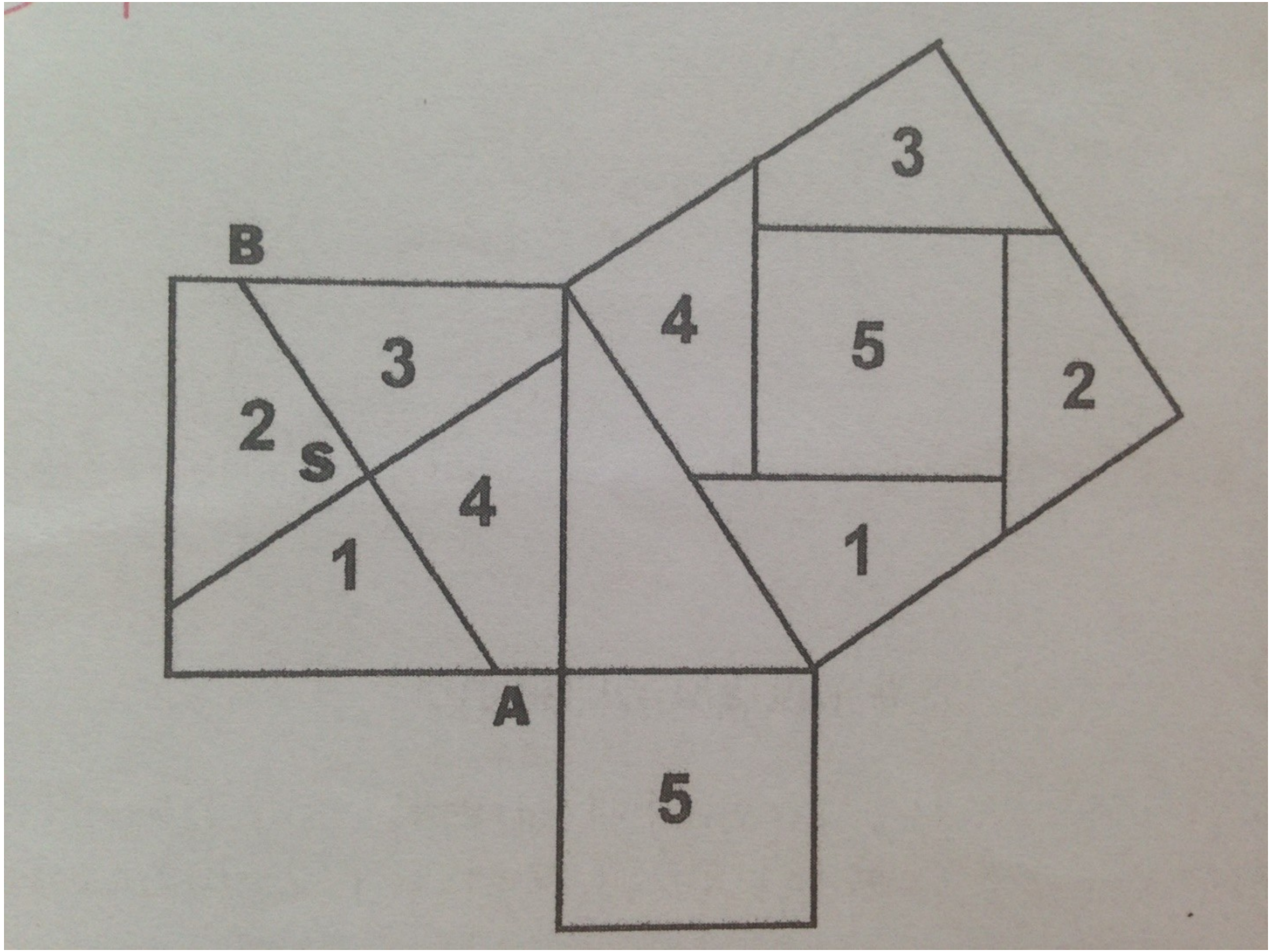
Vznikne útvar o ploše $a^2 + b^2$

Nejdelší stranu útvaru rozdělíme
na dva úseky o délkách ***a*** a ***b***
a doplníme dvě úsečky tak, že vzniknou
dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s přeponou ***c***
Nyní tyto trojúhelníky odstřihneme a přemístíme
je tak, že vznikne čtverec o straně c. (použij jezdec)
Protože jsme jen přeskupili některé části původního útvaru,
změnil se sice tvar, ale obsah zůstal zachován!

$$a^2 + b^2 = c^2$$



PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita



Různé metody zkoumání geometrie

Úvodem si uvědomíme, že geometrie je dnes rozsáhlý vědní obor. Geometrické objekty a prostory, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy můžeme zkoumat různými metodami.

- Syntetická geometrie - **axiomatický přístup**
- Analytická geometrie
- Diferenciální geometrie
- Kleinova (transformační) geometrie

V rámci syntetické geometrie se objevuje **axiomatický přístup ke geometrii**. Axiomatický přístup znamená budovat nějakou teorii z co nejmenšího počtu jednoduchých pravidel (axiomů).

Náznaky se objevily už u Eukleida z Alexandrie, který formuloval slavných 5 postulátů.

V moderním pojetí jsou ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii Hilbertovy axiómy.

Axiomatická výstavba geometrie

Počátky geometrie jako vědecké disciplíny ve 3. stol. př. n. l.

- Řecký matematik **Eukleides** shrnul ve své knize **ZÁKLADY** dosavadní znalosti prostorových a rovinných útvarů, utřídil je a vyslovil **5 postulátů** = axiomů, které shrnovaly vztahy (relace) mezi třemi základními geometrickými objekty = **BOD, PŘÍMKA, ROVINA**

Axiomatická výstavba geometrie

- **AXIOM** = základní věta, jejíž správnost nedokazujeme, ale uznáváme za správnou na základě dosavadních zkušeností; vystupují v ní základní pojmy **bod, přímka, rovina**, které nejsou definovány. Pomocí těchto pojmů pak definujeme pojmy další a z axiomů pak deduktivně odvozujeme další platná tvrzení (věty)

$\longrightarrow$ AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA GEOMETRIE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA Masarykova univerzita

EUKLEIDOVY ZÁKLADY

- Obsahují 13 knih
- Eukleides poznatky utřídil a podal jejich deduktivní důkazy
- První snaha o deduktivní odvozování geometrických poznatků (znalosti z geometrie měli lidé už mnohem dříve)

EUKLEIDOVY ZÁKLADY

- **Eukleides** si uvědomil, že není možné podat důkazy všech tvrzení, ale je třeba některé tvrzení považovat za pravdivé. Z těch pak vycházel a deduktivně odvozoval další poznatky (matematické věty). Jako první k tomu použil 5 postulátů.

- **Dedukce** = logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného k jednotlivému (úsudek)

PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita

EUKLEIDOVY POSTULÁTY

1. **Dvěma body lze vést jedinou přímku.**
2. **Úsečku je možno neomezeně prodloužit.**
3. **Z libovolného středu je možno libovolným poloměrem opsat kružnici**
4. **Všechny pravé úhly jsou shodné**
5. **Dvě přímky v jedné rovině, které protínají další přímku této roviny, se vždy protínají na té straně od této přímky, kde je součet přilehlých vnitřních úhlů menší než úhel přímý (180°)**

EUKLEIDOVY POSTULÁTY

- **5. Eukleidův** postulát je ekvivalentní s tvrzením =

AXIOM ROVNOBĚŽNOSTI:

„Nechť *p* je přímka a *A* bod, který na ní neleží. V rovině určené přímkou *p* a bodem *A* existuje právě jedna přímka procházející bodem *A*, která nemá s přímkou *p* žádný společný bod.“

5. POSTULÁT EUKLEIDA

- Po Eukleidovi se řada matematiků snažila dokázat 5. postulát pomocí čtyř předchozích. Snahy o důkaz 5. postulátu trvaly více než 2000 let.
- Otázka o jeho závislosti/nezávislosti na přechozích čtyřech byla vyřešena až v 19. století matematikem **Lobačevskim** a nezávisle na něm matematikem **J. Bolyaiem** a **K. F. Gaussem**.

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- Geometrii, kterou vybudoval Eukleides a která mezi axiomy přijala 5. postulát (=axiom rovnoběžnosti), nazýváme **eukleidovská geometrie** (žáci na ZŠ a SŠ)
- Geometrii, která přijala negaci 5. postulátu nazýváme tzv. **neeukleidovská geometrie**

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

ZÁKLADNÍ VÝZNAM AXIOMATICKÉ VÝSTAVBY TEORIE

- Cesta, jak budovat axiomaticky ostatní matematické disciplíny
- Vyjasnění požadavků, co musí axiomatický systém splňovat:

    - nezávislost axiomů (viz výše)

    - úplnost

    - bezespornost (nelze odvodit větu V a zároveň její negaci V´)

INOVACE GEOMETRIE

- Objevy neeukleidovských geometrií neoslabily význam geometrie eukleidovské
- Potřeba **precizovat Eukleidovy poznatky** a závěry v průběhu 18. – 19. století.
- **David Hilbert** – vytvořil ve svém díle **Základy geometrie** (1899) systém axiomů, ze kterého je možno deduktivně budovat **eukleidovskou geometrii**
- Hilbertův axiomatický systém používáme dodnes

HILBERTOVY AXIOMY

- 5 skupin axiomů:

1. Axiomy incidence (I)
2. Axiomy uspořádání (U)
3. Axiomy shodnosti (S)
4. Axiomy spojitosti (D)
5. Axiom rovnoběžnosti (R)

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

GEOMETRIE

- Eukleidovská – budovaná na základě axiomů 1 – 5
- Absolutní – budovaná na základě axiomů 1 – 4
- Lobačevského – budovaná na základě axiomů 1 – 4 a negace 5. axiomu – odporuje vžitým představám

Literatura:

- L. Lvovská, M. Francová: **Texty k základům ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE pro studium učitelství 1. stupně základní školy.** Brno: MU, 2014

PEDAGOGICKÁ FAKULTA Masarykova univerzita

Poznámky:

- **René Descartes** (1596 -- 1650), Descartův spis **La Géométrie**, který byl vydán roku 1637 jako jeden z dodatků k jeho filozofickému dílu *Discours de la méthode (Rozprava o metodě),* bývá často považován za počátek analytické geometrie jako vědy. Podrobněji viz literatura.
- **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777 -- 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik. Zabýval se zejména geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění. Mezi jeho stěžejní díla patří spis Disquisitiones Arithmeticae, který napsal již ve věku 21 let (1798; publikováno bylo ale až v roce 1801). Tato práce položila základy teorie čísel jakožto matematické disciplíny.
- **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 -- 1866) byl německý matematik, který výrazně přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Na jeho myšlenkách byly dále rozvinuty například Riemannova geometrie, algebraická geometrie či teorie komplexních ploch. Tyto oblasti matematiky se staly základem topologie. V reálné analýze přispěl definicí Riemannova integrálu a rozvinul také teorii trigonometrických řad.