/185/. **příklad.** Užitím součtu S vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n.(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$

$a_n = \ln \frac{n.(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln n + \ln(2n+1) - \ln(n+1) - \ln(2n-1)$

Pro $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ vytvoříme členy řady $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots$

Po sečtení obdržíme s_n vyjádřené algebraickým součtem o malém počtu členů. Vypočteme $\lim s_n = S$.

$$
\left.\begin{array}{lllllll}
n=1 & a_1 = 0 & + \cancel{\ln 3} & - \cancel{\ln 2} & - 0 \\
n=2 & a_2 = \cancel{\ln 2} & + \cancel{\ln 5} & - \cancel{\ln 3} & - \cancel{\ln 3} \\
n=3 & a_3 = \cancel{\ln 3} & + \cancel{\ln 7} & - \cancel{\ln 4} & - \cancel{\ln 5} \\
n=4 & a_4 = \cancel{\ln 4} & + \cancel{\ln 9} & - \cancel{\ln 5} & - \cancel{\ln 7} \\
n=5 & a_5 = \cancel{\ln 5} & + \underbrace{\ln 11} & \underbrace{- \ln 6} & - \cancel{\ln 9} \\
 & \vdots & & & \\
 & a_{n-1} = \ln(\cancel{n-1}) & + \ln(\cancel{2n-1}) & - \cancel{\ln n} & - \ln(\cancel{2n-3}) \\
 & a_n = \cancel{\ln n} & + \underbrace{\ln(2n+1)} & \underbrace{- \ln(n+1)} & - \ln(\cancel{2n-1})
\end{array}\right\} +
$$

$$s_n = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\lim s_n = \lim \left(\ln \frac{2n+1}{n+1} \right) = \ln \left(\lim \frac{2n+1}{n+1} \right) = \ln 2 = S$$

Daná řada je konvergentní.

242. **cvičení.** Užitím součtu S vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2.\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, (odstraňte odmocniny z jmenovatele)

[$S = 1 - \sqrt{2}$; konverg.] [$S = \lim \sqrt{n} = +\infty$, řada diverg.]

Součet některých nekonečných řad, jejichž n-tý člen lze rozložit na parciální zlomky.

Často jsou to řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$, k je celé, kladné číslo

/186/. **příklad.** Vypočítati součet S nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

$a_n = \frac{1}{n.(n+2)} = \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ čili

$2a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$;

$$
\left.\begin{array}{ll}
n=1 & 2a_1 = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} \\
n=2 & 2a_2 = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} \\
n=3 & 2a_3 = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} \\
n=4 & 2a_4 = \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} \\
n=5 & 2a_5 = \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} \\
\vdots & \vdots \\
 & 2a_{n-2} = \cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n}} \\
 & 2a_{n-1} = \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1} \\
 & 2a_n = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}
\end{array}\right\} + \Longrightarrow 2.s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\lim s_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} . (0 + 0)$$

$$S = \frac{3}{4}$$

Daná řada je konvergentní.

V obecném případě : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$

243. __cvičení.__ Užitím součtu S vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$, [$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = \lim s_n = 1$; řada je konverg.]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+3)}$, [$s_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{11}{18}$; konverg.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).(n+4)}$, [$n_s = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)$, $S = \frac{13}{36}$; konv.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, [$s_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$, $S = \frac{23}{90}$; konv.]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, [$s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$, $S = \frac{1}{3}$; konvergentní]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, [$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$, $S = \frac{1}{2}$; konvergentní]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$, [$s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$, $S = \frac{1}{4}$; konvergentní]

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, [$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$; konvergentní]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, [$s_n = \frac{1}{8}\left\{ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}$, $S = \frac{1}{8}$; konvergentní]

__P o d m í n k y   k o n v e r g e n c e   nekonečných řad.__

Má-li řada konvergovat, musí $\lim a_n = 0$ (podmínka n u t n á). To znamená, že je-li $\lim a_n = 0$, lze říci, že řada __může__ konvergovat. Je-li $\lim a_n \neq 0$, řada diverguje.

Pro další úvahy je důležitá tzv. __h a r m o n i c k á   ř a d a.__

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots ,}$$

u níž $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak o řadě se dokazuje, že je __divergentní.__

Existuje i __podmínka nutná a postačující__ ke konvergenci nekonečné řady(Bolzano-Cauchyův konvergenční princip), které se užívá k odvození konvergenčních vět (kriterií) a kterou lze někdy vyšetřit konvergenci nekonečné řady, když selhávají jednodušší prostředky.

II. __KRITERIA KONVERGENCE NEKONEČNÝCH ŘAD.__ (Podmínky p o s t a č u j í c í)

Užijeme několika základních kriterií pro konvergenci nekonečných řad s __k l a d n ý m i   č l e n y.__

1. __K r i t e r i u m   s r o v n á v a c í.__

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s k l a d n ý m i č l e n y a nechť od určitého indexu počínaje jest $a_n \leq b_n$. (Řada $\sum b_n$ je __majorantou__ k řadě $\sum a_n$, řada $\sum a_n$ je __minorantou__ k řadě $\sum b_n$.) Pak platí:

a) Je-li řada $\sum b_n$ <u>konvergentní</u>, je také řada $\sum a_n$ <u>konvergentní</u>.

(Konverguje-li řada s většími členy, konverguje i řada s menšími členy.)

b) Je-li řada $\sum a_n$ <u>divergentní</u>, je také řada $\sum b_n$ <u>divergentní</u>.

(Diverguje-li řada s menšími členy, diverguje i řada s většími členy.)

<u>Poznámka:</u> K zjištění konvergence nebo divergence řady tímto kriteriem, musíme užít pomocné řady, o níž víme, že je konvergentní nebo divergentní.

/187/.<u>příklad</u>. Vyšetřiti konvergenci nebo divergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots, \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

Vyšetřujme konvergenci :

Pomocná konvergentní řada :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots, b_n = \frac{1}{(n-1)n}$$

Ukážeme, že platí $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)n}$ čili, že zvolená řada je majorantou .

Platí pro každé n : $n^2 > (n-1).n$

a tedy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$ pro $n \geqq 2$ (jak bylo dokázati)

Daná řada (s menšími členy) je konvergentní.

Konvergují také řady: $\sum \frac{1}{(n+k)^2}$, kde <u>k</u> je celé číslo.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{pro } p \geqq 2$$

Je-li $p>2$, jest $n^p>n^2$ a tedy $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$

Poněvadž řada $\sum \frac{1}{n^2}$ (s většími členy) je konvergentní, konverguje

i řada $\sum \frac{1}{n^p}$ (s menšími členy) pro $p > 2$.

Konvergentní jsou také řady $\sum \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \geqq 2$, <u>k</u> celé číslo.

N ě k t e r é ř a d y pro srovnávání řad :

$Ř_1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1}$, geometrická řada o $|q|<1$ (konverg.), $|q| \geqq 1$ (diverg.)

$Ř_2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + .$ (konverg.)

$Ř_3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$, $p > 1$, (konverg.), $p \leqq 1$, (diverg.)

a pro p=1 (řada harmonická):

$Ř_4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots,$ (diverg.)

Týž konvergenční charakter mají i řady, jež vzniknou, když do n-tého členu za <u>n</u> dosadíme (n+k), kde <u>k</u> je celé číslo.

Vyšetření konvergence nek.řady srovnáním s geometrickou řadou.

/188/. příklad. Dokázati konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n.2^n} + \ldots\ldots\ldots$

Pro $n > 1$ platí : $2^n < n.2^n$ čili $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n.2^n}$

Geom.konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$, která je tedy také konvergentní.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n} = \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots + \sin\frac{1}{2^n} + \ldots\ldots$

Ze vztahu $\alpha > \sin\alpha$, $\alpha > 0$, plyne $\frac{1}{2^n} > \sin\frac{1}{2^n}$

Geom.konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}$, které je také konvergentní.

244.cvičení. Dokázati konvergenci řad : a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^{n-1}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2}{3^n}$

Vyšetření konvergence řady srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$, příp. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1).n}$. Viz příklad čís./186 /.

245.cvičení. Dokázati konvergenci řady : a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$, d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$.

Vyšetření konvergence řady srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, případně $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$, příp. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$.

/189/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$

Pro každé n platí : $\frac{n^2}{n^4+3} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

Konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$, která je tedy také konvergentní.

/190/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$

Platí: $n^2-4n+5 > (n-2)^2$ a tedy $\frac{1}{n^2-4n+5} < \frac{1}{(n-2)^2}$, $n > 2$

Konvergentní řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$, která je tedy také konvergentní.

246. <u>cvičení</u>. Dokažte konvergenci řad :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$, [majorantní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$] ,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$, [majorantní řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, [majorantní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$]

<u>Vyšetření divergence srovnáním s harmonickou řadou</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, případně $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, příp. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$.

/191/. <u>příklad.</u> Dokažte divergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\log(n+1)} + \ldots\ldots\ldots$

Pro každé n platí : $n + 1 > \log(n+1)$ a tedy $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\log(n+1)}$

Divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je minorantou k dané řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

která je tedy také divergentní.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{2.4}} + \frac{1}{\sqrt{3.5}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \ldots\ldots\ldots$

Platí: $(n+2)(n+2) > n(n+2)$, $\sqrt{(n+2)(n+2)} > \sqrt{n(n+2)}$, $n+2 > \sqrt{n(n+2)}$

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

Divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ je minorantou k dané řadě, která je také divergent.

247. <u>cvičení.</u> Dokažte divergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$, [$n > \log n > \sqrt[n]{\log n}$]

2. <u>K r i t e r i u m   p o d í l o v é   (d'A l e m b e r t o v o)</u>.

Vyslovíme přímo tzv. **<u>l i m i t n í</u>** **<u>podílové kriterium</u>** :

Nechť $\sum a_n$ je řada s k l a d n ý m i členy. Existuje-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$,

pak daná řada k o n v e r g u j e , je-li $L < 1$,

d i v e r g u j e , je-li $L > 1$,

Je-li $L = 1$, nelze tímto kriteriem o konvergenci řady rozhodnout .

/192/.**příklad**. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots\dots\dots + \frac{n}{2^n} + \dots\dots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 < 1$$

Daná řada je konvergentní.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^p} + \dots\dots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1^p = 1$$

O konvergenci dané řady nelze tímto kriteriem rozhodnout.

Podílové kriterium selhává u dalších základních nekonečných řad :

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum \frac{1}{n^2}$$ a jiných .

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!} + \dots\dots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{n!}{(n+1).n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Daná řada je konvergentní.

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots\dots\dots + \frac{a^n}{n} + \dots,$$ kde a je konstanta, $a > 0$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim \frac{n.a}{n+1} = a.\lim \frac{n}{n+1} = a.1 = a$$

Daná řada konverguje pro $a < 1$, diverguje pro $a > 1$,

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} n.\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} + 2.\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} + 3.\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{16} + \dots + n.\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots\dots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1).\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{2.\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{2^{n+2}}}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0}{1} \cdot 1$$

$L = \frac{1}{2}$. Daná řada je konvergentní. [Při úpravě užito : $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2.\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}$]

248.**cvičení.** Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$, [konverg.] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, [konverg.], c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, [konverg.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$, [diverg.] e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$, [divergentní]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n.3^n}}$, [konverg.]

V příkladech dalšího cvičení užijte při úpravě vztahu : $k! = k.(k-1)!$

Například : $(n+1)! = (n+1).\,n!$

$(2n+2)! = (2n+2).(2n+1)! = 2.(n+1).(2n+1).(2n)!$

249. cvičení. Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$, [konverg.], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, [konverg. pro každé a .]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$, [konverg.], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$, [divergentní],

e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$, [konverg.], f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$, [konvergentní],

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, [konverg.] h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n.2n!}{(2n)!}$, [konvergentní],

250. cvičení. Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, [konverguje], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, [diverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$, [konverguje], d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2.\sin \frac{\pi}{2^n}$, [konverguje]

3. Kriterium odmocninové (Cauchyovo).

Opět vyslovíme přímo tzv. limitní odmocninové kriterium :

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Existuje-li $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$,

pak daná řada konverguje, je-li $L < 1$,

diverguje, je-li $L > 1$.

Je-li $L = 1$, nelze tímto kriteriem o konvergenci řady rozhodnout.

Odmocninového kriteria užíváme, když člen a_n je n-tou mocninou výrazu závislého na n nebo takovou mocninu obsahuje jako činitele.

/193/. příklad. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n^n} + \dots\dots\dots$$

$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{n} = 0.$ Daná řada je konvergentní.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\operatorname{arctg}^n n} = \frac{a}{\operatorname{arctg} 1} + \frac{a^2}{\operatorname{arctg}^2 2} + \dots\dots\dots + \frac{a^n}{\operatorname{arctg}^n n} + \dots\dots\dots$$

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a}{\operatorname{arctg} n} = a.\lim \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = a \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}}$$

Je-li $a < \frac{\pi}{2}$, daná řada konverguje, je-li $a > \frac{\pi}{2}$, daná řada diverguje .

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)} = \frac{3}{2.3} + \frac{3^2}{2^2.5} + \frac{3^3}{2^3.7} + \dots\dots\dots + \frac{3^n}{2^n(2n+1)} + \dots\dots\dots$$

Člen a_n není v tomto případě n-tou mocninou výrazu závislého na n, ale obsahuje takovou mocninu jako činitele. Zapíšeme jej takto :

$$\frac{3^n}{2^n(2n+1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \lim (2n+1)^{-\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \cdot M$$

$M = \lim (2n+1)^{-\frac{1}{n}}$ Vypočteme jako limitu funkce :

$$\ln M = \lim \left\{ -\frac{1}{x} \cdot \ln(2x+1) \right\} = -\lim \frac{\ln(2x+1)}{x} = -\lim \frac{\frac{2}{2x+1}}{1} = -0 = 0$$

$M = 1$; $L = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Daná řada diverguje.

251.__cvičení.__ Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$, [konverg.], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$, [konvergentní]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot a^n$, [divergentní], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n (n+1)}$, [konvergentní]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$, [konverg.] f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, [konverg.]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$, [konverg.], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, [$L = \frac{1}{e}$, konverg.]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{2}{n}$, [diverg.] m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$, [konvergentní]

Užijte tohoto kriteria k vyšetření konvergence v příkladech cvičení 248^{abc}.

4. __K r i t e r i u m i n t e g r á l n í (Cauchy - Maclaurinovo).__

Nechť $\sum a_n$ je řada s k l a d n ý m i členy $a_n = f(n)$, přičemž funkce $f(x) \geq 0$ je spojitá a nerostoucí pro $x > \alpha \geq 0$. Pak řada $\sum f(n)$ má týž konvergenční charakter jako nevlastní integrál

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Při užití se zřejmě předpokládá, že výpočet integrálu $\int f(x)\, dx$ nebude činit zvláštních potíží.

/194/.__příklad.__ Integrálním kriteriem vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n.(n+1)} + \ldots\ldots$

Funkce $\frac{1}{x.(x+1)}$ je spojitá a nerostoucí pro $x > 1$. Určujeme proto konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x.(x+1)} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \Big| \ln x - \ln(x+1) \Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} \Big| \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^t =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left\{ \ln \frac{t}{t+1} - \ln \frac{1}{2} \right\} = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

Vyšetřovaný nevlastní integrál konverguje a tedy konverguje i daná řada. Konvergence dané řady byla vyšetřována užitím součtu S. Viz cvič. 243^a.

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \dots$$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ je spojitá a nerostoucí pro $x > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\int_1^{\infty} z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to\infty}\int_1^t z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to\infty}\Big|2.\sqrt{z}\Big|_1^t =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t}-1) = +\infty$$

Nevlastní integrál diverguje, proto diverguje i daná řada.

252. **cvičení.** Integrálním kriteriem rozhodněte o konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, [konvergentní], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, [konvergentní]

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, [konvergentní], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$, [divergentní]

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2-1}$, [konvergentní], f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$, [konvergentní]

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$, [divergentní], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\sqrt{n}}$, [konvergentní]

k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln^3 n}$, [konvergentní], m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\ln^2(n+1)}$, [konvergen.]

V následujícím cvičení volte vhodné kriterium k vyšetření konvergence řady.

253. **cvičení.** Vyšetřiti konvergenci dané řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, [konvergentní], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$, [divergentní]

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln^3 n}$, [konvergentní] d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$, [konvergentní]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n.n!}$, [konvergentní], f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$, [konvergentní]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$, [konvergentní], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$, [divergentní]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$, [divergentní] m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\ln(n+1)}$, [divergentní]

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$, [konverg.] o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$, [konvergentní]

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, [divergentní], q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n.3^n}}$, [konvergentní]

Řady s kladnými i zápornými členy.

Číselná řada může obsahovat záporné členy. Jsou-li její členy s t ř í d a v ě kladné a záporné, nazývá se řada a l t e r n u j í c í.

Má-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n + \dots$$

některé členy záporné, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots\dots + |a_n| + \dots$$

má všechny členy kladné. Platí :

Jestliže konverguje řada s absolutními hodnotami, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada bez absolutních hodnot, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V takovém případě o řadě $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots$ pravíme, že k o n v e r g u j e a b s o l u t n ě.

/195/. příklad. Vyšetřiti konvergaci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n^2} + \dots$

Daná řada konverguje, a to absolutně, poněvadž konverguje příslušná řada z absolutních hodnot, tj. řada

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} + \dots\dots$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n} = \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + \dots\dots + \frac{\cos n\alpha}{2^n} + \dots\dots$, kde α je libovolné číslo.

Vyšetřujeme konvergenci řady z absolutních hodnot, tj. řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$:

Platí $|\cos n\alpha| \leqq 1$ a tedy také $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \leqq \frac{1}{2^n}$

Konvergentní geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$, která je tedy také konvergentní.

Daná řada konverguje absolutně.

Alternující řada může někdy konvergovat, i když příslušná řada z absolutních hodnot diverguje. Pak pravíme, že taková řada konverguje r e l a t i v n ě (neabsolutně) Viz následující příklad.

Pro konvergenci alternující řady se užívá tzv. kriteria L e i b n i z o v a:

Alternující řada $\sum a_n$ konverguje, je-li splněno :

1) od určitého indexu pro každé n platí $|a_{n+1}| \leqq |a_n|$

2) $\lim |a_n| = 0$