

MA2 cvičení – pokud mohu předjímat, že tyto věci se budou probírat (pokud ne, tak na to upozorním); materiály:

a) Dula, Hájek: Mat. analýza cvičení – nekonečné řady ... zákl. mat.

b) Došlá Novák: Nekonečné řady – spíše pro přednášku

c) strojarna01-06 ... přednáška i cvičení, hutné, ale dobré ... pozor, v souboru 03 v př. 2.8 je chyba – obr. 2.1 má mít grafy vzhledem k zadání posunuté o jednu jednotku nahoru – jinak vynikající materiál)

Otázky musíte znát – některé i do cvičení, protože Vám pomohou s řadami pracovat.

Otázka 1: Definice nekonečné číselné řady; definice součtu nekonečné číselné řady; řada konvergentní, divergentní, oscilující

Otázka 2: Odvodte vzorec pro výpočet součtu geometrické řady)

Otázka 3: Co říká nutná podmínka konvergence pro číselné řady? Respektive její logická obměna?

Otázka 4: Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy: a) srovnávací, b) limitní podílové, c) limitní odmocninové, d) integrální

Poznámky ke cvičení 1 (odkazy do zákl. mat. Dula, Hájek): SC = soubor cvičení

SC 01-a,b,g,h,i ... příklady na geometrickou řadu: a),b),g) ... součet pomocí geometrické řady; h),i) ... převod desetinného čísla na zlomek

SC 02-a,f,g ... kejkle s částečným součtem, všechny tři doporučené příklady se řeší analogicky jako př.4 ve cvičení na str.10 (Dula, Hájek: MA cvičení nekonečné řady) - řešený příklad (násobením a odčítáním násobku rovnic pro částečný součet převádíme na geometrickou řadu)

SC 03-a,b,c ... rozklad na parciální zlomky, pak v částečném součtu se některé zlomky odečtou a dostaneme výraz, jehož limitu dokážeme spočítat, analogický řešenému příkladu 6/str. 11

Poznámky ke cvičení 2:

SC 04-a,b,c,d,e,f, 05-a,b, 06-f,j ... užití kritérií pro důkaz, zda řada konverguje nebo ne; prosím přidejte jim nějaký příklad řady, která nespĺňuje nutnou podmínku konvergence,

např. Došlá-Novák, str.11(pdf-strana 16), příklad 1.3

závěrem těchto tří SC by měli zhruba vědět, jaké kritérium použít podle tvaru členu a_n , popřípadě nezapomenout na obměnu nutné podmínky konvergence (limita z n -tého členu je nenulová ... z toho plyne, že řada konvergovat nemůže)

Otázka 5: schopnost rozvinout řadu ze vzorce do prvních pěti členů VERSUS schopnost rozvinutou řadu zapsat vzorcem pro n -tý člen (příklady na procvičení: z SC 10, který je opakovací, zkuste zapsat vzorec pro n -tý člen u příkladů a,d,e.

Otázka 6: Pro která p konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$? Příklad provedený pomocí integrálního kritéria, řešení viz přednáška nebo sada strojarna02 (IS), příklad 1.10.

Otázka 7: Leibnizovo kritérium konvergence pro alternující řady + příklad (Leibnizova řada)

Otázka 8: Grandiho řada - příklad různých součtů při různém uzávorkování + **Věta:** kdy lze dvojice sousedních členů uzávorkovat, aniž je ovlivněn výsledek součtu řady?

Otázka 9: Definice absolutní a neabsolutní konvergence číselné řady.

- K čemu je absolutní konvergence dobrá? [odpověď: lze užít kritéria pro řady s kladnými členy bez ohledu na znaménko]
- Uveďte příklad řady, která konverguje neabsolutně

Otázka 10: komutativní zákon pro řady:

- Pro které řady může nastat: přeházením pořadí členů lze získat různé součty?
- Kdy lze přehazovat pořadí členů řady „beztrestně“, tj. dostáváme stále stejný součet?

Otázka 11: kritéria pro odhad zbytku řady: a) odhad zbytku podle srovnávacího kritéria, b) podle integrálního kritéria, c) podle Leibnizova kritéria

Poznámky ke cvičení 3:

SC 07-a,b,d,f,

SC 08-a,b,c,e,

SC 10 ... opakující soubor cvičení, příklady a,b,c,d,e,f,g,h,i (pozor, výsledek 10 f je jinak: řada konverguje podle podílového kritéria, limita vyjde menší než 1!!)

Ve cvičení nebo v rámci přípravy na písemky lze udělat ještě příklady ze sady strojarna02 (viz IS), příklady 1.3, 1.16, 1.18, 1.19, 1.20, 1.22, 1.25, 1.26

Otázka 12: řady funkcí - definice součtu, definice oboru konvergence funkční řady

Otázka 13: příklady součtů nekonečných řad ... vzorce, které dostaneme z věty 1 (součtu geometrické řady)

Otázka 14: Zjišťování oboru konvergence funkční řady pomocí limitního podílového nebo odmocninového kritéria: (použijeme kritérium podílové nebo limitní pro absolutní hodnotu funkce $f_k(x)$, tj. $a_k = |f_k(x)|$, vypočteme limitu pro k jdoucí do nekonečna, a tu položíme menší než jedna ... vyřešením této nerovnice dostaneme a x , která leží v oboru konvergence;

PLUS krajní body intervalu konvergence musíme vyšetřit zvlášť, protože limitní kritérium pro hodnotu limity rovnu 1 neumí rozhodnout o konvergenci)

Poznámky ke cvičení 4:

nekonečné řady funkcí (soubory cvičení jsou znovu číslovány od čísla 1, k číslu jsou přidány další dvě nuly, aby bylo naznačeno že se jedná o soubor cvičení v hlubině textu, v jeho druhé půlce): soubor cvičení 0001/str.33 - určete obor konvergence, podílové kritérium ... b,c,f (krajní body vyšetřete zvlášť dosazením za x)

soubor cvičení 0002/str.34 - určete obor konvergence, odmocninové kritérium ... b),d) (pozor u příkladu b) ... i krajní bod $(-4/3)$ patří do oboru konvergence, ve výsledku ve skriptech je chyba)

nedělejte soubor cvičení 0003,0004 (ověření stejnoměrné konvergence, Weierstrassovo kritérium)

Otázka 15: k čemu je dobrá integrace a derivace funkční řady člen po členu? Odpověď: Dostáváme vzorce pro další součty řad, které už nejsou geometrické ... příkladem je určení

hodnoty π (pí) integrací rozvoje $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$
(viz cvičení v posledním týdnu)

Otázka 16: a) co je to mocninná řada?

Důležitá věta: mocninné řady ve vnitřních bodech svého oboru konvergence lze derivovat i integrovat člen po členu, přičemž

integrovat určitým integrálem lze na každém uzavřeném podintervalu oboru konvergence

Otázka 17: Rozvoj funkce do Taylorovy nebo Maclaurinovy nekonečné řady: a) vzorec pro Taylorovu řadu

b) odvození Taylorovy řady známých funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$

Otázka 18 (pouze na přednášce, na cvičení na ni asi nezbyde čas):

Binomická řada $(1+x)^\alpha = \dots$ tato řada je speciální případ Taylorovy řady pro rozvoj funkce $(1+x)^\alpha$ a je užitečná pro rozvoj některých

funkcí v nekonečnou řadu, a tedy např. pro výpočet přibližných hodnot těchto

funkcí; objevuje se v SC 0006, příklad e, a v SC 0009, příklady a,b,c (nejprve teorie a řešené příklady na str. 52-53).

musíte umět: vzorec binomické řady pro obecné α , pak se Vám snadno budou rozvíjet následující:

odmocnina z $(1+x)$... $\alpha = 1/2$

odmocnina z $(1-x)$... $\alpha = 1/2$, subst. $t=-x$

odmocnina z $1/(1+x)$... $\alpha = -1/2$

odmocnina z $1/(1-x)$... $\alpha = -1/2$, subst. $t=-x$

odmocnina z $1/(1-x^2)$... $\alpha = -1/2$, subst. $t=-x^2$

integrací předchozího řádku dostaneme rozvoj funkce $\arcsin x$... remember!

Poznámky ke cvičení 5:

- integrace a derivaci řad člen po členu (s využitím tvrzení že ve vnitřních bodech oboru konvergence mocninné řady lze integrovat nebo derivovat člen po členu):

SC 0005-a,b,c, a také řešené příklady 07,08-str.38-39;

SC 0006-a,d ... jen tyto dva příklady

- Taylorova řada ... SC 0007-a,b,c; 0008-b,c,f (pokud se Taylorova řada neprocvičí, zůstává jen jako teoretická otázka na přednášce)