ZLATÝ ŘEZ

"Geometrie má dva poklady:
Pythagorovu větu a zlatý řez.
První má cenu zlata,
druhý připomíná spíše drahocenný kámen."
Johannes Kepler

Rozdělení úsečky na dva díly tak, že poměr větší části k menší je týž jako poměr celé úsečky k větší části.

Historie

- Rhindův papyrus (Egypt)

  „V pyramidách je utajen tajemný kvocient, nazývaný seqt."
- Euklides (Řecko) Eukleides (kol. 340 – 287 př. n. l.) sepsal na tehdejši dobu velkolepe dilo „Zaklady",ve kterém uvedl úlohu: „Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné časti tak, aby čtverec sestrojeny nad větší časti měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menši časti a druha má délku cele úsečky." Jak si později ukážeme, řešením teto úlohy je pravě rozděleni dané úsečky v poměru zlatého řezu.

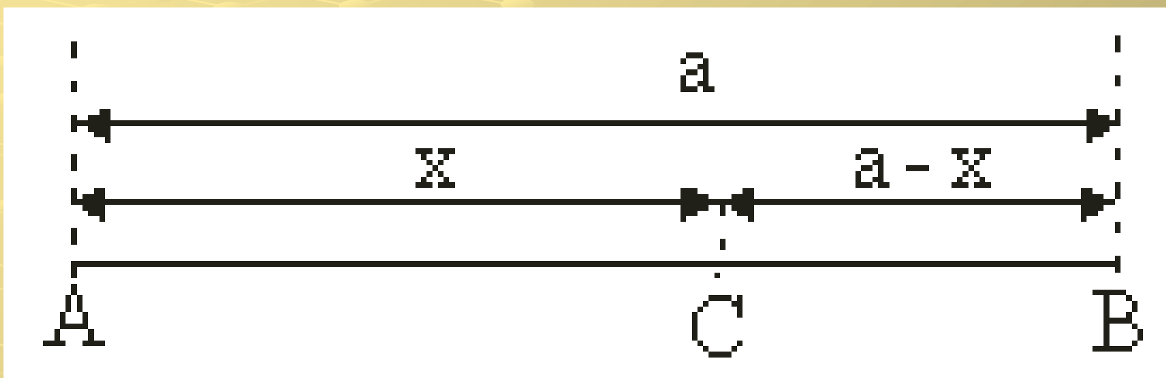
  - rozdělení úsečky „ve středním a krajním poměru"
- Luca Pacioli (rensance)

  - pojednání „O božském poměru" – 1509
- Albrecht Dürer

  - rozvinutí teoretických problémů nauky o proporcích
- 19. století

  - používání názvů „zlatý řez" a „zlatý poměr"

Zlatý řez



$$\frac{x}{a-x}=\frac{a}{x}$$

= zlatý poměr (φ)

a = 1

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}618\,03$$

$$x^2+x-1=0,$$

$$\varphi=\frac{1}{x_1}=1{,}618\,03.$$

Vlastnosti

$$\varphi \cdot \varphi' = -1.$$

φ' = - 0,61803
(převrácená hodnota *x*)

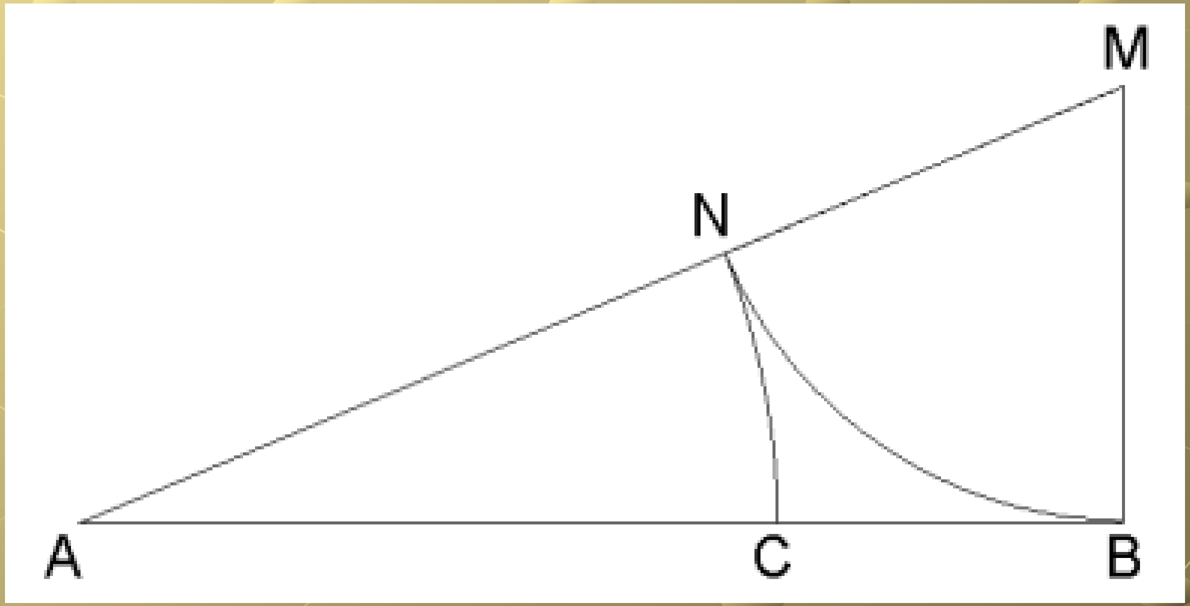
$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.$$

⇒ jediné kladné číslo
s touto vlastností

Rozdělení úsečky

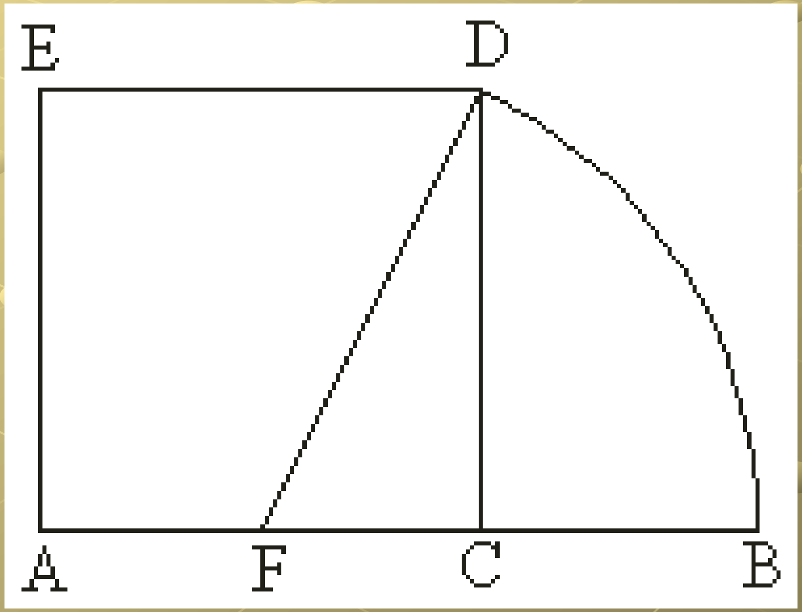
1. máme úsečku AB a chceme ji rozdělit v poměru ZŘ

Na kolmici v bodě B odměříme polovinu délky úsečky AB, sestrojíme úsečku AM, okolo bodu M opíšeme kružnici o poloměru MB, okolo bodu A opíšeme kružnici o poloměru AN a pak je bod C bodem zlatého řezu úsečky AB.



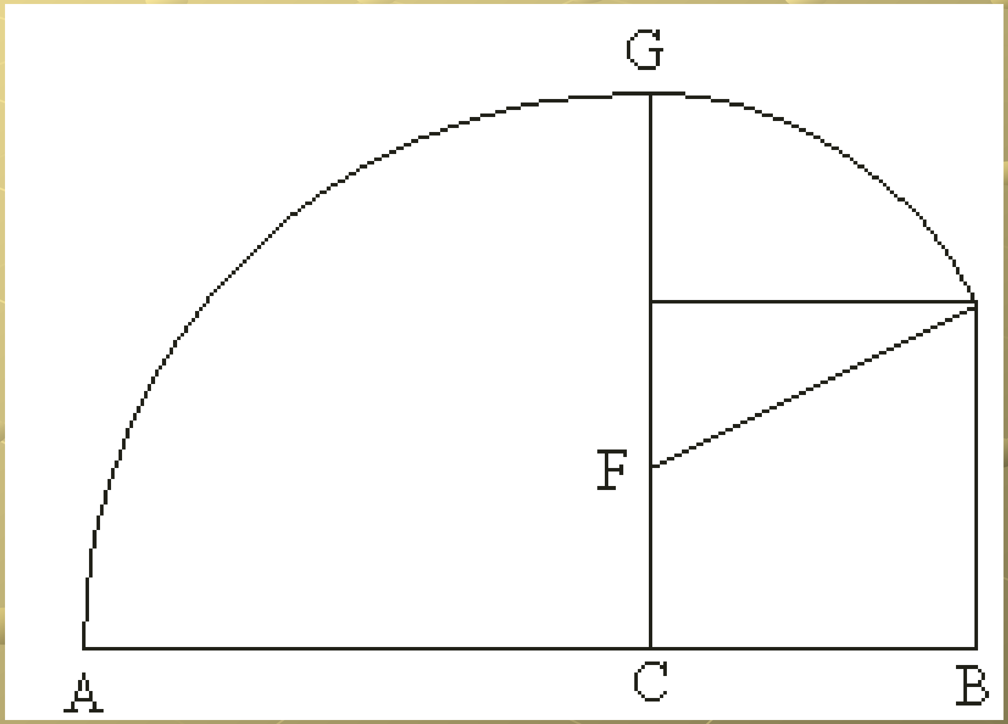
2. známe delší díl (AC) úsečky AB

Nad úsečkou AC sestrojíme čtverec a opíšeme kružnici se středem F o poloměru FD. Průsečík polopřímky AC a kružnice je bod B.



3. známe kratší díl (CB) úsečky AB

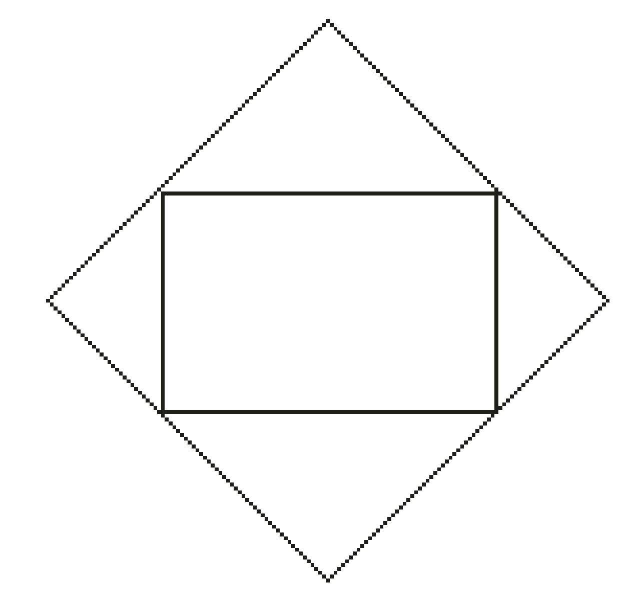
Bod G určíme podobnou konstrukcí jako v předchozím případě, kde jsme hledali bod B. Pomocí kružnice o poloměru CG, zjistíme bod A.



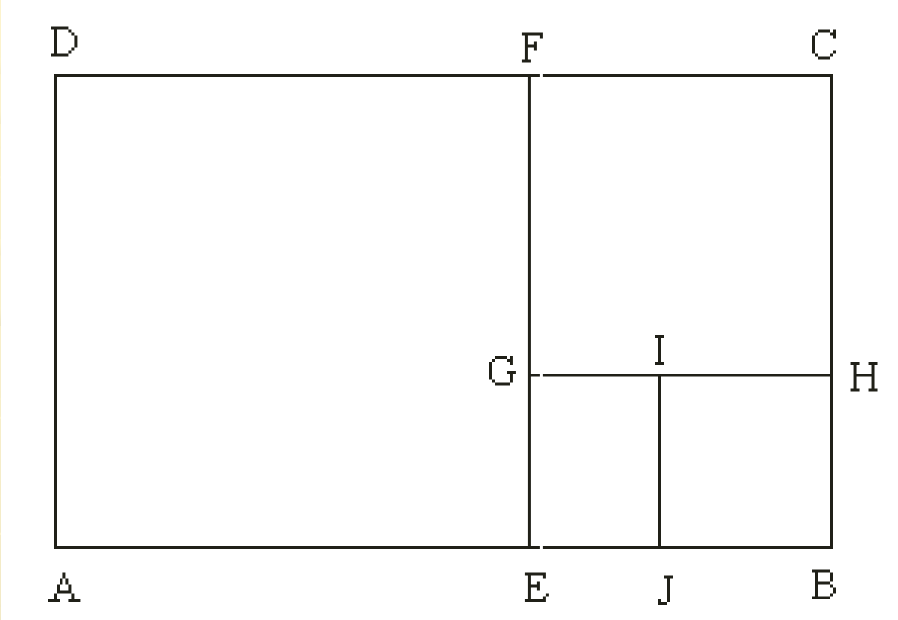
Zlatý obdélník

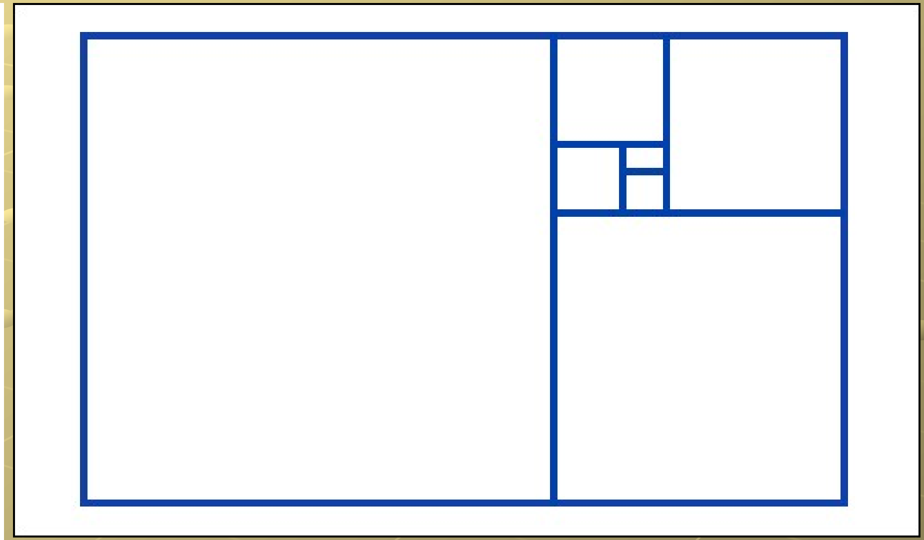
= obdélník, jehož strany jsou v poměru φ

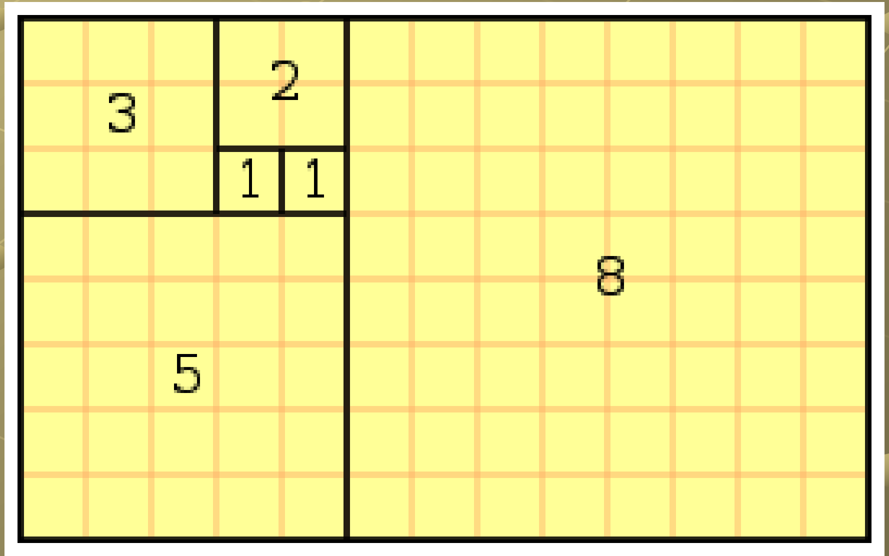
- lze vepsat do čtverce tak, že jeho všechny vrcholy dělí strany čtverce ve zlatém poměru

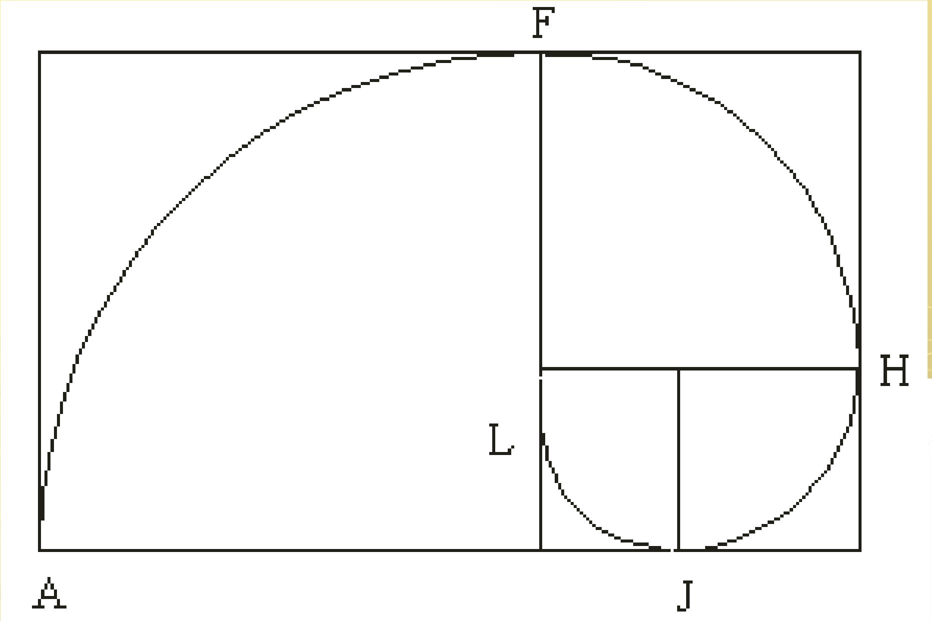


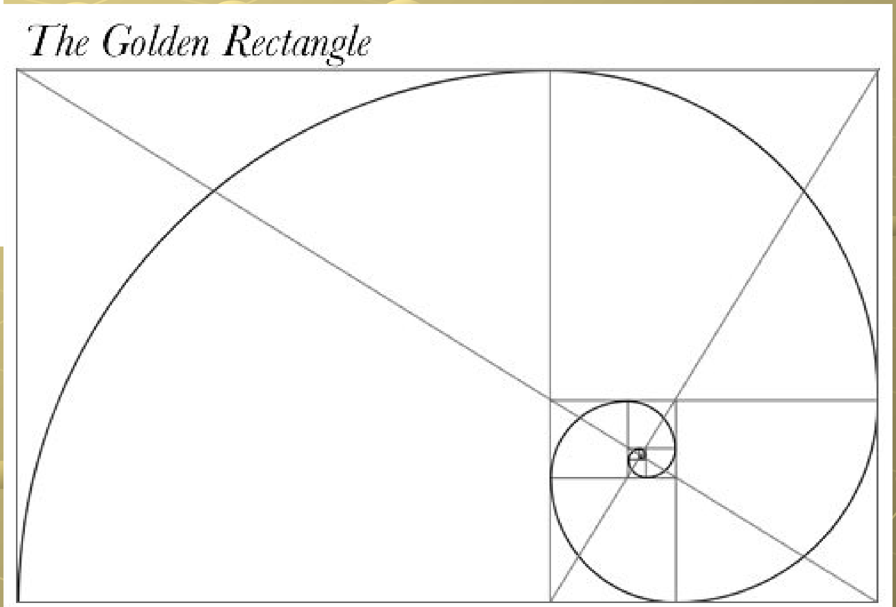
- oddělíme-li od zlatého obdélníka ABCD čtverec AEFD, bude zbývající část opět zlatým obdélníkem; jestliže od obdélníka EBCF oddělíme čtverec GHCF, bude zbytek EBHG opět zlatým obdélníkem atd.









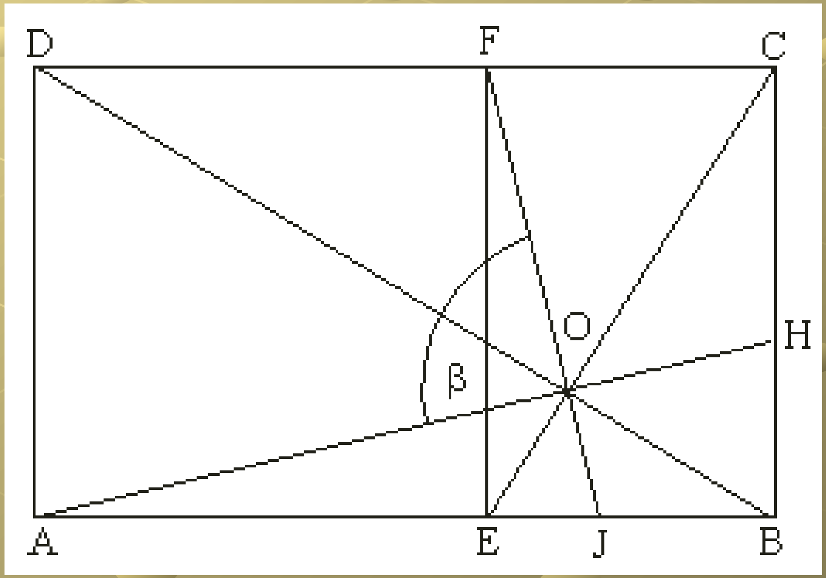


- body F, H, J, L, ..., postupně vyznačující zlaté řezy, leží na zlaté spirále

Zlatá spirála

Logaritmická spirála

- nemění tvar, roste stejně do délky i do šířky tak, že zachovává tvar a poměr částí
- skutečná spirála se nedotýká stran čtverců, ale protíná je pod velmi malým úhlem

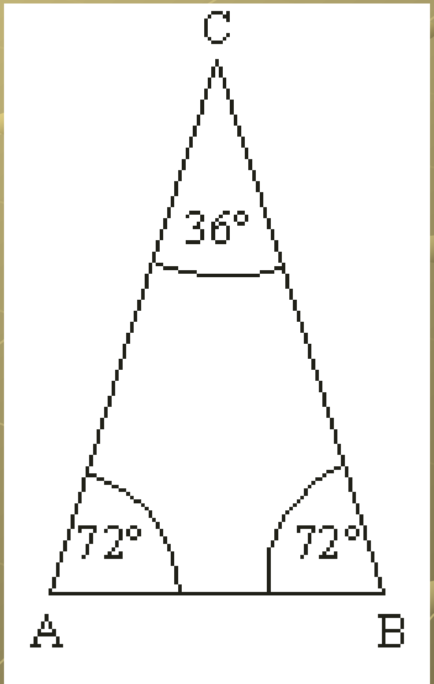


Zlatý trojúhelník

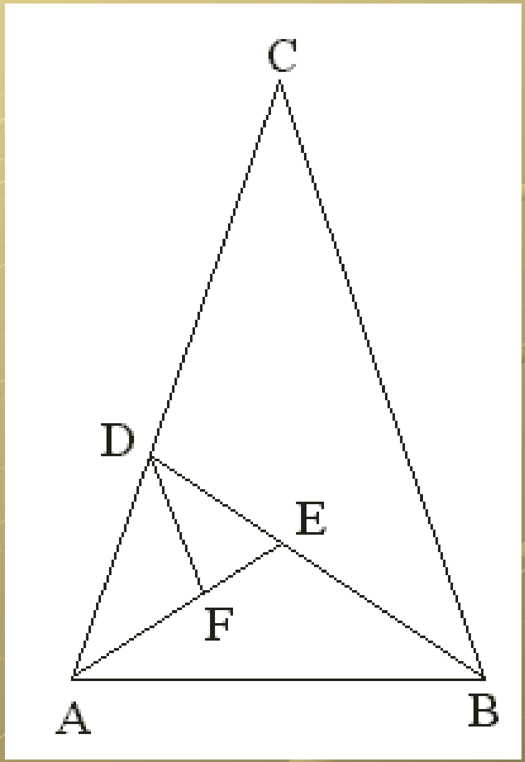
= rovnoramenný trojúhelník, v němž je poměr délky ramene a základny roven φ

- úhly při základně jsou rovny 72° a úhel při hlavním úhlu 36°

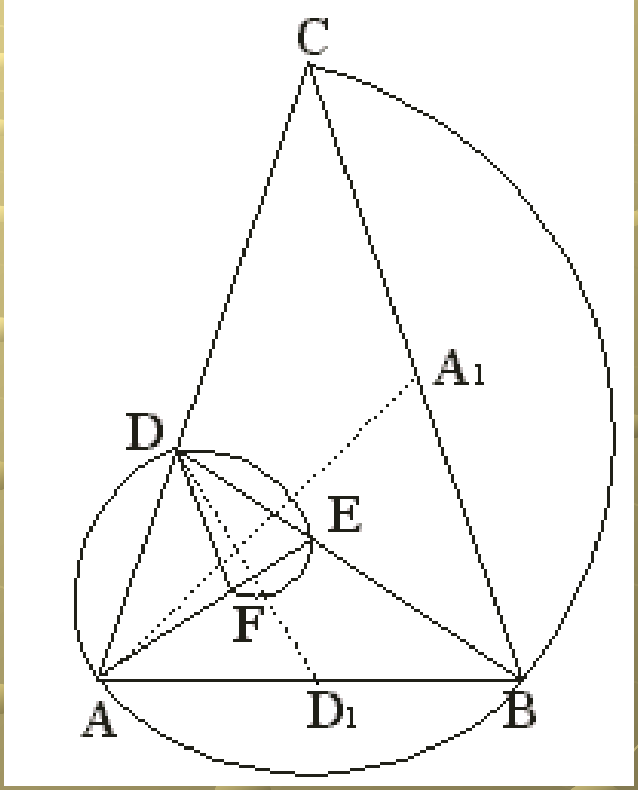
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$$



- opět platí, že když do daného trojúhelníku ABC vepisujeme největší možné rovnoramenné trojúhelníky, které mají rameno rovno základně předcházejícího trojúhelníku

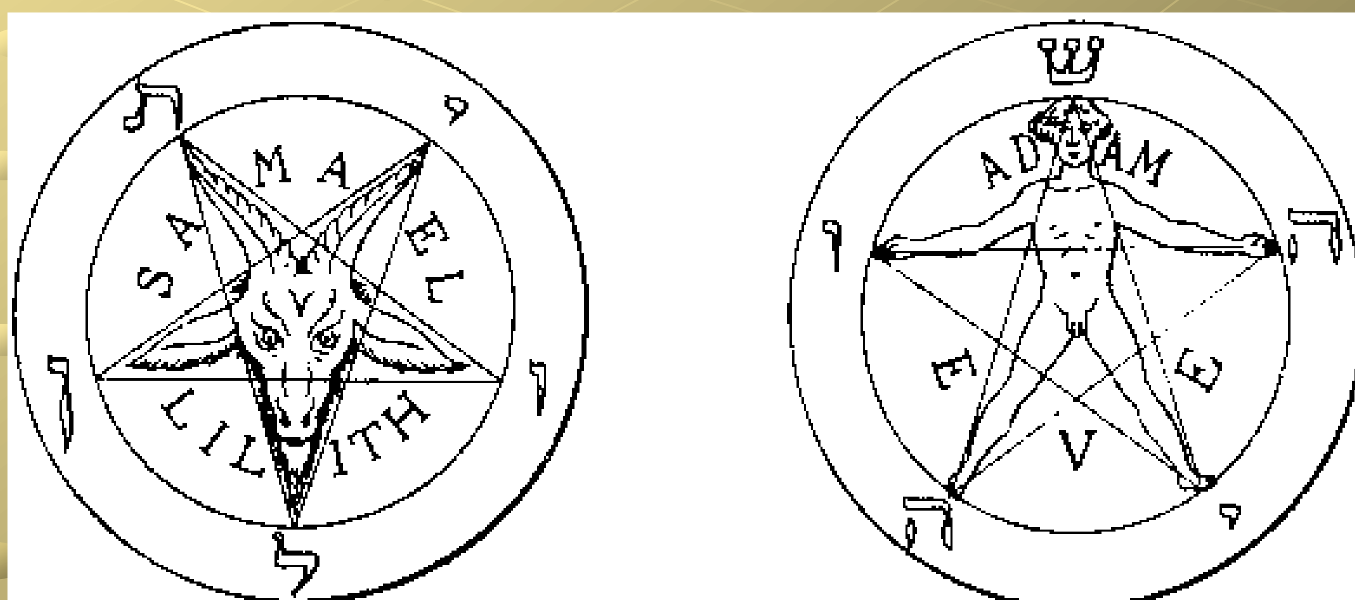


- lze sestrojit logaritmickou spirálu
- vrcholy zlatých trojúhelníků leží na spirále, která má střed v průsečíku těžnic AA_1 a DD_1
- středy jejich oskulačních kružnic leží v bodech D, E, F, …

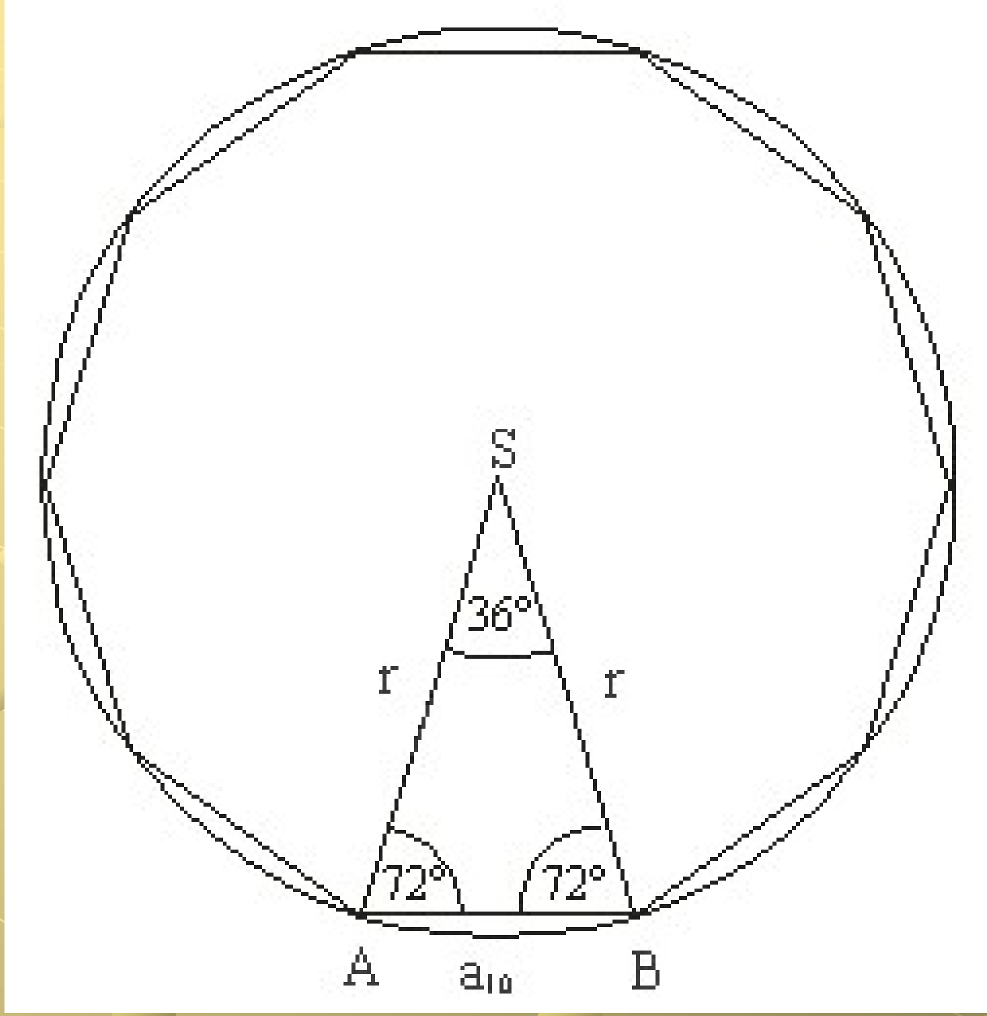


Pravidelný pětiúhelník

- jediný mnohoúhelník, který má stejný počet úhlopříček jako stran
- nejnižší mnohoúhelník, jehož strany i úhlopříčky lze nakreslit jediným tahem
- pentagram - znak tajného bratrstva pythagorejců



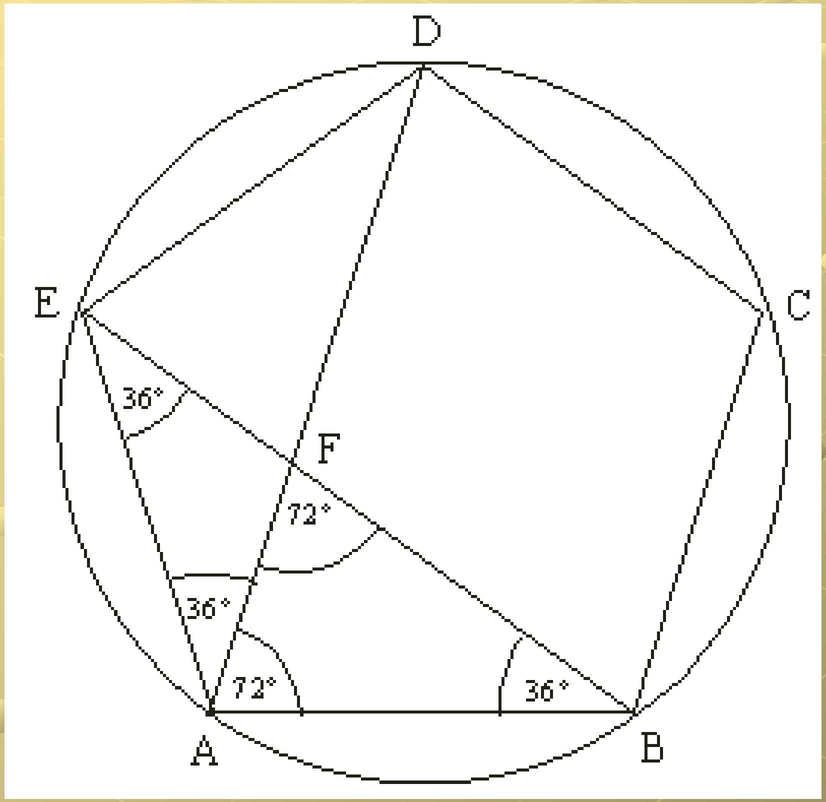
Pravidelný desetiúhelník



$$\frac{|SA|}{|AB|} = \varphi .$$

Zlatý řez v pětiúhelníku

1. úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se protínají v poměru zlatého řezu



$\Delta ABE \sim \Delta FAE$

$|BE| : |AB| = |AE| : |FA|$

$|AE| = |AB| = |BF|$

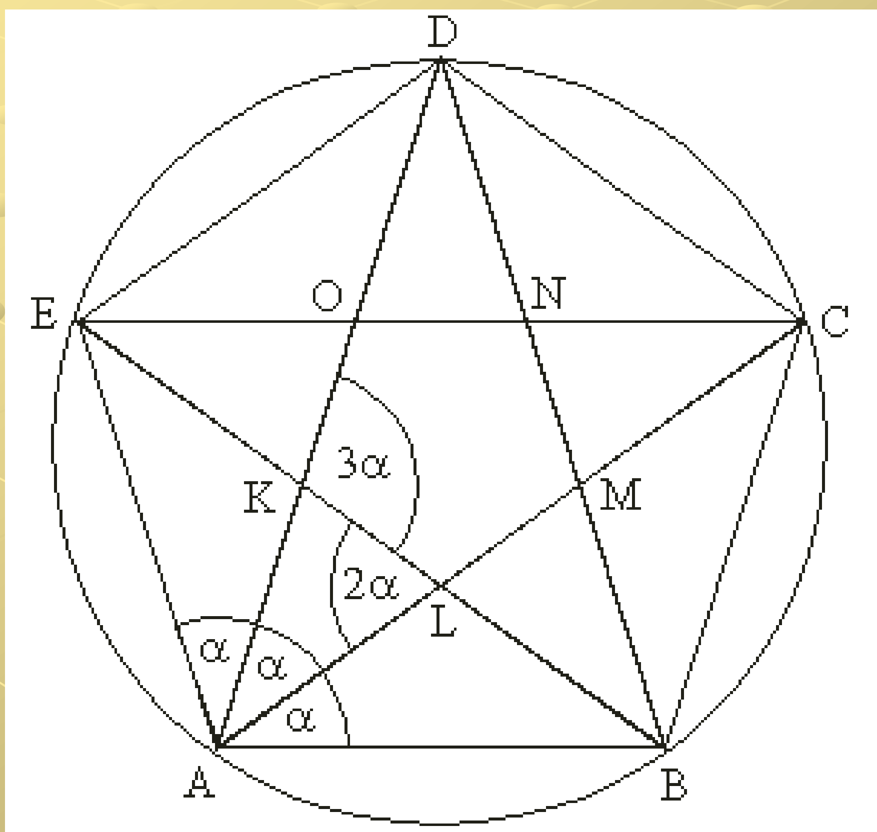
$|AF| = |EF|$

$|BF| : |FE| = |BE| : |BF| = \varphi$

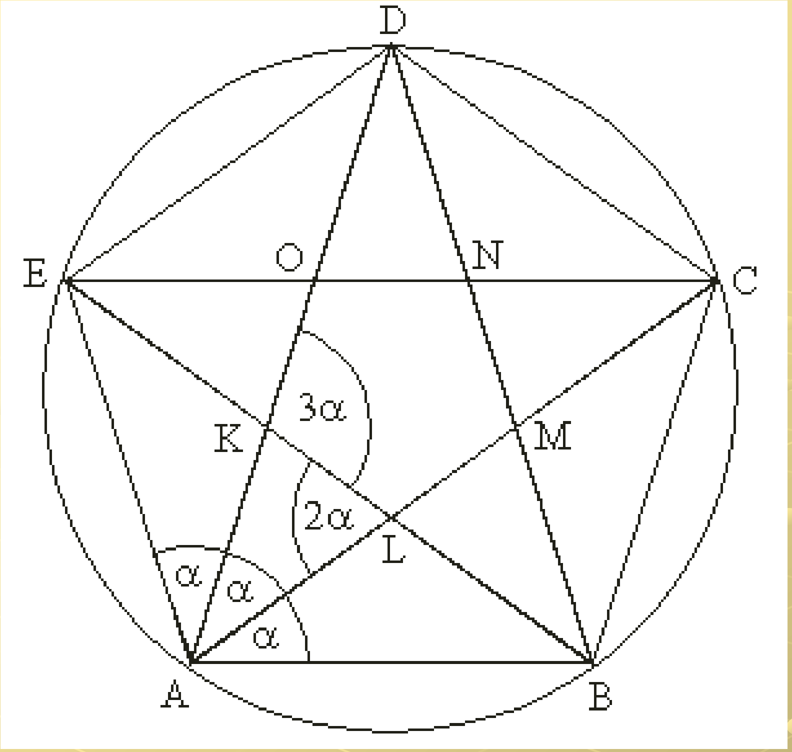
2. poměr úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníka je zlatý

$$|EB| : |AB| = \varphi$$

3. jestliže sestrojíme všechny úhlopříčky, dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník (KLMNO) a poměr stran pětiúhelníků je roven φ^2 ($\alpha = 36°$)



$$\sphericalangle AKL = \sphericalangle ADC = 2\alpha = 72°$$
$$\sphericalangle OKL = \sphericalangle OEK + \sphericalangle EOK = 3\alpha = 108°$$



$$|AE| = |AO| = 1,$$

$$|AK| = |DO| = 1 - x,$$

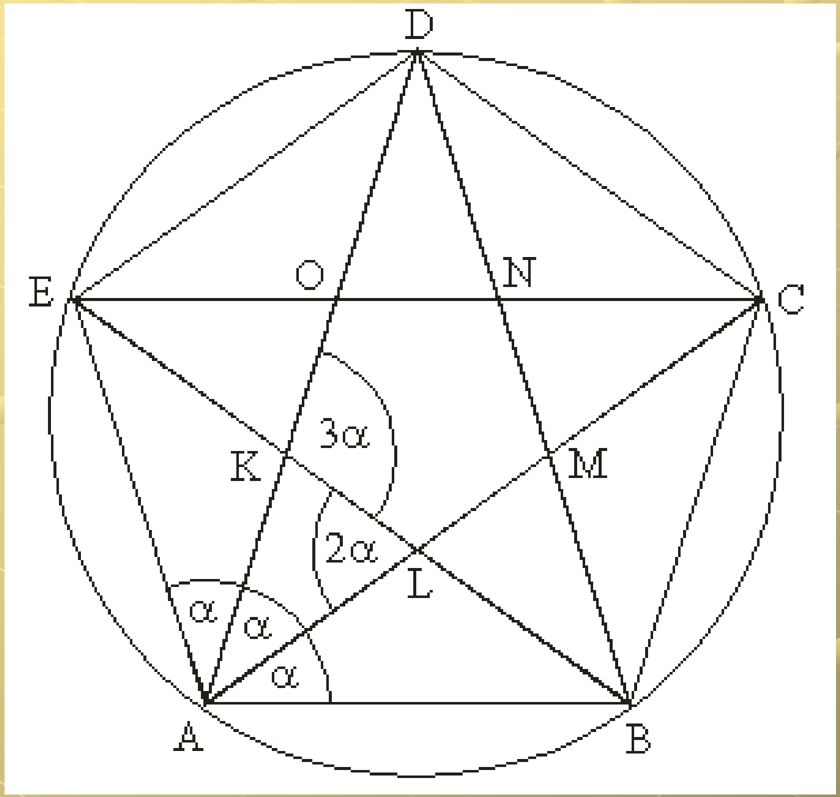
$$\varphi = \frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AO|}{|AK|} = \frac{|AO|}{|AO| - |KO|},$$

$$\frac{1}{\varphi} = 1 - \frac{|KO|}{|AO|}.$$

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\frac{|AO|}{|KO|} = \frac{\varphi}{\varphi - 1} = \varphi^2.$$

4. délky úseček KO, AK, AO, AD jsou členy geometrické posloupnosti



$$|KO| = \frac{1}{\varphi^2} = \varphi^{-2},$$

$$|AK| = \frac{1}{\varphi} = \varphi^{-1},$$

$$|AO| = 1,$$

$$|AD| = \varphi.$$

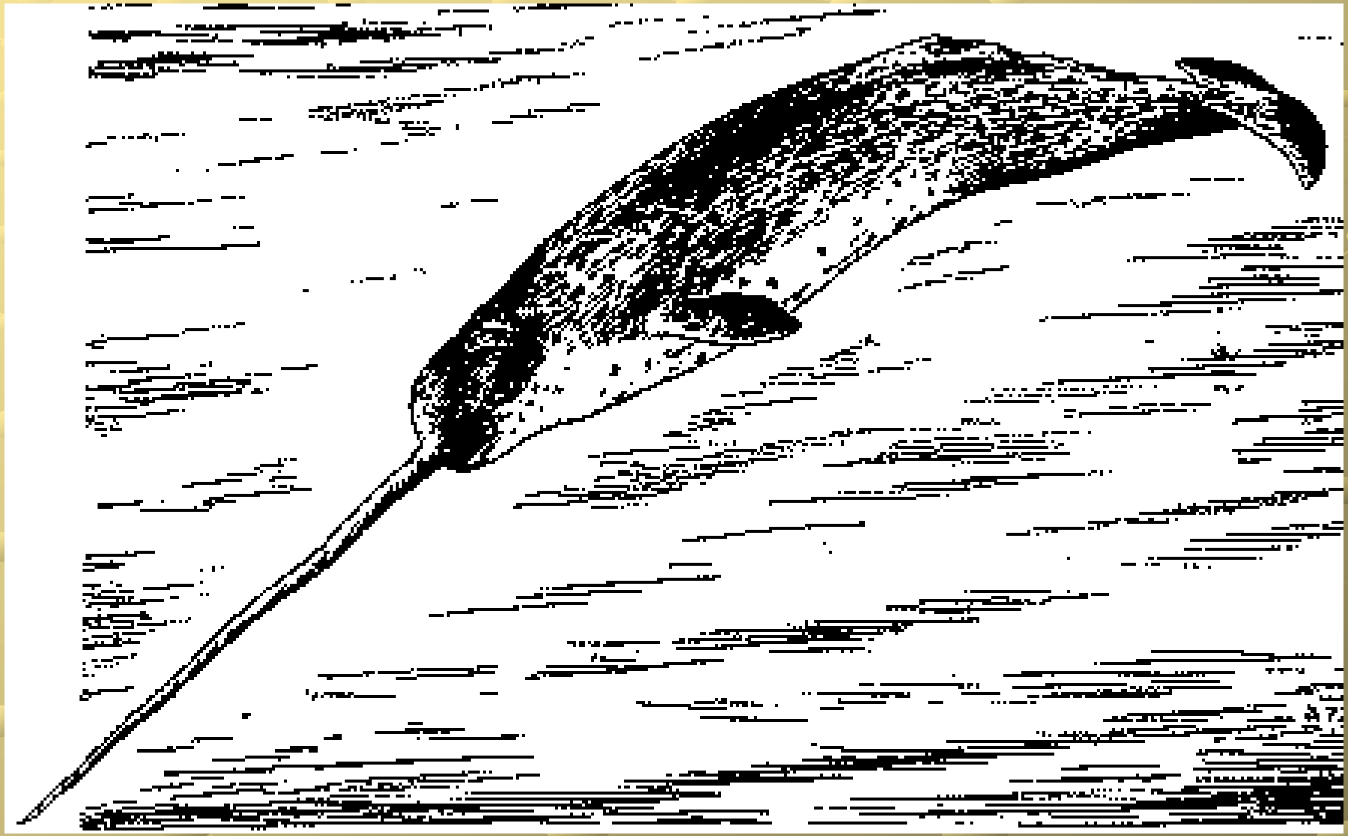
Fibonacciho posloupnost

- 0,1,1,2,3,5,8,13,21, 34,…
- Poměr dvou po sobě jdoucích členů Fib. posloupnosti konverguje k číslu φ

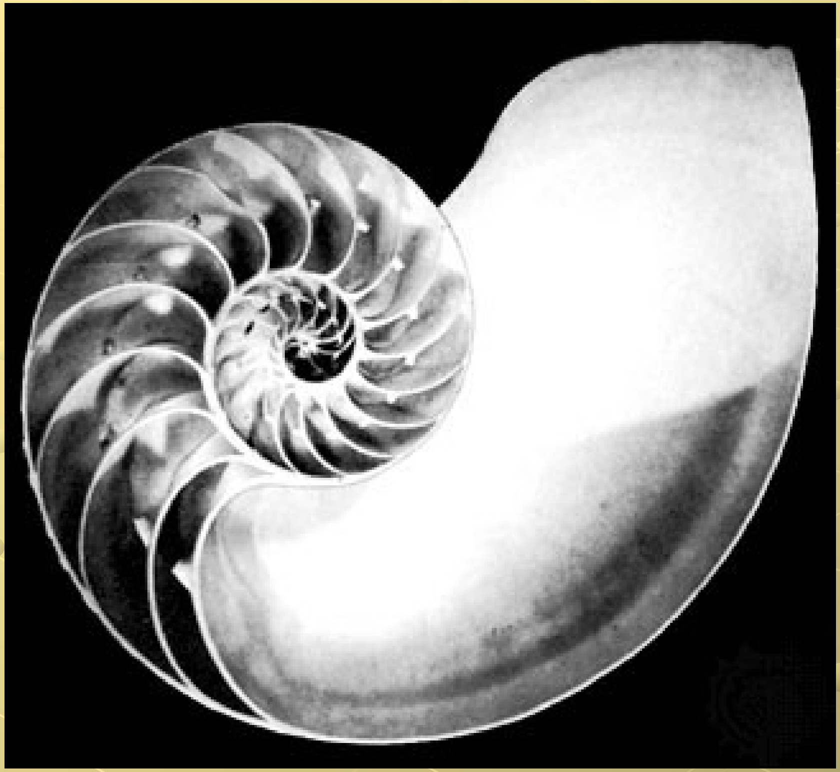
Výskyt v přírodě

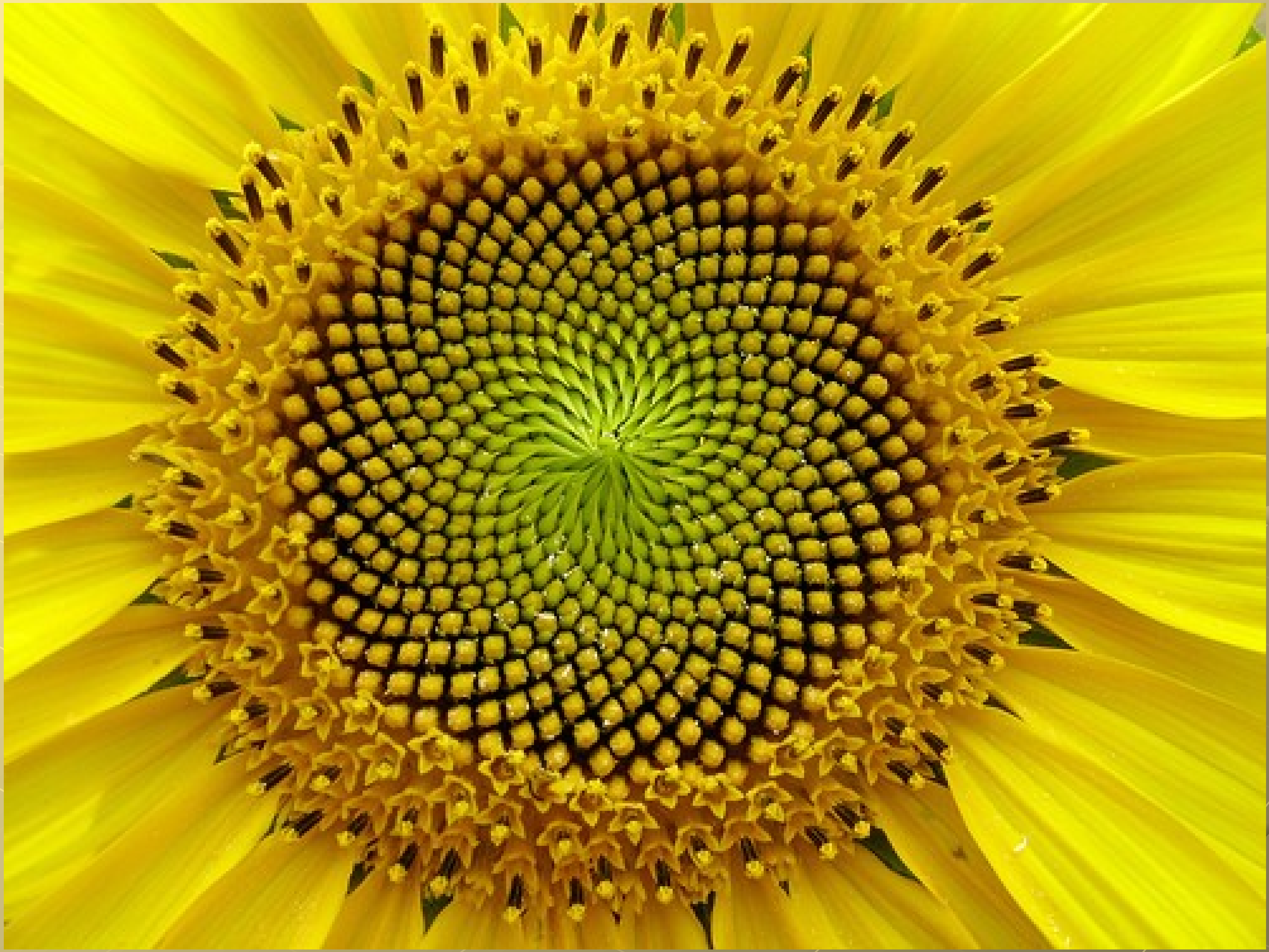
- logaritmická spirála vyjadřuje růst neživých částí živého tvora (zuby, rohy, schránky měkkýšů,…)
- rohy dobytku a ovcí jsou částí závitu spirály
- ukázkou prostorové logaritmické spirály je africký kudu

- sloní kel, zub samce narvala

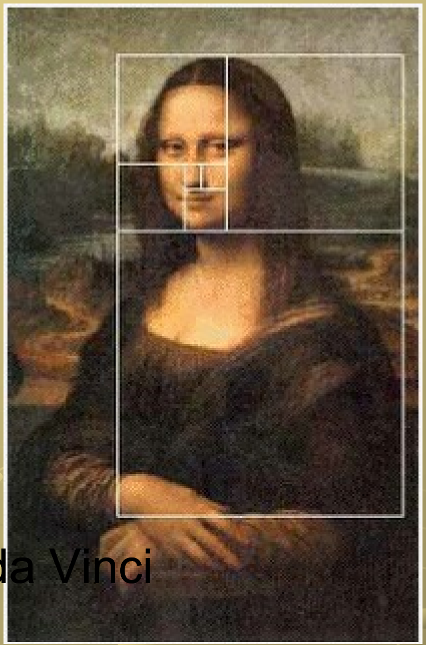


- schránka hlavonožců z rodu Nautilus



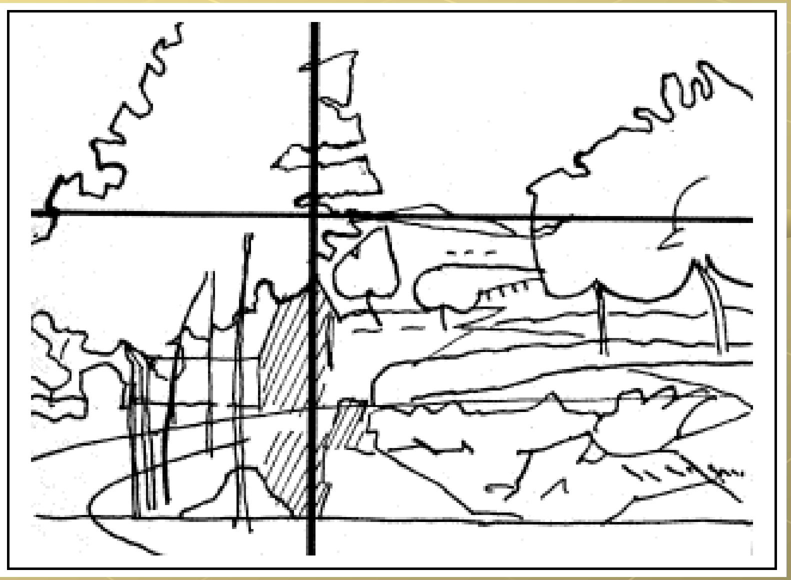


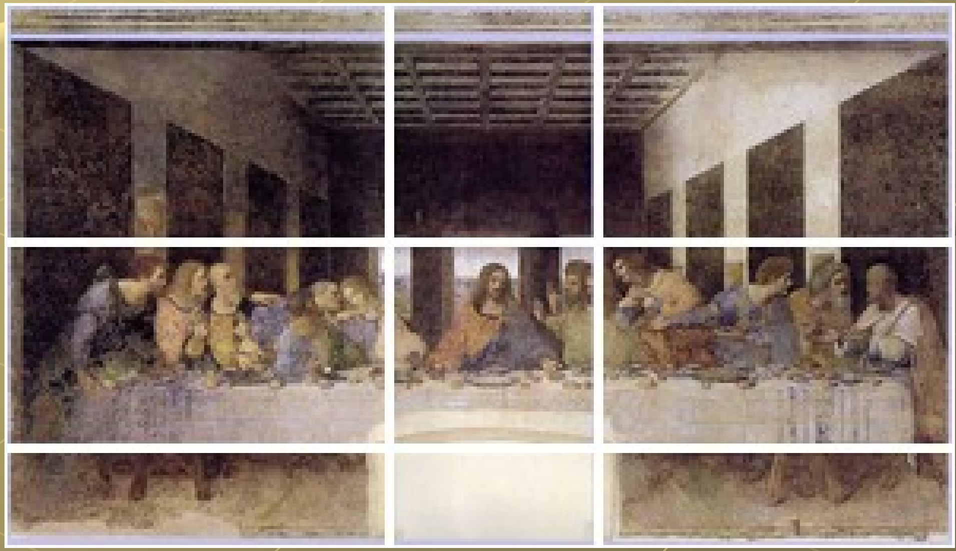

Užití v umění



OBRAZY:

- při tvorbě obrazových formátů, určení výšky a šířky
- při umísťování hlavního motivu do plochy formátu
- často v obrazech Bohumila Kubišty (obraz Žně), Leonarda da Vinci



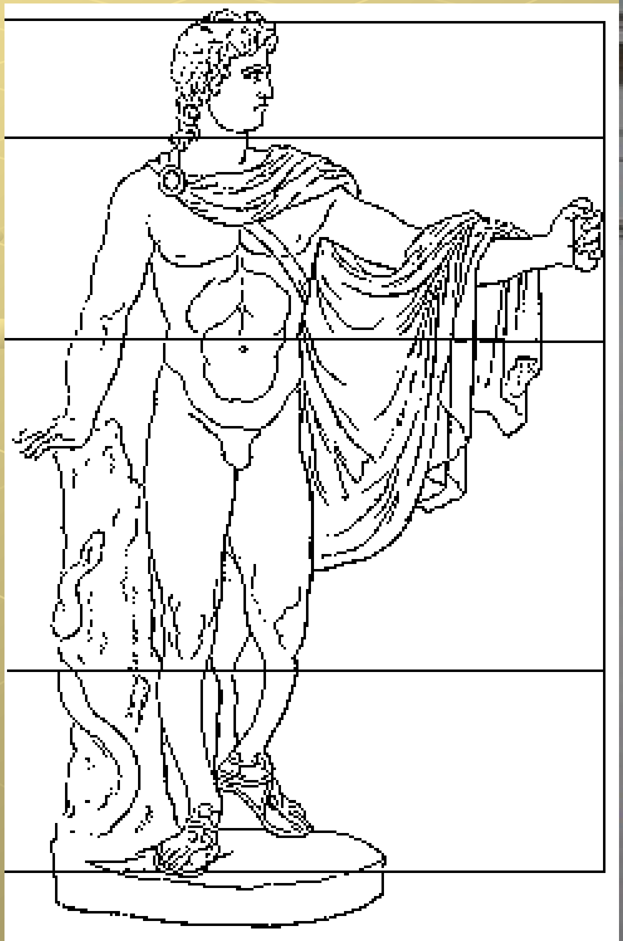


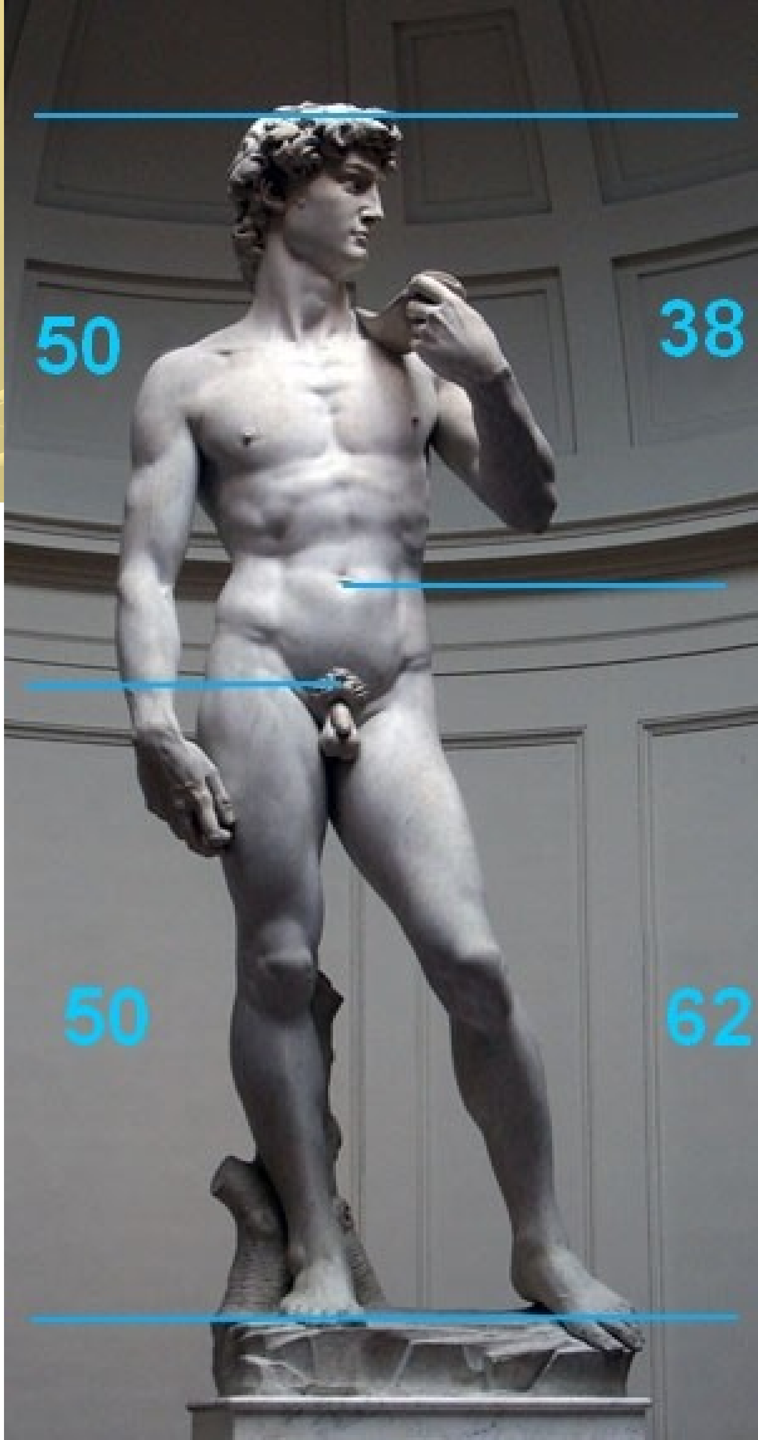
PROPORCE LIDSKÉHO TĚLA:

- renesance – nejkrásnější útvary jsou ty, v nichž lze najít zlatý řez

Zlatý řez:

- v poměru délek nad pasem a pod pasem
- od pasu ke krku a od pasu pod kolena

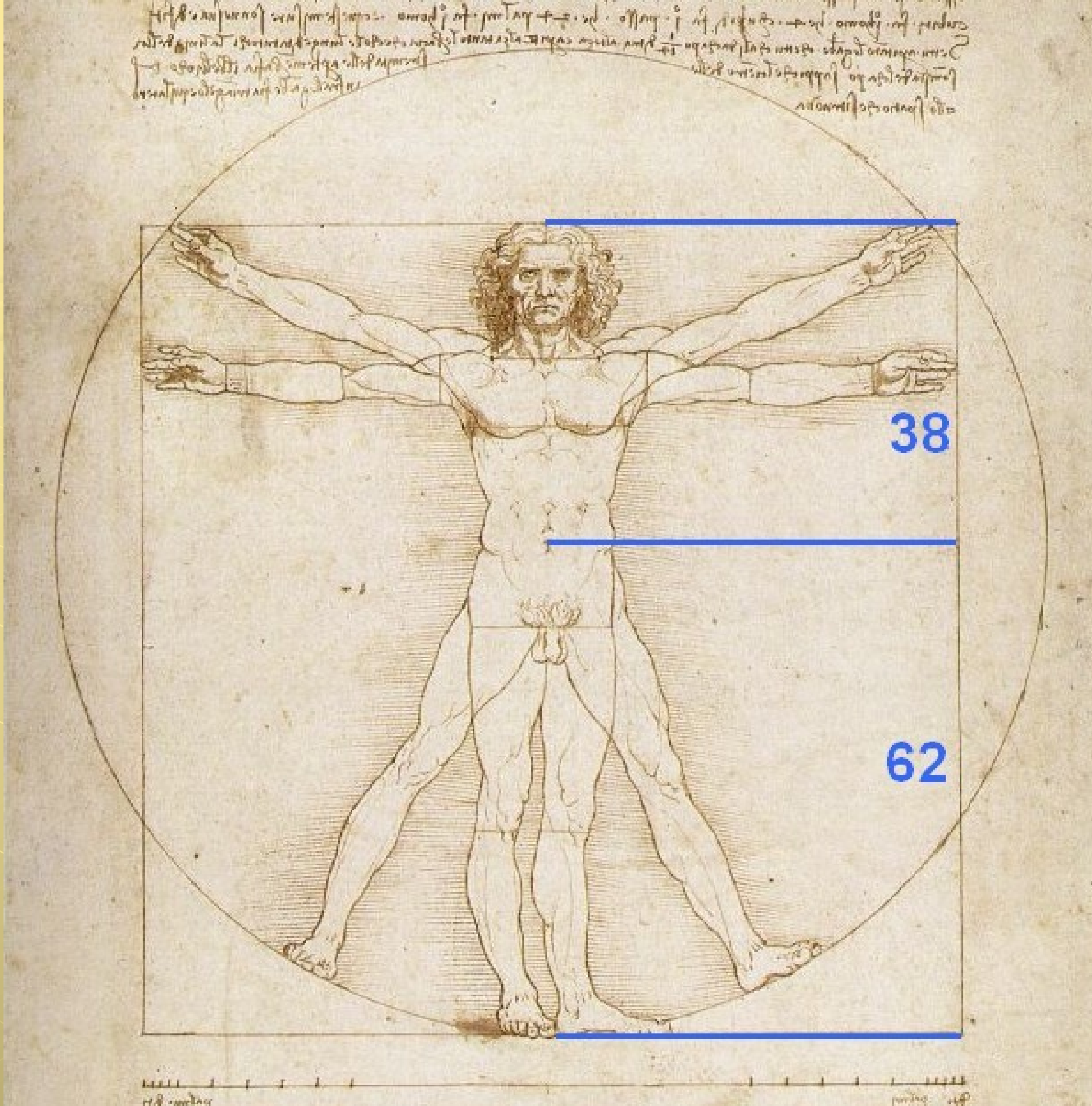




Ondřejův kříž

= kánon (vzorové rozměry) římského stavitele Vitruvia

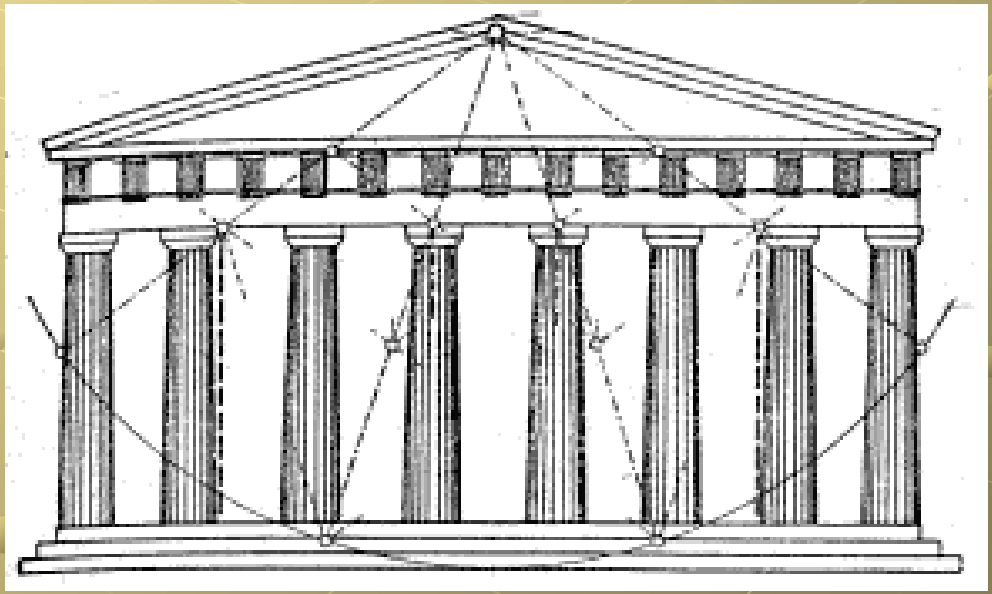
- délka rozpjatých horních končetin se rovná výšce těla a tudíž lze lidské tělo zakreslit do čtverce
- kolem figury je opsaná kružnice, která má přirozený střed v pupku
- tuto tzv. Vitruviovu figuru používal Albrecht Dürer a Leonardo da Vinci, který ji trochu poupravil


38
62

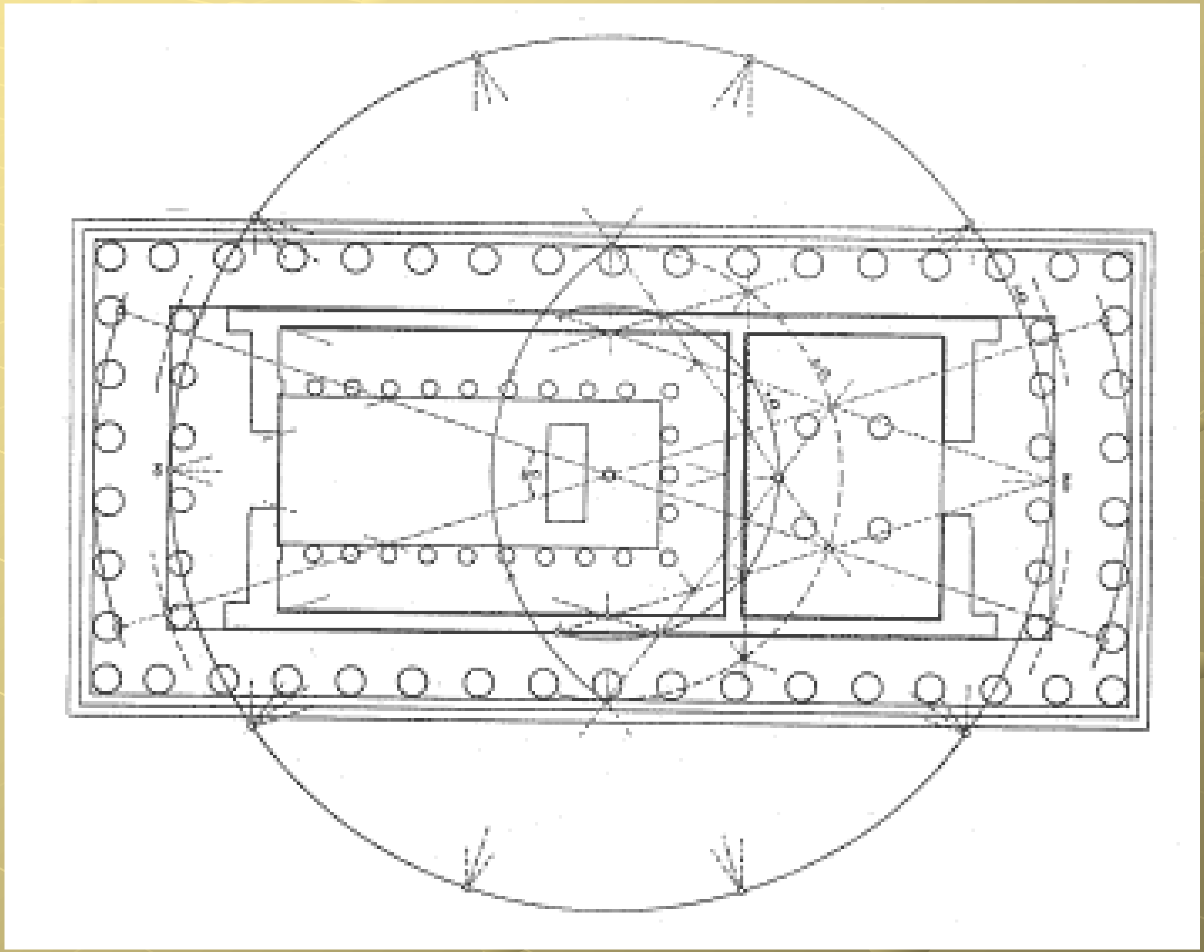
ARCHITEKTURA:

- Egypt – Cheopsova pyramida v Gíze
- Řecko – Panthenón na Akropoli

  - průčelí – část pravidelného desetiúhelníku

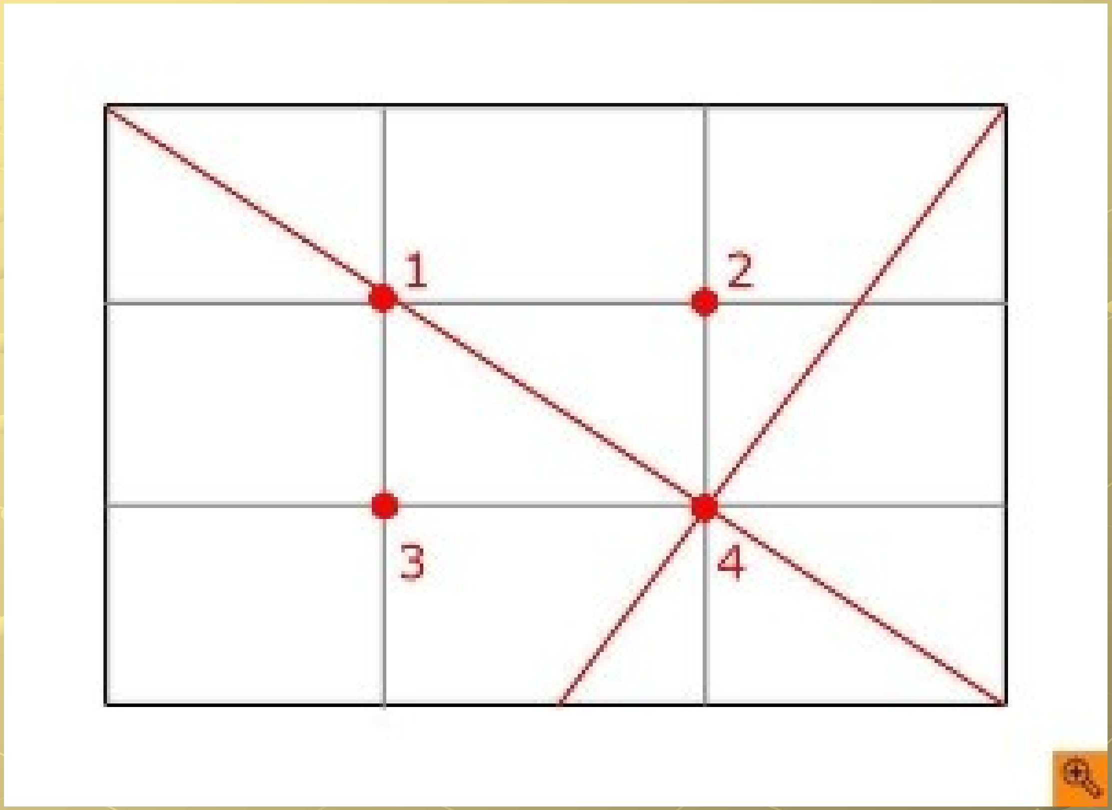


- půdorys – desetiúhelníky vepsané soustředným kružnicím



Užití zlatého řezu v digitální fotografii

- altán ve středové kompozici a ve zlatém řezu

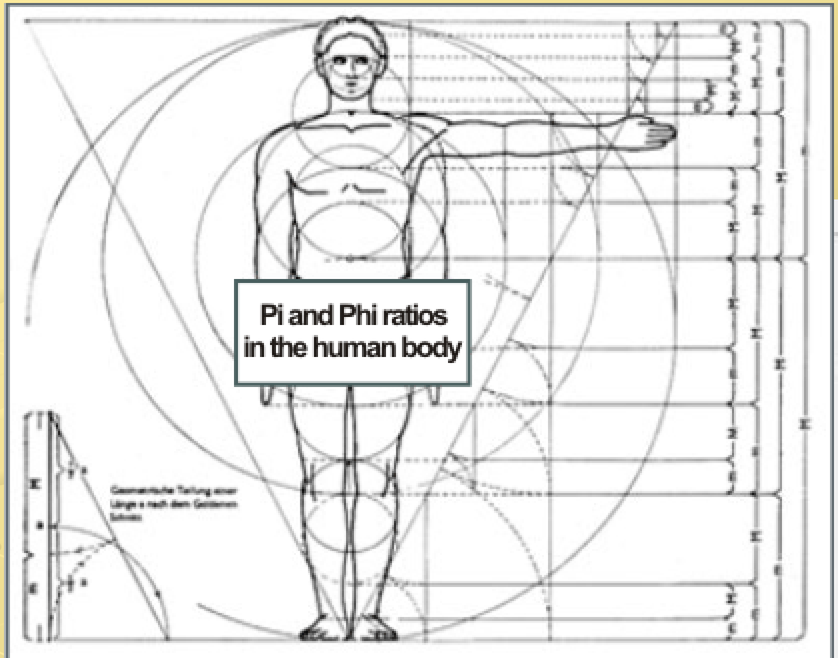


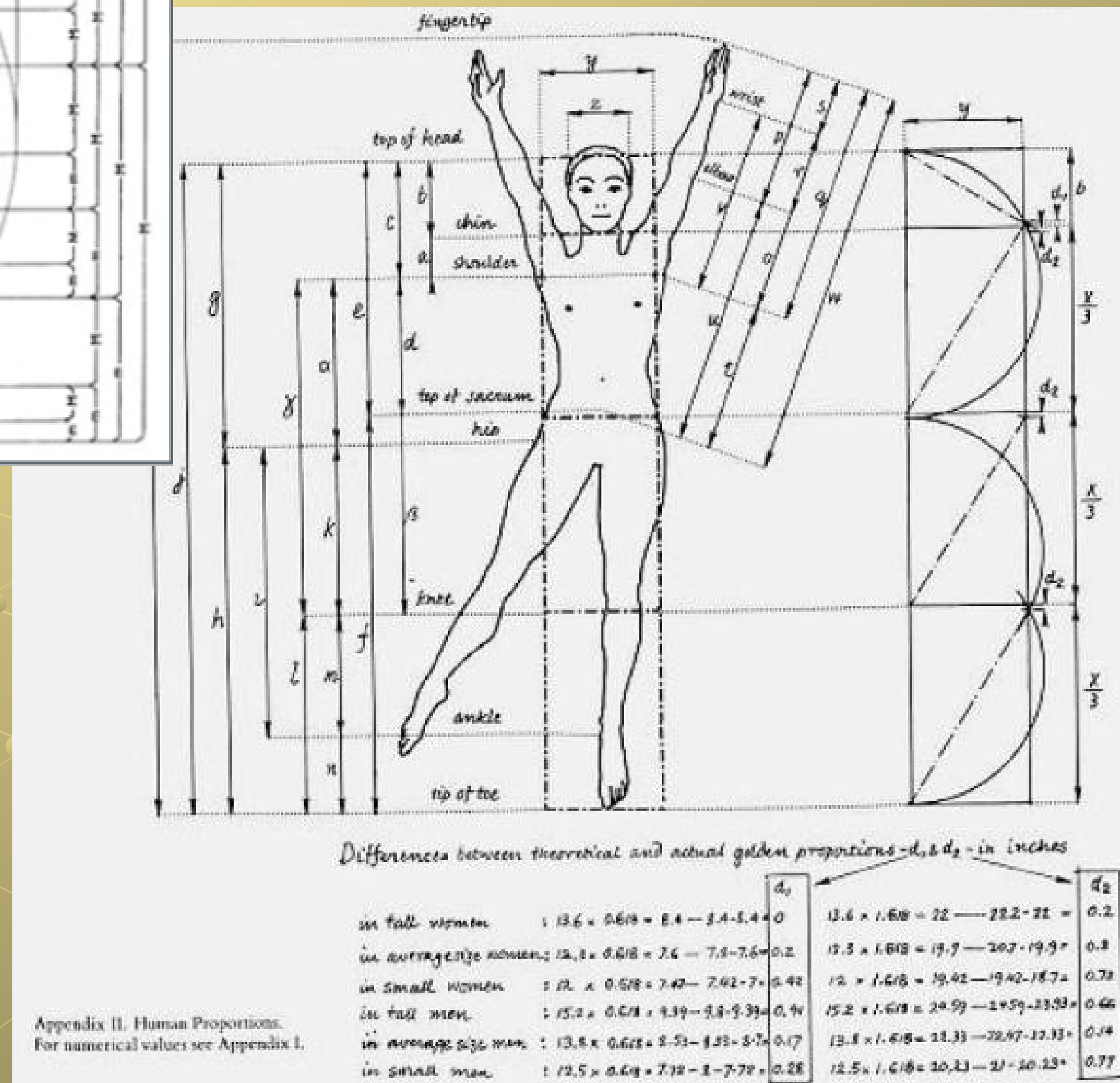
Nalezení zlatého řezu pomocí třetin

Použití zlatého řezu v makrofotografii

Pro ty, co toho pořád nemají dost

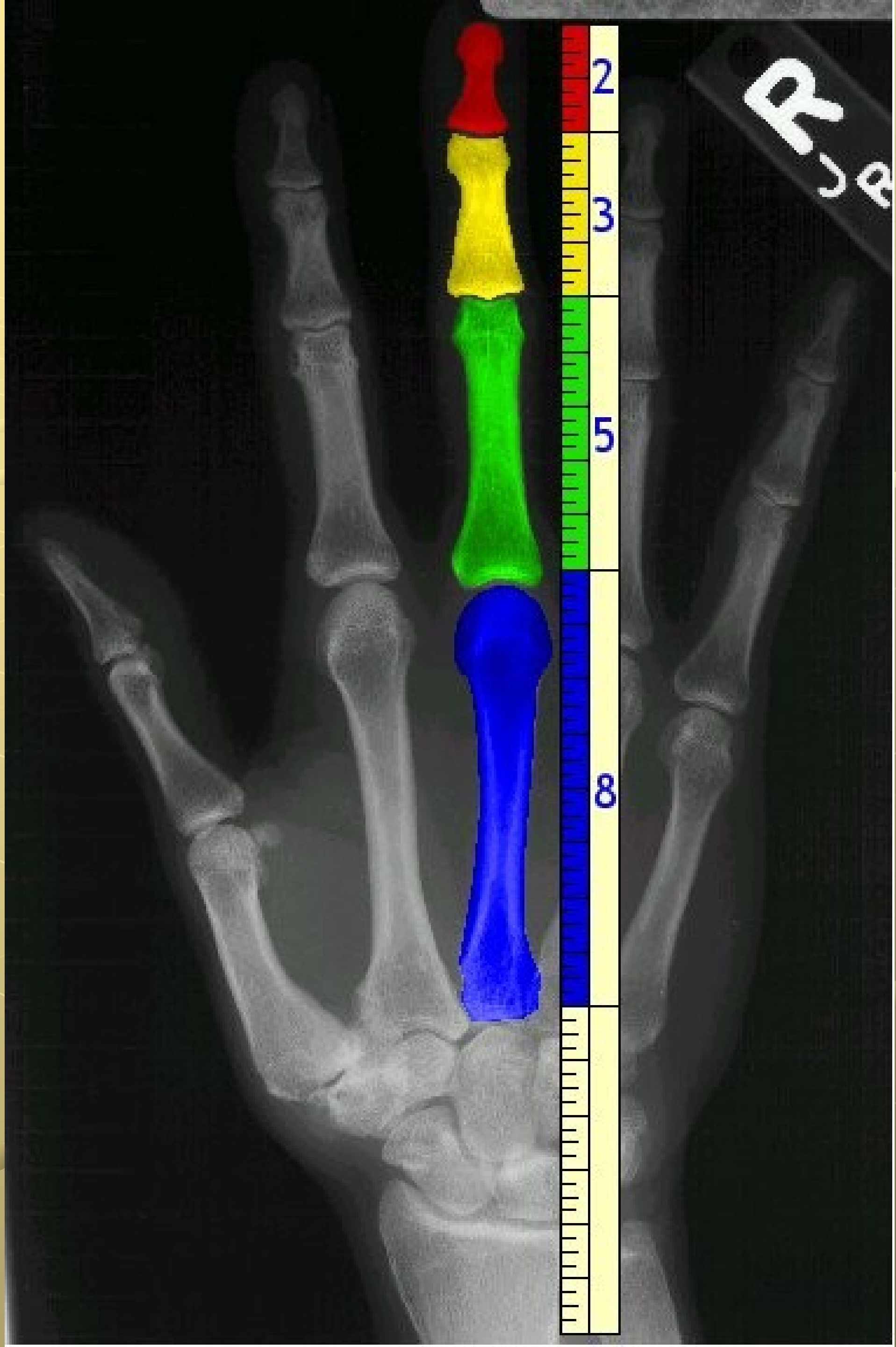
Pi and Phi ratios in the human body





Appendix II. Human Proportions.
For numerical values see Appendix I.

Neveříte? ☺



2
3
5
8
R

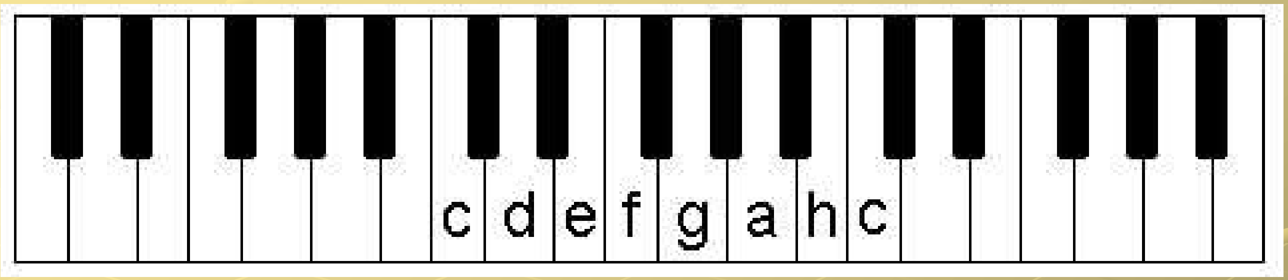
Pro ty, co chtějí objevovat další „Božské proporce“

Vzdálenosti planet Sluneční soustavy v jednotkách AU

Merkur	0.371 AU
Venuše	0.726 AU
Země	1 AU
Mars	1.512 AU
Jupiter	4.956 AU
Saturn	9.559 AU
Uran	20.091 AU
Neptun	30.017AU
Pluto	39.5 AU

Vypočtěte průměrnou hodnotu poměrů mezi sousedními planetami, např Venuše/mars + země/venuše + …

Hudba sfér



Hudba je tajné aritmetické cvičení, a ten, kdo se jí oddává, si neuvědomuje, že manipuluje s čísly. G.W. Leibniz (1646-1716), německý filozof

Housle – Stradivari – dolní oblouk má střed v bodě, kde leží zlatý řez středové čáry; oka otvorů tvaru *f* jsou geometricky na místech určených zlatým řezem

Piano – Oktáva má 13 kláves: 5 črných, 8 bílých, 5 černých je uspořádáno po 2 a po 3
Ladění: tón A = 440 Hz, velká sexta AC je pro C = 264 Hz, poměr 264/440 = 5/3 = Fb.č.
Malá sexta: vyoké C = 528 Hz a E = 330 Hz, poměr 528/330 = 8/5 = Fb.č.

Najděte číslo φ

Najděte další přírodní nebo člověkem vytvořené věci, na kterých lze změřit poměr 1: 1,618

Např. na klávesnici pc, na talíři v jídelně apod ☺

This is The End

$x = x$ / vynásobíme x

$x.x = x.x$

$x^2 = x^2$ / odečteme x^2

$x^2-x^2 = x^2-x^2$ / vlevo vytkneme x

$x(x-x) = x^2-x^2$ / vpravo podle vzorce $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x\cancel{(x-x)} = (x+x)\cancel{(x-x)}$ / zkrátíme

$x = x+x$

$x = 2x$

$1 = 2$ …. Vzniká Fibonacciho posloupnost …