



**PEDAGOGICKÁ  
FAKULTA**  
Masarykova univerzita

# Speciální teorie relativity II

**Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.**

Pedagogická fakulta  
Masarykova Univerzita  
Poříčí 7, 603 00 Brno



Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím <http://www.fyzika007.cz/specialni-teorie-relativity>, a dalších materiálů např. zde uvedených

## Relativistická dynamika

**Fyzikální zákony jsou invariantní, budou-li formulovány pomocí kovariantních rovnic (nezmění se při transformaci souřadnic).**

Uvažujme uzavřený soubor

$$\sum_n m_n = konst \quad \sum_n \vec{p}_n = \vec{konst}$$

(sčítá se přes všechny interagující částice)

Přechod  $S : S'$

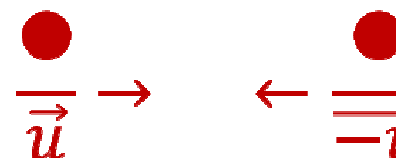
$$\sum_n m_n = \sum_n m'_n$$

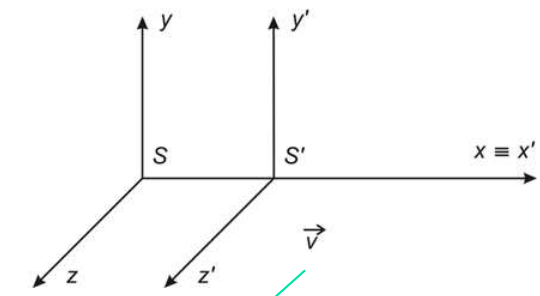
$$\sum_n \vec{p}_n = \sum_n \vec{p}'_n$$

Uvažujme pružnou srážku dvou částic se stejnou klidovou hmotností  $m_0$  podél osy  $x$  s rychlostmi  $u'_1 = u' \quad u'_2 = -u'$  vůči soustavě  $S'$

Pak v okamžiku srážky jsou vůči  $S'$  v klidu.

**Platí zákon zachování hybnosti.**





# Relativistická dynamika

Y okamžiku srážky v soustavě S:

$$m_1 + m_2 = M$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = M \cdot v$$

Přidáme transformační vztahy pro rychlost

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'}$$

$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot (-u')}$$

Dosadíme

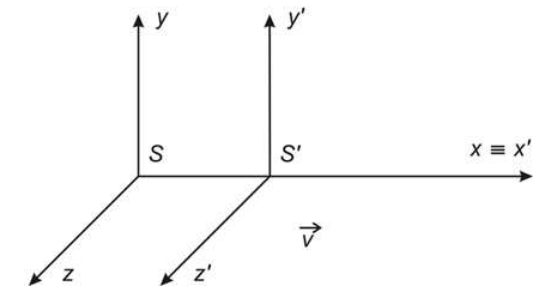
$$m_1 \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'} + m_2 \frac{-u' + v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u'} = m_1 v + m_2 v \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{u'v}{c^2}}{1 - \frac{u'v}{c^2}} = \dots = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}$$

Pro  $m_2(u_2=0)=m_0 \quad \left| \right. = m_1(u_1=0) \quad \left| \right. \text{ a } u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}$

Označíme-li  $m_1 = m$  a

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

**Závislost hmotnosti na rychlosti**



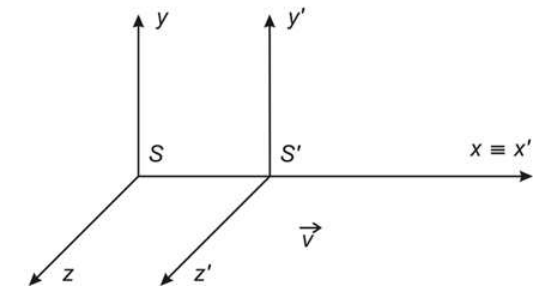
## Relativistická dynamika

**Hybnost** těles v závislosti na jejich rychlosti  $\vec{u}$  v dané vztažné soustavě

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{u}$$

Transformační vztah pro hmotnost při přechodu  $S' \rightarrow S$  (mění se hodnota rychlosti tělesa vůči dané soustavě  $\rightarrow$  mění se hmotnost  $m \rightarrow m'$ )

$$m = m' \frac{1 + \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



# Relativistická dynamika

## Síla (2.NZ)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}$$

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d(m'\vec{u}')}{dt'}$$

Dále

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + m\frac{d(\vec{u})}{dt}$$

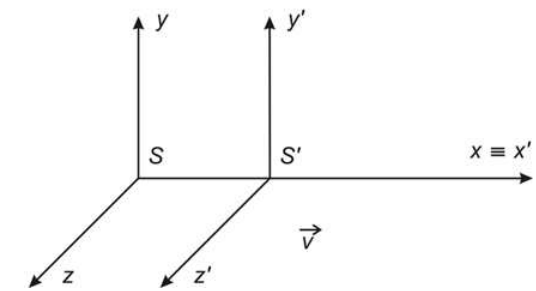
$$\vec{F}' = \frac{dm'}{dt'}\vec{u}' + m'\frac{d(\vec{u}')}{dt'}$$

+ LT

$$F_x = F'_x + \frac{u'_y v}{c^2 + u'_x v} F'_y + \frac{u'_z v}{c^2 + u'_x v} F'_z$$

$$F_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 + u'_x v} F'_y$$

$$F_z = \frac{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 + u'_x v} F'_z$$



## Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

■ Dokonale nepružná srážka dvou stejných částic A, B o klidové hmotnosti  $m_0$

Po spojení klidová hmotnost výsledné částice C  $M_0$

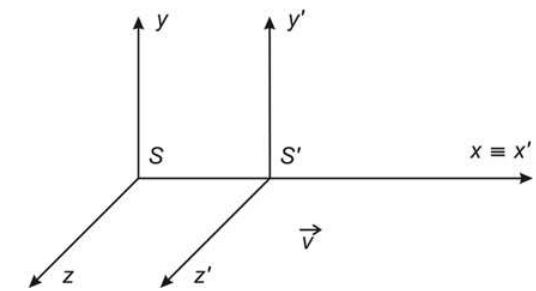
$S^\circ$  soustava v níž je těžiště v klidu, tj.  $u^\circ_A = (u, 0, 0)$   $u^\circ_B = (-u, 0, 0)$

Soustava  $S$  se vůči  $S^\circ$  pohybuje ve směru osy  $x$  rychlostí  $u$ , (tj. s částicí A), pak

$$u_A = 0 \quad u_C = -u \quad u_B = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\text{ZZH v } S \quad 0 + \frac{m_0 u_B}{\sqrt{1 - \frac{u_B^2}{c^2}}} = \frac{M_0 (-u)}{\sqrt{1 - \frac{(-u)^2}{c^2}}} \quad \longrightarrow \quad M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Klidová hmotnost částice C není rovna součtu klidových hmotností částic A, B



## Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

Změna z klidové energie částice se rovná práci vykonané pro urychlení částice

$$A = \vec{F}(\vec{u} dt) \quad \frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \vec{u} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}$$

$$dE_k = \vec{u} d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u}\right) \rightarrow dE_k = \frac{u m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} du$$

Integrujeme  $E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + b$  ← integr. konst. Pro  $u=0$   $E_k=0$  tedy  $b = -m_0 c^2$

Celkem  $E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$

, Rozvoj  $((1-x)^n \approx 1+nx)$   $E_k = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots$  princip korespondence

- $$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

## Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

• Jaký je rozdíl klidových hmotností při dokonale nepružné srážce 2 částic?

$$\Delta m_0 = M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 2m_0 = 2m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{2E_k}{c^2}$$

Na 1 částici je pak změna:

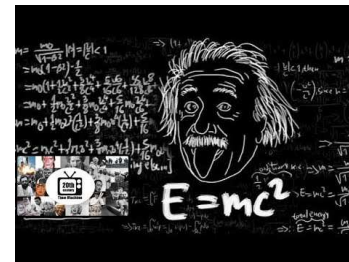
$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E_0}{c^2} \rightarrow$$

Změna vnitřní(klidové) energie vede ke změně klidové hmotnosti částice.

**Klidová hmotnost je mírou klidové energie částice**  $E_0 = m_0 c^2$

**Celková energie je**  $E = E_0 + E_k$

$$E = mc^2$$





$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x}$$

$$m = m' \frac{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m' = \frac{E'}{c^2}$$

## Transformace hybnosti a energie

Pro transformační vztahy vyjdeme z definice veličin a transformačních vztahů vstupujících veličin (ty již známe):

$$p_x = m \cdot u_x = m' \frac{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x} = \frac{m' u'_x + m' v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p'_x + \frac{E' v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p_y = m \cdot u_y = m' \frac{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x} = m' \cdot u'_y = p'_y$$

$$p_z = m \cdot u_z = m' \frac{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x} = m' \cdot u'_z = p'_z$$

$$E = mc^2 = m' \frac{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = \frac{m' c^2 + m' u'_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E' + p'_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Transformuje  
se stejně jako  
 $x, y, z, t$  V LT

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \gamma (x' + vt') = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

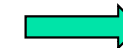
$$y = y,$$

$$z = z.$$

## Transformace hybnosti a energie

Pro transformační vztahy vyjdeme z definice veličin a transformačních vztahů vstupujících veličin (ty již známe):

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{E'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p_y = p'_y \quad p_z = p'_z \quad E = \frac{E' + p'_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Transformuje se stejně jako  $x, y, z, t$  V LT

Protože platí

$$r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2 = \text{invariant}$$

zřejmě platí

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = \text{invariant} = -m_0^2 c^2 \quad (\text{platí i pro částici v klidu})$$

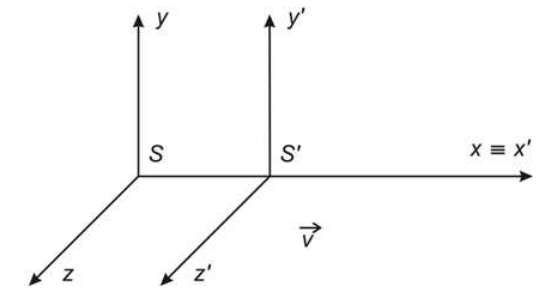
Pravá strana záporná - znamená to:

$$E^2 = c^2 (p^2 + m_0^2 c^2)$$

1.  $p^2 - \frac{E^2}{c^2} < 0$  tj.  $E > cp$  a protože  $u = \frac{p}{m} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{pc^2}{E}$  je  $u < c$

2.  $p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 = -m_0^2 c^2$  tj.  $m_0 = 0$  (fotony)

3.  $p^2 - \frac{E^2}{c^2} > 0$  pak i  $-m_0^2 c^2 > 0$  tj.  $m_0^2 < 0$   $\longrightarrow$   $m_0$  – imaginární  $\longrightarrow$  nelze vyloučit, pak ale  $u > c$  a záporná energie hypotetické částice - tachyony



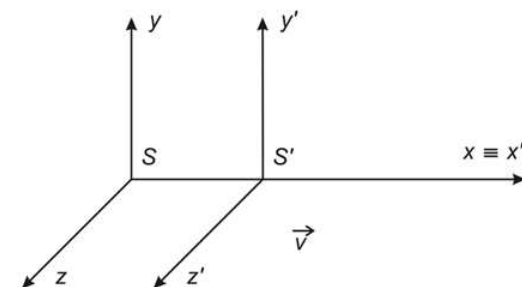
## Relativistická hustota

Objem

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Hmotnost  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Hustota  $\rho = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})}$



## Rovnoměrně zrychlený pohyb

2. NZ v soustavě S:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2} \frac{dE}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{u})$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{u}) \Rightarrow \text{zrychlení částice nemusí mít vždy směr působící síly}$$

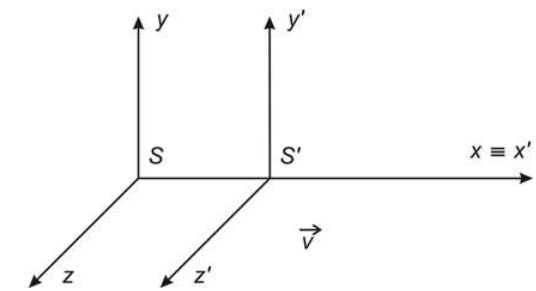
Necht'  $\vec{F} \parallel \vec{u}_0 \parallel x$

Pro jednoduchost dále v  $t=0$   $x=0$   $u_0=0$  a  $F=F_0=\text{konst}$

$$F_0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow d \left( \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{F_0}{m_0} dt = a dt \quad \text{Integrujeme}$$

$$\left( \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = at \Rightarrow u = \left( \frac{at}{\sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \right) = \frac{dx}{dt} \quad \text{Integrujeme}$$

$$x = \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right) \quad \text{pro } (at)^2 \ll c^2 \quad x = \frac{1}{2} at^2; \quad \text{pro } t \rightarrow \infty \quad |u \rightarrow c$$



## Rovnoměrně zrychlený pohyb

Nechť  $\vec{F} \perp \vec{u}_0$  (např. Lorentzova síla  $\vec{F}_L = q(\vec{u} \times \vec{B})$ ) dále necht'  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow E(t) = E_0 \text{ energie se nemění, není práce} \quad \vec{u} = (u_x; u_y; 0)$$

Pohybové rovnice

$$\frac{dp_x}{dt} = qu_y B_z \quad \frac{dp_y}{dt} = -qu_x B_z \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

Navíc  $\vec{p} = m\vec{u} = \frac{E_0}{c^2} \vec{u}$   $p_x = \frac{E_0}{c^2} u_x$   $p_y = \frac{E_0}{c^2} u_y$   $p_z = 0$

Dostáváme

$$\frac{1}{u_y} \frac{du_x}{dt} = \frac{c^2}{E_0} q B_z \quad \frac{1}{u_x} \frac{du_y}{dt} = -\frac{c^2}{E_0} q B_z \quad \text{řešení soustavy dif. rovnic}$$

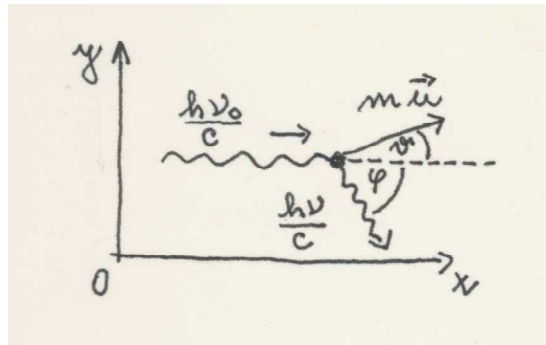
$$u_x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad u_y = -A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{kde } A^2 = u_{\perp}^2 = u_x^2 + u_y^2$$

$$\omega = \frac{c^2 q B_z}{E_0} = \frac{q}{m_0} B_z \Rightarrow \text{kružnice s poloměrem } R = \frac{\omega}{u_{\perp}} \text{ měření parametrů částic}$$

$$x = x_0 + \frac{u_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \quad y = y_0 + \frac{u_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

## Comptonův jev (1923)

Pružná srážka fotonu s klidným a volným elektronem



$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$z z E: m_0 c^2 + h \nu_0 = m c^2 + h \nu$$

$$z z H: x: \frac{h \nu_0}{c} = \frac{h \nu}{c} \cdot \cos \varphi + m u \cdot \cos \theta$$

$$y: 0 = \frac{h \nu}{c} \sin \varphi - m u \sin \theta$$

$$\text{dále: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \varphi)$$

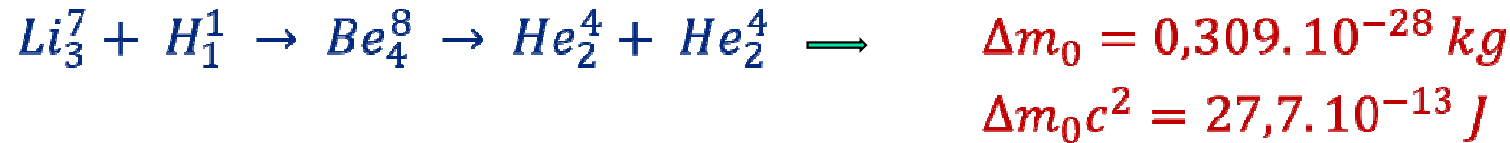
$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \varphi)$$

Při srážce dochází ke změně vlnové délky fotonu,

Tato změna nezávisí na původní , pouze na úhlu vstupního a výstupního svazku.

## Zákon ekvivalence hmotnosti a energie II

1. Experimenty 1932 Cockcroft a Walton – bombardování rychlými protony



Tento výsledek je v souladu s experimentem, kdy se měří  $E_k$  protonu a  $\alpha$  částic.

2. Štěpná reakce

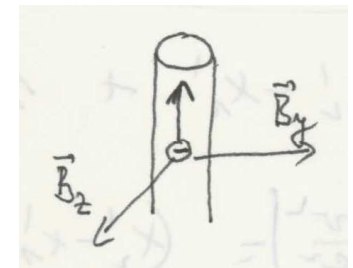


3. Termojaderná fúze  $\longrightarrow$



1 g deuterium + tritium  $\longrightarrow$   $3,1 \cdot 10^5 \text{ MJ}$  (o řád výš než štěpná reakce)

4. Zahřátím 1 kg vody z 0 °C na 100 °C se zvětší její hmotnost cca o  $5 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$ .



## Relativistické důsledky v teorii elmag pole

1. Maxwellovy rovnice jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci
2. Vystupují zde derivace podle času a prostorových proměnných → ty se mění při přechodu  $S \rightarrow S' \rightarrow \vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  se mění, aby byla zachována **invariantnost MR**

→ pole buzené stejnými zdroji se jinak jeví pro pozorovatele v pohyblivé a nepohyblivé soustavě

Např. Biotův-Savartův zákon je důsledkem STR (nelze vysvětlit klasicky)

El. náboje v  $S$  vytvářejí elektrické pole  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

Pozorovatel v  $S'$  registruje i mag. pole  $\vec{B}' = B'_y \vec{j} + B'_z \vec{k}$

$$B'_y = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E_z \quad B'_z = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E_y$$

Tedy element proudovodiče délky  $ds$  protékaný proudem  $I$  budí ve svém okolí i magnetické pole s indukcí  $dB = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2}$  (odvodí se za předpokladu  $v \ll c$   $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ ).

Dozn. Existuje i lev opačný – téměř vytvořená sek. elektrické pole je velmi slabá