Binární relace v množině, vlastnosti binárních relací, ekvivalence, uspořádání - OPAKOVÁNÍ

Binární relace v množině M je libovolná podmnožina kartézského součinu M x M.

Znázornění binárních relací
Kartézský graf relace R – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme druhé složky dvojic. (Obvykle jsou sousední body na obou osách od sebe stejně vzdáleny.) Uspořádanou dvojici $[a,b] \in R$ znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body *a, b* a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.
Uzlový graf relace R v množině M - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny M (pokud bychom znázorňovali relaci z množiny A do množiny B, pak znázorníme všechny prvky sjednocení množina A a B). Uspořádanou dvojici $[a,b] \in R$ znázorníme pomocí šipky (tzv.orientované hrany), která vychází z uzlu *a* a směřuje do uzlu *b*. V případě, že $a = b$, nazýváme šipku smyčkou. Pokud jsou v relaci R dvojice $[a,b]$ a $[b,a]$, znázorníme je "dvojšipkou" (tzv. neorientovanou hranou).

Vlastnosti relací v množině M

Binární relace R v množině M je **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in M)([x,x] \in R)$,
tzn. obsahuje všechny uspořádané dvojice [x,x], kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **antireflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in M)([x,x] \notin R)$,
tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu [x,x], kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **symetrická** právě tehdy, když
$$(\forall x,y \in M)([x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R),$$
tzn. s každou uspořádanou dvojicí [x,y] obsahuje i dvojici ([y,x].

Binární relace R v množině M je **antisymetrická**, právě tehdy, když
$$(\forall x,y \in M)((x \neq y \wedge [x,y] \in R) \Rightarrow [y,x] \notin R),$$
tzn. s žádnou dvojicí [x,y] různých prvků neobsahuje dvojici [y,x].

Binární relace R v množině M je **tranzitivní** právě tehdy, když
$$(\forall x,y,z \in M)(([x,y] \in R \wedge ([y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R),$$
tzn. jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice" (tj. druhá složka první dvojice je první složkou druhé dvojice), pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice.

Binární relace R v množině M je **souvislá** právě tehdy, když
$$(\forall x,y \in M)(x \neq y \Rightarrow ([x,y] \in R \vee [y,x] \in R),$$
tzn. každé dva různé prvky z množiny M musí být „spolu v relaci".

Binární relaci U v množině M nazýváme

- **(částečné) uspořádání v M**, právě když je relace antisymetrická a tranzitivní;
- **lineární uspořádání v M**, právě když je relace antisymetrická, tranzitivní a souvislá;
- **ostré lineární uspořádání** v M, právě když je antisymetrická, tranzitivní, souvislá a antireflexivní.

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M**,** právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.
Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Úkoly k procvičení
1. Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině M = {a, b, c, d}
R_1 = {[c,b], [b,c], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]}
R_2 = {[a,b], [c,d], [a,a], [b,b]}
R_3 = {[a,b], [d,c],[b,d],[a,c], [a,d], [b,c]}
R_4 = {[c,b], [b,c],[b,a]}
R_5 = {[a,a], [b,b], [c,c], [c,b], [b,c],[b,a],[a,b],[a,c], [c,a], [d,d]}
R_6 = {[c,a], [d,b]}
R_7 = {[a,a]}

2. Zapište aspoň jednu neprázdnou binární relaci v množině A = {1, 2, 3}, která je
a) reflexivní b) symetrická c) tranzitivní d) antireflexivní
e) antisymetrická f) souvislá g) symetrická a není tranzitivní
V každém případě určete, jaké další vlastnosti má zvolená relace.

3. Rozhodněte (jen na základě úvahy) o vlastnostech alespoň pěti z následujících relací zadaných charakteristickou vlastností:
a) rovnost v množině přirozených čísel R = $\{[x,y] \in NxN; x = y]\}$
b) relace „být menší“ v množině přirozených čísel tj. R = $\{[x,y] \in NxN; x < y]\}$
c) relace „být podmnožinou“ na systému množin
d) kolmost přímek v množině všech přímek roviny
e) rovnoběžnost přímek v množině všech přímek roviny
f) shodnost úseček v množině všech úseček roviny
g) relace „být sourozencem“ v množině lidí
h) relace „být otcem“ ve vaší rodině
i) relace „narodit se ve stejném měsíci“ v množině lidí v této místnosti
j) relace „dávat stejný zbytek při dělení číslem 3“ v množině přirozených čísel.

Pokud je některá z výše uvedených relací relace ekvivalence, určete příslušný rozklad množiny.

Uvažujte další relace a určujte jejich vlastnosti.