Kartézský součin množin, binární relace, zobrazení - opakování

Kartézský součin množin A, B je množina, ozn. **A x B**, která se skládá ze všech uspořádaných dvojic, jejichž první složkou je prvek množiny A a druhou složkou prvek množiny B.

Binární relace z množiny A do množiny B je kterákoliv množina R, která je podmnožinou kartézského součinu A x B.

(Pokud A = B, pak mluvíme o **binární relaci v množině A** – a jde o libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x A.
Doplňková relace R´ k relaci R v množině A je množina všech uspořádaných dvojic z AxA, které nepatří do relace R, tj. R´= (AxA) – R.
Inverzní relace R^{-1} k relaci R v množině A je relace $R^{-1} = \{[x,y] \in AxA;\ [y,x] \in R\}$)

První obor relace $O_1(R)$ je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.
Druhý obor relace $O_2(R)$ je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením z A do B**, právě když ke každému prvek $a \in$ A existuje nejvýše jeden prvek b $\in$ B takový, že platí $[a,b] \in$ R.
(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)
Jestliže $[a,b] \in$ R, pak prvek ***a*** nazýváme **vzorem** prvku *b* a prvek ***b*** **obrazem** prvku *a* v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku *a* prvek *b*).

Příklad:
Jsou dány množiny A, B: A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které z binárních relací R_1 - R_5 jsou zobrazení z A do B.
R_1 = {[a,1], [b,2], [d,3]} - je zobrazení
R_2 = {[a,2], [c,1], [a,3], [b,3]} - není zobrazení - prvek *a* je 1. složkou ve dvou dvojicích
R_3 = {[a,1], [b,2],[c, 3] [d,1]} - je zobrazení
R_4 = {[b,3]} - je zobrazení
R_5 = {[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]} - je zobrazení

Typy zobrazení:

Podle toho, jaký je vztah mezi prvním oborem relace R a množinou A a druhým oborem relace R a množinou B, rozlišujeme:

zobrazení celé množiny A na necelou množinu B, je-li $O_1(R) = A$ a $O_2(R) \neq B$,
(tzn. každý prvek z A je vzorem a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A),

zobrazení necelé množiny A na celou množinu B, je-li $O_1(R) \neq A$ a $O_2(R) = B$,
(tzn.v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

zobrazení necelé množiny A na necelou množinu B, je-li $O_1(R) \neq A$ a $O_2(R) \neq B$,
(tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A)

zobrazení celé množiny A na celou množinu B, je-li $O_1(R) = A$ a $O_2(R) = B$.
(tzn. každý prvek z A je vzorem a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

Každé z uvedených typů zobrazení může být navíc **prosté zobrazení**:

Zobrazení R z A do B se nazývá **prosté**, právě když každé dva různé vzory mají různé obrazy. (Jinak řečeno: Zobrazení je prosté, právě když relace inverzní R^{-1} je zobrazením z B do A.)

Prosté zobrazení celé množiny na celou množinu se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Říkáme, že dvě **množiny** A, B jsou **ekvivalentní (A ~ B),** právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení (=vzájemně jednoznačné zobrazení) jedné z těchto množin na druhou.

Cvičení:

1. Rozhodněte přesně o typu jednotlivých zobrazení ve výše uvedeném příkladu včetně toho, zda jsou prostá .

2. Zapište několik zobrazení z množiny M do množiny N tak, abyste na nich mohli ilustrovat jednotlivé typy zobrazení. M = {1, 2, 3, 4, 5}, N = {x, y, z, u, v}.

3. Uvažujte množinu všech cestujících v jisté tramvaji, množinu všech sedadel v této tramvaji a binární relaci určenou vztahem „Osoba X sedí na sedadle Y". Přemýšlejte o různých situacích v této tramvaji (např. Každý cestující sedí na jednom sedadle a ještě jsou dvě místa volná.) a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny cestujících do množiny sedadel. Pokud ano, určete přesně typ tohoto zobrazení.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z množin ve výše uvedeném textu ekvivalentní?

5. Zdůvodněte, že množina N všech přirozených čísel N = {1, 2, 3, 4, ... } je ekvivalentní s množinou S všech sudých čísel S = {2, 4, 6, ... } a množinou všech desetinásobků přirozených čísel D = {10, 20, 30, ... }.
(návod: Je potřeba najít prosté zobrazení množiny N na množinu S a na množinu D.

Připoměňte si: Množina je **nekonečná**, právě když je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou.

Ve cvičení 5 jste tedy zdůvodnili nekonečnost množiny všech přirozených čísel. Množina N je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou ($N \sim S$, $S \subset N$, $S \neq N$).